

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

**Le funzioni Gamma di Eulero e Zeta di Riemann e il
loro utilizzo nel calcolo dell'azione efficace di un
campo scalare**

Relatore:

Prof. Alexandre Kamenchtchik

Presentata da:

Max Leopold Frisch Sbarra

Anno Accademico 2017/2018

Dedico questa tesi ai miei genitori Karin e Vincenzo, ai miei fratelli Hans e Giosuè, ai miei amici e compagni di corso Alessandro ed Andrea, e alla mia ragazza Francesca.

Abstract

Lo scopo di questa tesi è introdurre le due funzioni speciali, la Gamma di Eulero e la Zeta di Riemann, per poter successivamente impiegarle in un contesto della fisica.

Il percorso porta, una volta trattate le due funzioni, a descrivere l'integrale sui cammini di Feynmann e l'oscillatore armonico forzato quantomeccanico, attraverso cui è possibile introdurre l'azione efficace. Una volta introdotta l'azione efficace viene accennata la teoria classica dei campi, per poi poter calcolare l'azione efficace di un campo scalare. Il calcolo di quest'ultima sarà ridotto formalmente al calcolo di un determinante funzionale, ed è qui dove entrano in gioco le funzioni trattate all'inizio del percorso, che permettono di regolarizzare un risultato altrimenti divergente.

In conclusione, dopo aver trovato un metodo per poter calcolare l'azione efficace di un campo scalare si compie l'operazione che sta alla base di esso, ossia calcolare l'operatore nucleo dell'equazione del calore dell'operatore il cui determinante porta all'azione efficace.

Introduzione

Nella prima parte sono trattate le due funzioni speciali la Gamma di Eulero e la Zeta Riemann, due funzioni di grande importanza nella matematica.

Di seguito, con lo scopo di poter introdurre successivamente un oggetto molto importante quale l'azione efficace, ci si dedica prima ad una descrizione alternativa di un sistema quantistico che è l'integrale sui cammini di Feynmann, calcolando il propagatore espresso come integrale sui cammini di un sistema ad un grado di libertà nel caso di un Hamiltoniano in particolare, e poi al problema dell'oscillatore armonico forzato quantomeccanico. In entrambi i casi si richiamano ma non vengono ricavati ab initio i risultati della meccanica quantistica. Viene usato, sia in questo caso che anche nel resto del percorso, il formalismo di Dirac, mostrando le sue potenzialità.

Arrivato a questo punto è possibile definire l'azione efficace come funzionale.

Successivamente, con lo scopo di poter trattare l'azione efficace di campo scalare viene accennata la teoria classica di un campo e in particolare l'azione di un campo classico da cui è possibile ricavare le sue equazioni del moto. Introducendo poi un'azione di un campo scalare con sfondo gravitazionale si prosegue nell'impostare il problema del suo calcolo.

Per prima cosa viene risolto in modo euristico il problema di quale misura impiegare nel caso di un campo scalare nella definizione dell'azione efficace, poi viene impostato il problema per il calcolo dell'azione efficace del campo. Grazie alla definizione della misura stessa si può scrivere formalmente l'azione efficace in funzione del determinante di un operatore, che necessita di essere regolarizzato e rinormalizzato. Il passaggio successivo è quello di far vedere che il problema agli autovalori dell'operatore, il cui determinante porta all'azione efficace, è uguale ad un problema agli autovalori di un altro operatore in uno spazio di Hilbert ausiliare in cui si troveranno autovettori normalizzati.

Arrivati a questo punto si arriva a definire la funzione Zeta che non è da confondersi con la Zeta di Riemann ma è alquanto simile. Attraverso questa, viene trovato un metodo per regolarizzare il determinante funzionale, trovando che esso è in relazione con la derivata della funzione di Zeta fatta nel punto zero, ed essendo essa regolare in zero la sua derivata è finita.

Si conclude la ricerca dell'azione efficace con l'introduzione dell'operatore nucleo dell'equazione del calore grazie a cui il problema può essere risolto risolvendo un'equazione differenziale

nota. Nei passaggi che portano a questa conclusione viene usata la Gamma di Eulero in concomitanza a calcoli che hanno portato alla definizione integrale della Zeta di Riemann, fatti ad inizio di questo percorso.

Si conclude, infine, il penultimo capitolo ricavando una ricetta per poter calcolare l'azione efficace. Il punto di partenza di questa ricetta è calcolare la traccia dell'operatore nucleo dell'equazione del calore, cosa che verrà fatta nel capitolo finale.

Si conclude il percorso dedicandosi al calcolo della traccia dell'operatore nucleo dell'equazione del calore dell'operatore il cui determinante funzionale porta all'azione efficace. Questo viene fatto in modo perturbativo trovando che l'operatore in questione può essere scritto come l'operatore $-\square$ più un altro operatore. Questo operatore viene considerato come "piccolo" e quindi si calcola perturbativamente la traccia fermandosi al primo ordine.

C'è da far notare che si è parlato sempre di azione efficace anche se in verità si tratta dell'azione efficace così detta euclidea. Il passaggio dall'azione euclidea a quella efficace, se vogliamo lorentziana, avviene attraverso la continuazione analitica del tempo euclideo puramente immaginario a quello reale fisico. Il motivo per cui si ha a che fare con quella euclidea sta nel modo in cui essa è stata introdotta, attraverso integrali sui cammini. Quello che è avvenuto prima è la continuazione analitica dal tempo reale a quello puramente immaginario, per via di rigore matematico, nella trattazione dell'integrale sui cammini. Questo metodo di continuare analiticamente il tempo è detto rotazione di Wick.

Contents

Introduzione	i
1 La funzione Gamma di Eulero e la funzione Zeta di Riemann	1
1.1 La funzione Gamma di Eulero	1
1.2 La Zeta di Riemann	4
2 L'integrale sui cammini di Feynmann	7
2.1 Il propagatore	7
2.2 Il propagatore come integrale sui cammini	8
2.3 Propagatore della particella libera	11
2.4 La rotazione di Wick e l'integrale sui cammini di un oscillatore armonico	12
2.5 Lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico espresso come integrale sui cammini	15
3 Azione efficace	17
3.1 Oscillatore armonico forzato	17
3.2 Introduzione all'azione efficace	22
3.3 L'Azione nella teoria classica dei campi	24
3.4 L'azione euclidea di un campo scalare	25
3.5 Azione efficace di un campo scalare	26
3.6 Problema agli autovalori	27
3.7 La funzione Zeta per il calcolo del determinante funzionale	29
3.8 Nucleo dell'equazione di calore	30
4 Calcolo della traccia dell'operatore nucleo dell'equazione del calore	32
4.1 L'operatore \hat{O} in funzione dell'operatore \square	32
4.2 Soluzione perturbativa del nucleo di calore	34
4.3 Gli elementi matriciali	36
4.4 La Traccia	39
Conclusioni	40

Appendix A	Calcolo di integrali Gaussiani	41
A.1	Primo integrale	41
A.2	Secondo integrale	42
A.3	Terzo integrale	42
Appendix B	Calcolo dell'elemento matriciale $\langle p q\rangle$	44
B.1	L'elemento matriciale $\langle q_1 \hat{p} q_2\rangle$	44
B.2	L'elemento matriciale $\langle p q\rangle$	45
Bibliografia		47

Chapter 1

La funzione Gamma di Eulero e la funzione Zeta di Riemann

La funzione Gamma di Eulero e la funzione Zeta di Riemann sono due funzioni speciali di grande importanza per la matematica e come si vedrà hanno un ruolo importante nel loro utilizzo nella fisica. In questo capitolo verranno definite le due funzioni e verranno introdotte e dimostrate alcune proprietà importanti delle due funzioni.

1.1 La funzione Gamma di Eulero

La funzione Gamma di Eulero fu riscontrata la prima volta nel 1729¹. In quell'epoca si pensava che il fattoriale fosse esprimibile in termini di semplici quantità algebriche. Fu Eulero a dimostrare che ciò non era possibile e derivò una formula per il fattoriale

$$n! = \int_0^1 (-\ln t)^n dt$$

dove n è un numero intero non negativo. Questo integrale può essere esteso ai numeri complessi e essere riscritto nella forma

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{z-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (1.1.1)$$

La seconda delle due espressioni integrali è oggi giorno la più familiare. Il motivo per cui è definita solo per una parte reale di z positiva sarà evidente dopo le giuste considerazioni. Ora se si prende la seconda espressione della (1.1.1) e si integra per parti si ottiene

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = \frac{\Gamma(1+z)}{z}. \quad (1.1.2)$$

¹1, pp. 41.

Integrando una seconda volta per parti si ottiene

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z(z+1)} \int_0^\infty e^{-t} t^{z+1} dt = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)}.$$

Ripetendo altre $n-2$ volte, dove n è un intero positivo, si ottiene

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)}, \quad (1.1.3)$$

o

$$\Gamma(z+n) = z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)\Gamma(z). \quad (1.1.4)$$

Guardando la (1.1.2) e la (1.1.3) si può vedere il motivo per cui è stato necessario richiedere nella definizione della $\Gamma(z)$ che $\operatorname{Re} z > 0$. Vediamo nella (1.1.2) che ha un punto singolare in $z=0$, nella (1.1.3) altre singolarità in $z = -1, -2, \dots, n-1$. Che queste singolarità sono isolate e le uniche diventerà evidente una volta introdotta una seconda e terza definizione della Gamma di Eulero.

Invece tenendo presente che $\Gamma(1) = 1$ si ottiene

$$\Gamma(n+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!,$$

dimostrando che è in effetti una formula per il fattoriale.

Ora la funzione $\Gamma(z)$ può essere definita anche nei due seguenti modi

$$\Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{n^z}{z(z+1)(1+\frac{z}{2})\dots(1+\frac{z}{n})}, \quad (1.1.5)$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right], \quad (1.1.6)$$

dove

$$\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^m \frac{1}{n} - \ln m \right) = 0.5772156649\dots \quad (1.1.7)$$

e la costante di Eulero o di Mascheroni. Queste due definizioni sono da attribuire a Gauss²(con notazione leggermente diversa) e a Weierstrass³, (1.1.5) e (1.1.6) rispettivamente. Un'altra curiosità è che fu Legendre nel 1809 a introdurre il nome Gamma di Eulero.

²2, pp.1.

³2, pp.1.

Ora prima di dimostrare l'equivalenza tra le tre definizioni, si può notare da queste ultime due che la Gamma di Eulero è una funzione analitica ovunque a parte le sue uniche singolarità isolate in, che come già accennato, $z=0,-1,-2,\dots$

Per valutare le singolarità si usa la (1.1.1) definizione ottenendo

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = P(z) + Q(z), \quad (1.1.8)$$

Ora e^{-t} può esser espanso in serie e otteniamo quindi per

$$P(z) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+z-1}}{n!} dt, \quad (1.1.9)$$

nel dominio prescelto si può scambiare limite ed integrazione e quindi se si porta il limite fuori dal segno di integrale e si ottiene

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [n!(z+n)]^{-1}. \quad (1.1.10)$$

La funzione ha quindi poli semplici in $z = -n$, con $n = 0, 1, 2, \dots$, con residuo di $\Gamma(z)$ calcolabile col la formula generale per i residui,

$$Res \Gamma(z)|_{z=-n} = \lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Preso atto di questo, risulta chiaro che quindi oltre alla regione di analiticità $Re z > 0$ è possibile continuare analiticamente la funzione Gamma di Eulero in tutta le regioni intermedie ai poli semplici calcolati, cioè nelle regioni $-1 < Re z < 0$, $-2 < Re z < -1$, ..., $-n < Re z < -n+1$...

La continuazione analitica può essere ottenuta nel seguente modo. Usando la proprietà (1.1.2) si definisce $\Gamma(z)$ per $Re z > -1$ come

$$\Gamma(z) \equiv \frac{\Gamma(z)}{z}, \quad Re z > -1,$$

dove $z=0$ è un polo di $\Gamma(z)$. Si può definire quindi la $\Gamma(z)$ per $Re z > -2$ come

$$\Gamma(z) \equiv \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)}, \quad Re z > -2,$$

dove $z = -1$ è un polo di $\Gamma(z)$. Si può iterare questo procedimento per $Re z > -3$, $Re z > -4, \dots$, e la funzione $\Gamma(z)$ avrà poli in $z=0, -1, -2, \dots$. Si è ottenuto quindi una funzione analitica che coincide con la definizione (1.1.1) quando $Re z > 0$.

Ora si viene alla dimostrazione dell'equivalenza delle tre definizioni. Per dimostrare

l'equivalenza tra la prima incontrata (1.1.1) e la (1.1.5) basta osservare che l'espressione integrale $\int_0^\infty (1 - \frac{t}{n})^n t^{z-1} dt$ integrata per parti ripetutamente è uguale ad $\frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}$ e quindi si ottiene

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\infty (1 - \frac{t}{n})^n t^{z-1} dt = \int_1^\infty e^{-nt} t^{z-1} dt = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)},$$

che vale per il Teorema di Tannery. Dimostrando così l'equivalenza tra la (1.1.1) e (1.1.5). Ora per dimostrare la l'equivalenza tra (1.1.5) e (1.1.6) basta osservare che

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)} &= \lim_{m \rightarrow \infty} z(z+1)(1 + \frac{z}{2}) \cdots (1 + \frac{z}{n}) e^{-z \ln n} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} [z(z+1)e^{-z}(1 + \frac{z}{2})e^{-\frac{z}{2}} \cdots (1 + \frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}} \\ &\quad \times z^{(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n)}], \end{aligned}$$

e ricordando la definizione della costante di Eulero o Mascheroni, equazione (1.1.7), è facile vedere che quindi l'equazione precedente diventa

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^\infty [(1 + \frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}],$$

che dimostra quanto richiesto.

1.2 La Zeta di Riemann

Il modo più comune per definire la Zeta di Riemann è il seguente

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} \tag{1.2.1}$$

dove n corre tra tutti numeri interi da 1 all'infinito ed s è denota una variabile complessa, $s = \sigma + it$, con σ e t sono numeri reali. La serie di Dirichlet della (1.2.1) è convergente per $\sigma > 1$. Per dimostrare quest'affermazione basta notare che

$$\left| \frac{1}{n^s} \right| = \frac{1}{|e^{s \log n}|} = \frac{1}{n^\sigma}.$$

Per cui si ottiene

$$\sum_{i=1}^\infty \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{n^\sigma},$$

una serie ben nota dall'analisi matematica, che converge quando $\sigma > 1$. Implicando la convergenza in modulo la convergenza si è dimostrato l'affermazione.

Una definizione alternativa della funzione Zeta di Riemann è data da

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}, \quad (1.2.2)$$

dove p corre tra tutti numeri primi. Questa definizione contiene il noto prodotto di Eulero, a cui era nota la funzione Zeta, però fu Riemann a trattarla nel piano complesso e ha scoprire tante proprietà oggi note. Per dimostrare che in effetti sia una sua definizione è bene ricordare il teorema fondamentale dell'aritmetica che ci dice che ogni numero intero è esprimibile come prodotto di potenze di numeri primi p^k e questa rappresentazione è unica. Inoltre quando $\sigma > 1$ è lecito esprimere il fattore $(1 - p^{-s})^{-1}$ come serie geometrica e quindi si ottiene

$$\prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots\right).$$

Da cui segue l'uguaglianza

$$\prod_{p \leq P} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots\right) = \frac{1}{n_1^s} + \frac{1}{n_2^s} + \dots,$$

dove n_1^s, n_2^s, \dots sono numeri interi di cui nessuno dei loro fattori primi eccedono P . Usando infine la definizione (1.2.1) si ottiene

$$\begin{aligned} \left| \zeta(s) - \prod_{p \leq P} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots\right) \right| &= \left| \zeta(s) - \frac{1}{n_1^s} - \frac{1}{n_2^s} - \dots \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{(P+1)^s} + \frac{1}{(P+2)^s} \dots \right| \leq \frac{1}{(P+1)^\sigma} + \frac{1}{(P+2)^\sigma} + \dots, \end{aligned}$$

e quando $P \rightarrow \infty$ l'ultima espressione tende a zero, se $\sigma > 1$.

Si introduce ora una rappresentazione integrale della funzione Zeta di Riemann che coinvolge anche la funzione Gamma di Eulero vista nella sezione 1.1. I calcoli che portano a questa rappresentazione verranno riutati in capitoli successivi a questo in un contesto fisico dove verrà trattata un funzione zeta diversa. Ricordando la prima definizione della Gamma di Eulero, (1.1.1), incontrata si ottiene facendo un cambiamento di variabile

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt = n^s \int_0^\infty e^{-nt'} t^{s-1} dt',$$

dove n è un numero intero positivo. Per cui

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \sum_{i=1}^\infty \int_0^\infty e^{-nt} t^{s-1} dt = \int_0^\infty \sum_{i=1}^\infty e^{-nt} t^{s-1},$$

e infine si ottiene

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt. \quad (1.2.3)$$

Lo scambio sommatoria e integrazione è lecito grazie alla convergenza in modulo quando $\sigma > 1$, in effetti

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^\infty |e^{-nt} t^{s-1}| dt = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-nt} t^{\sigma-1} dt = \Gamma(\sigma) \zeta(\sigma) < \infty.$$

Chapter 2

L'integrale sui cammini di Feynmann

Una descrizione alternativa di un sistema quantistico è quella dei integrali sui cammini sviluppata da Feynmann, che sarà introdotto in questo capitolo. Scopo di questa trattazione è poter introdurre l'azione efficace nel Capitolo 3.

2.1 Il propagatore

Come noto dalla meccanica quantistica l'evoluzione temporale di un sistema può essere descritto nella rappresentazione di Schrödinger. Il ket $|\psi(t)\rangle$ obbedisce l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi(t)\rangle,$$

dove il ket $|\psi(t)\rangle$ al tempo t è ottenuto dal ket $|\psi(t_0)\rangle$ al tempo t_0 tramite l'operatore unitario \hat{U} , detto operatore di evoluzione temporale

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi_0\rangle, \quad \forall t, t_0.$$

Nella base dello spazio delle coordinate uno stato $|\psi(t)\rangle$ è descritto da

$$\psi(q, t) = \langle q | \psi \rangle = \langle q | \hat{U}(t, t_0) | \psi_0 \rangle,$$

ora se t_0 è il tempo di uno stato iniziale e $\psi(q, t)$ la funzione d'onda allo stato iniziale si ha, usando la relazione di completezza dell'operatore di identità $\hat{I} = \int Dq |q\rangle \langle q|$, che per $t > 0$

$$\begin{aligned}
\psi(q, t) &= \langle q | \psi \rangle = \langle q | \hat{U}(t, t_0) | \psi_0 \rangle = \langle q | \hat{U}(t, t_0) \left(\int Dq_0 |q_0\rangle \langle q_0| \right) | \psi(t_0) \rangle \\
&\equiv \int Dq_0 K(q, q_0; t, t_0) \psi(q_0, t_0),
\end{aligned} \tag{2.1.1}$$

dove

$$K(q, q_0; t, t_0) \equiv \langle q | \hat{U}(t, t_0) | q_0 \rangle,$$

è un elemento matriciale detto il propagatore, che descrive l'ampiezza quanto meccanica della transizione da uno stato iniziale $|q_0\rangle$ al tempo t_0 allo stato $|q\rangle$ al tempo t .

C'è da notare che la misura qui incontrata Dq per un sistema con N gradi di libertà è $Dq = dq_1 \dots dq_N$.

2.2 Il propagatore come integrale sui cammini

Al fine di ottenere il propagatore espresso come integrale sui cammini si prenderà in considerazione un sistema unidimensionale di cui si calcola il propagatore $K(q_f, q_0; t_f, t_0) = \langle q_f | \hat{U}(t_f, t_0) | q_0 \rangle$.

Si parte nel dividere l'intervallo temporale $[t_0, t_f]$ in $N+1$ intervalli $[t_0, t_1], \dots, [t_k, t_{k+1}], \dots, [t_N, t_f]$. Ricordando un'importante proprietà dell'operatore $\hat{U}(t, t_0)$ nota dalla teoria della meccanica quantistica

$$\hat{U}(t_1, t_2) \hat{U}(t_2, t_3) = \hat{U}(t_1, t_3),$$

si ottiene per l'intervallo temporale $[t_0, t_f]$

$$\hat{U}(t_f, t_0) = \hat{U}(t_f, t_N) \hat{U}(t_N, t_0) = \prod_{k=0}^N \hat{U}(t_{k+1}, t_k),$$

dove $t_{N+1} = t_f$. Di conseguenza il propagatore può essere riscritto come

$$K(q_f, q_0; t_f, t_0) = \langle q_f | \prod_{k=0}^N \hat{U}(t_{k+1}, t_k) | q_0 \rangle, \tag{2.2.1}$$

che a sua volta può essere riscritto come

$$\begin{aligned}
K(q_f, q_0; t_f, t_0) &= \langle q_f | \prod_{k=0}^N \hat{U}(t_{k+1}, t_k) | q_0 \rangle \\
&= \langle q_f | \hat{U}(t_{N+1}) \left[\int dq_N |q_N\rangle \langle q_N| \right] \hat{U}(t_N, t_{N-1}) \\
&\dots \left[\int dq_{k+1} |q_{k+1}\rangle \langle q_{k+1}| \right] \hat{U}(t_{k+1}, t_k) \left[\int dq_k |q_k\rangle \langle q_k| \right] \\
&\dots \left[\int dq_1 |q_1\rangle \langle q_1| \right] \hat{U}(t_1, t_0) | q_0 \rangle,
\end{aligned}$$

dove è stata usata N volte la relazione di completezza dell'operatore identità. Si è quindi ottenuto

$$K(q_f, q_0; t_f, t_0) = \int dq_N dq_{N-1} \dots dq_1 \left(\prod_{k=0}^N K(q_{k+1} q_k; t_{k+1}, t_k) \right), \quad (2.2.2)$$

con

$$K(q_{k+1} q_k; t_{k+1}, t_k) = \langle q_{k+1} | \hat{U}(t_{k+1}, t_k) | q_k \rangle.$$

Nel caso in cui si ha che fare con un Hamiltoniano \hat{H} indipendente dal tempo l'operatore di evoluzione temporale è $\hat{U}(t_{k+1}, t_k) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (t_{k+1} - t_k) \hat{H} \right]$. Espandendo quest'ultimo in serie si ottiene

$$\hat{U}(t_{k+1} t_k) = 1 - \frac{i}{\hbar} \Delta t_k \hat{H} + o(\Delta t_k^2), \quad (2.2.3)$$

dove $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, e quindi

$$K(q_{k+1} q_k; t_{k+1}, t_k) = \langle q_{k+1} | (1 - \frac{i}{\hbar} \hat{H} \Delta t_k) | q_k \rangle + o(\Delta t_k^2). \quad (2.2.4)$$

Ora l'elemento matriciale $\langle q_{k+1} | \hat{H} | q_k \rangle$ può essere riscritto nel modo seguente

$$\langle q_{k+1} | \hat{H} | q_k \rangle = \int dp_k \langle q_{k+1} | p_k \rangle \langle p_k | \hat{H} | q_k \rangle,$$

dove si è usato l'identità nella base dei momenti. Usando la (B.2.4) dell'Appendice B si ottiene

$$\langle q_{k+1} | p_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp \left(\frac{ip_k q_{k+1}}{\hbar} \right),$$

e per trovare il l'elemento matriciale $\langle p_k | \hat{H} | q_k \rangle$ si può riordinare gli operatori \hat{p} che compaiono nel Hamiltoniano e spostarli tutti a sinistra in modo tale da poter riscrivere come

$$\hat{H} = \sum_J f_J(\hat{p}) g_J(\hat{q}).$$

Questo può essere fatto usando la relazione di commutazione $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \hat{I}$. Si ottiene dunque

$$\begin{aligned} \langle p_k | \hat{H} | q_k \rangle &= \left(\sum_J f_J(\hat{p}) g_J(\hat{q}) \right) \times \langle p_k | q_k \rangle \equiv H(p_k, q_k) \langle p_k | p_k \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} H(p_k, q_k) \exp\left(\frac{-ip_k q_k}{\hbar}\right). \end{aligned}$$

Il Propagatore (2.2.4) allora può essere riscritto come

$$\begin{aligned} K(q_{k+1}, q_k; t_{k+1}, t_k) &= \int \frac{dp_k}{2\pi\hbar} \left[1 - \frac{i\Delta t_k}{\hbar} H(p_k, q_k) + o(\Delta t_k^2) \right] \exp\left[\frac{ip_k}{\hbar}(q^{k+1} - q_k)\right] \\ &= \int \frac{dp_k}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i\Delta t_k}{\hbar} \left(p_k \frac{q_{k+1} - q_k}{\Delta t_k} - H(p_k, q_k) + o(\Delta t_k^2) \right)\right]. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Consideriamo ora questo risultato generale nel caso di un Hamiltoniano del tipo

$$\hat{H}(\hat{p}, \hat{q}) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}), \quad (2.2.6)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} K(q_{k+1}, q_k; t_{k+1}, t_k) &= \int \frac{dp_k}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i\Delta t_k}{\hbar} \left(p_k \frac{(q_{k+1} - q_k)}{\Delta t_k} - \frac{p_k^2}{2m} - V(q_k) \right) + o(\Delta t_k^2) \right]. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Questo è un integrale di tipo Gaussiano e può essere calcolato con la formula (A.1.3) dimostrata nell'Appendice A. Si ottiene usando quest'ultima

$$\begin{aligned} K(q_{k+1}, q_k; t_{k+1}, t_k) &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t_k}} \exp\left[\frac{i\Delta t_k}{\hbar} \left(m \frac{(q_{k+1} - q_k)^2}{2\Delta t_k} - V(q_k) \right) + o(\Delta t_k^2) \right]. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Ora inserendo questo risultato in (2.2.2), si ottiene

$$K(q_f, q_0; t_f, t_0) = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi i \hbar m^{-1} \Delta t_0}} \prod_{k=1}^N \frac{dq_k}{\sqrt{2\pi i \hbar m^{-1} \Delta t_k}} \times \exp \left[\sum_{k=0}^N \left(m \frac{(q_{k+1} - q_k)^2}{\Delta t_k} - V(q_k) \right) + o(\Delta t_k^2) \right], \quad (2.2.9)$$

facendo il limite per $N \rightarrow \infty$ e $\Delta t_k \rightarrow 0$ l'argomento dell'esponenziale in (2.2.9) può essere valutato come

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \left[\left(m \frac{(q_{k+1} - q_k)^2}{\Delta t_k} - V(q_k) \right) \frac{i \Delta t_k}{\hbar} + o(\Delta t_k^2) \right] = \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{m \dot{q}^2}{2} - V(q) \right) dt = \frac{iS}{\hbar}, \quad (2.2.10)$$

dove S è l'azione e le correzioni quadratiche $o(\Delta t_k^2)$ vanno zero quando $N \rightarrow \infty$, come si può vedere considerando intervalli equi distanziati $\Delta t = \frac{t_f - t_0}{N+1}$, si ha

$$\sum_{k=0}^N o(\delta t_k^2) \sim N \Delta t^2 = N \frac{(t_f - t_0)^2}{(N+1)^2} \rightarrow 0, \text{ quando } N \rightarrow \infty.$$

Ora si introduce la misura simbolica

$$\mathcal{D}q = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi i \hbar m^{-1} \Delta t_0}} \prod_{k=1}^N \frac{dq_k}{\sqrt{2\pi i \hbar m^{-1} \Delta t_k}},$$

e si deve tenere con che le integrazioni nella (2.2.9) dopo il passaggio al limite diventano integrali su uno spazio di funzioni. Questo tipo di integrale viene dominato integrale funzionale o integrale di cammino. Possiamo infine riscrivere il propagatore (2.2.9) come

$$K(q_f, q_0; t_f, t_0) = \int_{q(t_0)=q_0}^{q(t_f)=q_f} \mathcal{D}q \exp \left(\frac{iS}{\hbar} \right). \quad (2.2.11)$$

Si noti che quest'ultimo risultato è simbolico ed è da intendersi come espressione formale del limite per $N \rightarrow \infty$ dell'integrale finito dimensionale (2.2.8).

2.3 Propagatore della particella libera

In questo breve paragrafo si ricaverà una formula utile per il propagatore di una particella libera. Nel caso di una particella libera si ha che $V(q) = 0$ e quindi usando la formula

(2.2.7) e trascurando i termini $o(\Delta t^2)$ nel limite per Δt molto piccoli si trova che

$$\begin{aligned} K(q_{k+1}, q_{k-1}; t_{k+1}, t_{k-1}) &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_k K(q_{k+1}, q_k; t_{k+1}, t_k) K(q_k, q_{k-1}; t_k, t_{k-1}) \\ &= \frac{m}{2\pi i \hbar \sqrt{\Delta t_k \Delta t_{k-1}}} \int_{-\infty}^{\infty} dq_k \exp \left[\frac{im}{\hbar} \left(\frac{(q_{k+1} - q_k)^2}{2\Delta t_k} + \frac{(q_k - q_{k-1})^2}{2\Delta t_{k-1}} \right) \right], \end{aligned}$$

e quest'ultimo integrale può essere calcolato usando la formula (A.2.1) ricavata nel paragrafo A.2 dell'Appendice A, si ottiene

$$K(q_{k+1}, q_{k-1}; t_{k+1}, t_{k-1}) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (\Delta t_k + \Delta t_{k-1})}} \exp \left[\frac{im(q_{k+1} - q_{k-1})^2}{2\hbar(\Delta t_k + \Delta t_{k-1})} \right].$$

Ripetendo quest'integrazione su tutti punti intermedi q_k si ottiene infine il propagatore della particella libera

$$K(q_f, q_i; t_f, t_i) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t_f - t_i)}} \exp \left[\frac{im(q_f - q_i)^2}{2\hbar(t_f - t_i)} \right]. \quad (2.3.1)$$

2.4 La rotazione di Wick e l'integrale sui cammini di un oscillatore armonico

Si considera una continuazione analitica del tempo in un tempo puramente immaginario $t \rightarrow -i\tau$, dove τ è un parametro reale che spesso viene detto tempo euclideo. Questa procedura è detta rotazione di Wick. Se ora consideriamo l'azione di oscillatore armonico con frequenza costante ω questa sotto rotazione di Wick diventa

$$S = iS_E,$$

dove il pedice sta per indicare che si tratta dell'azione euclidea

$$S_E \equiv \frac{1}{2} \int \left[\left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 + \omega^2 q^2 \right] d\tau. \quad (2.4.1)$$

Il propagatore definito in (2.2.11) adoperando la rotazione di Wick diventa

$$K_E(q_f, q_0; \tau_f, \tau_0) = \int_{q(\tau_0)=q_0}^{q(\tau_f)=q_f} \mathcal{D}q \exp \left(\frac{-S}{\hbar} \right), \quad (2.4.2)$$

dove la misura è

$$\mathcal{D}q = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar\Delta\tau_0}} \prod_{k=1}^N \frac{dq_k}{\sqrt{2\pi\hbar\Delta\tau_k}}. \quad (2.4.3)$$

Si vuole ora calcolare esplicitamente la soluzione del propagatore euclideo. Per prima cosa si inizia a calcolare l'azione euclidea (2.4.1). Si osservi che le equazioni del moto derivata dall'azione euclidea sono

$$\ddot{q} - \omega^2 = 0.$$

Scegliendo una soluzione di quest'equazione differenziale $u(\tau) = e^{-\omega\tau}$, si usa questa per costruiscono nuove variabili η e \mathcal{Q} che vanno a rimpiazzare le variabili τ e q . Si definiscono le variabili η e \mathcal{Q} come

$$\mathcal{Q} \equiv u^{-1}q = e^{\omega\tau}, \quad \eta \equiv \frac{1}{2\omega}e^{2\omega\tau},$$

essendo η diverso da zero per ogni τ e inoltre anche $\frac{d\eta}{d\tau} = e^{2\omega\tau}$ si tratta di un cambiamento di variabili buono. Ora si può esprimere la funzione $\mathcal{Q}(\tau)$ in funzione di η e chiamarla ancora \mathcal{Q} . Si ottiene quindi

$$\dot{q} = \frac{d}{d\tau}(\mathcal{Q}u) = e^{-\omega\tau} \left(\frac{d\mathcal{Q}}{d\tau} - \omega\mathcal{Q} \right) = e^{-\omega\tau} \left(\frac{d\mathcal{Q}}{d\eta} e^{2\omega\tau} - \omega\mathcal{Q} \right) = e^{\omega\tau} \mathcal{Q}' - \omega q, \quad (2.4.4)$$

dove si è denotato con \mathcal{Q}' la derivata rispetto ad η di $\mathcal{Q}(\eta)$. Ora l'azione euclidea dell'oscillatore (2.4.1) usando le nuove variabili e la (2.4.4) si può riscrivere come

$$\begin{aligned} S[q(\tau)] &= \frac{1}{2} \int_{\tau_i}^{\tau_f} ((\dot{q} + \omega q)^2 - 2\omega q \dot{q}) d\tau = \frac{1}{2} \int_{\eta_i}^{\eta_f} \mathcal{Q}'^2 d\eta - \frac{\omega}{2} (x^2(\tau_f) - x^2(\tau_i)) \\ &\equiv S_E^{libera} - \frac{\omega}{2} (x^2(\tau_f) - x^2(\tau_i)) \end{aligned}$$

dove è stato si è chiamata l'azione di una particella libera di massa unitaria con S_E^{libera} , definita come

$$S_E^{libera} \equiv \frac{1}{2} \int_{\eta_i}^{\eta_f} \mathcal{Q}'^2 d\eta.$$

Quindi abbiamo ridotto l'azione euclidea ad un azione di una particella libera più un termine che dipende dalle condizione al contorno. Fatto il cambiamento di variabili che ha semplificato l'azione euclidea resta ancora da capire quale sia la relazione che lega la misura $\mathcal{D}q$, definita dalla (2.4.3), e la misura corrispondente per $\mathcal{Q}(\eta)$,

$$\mathcal{D}\mathcal{Q} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar\Delta\eta_0}} \prod_{k=1}^N \frac{d\mathcal{Q}_k}{\sqrt{2\pi\hbar\Delta\eta_k}}.$$

Si può trovare una relazione tra $\Delta\eta_k$ e $\Delta\tau_k$ espandendo in serie Taylor $\eta = \frac{1}{2\omega}e^{2\omega\tau}$. Fermendosi al secondo ordine in $\Delta\tau_k$ si ottiene

$$\begin{aligned}\Delta\eta_k &= e^{2\omega\tau_k} \Delta\tau_k + \omega e^{2\omega\tau_k} \Delta\tau_k^2 + o(\Delta\tau_k^3) \\ &= e^{2\omega\tau_k} \Delta\tau_k (1 + \omega\Delta\tau_k) + o(\Delta\tau_k^3) \\ &= e^{2\omega\tau_k} \Delta\tau_k e^{\omega\Delta\tau_k} + o(\Delta\tau_k^3),\end{aligned}$$

per cui

$$\prod_{k=0}^N \Delta\eta_k = \prod_{k=0}^N \Delta\tau_k e^{2\omega\tau_k + \omega\Delta\tau_k} = e^{\omega(\tau_f - \tau_i)} \prod_{k=0}^N \Delta\tau_k e^{2\omega\tau_k}.$$

Ora essendo $d\mathcal{Q}_k = e^{\omega\tau_k} dq_k$ si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\mathcal{Q} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar\Delta\eta_0}} \prod_{k=1}^N \frac{d\mathcal{Q}_k}{\sqrt{2\pi\hbar\Delta\eta_k}} \\ &= \exp\left(-\frac{\omega}{2}(\tau_f - \tau_i)\right) \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\prod_{k=0}^N e^{-\tau_k}}{\sqrt{2\pi\hbar\Delta\tau_0}} \prod_{k=1}^N \frac{dq_k e^{\omega\tau_k}}{\sqrt{2\pi\hbar\Delta\eta_k}}. \\ \exp\left(-\frac{\omega}{2}(\tau_f - \tau_i) - \omega\tau_i\right) \mathcal{D}q &= \exp\left(-\frac{\omega}{2}(\tau_f + \tau_i)\right) \mathcal{D}q\end{aligned}$$

Quindi l'integrale sui cammini (2.4.2) diventa

$$\begin{aligned}K(q_f, q_i; \tau_f, \tau_i) &= \exp\left(\omega\frac{\tau_f + \tau_i}{2} + \frac{\omega}{\hbar}(q_f^2 - q_i^2)\right) \\ &\times \int_{\mathcal{Q}(\eta_i)=q_i e^{\omega\tau_i}}^{\mathcal{Q}(\eta_f)=q_f e^{\omega\tau_f}} \mathcal{D}\mathcal{Q} \exp\left(-\frac{S_E^{libera}[\mathcal{Q}(\eta)]}{\hbar}\right),\end{aligned}$$

ora per calcolare l'integrale che appare si fa uso della formula generale per il propagatore libero (2.3.1) e si ottiene

$$K(q_f, q_i; \tau_f, \tau_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar(\eta_f - \eta_i)}} \exp\left(\omega\frac{\tau_f + \tau_i}{2} + \frac{\omega}{\hbar}(q_f^2 - q_i^2) - \frac{(\mathcal{Q}_f - \mathcal{Q}_i)^2}{2\hbar(\eta_f - \eta_i)}\right).$$

Ricordando che $\eta = \frac{1}{2\omega}e^{2\omega\tau}$ si ottiene

$$\eta_f - \eta_i = \frac{1}{2\omega}(e^{2\omega\tau_f} - e^{2\omega\tau_i}) = \frac{e^{\omega(\tau_f + \tau_i)}}{\omega} \sinh \omega(\tau_f - \tau_i) \equiv \frac{e^{\omega(\tau_f + \tau_i)}}{\omega} \sinh \omega T,$$

dove $T \equiv \tau_f - \tau_i$.

Usando ora questo risultato e il fatto che $\mathcal{Q} = qe^{\omega\tau}$ si ottiene infine

$$\begin{aligned} K(q_f, q_i; \tau_f, \tau_i) &= \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\hbar \sinh \omega T}} \exp \left[\frac{\omega}{2\hbar} (q_f^2 - q_i^2) - \frac{\omega(q_f e^{\omega\tau_f} - q_i e^{\omega\tau_i})}{2\omega(\tau_f + \tau_i)^2 \sinh \omega T} \right] \\ &= \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\hbar \sinh \omega T}} \exp \left[-\frac{\omega}{2\hbar \sinh \omega T} ((q_f^2 + q_i^2) \cosh \omega T - 2q_i q_f) \right]. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

2.5 Lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico espresso come integrale sui cammini

Il ket $|0\rangle$ dello stato fondamentale dell'oscillatore armonico viene annichilito dall'operatore di distruzione \hat{a} , che è definito come

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left[\hat{q} + \frac{i}{\omega} \hat{p} \right]$$

da cui

$$\hat{a} |0\rangle = \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left[\hat{q} + \frac{i}{\omega} \hat{p} \right] |0\rangle = 0$$

e quindi anche

$$\langle q | \hat{a} | 0 \rangle = \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left(q + \frac{\hbar}{\omega} \frac{\partial}{\partial q} \right) \psi_0(q) = 0.$$

Si ha quindi l'equazione differenziale

$$\left(q + \frac{\hbar}{\omega} \frac{\partial}{\partial q} \right) \psi_0(q) = 0,$$

la cui soluzione normalizzata è

$$\psi_0(q) = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left(-\frac{\omega q^2}{2\hbar} \right). \quad (2.5.1)$$

Usando la (2.4.5) si può osservare che

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\pi\hbar}{\omega} \right) e^{\frac{\omega T}{2}} K_E(q_f = 0, q_i = q; \tau_f, \tau_i) = \\ &= \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right) \sqrt{\frac{e^{\frac{\omega T}{2}}}{e^{\frac{\omega T}{2}} - e^{-\frac{\omega T}{2}}}} \exp \left[-\frac{\omega}{2\hbar \sinh \omega T} q^2 \cosh \omega T \right], \end{aligned}$$

e facendo il limite per $\tau_f \rightarrow \infty$ si ottiene la (2.5.1). In modo del tutto analogo si fa per $K_E(q_f = q, q_i = 0; \tau_f, \tau_i)$ e facendo il limite $\tau_i \rightarrow -\infty$ e si ottiene sempre la (2.5.1). Quindi si è ottenuto

$$\begin{aligned}\psi_0(q) \equiv \langle q|0\rangle &= \lim_{\tau_f \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi \hbar}{\omega} \right) e^{\frac{\omega T}{2}} K_E(q_f = 0, q_i = q; \tau_f, \tau_i) \\ &= \lim_{\tau_i \rightarrow -\infty} \left(\frac{\pi \hbar}{\omega} \right) e^{\frac{\omega T}{2}} K_E(q_f = q, q_i = 0; \tau_f, \tau_i).\end{aligned}\quad (2.5.2)$$

Per cui la si può scrivere come integrale sui cammini

$$\begin{aligned}\langle q|0\rangle &= \lim_{\tau_f \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi \hbar}{\omega} \right) e^{\frac{\omega T}{2}} \int_{q(\tau_i)=q}^{q(\tau_f)=0} \mathcal{D}q \exp\left(-\frac{S_E}{\hbar}\right) \\ &= \lim_{\tau_i \rightarrow -\infty} \left(\frac{\pi \hbar}{\omega} \right) e^{\frac{\omega T}{2}} \int_{q(\tau_i)=0}^{q(\tau_f)=q} \mathcal{D}q \exp\left(-\frac{S_E}{\hbar}\right).\end{aligned}\quad (2.5.3)$$

Chapter 3

Azione efficace

In questo paragrafo sarà introdotto l'azione efficace. Il metodo del integrale sui cammini introdotto nel paragrafo precedente sarà utile in questo. Prima però di arrivare all'azione efficace saranno richiamati alcuni risultati della meccanica quantistica riguardo l'oscillatore armonico e in particolare l'oscillatore armonico forzato, seguito da qualche cenno sulla teoria classica dei campi. Si concluderà la sezione con l'impostazione di un problema riguardante l'azione euclidea efficace di un campo scalare, al cui calcolo sarà dedicato l'intero Capitolo 4.

3.1 Oscillatore armonico forzato

In questa sezione si parla dell'oscillatore armonico forzato quantomeccanico. Questo sarà utile per poter introdurre tramite integrali linea l'azione efficace. In meccanica classica le equazioni di Eulero-Lagrange dell'oscillatorio armonico forzato vengono ricavate dal seguente Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{\omega^2 q^2}{2} + J(t)q,$$

e sono quindi

$$\ddot{q} = -\omega^2 q + J(t).$$

Ora usando le trasformazioni di Legendre otteniamo l'Hamiltoniana del sistema

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2} - J(t)q, \tag{3.1.1}$$

che in questo caso non si conserva essendo dipendente dal tempo.

Per descrivere l'evoluzione temporale di questo sistema nel caso quantistico si farà uso della rappresentazione di Heisenberg. Si postula l'indipendenza temporale dei vettori di

stato. Le equazioni del moto che deve obbedire un dato Hamiltoniano sono del tutto simili a quelle di Hamilton nella meccanica classica e si ottengono rimpiazzando, dopo aver derivato, le coordinate q con l'operatore \hat{q} e i momenti p con l'operatore \hat{p} . Le equazioni di Hamilton del sistema classico sono

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\omega^2 q + J(t),$$

da cui le equazioni del sistema quantistico, dette equazioni di Heisenberg, sono

$$\frac{d\hat{q}}{dt} = \hat{p}, \quad \frac{d\hat{p}}{dt} = -\omega^2 \hat{q} + J(t). \quad (3.1.2)$$

Per risolvere le equazioni come nel caso dell'oscillatore imperturbato si introducono due operatori, l'operatore di distruzione $\hat{a}(t)$ e l'operatore di creazione $\hat{a}^\dagger(t)$, uno l'aggiunto dell'altro:

$$\hat{a}(t) \equiv \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left[\hat{q}(t) + \frac{i}{\hbar} \hat{p}(t) \right], \quad (3.1.3)$$

$$\hat{a}^\dagger(t) \equiv \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left[\hat{q}(t) - \frac{i}{\hbar} \hat{p}(t) \right]. \quad (3.1.4)$$

Ora derivando rispetto al tempo la (3.1.3) e tenendo conto delle equazioni di Heisenberg (3.1.2) si ottiene

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left[\hat{p} - i\omega \hat{q} + \frac{i}{\omega} J(t) \right] = -i\omega \hat{a} + \frac{i}{\sqrt{2\omega}} J(t),$$

e in modo del tutto analogo si ottiene per \hat{a}^\dagger

$$\frac{d\hat{a}^\dagger}{dt} = \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left[\hat{p} + i\omega \hat{q} - \frac{i}{\omega} J(t) \right] = i\omega \hat{a}^\dagger - \frac{i}{\sqrt{2\omega}} J(t).$$

Si è quindi ottenuto le equazioni del moto per \hat{a} e \hat{a}^\dagger :

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = -i\omega \hat{a} + \frac{i}{\sqrt{2\omega}} J(t), \quad (3.1.5)$$

$$\frac{d\hat{a}^\dagger}{dt} = i\omega \hat{a}^\dagger - \frac{i}{\sqrt{2\omega}} J(t). \quad (3.1.6)$$

Queste due equazioni del tutto identiche da un punto di vista matematico posso essere risolte usando la formula generale o usando il metodo delle variazioni delle costanti per ricavare essa. Si prosegue ora con la seconda delle due. Le due equazioni sono equazioni differenziali del primo ordine del tipo

$$x' + q(t)x + p(t) = 0. \quad (3.1.7)$$

Si scrive

$$x(t) = \alpha(t)v(t), \quad (3.1.8)$$

e inserendola nell'equazione (3.1.7) si trova

$$v'\alpha + v(\alpha' + q\alpha) + p = 0. \quad (3.1.9)$$

Ora $v(t)$ viene vista come nuova funzione incognita invece $\alpha(t)$ viene imposta in modo tale da non avere termini contenenti v nella (3.1.9). Per cui α deve soddisfare l'equazione differenziale omogenea

$$\alpha' + q\alpha = 0,$$

che una volta integrata a meno di una costante moltiplicativa da

$$\alpha(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^t q(t')dt'\right).$$

Invece per $v(t)$ si ottiene

$$v(t) = v(t_0) - \int_{t_0}^t \frac{p(t')}{\alpha(t')} dt' = v(t_0) - \int_{t_0}^t p(t') \exp\left(-\int_{t_0}^{t'} q(x)dx\right) dt',$$

e quindi si è ottenuto la soluzione generale dell'equazione (3.1.7)

$$x(t) = \alpha(t)v(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^t q(t')dt'\right) \left[v(t_0) - \int_{t_0}^t p(t') \exp\left(-\int_{t_0}^{t'} q(x)dx\right) dt' \right].$$

Le equazioni (3.1.3) e (3.1.4) sono casi particolari dove nella prima $q(t) = i\omega$ e $p(t) = -\frac{i}{\sqrt{2\omega}}J(t)$, invece nella seconda $q(t) = -i\omega$ e $p(t) = \frac{i}{\sqrt{2\omega}}J(t)$. Le soluzioni sono quindi, scegliendo come punto fisso $t = 0$,

$$\hat{a}(t) = \left[\hat{a}_{in} + \frac{i}{\sqrt{2\omega}} \int_0^t e^{i\omega t'} J(t') dt' \right] e^{-i\omega t}, \quad (3.1.10)$$

$$\hat{a}^\dagger(t) = \left[\hat{a}_{in}^\dagger - \frac{i}{\sqrt{2\omega}} \int_0^t e^{-i\omega t'} J(t') dt' \right] e^{i\omega t}, \quad (3.1.11)$$

dove

$$\hat{a}(0) = \hat{a}_{in} \quad \text{e} \quad \hat{a}^\dagger(0) = \hat{a}_{in}^\dagger.$$

Ricordando le definizioni di \hat{a} e \hat{a}^\dagger , (3.1.3) e (3.1.4) rispettivamente, è facile da ottenere le soluzioni per gli operatori $\hat{p}(t)$ e $\hat{q}(t)$, che sono

$$\hat{q} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad \hat{p} = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\omega}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger).$$

Inserendo queste ultime nella (3.1.1) si ottiene

$$\hat{H} = \frac{\omega}{2}(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) - \frac{\hat{a}^\dagger + \hat{a}}{\sqrt{2\omega}} J(t) = \omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}) - \frac{\hat{a}^\dagger + \hat{a}}{\sqrt{2\omega}} J(t). \quad (3.1.12)$$

Ora al fine della discussione sull'oscillatore armonico forzato è sufficiente considerare, per quanto segue, il caso in cui la forza esterna è attiva per un intervallo di tempo finito. Si suppone che la forza esterna è non nulla solo nel intervallo di tempo $0 < t < T$. Per cui l'oscillatore è imperturbato per $t \leq 0$ e $t \geq T$. Si introducono le notazioni seguenti: il pedice "in" per la regione di tempo $t < 0$ e la region "out" per $t > T$. Quindi la soluzione nella regione $t < 0$ si ha

$$\hat{a}(t) = \hat{a}_{in} e^{-i\omega t}, \quad \hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}_{in}^\dagger e^{i\omega t}, \quad (3.1.13)$$

e invece per la regione $t > T$ si ha

$$\begin{aligned} \hat{a}(t) &= \left[\hat{a}_{in} + \frac{i}{\sqrt{2\omega}} \int_0^T e^{i\omega t} J(t) dt \right] e^{-i\omega t}, \\ \hat{a}^\dagger(t) &= \left[\hat{a}_{in}^\dagger - \frac{i}{\sqrt{2\omega}} \int_0^T e^{-i\omega t} J(t) dt \right] e^{i\omega t}, \end{aligned}$$

o in alternativa indicando con

$$\hat{a}_{out} \equiv \hat{a}_{in} + \frac{i}{\sqrt{2\omega}} \int_0^T e^{i\omega t} J(t) dt \equiv \hat{a}_{in} + J_0$$

e con

$$\hat{a}_{out}^\dagger \equiv \hat{a}_{in}^\dagger - \frac{i}{\sqrt{2\omega}} \int_0^T e^{-i\omega t} J(t) dt \equiv \hat{a}_{in}^\dagger + J_0^*$$

si può riscrivere in forma più compatta

$$\hat{a}(t) = \hat{a}_{out} e^{-i\omega t}, \quad \hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}_{out}^\dagger e^{i\omega t}. \quad (3.1.14)$$

Sostituendo la (3.1.13) e la (3.1.14) nella (3.1.12) si ottiene l'Hamiltoniano

$$\hat{H} = \begin{cases} \omega \left(\hat{a}_{in}^\dagger \hat{a}_{in} + \frac{1}{2} \right) & \text{per } t \leq 0, \\ \omega \left(\hat{a}_{out}^\dagger \hat{a}_{out} + \frac{1}{2} \right) & \text{per } t \geq T. \end{cases} \quad (3.1.15)$$

Nella trattazione quantistica dell'oscillatore armonico imperturbato si introduce l'operatore numero definito come

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a},$$

che come si può vedere da

$$\hat{N}^\dagger = (\hat{a}^\dagger \hat{a})^\dagger = \hat{a}^\dagger (\hat{a}^\dagger)^\dagger = \hat{a}^\dagger \hat{a}$$

è reale. Si dimostra che lo spettro di \hat{N} è costituito da interi non negativi $n = 0, 1, 2, \dots$. Inoltre sia $|0\rangle$ l'autoket o autovettore di stato appartenente all'autovalore 0 allora

$$\hat{N} |0\rangle = 0,$$

e

$$|n\rangle = \hat{a}^\dagger |0\rangle (n!)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.1.16)$$

autoket appartenente ai autovalori $n \geq 1$

$$\hat{N} |n\rangle = |n\rangle n.$$

Il ket $|0\rangle$ che viene annichilato da \hat{a} ,

$$\hat{a} |0\rangle = 0,$$

descrive lo stato fondamentale e invece i ket (3.1.16) descrivono gli stati eccitati $n \geq 1$, con

$$\langle n' | n \rangle, \quad \hat{I} = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|,$$

questo vale se il ket $|0\rangle$ è normalizzabile ed unico. Nel caso particolare trattato in questa sede dell'oscillatore armonico forzato ci sono due stati fondamentali differenti, uno descritto dal ket $|0_{in}\rangle$ e l'altro dal $|0_{out}\rangle$ tale per cui

$$\hat{a}_{in} |0_{in}\rangle = 0, \quad \hat{a}_{out} |0_{out}\rangle = 0,$$

e inoltre si può osservare che

$$\hat{a}_{out} |0_{in}\rangle = (\hat{a}_{in} + J_0) |0_{in}\rangle = J_0 |0_{in}\rangle,$$

e

$$\hat{a}_{in} |0_{out}\rangle = -J_0 |0_{in}\rangle.$$

Ora costruendo due basi ortonormali per gli stati eccitati, usando gli operatori \hat{a}_{in}^\dagger e \hat{a}_{out}^\dagger , in completa analogia con il caso imperturbato con gli autoket

$$|n_{in}\rangle = (\hat{a}_{in}^\dagger |0_{in}\rangle) (\sqrt{n!})^{-\frac{1}{2}}, \quad |n_{out}\rangle = (\hat{a}_{out}^\dagger |0_{out}\rangle) (\sqrt{n!})^{-\frac{1}{2}},$$

con $n = 1, 2, \dots$. Per cui

$$\begin{aligned}\hat{H}(t) |n_{in}\rangle &= \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) |n_{in}\rangle && \text{per } t \leq 0, \\ \hat{H}(t) |n_{out}\rangle &= \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) |n_{out}\rangle && \text{per } t \geq T,\end{aligned}$$

che si dimostra ricordando quanto detto riguardo l'operatore numero \hat{N} e i suoi autovalori. Distinguendo $\hat{N}_{in} = \hat{a}_{in}^\dagger \hat{a}_{in}$ e $\hat{N}_{out} = \hat{a}_{out}^\dagger \hat{a}_{out}$ e usando la (3.1.15) si ottiene

$$\hat{H} = \begin{cases} \omega \left(\hat{a}_{in}^\dagger \hat{a}_{in} + \frac{1}{2} \right) = \omega \left(\hat{N}_{in} + \frac{1}{2} \right) & \text{per } t \leq 0, \\ \omega \left(\hat{a}_{out}^\dagger \hat{a}_{out} + \frac{1}{2} \right) = \omega \left(\hat{N}_{out} + \frac{1}{2} \right) & \text{per } t \geq T,\end{cases}$$

e sapendo che

$$\begin{aligned}\hat{N} |n_{in}\rangle &= |n_{in}\rangle n, \\ \hat{N} |n_{out}\rangle &= |n_{out}\rangle n,\end{aligned}$$

si ottiene quanto era da dimostrare.

3.2 Introduzione all'azione efficace

L'azione efficace è un metodo di calcolo molto importante impiegato nella teoria quantistica dei campi. Si introduce e si definisce l'azione efficace nel caso dell'oscillatore armonico forzato, gli integrali di linea visti nel paragrafo 2 ci permettono di fare ciò. Ci si mette nel caso di un oscillatore armonico trattato in ultima analisi nel paragrafo 3.1 in cui la forza è attiva solo nel intervallo di tempo finito $0 < t < T$. Si è detto che per un istante $t_1 < 0$ lo stato fondamentale del sistema è descritto dal ket $|0_{in}\rangle$ che viene annichilato dal operatore di distruzione $\hat{a}(t_1)$,

$$a(t_1) |0_{in}\rangle = 0.$$

invece per un istante di tempo $t_2 > T$ lo stato fondamentale viene descritto dal ket $|0_{out}\rangle$ che viene annichilato da $\hat{a}(t_2)$,

$$a(t_2) |0_{out}\rangle = 0.$$

Questi due operatori sono legati tramite l'operatore di evoluzione temporale dalla relazione

$$\hat{a}(t_2) = \hat{U}^{-1}(t_2, t_1) \hat{a}(t_1) \hat{U}^{-1}(t_2, t_1)$$

per cui

$$\hat{a}(t_2) |0_{out}\rangle = \hat{U}^{-1}(t_2, t_1) \hat{a}(t_1) \hat{U}^{-1}(t_2, t_1) |0_{out}\rangle = 0,$$

da cui si deduce che

$$|0_{in}\rangle = \hat{U}^{-1}(t_2, t_1). \quad (3.2.1)$$

Ricordando che \hat{U} è unitario si ottiene

$$\begin{aligned} \langle 0_{out} | 0_{in} \rangle &= \langle 0_{in} | \hat{U}^{-1}(t_2, t_1) | 0_{in} \rangle \\ &= \int dq_2 dq_1 \langle 0_{in} | q_2 \rangle \langle q_2 | \hat{U}^{-1}(t_2, t_1) | q_1 \rangle \langle q_1 | 0_{in} \rangle \\ &= \int dq_2 dq_1 \langle 0_{in} | q_2 \rangle K(q_2, q_1; t_2, t_1) \langle q_1 | 0_{in} \rangle, \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

dove si è usato la definizione del propagatore (2.2.4) e poi ricordando a sua volta (2.5.2) si ottiene

$$\begin{aligned} \langle 0_{out} | 0_{in} \rangle &= N_\omega \int dq_1 dq_2 K_E(q_f = 0, q_2; \tau_f \rightarrow \infty) \\ &\quad \times K(q_2, q_1; t_2, t_1) K_E(q_1, q_i; \tau_i \rightarrow -\infty), \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

dove N_ω non dipende da dalla forza esterna $J(t)$. Ora facendo la rotazione di Wick a $K_E(q_2, q_1; t_2, t_1)$, l'espressione destra dell'uguaglianza può essere riscritta come

$$\int_{q(\tau_i=-\infty)=0}^{q(\tau_f=\infty)=0} \mathcal{D}q e^{-S_E[J(\tau), q(\tau)]}, \quad (3.2.4)$$

dove l'azione euclidea di un oscillatore forzato è

$$S[q(\tau), J(\tau)] = \int_{\tau_0}^{\tau_f} d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 + \frac{\omega^2 q^2}{2} - J(\tau)q \right].$$

Si può ottenere quindi l'elemento matriciale $\langle 0_{out} | 0_{in} \rangle$ attraverso la (3.2.4). Questo spinge a definire l'azione efficace euclidea come un funzionale nel seguente modo

$$e^{-\Gamma_E[J(\tau)]} = \int_{q(\tau_i=-\infty)=0}^{q(\tau_f=\infty)=0} \mathcal{D}q e^{-S_E[J(\tau), q(\tau)]}. \quad (3.2.5)$$

Di conseguenza uno può definire l'azione efficace $\Gamma[J(t)]$, una volta calcolata, continuando analiticamente $\Gamma_E[J(\tau)]$ e aggiungendo per convenienza un fattore i :

$$\Gamma[J(t)] \equiv i \Gamma_E[J(\tau)]|_{\tau=it}. \quad (3.2.6)$$

3.3 L'Azione nella teoria classica dei campi

Prima di arrivare in fine all'introduzione dell'azione efficace si darà in una breve introduzione su alcuni aspetti della teoria classica dei campi.

Un campo classico viene descritto da una funzione $\phi(\mathbf{x}, t)$, con \mathbf{x} coordinata tridimensionale e t il tempo. La funzione $\phi(\mathbf{x}, t)$ ha valori finito dimensionali in ogni punto che possono essere scalari, vettoriali o tensoriali. In questa sede ci si limiterà a considerare campi scalari. Per ricavare le equazioni del moto si prosegue sulla falsa riga della meccanica analitica. Viene definita la densità di funzione $\mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$, detta densità di Lagrangiana, le cui variabili sono l'intensità del campo e le sue derivate (si suppone non superiore al primo ordine). Si noti che si usa la notazione per l'operatore di derivata $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ che si comporta come quadrivettore covariante. Si definisce invece la funzione di Lagrange come

$$L = \int \mathcal{L} d^3 \mathbf{x},$$

e proseguendo l'azione sarà definita come

$$S[\phi] = \int dt d^3 \mathbf{x} \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) = \int d^4 x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i). \quad (3.3.1)$$

Da qui in poi si indicherà per compattare la notazione il campo con le sue variabili come $\phi(x)$. Ora si possono ottenere l'equazione del moto di Eulero-Lagrange in modo equivalente alla meccanica analitica, richiedendo che l'azione ha un estremo per una configurazione di campo permesso $\phi_i(x)$,

$$\frac{\delta S}{\delta \phi_i(x)} = 0.$$

La variazione dell'azione è

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4 x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta \phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} \delta(\phi_{i,\mu}) \right) + o([\delta \phi]^2) \\ &= \int d^4 x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} \right) \delta \phi_i + o([\delta \phi]^2), \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

dove la sommatoria in μ è implicita e si è assunto che $\delta \phi_i(x)$ vada zero abbastanza rapidamente quando $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, $|t| \rightarrow \infty$.

Le equazioni del moto quindi sono

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi_i(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} = 0. \quad (3.3.3)$$

3.4 L'azione euclidea di un campo scalare

Si considera una azione di un campo scalare ϕ

$$S[\phi, g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2} \int d^{2\omega} x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - V(x) \phi^2), \quad (3.4.1)$$

dove $g_{\mu\nu}(x)$ è la metrica dello spazio tempo e il potenziale $V(x)$ descrive la massa efficace del campo ϕ . Gli indici vanno da zero a $2\omega - 1$, dove 2ω sono le dimensioni dello spazio tempo. Questa azione può essere ottenuta partendo da Lagrangiano relativisticamente invariante in una spazio tempo piano del tipo

$$\mathcal{L}(\phi, \partial\phi) = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - V(\phi), \quad (3.4.2)$$

dove $\eta^{\mu\nu}$ è la metrica di Minkowski, con $\eta^{\mu\nu} \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Ora se rimpiazzando la metrica di Minkowski con la metrica di uno spazio curvato arbitrario $g_{\mu\nu}$, l'elemento di volume $d^3 x dt$ con quello $d^4 x \sqrt{-g}$, le derivate ordinarie con quelle covarianti e generalizzando su uno spazio tempo di 2ω dimensioni si ottiene per la funzione di Lagrange (3.4.2) l'azione (3.4.1).

Fatte queste precisazioni si prosegue di fare una continuazione analitica dell'azione (3.4.1) nel tempo euclideo. Per fare ciò si considera per prima un cambiamento di coordinate reale $x \rightarrow \tilde{x}$. L'azione (3.4.1) nelle nuove coordinate diventa

$$S[\phi, g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2} \int d^{2\omega} \tilde{x} \sqrt{-\tilde{g}} (\tilde{g}^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - V(x) \phi^2). \quad (3.4.3)$$

Considerando ora un cambiamento di coordinate

$$x \equiv (t, \mathbf{x}) \rightarrow \tilde{x}(\tau, \mathbf{x} = (it, \mathbf{x}),$$

che corrisponde alla rotazione di Wick. Introducendo la metrica euclidea $g_{\mu\nu}^{(E)} = -\tilde{g}_{\mu\nu}$ e la notazione $x^{(E)}$ invece di \tilde{x} la (3.4.3) diventa

$$S = -\frac{1}{2} \int d^{2\omega} x^{(E)} \sqrt{-g^{(E)}} (\tilde{g}_{(E)}^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - V(x) \phi^2),$$

e quindi l'azione efficace euclidea è uguale a

$$S_E[\phi, g_{\mu\nu}] \equiv \frac{1}{i} S[\phi, g_{\mu\nu}]_{t=-i\tau} = \frac{1}{2} \int d^{2\omega} x \sqrt{g} (g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + V \phi^2), \quad (3.4.4)$$

dove saranno omessi per via del uso continuo che si farà dell'azione euclidea i pedici e indici (E). Ora se si considera un campo che va zero abbastanza velocemente all'infinito.

L'azione (3.4.4) può essere riscritta dopo aver integrato per parti tralasciando termini che dipendono dalle condizioni al contorno nel seguente modo

$$S_E[\phi, g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2} \int d^{2\omega} x \left[-\phi(\sqrt{g}g^{\mu\nu}\phi_{,\mu})_{,\nu} + \sqrt{g}V\phi^2 \right].$$

Sia ora

$$\hat{F} = -\square + V$$

dove \square è l'operatore laplaciano covariante che agisce su un campo scalare arbitrario φ come

$$\square\varphi \equiv \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu[\sqrt{g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi].$$

Segue che

$$S[\phi, g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2} \int d^{2\omega} x \sqrt{g} \left[\phi(x)\hat{F}\phi(x) \right]. \quad (3.4.5)$$

3.5 Azione efficace di un campo scalare

Come visto l'azione efficace euclidea di un oscillatore armonico forzato è un funzionale che dipende solo $J(\tau)$ ma non da $q(\tau)$. Allo stesso modo l'azione efficace del campo scalare descritto dall'azione euclidea $S[\phi, g_{\mu\nu}]$ definita dalla (3.4.5) dipende dalla metrica $g_{\mu\nu}$ ma non dall'intensità di campo ϕ . In questo paragrafo si arriverà a scrivere l'azione efficace di un campo scalare. Il percorso che porta a definire la sua misura non sarà un procedimento rigoroso.

Si prenda in considerazione il problema agli autovalori

$$\hat{F}\phi_n(x) = [-\square + V]\phi_n(x) = \lambda_n\phi_n, \quad (3.5.1)$$

in uno spazio di funzioni in cui è definito un prodotto scalare covariante

$$\langle f, g \rangle = \int d^{2\omega} x \sqrt{g} f(x)g(x).$$

Ora si può considerare un cubo finito con condizioni al contorno del campo ϕ tali per cui si abbia uno spettro discreto di autovalori λ_n , con $n = 0, 1, 2, \dots$. Per cui \hat{F} è un operatore autoaggiunto e l'insieme delle sue autofunzioni forma una base ortonormale con

$$\int d^{2\omega} x \sqrt{g} \phi_n(x)\phi_m(x) = \delta_{nm}. \quad (3.5.2)$$

Una funzione arbitraria può essere espressa in questa base come

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x), \quad (3.5.3)$$

dove

$$c_n = \int d^{2\omega} x \sqrt{g} \phi(x) \phi_n(x), \quad (3.5.4)$$

sono le coordinate della funzione nella base ϕ_n nello spazio delle funzioni infinito dimensionale. Scrivendo le ϕ che compaiono nella (3.4.5) nella base ϕ_n si ottiene

$$S[\phi, g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2} \int d^{2\omega} x \sqrt{g} \sum_{n,m} c_n c_m \lambda_m \phi_n \phi_m = \frac{1}{2} \sum_n c_n^2 \lambda_n. \quad (3.5.5)$$

Quindi l'azione (3.4.5) è diagonale nella base ϕ_n .

Si è visto quando si è introdotto l'integrali di linea la misura $\mathcal{D}q$ per le coordinate q , ora si arriva introdurre la misura $\mathcal{D}\phi$ per il campo ϕ . La misura $\mathcal{D}\phi$ sarà espressa in termini dei coefficienti c_n , questo può essere motivato una volta definita l'azione euclidea come

$$\exp(-\Gamma_E[g_{\mu\nu}]) = \int \mathcal{D}\phi \exp(-S_E[\phi, g_{\mu\nu}]), \quad (3.5.6)$$

ed essendo che l'azione (3.4.5) è espressa interamente in termini di c_n . Questa misura in generale sarà covariante. Si definisce ora la misura come $\mathcal{D}\phi = \prod f(c_n) dc_n$. Ora la misura più semplice può essere scelta con $f(c_n)$ uguale ad una costante e prendendo quindi

$$\mathcal{D}\phi = \prod_n \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi}},$$

si ottiene

$$\exp(-\Gamma_E[g_{\mu\nu}]) = \int \prod_{n=0}^{\infty} \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \lambda_n c_n^2\right) = \left[\prod_{n=0}^{\infty} \lambda_n \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.5.7)$$

3.6 Problema agli autovalori

Prendendo spunto dal risultato (3.5.7) si prosegue ad impostare il problema per poter calcolare l'azione efficace $\Gamma[g_{\mu\nu}]$.

Dati tutti gli autovalori di un operatore di dimensione finita, il loro prodotto è uguale al suo determinante. Ora se si ha a che fare con un operatore di dimensione infinita e

si suppone esistere una generalizzazione del determinante, si può riscrivere formalmente l'azione efficace euclidea come

$$\Gamma_E(g_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} \ln \prod_{n=0}^{\infty} \lambda_n \equiv \frac{1}{2} \ln \det \hat{F}, \quad (3.6.1)$$

riducendo in tal modo il calcolo dell'azione efficace al calcolo di un determinante di un operatore differenziale o anche detto determinante funzionale. Si noti che si è detto formalmente perché il determinante di un operatore differenziale non è una quantità ben definita, essendo che per esempio gli autovalori di $-\square$ crescono come n e il loro prodotto diverge. Dovrebbe risultare evidente che quindi sarà necessario regolarizzare e rinormalizzare il determinante al fine di ottenere un risultato non divergente.

Ora si può riformulare il problema agli autovalori (3.5.1), (3.5.2) in uno spazio di Hilbert ausiliare con Ket “generalizzati” $|x\rangle$ normalizzati come

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x'),$$

e relazione di completezza dell'operatore identità \hat{I}

$$\hat{I} = \int d^{2\omega} x |x\rangle\langle x|. \quad (3.6.2)$$

Fatte queste premesse si vuole trovare un operatore hermitiano \hat{O} con gli stessi autovalori che in (3.5.1), e

$$\hat{O} |\psi_n\rangle = |\psi_n\rangle \lambda_n, \quad (3.6.3)$$

quando i suoi autovalori sono normalizzati come

$$\langle \psi_n|\psi_m\rangle = \delta_{nm}. \quad (3.6.4)$$

Ora il problema ai autovalori (3.6.3), (3.6.4) può essere riscritto come

$$\int d^{2\omega} x' \langle x|\hat{O}|x'\rangle \psi_n(x') = \lambda_n \psi_n(x), \quad (3.6.5)$$

$$\int d^{2\omega} x \psi_n(x) \psi_m(x) = \delta_{nm}, \quad (3.6.6)$$

dove $\Phi(x) \equiv \langle x|\Phi\rangle$ e si è fatto uso la relazione di completezza dell'operatore identità (3.6.2). Definendo

$$\psi_n = g^{\frac{1}{4}}(x) \phi_n(x), \quad (3.6.7)$$

e

$$\langle x|\hat{O}|x'\rangle = g^{\frac{1}{4}}(x)(-\square_x + V)[g^{-\frac{1}{4}}(x)\delta(x - x')], \quad (3.6.8)$$

l'equazione (3.6.5) diventa

$$\begin{aligned} \int d^{2\omega}x(-\square_x + V)[g^{-\frac{1}{4}}(x)\delta(x - x')]g^{\frac{1}{4}}(x')\phi_n(x) \\ = g^{\frac{1}{4}}(x)(-\square_x + V) = g^{\frac{1}{4}}(x)\lambda_n\phi_n(x), \end{aligned} \quad (3.6.9)$$

e la (3.6.5) diventa

$$\int d^{2\omega}\sqrt{g}\phi_n(x)\phi_m(x) = \delta_{nm}. \quad (3.6.10)$$

Se ora si confronta la (3.6.9) con la (3.5.1) e la (3.6.10) con la (3.5.2) si vede che si è ottenuto quanto cercato.

3.7 La funzione Zeta per il calcolo del determinate funzionale

Si definisce per un operatore \hat{O} dato con i suoi autovalori λ_n la funzione Zeta $\zeta_{\hat{O}}(s)$ come

$$\zeta_{\hat{O}}(s) \equiv Tr(\hat{O}^{-1}) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n}\right)^s. \quad (3.7.1)$$

Si può notare la somiglianza con la definizione della funzione Zeta di Riemann (1.2.1), dove invece di avere numeri naturali qui si somma sui autovalori dell'operatore. Questa funzione Zeta converge per $Re\ s$ abbastanza grande (nel caso della Zeta di Riemann si è visto $Re\ s > 1$). Se presenta dei poli si definisce la sua continuazione analitica, e quindi sarà definita in tutto il piano complesso eccetto i suoi punti singolari. Dalla sua definizioni (3.7.1) si ricava che

$$\frac{d\zeta_{\hat{O}}(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \sum_n e^{-s \ln \lambda_n} = - \sum_n e^{-s \ln \lambda_n} \ln \lambda_n, \quad (3.7.2)$$

$$\ln \det \hat{O} = \ln \prod_n \lambda_n = \sum_n \ln \lambda_n = - \left. \frac{d\zeta_{\hat{O}}(s)}{ds} \right|_{s=0}. \quad (3.7.3)$$

Essendo che la $\zeta_{\hat{O}(s)}$ è regolare in $s = 0$, quindi la sua derivata è finita, l'equazione (3.7.2) può essere letta come definizione regolarizzata del determinate di \hat{O} . Si deve far notare che come sono state ricavate le equazioni (3.6.1) e (3.7.2) non è rigoroso a livello matematico perché si sono tratte sommatorie divergenti come se fossero finite. Il motivo per cui il metodo della Zeta da soluzione comunque affidabili risale al fatto che in molti casi i risultati così ottenuti sono stati verificati con altri metodi di regolarizzazione e rinormalizzazione.

3.8 Nucleo dell'equazione di calore

Si suppone di conoscere, di un operatore hermitiano \hat{O} dato, i suoi autovalori λ_n e che esista un insieme completo di autoket $|\psi_n\rangle$, si definisce il suo operatore nucleo dell'equazione di calore come

$$\hat{K}(\tau) \equiv \exp(-\hat{O}\tau) = \sum_n e^{-\lambda_n\tau} |\psi_n\rangle\langle\psi_n|. \quad (3.8.1)$$

Il parametro τ è reale e viene chiamato tempo proprio che però non è da confondersi con un tempo fisico. Dalla sua definizione segue che $\hat{K}(0) = \hat{I}$ e che $\hat{K}(\tau)$ è ben definita per $\tau > 0$. La traccia dell'operatore appena definito è

$$Tr\hat{K}(\tau) \equiv \sum_n \langle\psi_n|\hat{K}(\tau)|\psi_n\rangle = \sum_n e^{-\lambda_n\tau}, \quad (3.8.2)$$

e quindi non dipende dalla base ortonormale. Ricordando ora la definizione (1.1.1) della funzione Gamma di Eulero e quanto fatto per ricavare la rappresentazione (1.2.3) della Zeta di Riemann si ottiene

$$\zeta_{\hat{O}}(s) = \sum_n (\lambda_n)^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \left(\sum_n e^{-\lambda_n\tau} \right) \tau^{s-1} d\tau = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty [Tr\hat{K}(\tau)] \tau^{s-1} d\tau. \quad (3.8.3)$$

Quest'integrale è convergente nelle stesse regioni della sommatoria (3.7.1). Si è quindi ottenuto un metodo alternativo per calcolare $\zeta_{\hat{O}}(s)$, che è più conveniente non si direbbe essendo coinvolti nel calcolo anche gli autoket $|\psi_n\rangle$ oltre agli autovalori λ_n . In quanto segue si vedrà che però gli elementi matriciali nella base di autoket delle coordinate $|x\rangle$ obbediscono ad una equazione differenziale nota e quindi si ottiene $Tr\hat{K}$ risolvendo quest'equazione. Dalla (3.8.1) segue che

$$\frac{d\hat{K}(\tau)}{d\tau} = -\hat{O}\hat{K}(\tau), \quad (3.8.4)$$

e inoltre

$$\begin{aligned} \langle x|\frac{d\hat{K}}{d\tau}|x'\rangle &= \frac{d}{d\tau} \langle x|\hat{K}|x'\rangle \equiv \frac{d\hat{K}(x, x', \tau)}{d\tau} \\ &= - \int d^{2\omega}x'' \langle x|\hat{O}|x''\rangle K(x'', x', \tau), \end{aligned} \quad (3.8.5)$$

dove $K(x, x', \tau) \equiv \langle x|\hat{K}(\tau)|x'\rangle$ e si è fatto uso della relazione di completezza dell'operatore identità. Ora ricordando che $\hat{K}(\tau = 0) = \hat{I}$ si ottiene che

$$K(x, x', \tau = 0) = \langle x|\hat{K}(\tau)|x'\rangle = \delta(x - x') \quad (3.8.6)$$

Le equazioni (3.8.5) e (3.8.6) formano la coppia equazione differenziale e condizione iniziale. Non dipendendo dalla base la traccia può essere ottenuta da

$$Tr\hat{K}(\tau) = \int d^{2\omega}x K(x, x, \tau). \quad (3.8.7)$$

Per cui si è ottenuto una ricetta per calcolare l'azione efficace cercata. Si inizia a risolvere l'equazione differenziale (3.8.5) con condizione iniziale (3.8.6) e una volta trovato si sostituisce la sua soluzione $K(x, x', \tau)$ in (3.8.7). Avendo così ottenuto $Tr\hat{K}(\tau)$ la si sostituisce in (3.8.3) e poi si integra sui s senza punti singolari e poi si continua analiticamente per ottenere $\zeta_{\hat{O}}(s)$. Una volta ottenuto $\zeta_{\hat{O}}(s)$ si può calcolare $\ln \det \hat{O}$ usando la (3.7.3) e così infine si è ottenuto l'azione efficace cercata, essendo che è essa, come ricavato, è uguale a $\frac{1}{2} \ln \det \hat{O}$.

Tutto il prossimo capitolo sarà dedicato al calcolo perturbativo di un operatore nucleo dell'equazione calore, che come appena visto fornisce una soluzione per l'azione efficace.

Chapter 4

Calcolo della traccia dell'operatore nucleo dell'equazione del calore

Nel capitolo precedente si è visto che il problema agli autovalori per \hat{F} può essere ridotto al problema equivalente per un operatore differente \hat{O} . In questo capitolo calcoleremo la traccia dell'operatore nucleo dell'equazione del calore dell'operatore \hat{O} che descrive un campo scalare con sfondo gravitazionale.

4.1 L'operatore \hat{O} in funzione dell'operatore $\hat{\square}$

Si affrontano ora calcoli necessari per riscrivere gli elementi matriciali di interesse dell'operatore \hat{O} .

$$\begin{aligned}\langle x|\hat{O}|x'\rangle &= g^{\frac{1}{4}}(-\square_x^{(g)} + V)[g^{-\frac{1}{4}}\delta(x-x')] \\ &= -g^{-\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\nu[g^{\mu\nu}\sqrt{g}\partial_\mu(g^{\frac{1}{4}}\delta(x-x'))] + V(x)\delta(x-x'),\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

dove si è fatto uso della seguente notazione $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Non è sempre possibile trovare il nucleo di calore per metrica $g_{\mu\nu}$ e potenziale V arbitrari. Quindi si procederà sviluppando una soluzione perturbativa considerando un potenziale piccolo e una metrica che è da considerare come piccola deviazione da una metrica piana. Le metriche covariante e controvariante possono quindi essere riscritte rispettivamente come

$$g_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \quad g^{\mu\nu}(x) = \delta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}(x),\tag{4.1.2}$$

dove $|h_{\mu\nu}| \ll 1$.

Se ci si trova in condizioni tali prima di poter trovare una soluzione è conveniente riscrivere l'operatore \hat{O} in una forma alternativa. Nei calcoli che seguono verranno omessi gli argomenti della $\delta(x-x')$. Considerando che

$$\partial_\mu(g^{-\frac{1}{4}}\delta) = g^{-\frac{1}{4}}[\delta_{,\mu} - \frac{1}{4}(\ln g)_{,\mu}\delta],$$

è facilitato il calcolo della parte destra dell'uguaglianza (4.1.1) e si ottiene cambiando l'espressione di segno

$$\begin{aligned}
g^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\nu [g^{\mu\nu} \sqrt{g} \partial_\mu (g^{-\frac{1}{4}} \delta)] - V \delta &= g^{-\frac{1}{4}} \partial_\nu [g^{\mu\nu} g^{\frac{1}{4}} [\delta_{,\mu} - \frac{1}{4} (\ln g)_{,\mu} \delta]] - V \delta \\
&= g^{\mu\nu} [\delta_{,\mu} - \frac{1}{4} (\ln g)_{,\mu}]_{,\nu} + g_{,\nu}^{\mu\nu} [\delta_{,\mu} - \frac{1}{4} (\ln g)] \\
&\quad + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} (\ln g)_{,\nu} [\delta_{,\mu} - \frac{1}{4} (\ln g)] - V \delta.
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Abbiamo quindi ottenuto un'espressione in cui la δ appare con diversi ordini di derivate e tenendo a mente la (4.1.2) le derivate di $g_{\mu\nu}$ possono essere scambiate con quelle di $h_{\mu\nu}$. Il termine in cui la δ appare con derivata seconda è

$$g^{\mu\nu} \delta_{,\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \delta(x - x') + h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \delta(x - x'), \tag{4.1.4}$$

ora definendo l'operatore \hat{h} tramite i suoi elementi matriciali

$$\langle x | \hat{h} | x' \rangle \equiv h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \delta(x - x') \tag{4.1.5}$$

e sapendo che gli elementi matriciali di $\hat{\square}$ sono

$$\langle x | \hat{\square} | x' \rangle \equiv \delta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \delta(x - x'),$$

si è ottenuto un'espressione dell'operatore $\hat{h} + \hat{\square}$. Il termine con derivata prima è

$$-\frac{1}{4} g^{\mu\nu} (\ln g_{,\mu} \delta_{,\nu} + g_{,\mu}^{\mu\nu} \delta_{,\mu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} (\ln g)_{,\nu} \delta_{,\mu} = h_{,\mu}^{\mu\nu} \delta_{,\nu}.$$

Definendo ora l'operatore $\hat{\Gamma}$ a sua volta tramite i suoi elementi matriciali

$$\langle x | \hat{\Gamma} | x' \rangle \equiv h_{,\nu}^{\mu\nu} \partial_\mu \delta(x - x'), \tag{4.1.6}$$

e quindi si è ottenuto l'espressione dell'operatore $\hat{\Gamma}$. Sono rimasti termini senza derivata di δ , che sono

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{4} g^{\mu\nu} (\ln g)_{,\mu\nu} - \frac{1}{4} \left[g_{,\nu}^{\mu\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} (\ln g)_{,\nu} \right] (\ln g)_{,\mu} - V \\
&= -\frac{1}{4} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta,\mu\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} h_{,\mu}^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta,\nu} - \frac{1}{4} h_{,\nu}^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta,\mu} - \frac{1}{16} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} g^{\kappa\lambda} h_{\alpha\beta,\mu} h_{\kappa\lambda,\nu} - V,
\end{aligned}$$

e definendo come l'operatore \hat{P} attraverso i suoi elementi matriciali

$$\langle x | \hat{P} | x' \rangle \equiv P(x) \delta(x - x'), \tag{4.1.7}$$

dove

$$P(x) = -\frac{1}{4}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta,\mu\nu} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}h_{,\mu}^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta,\nu} - \frac{1}{4}h_{,\nu}^{\mu\alpha}g^{\beta\gamma}h_{\alpha\beta,\mu} - \frac{1}{16}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}g^{\kappa\lambda}h_{\alpha\beta,\mu}h_{\kappa\lambda;\nu} - V$$

Segue che l'operatore \hat{O} può essere riscritto come

$$\hat{O} = -\square - \hat{s}[h_{\mu\nu}, V], \quad (4.1.8)$$

dove

$$\hat{s}[h_{\mu\nu}, V] = \hat{h} + \hat{\Gamma} + \hat{P}.$$

4.2 Soluzione perturbativa del nucleo di calore

Si è dimostrato nella sezione precedente che l'operatore \hat{O} può essere espresso come nella (4.1.8). Nel caso in cui \hat{s} può essere vista come piccola correzione di \square possiamo trovare una soluzione perturbativa dell'operatore nucleo dell'equazione del calore,

$$\hat{K}(\tau) = \hat{K}_0(\tau) + \hat{K}_1(\tau) + \hat{K}_2(\tau) + \dots, \quad (4.2.1)$$

dove $\hat{K}_0(\tau)$ sono operatori di ordine n in \hat{s} . Ora si sostituisce l'espansione perturbativa nell'equazione del calore

$$\frac{d\hat{K}}{d\tau} = (\square + \hat{s})\hat{K},$$

e all'ordine più basso si ottiene

$$\frac{d\hat{K}_0}{d\tau} = \square\hat{K}_0, \quad (4.2.2)$$

e invece per i termini di ordine successivo, cioè di primo ordine, si ottiene

$$\frac{d\hat{K}_1}{d\tau} = \square\hat{K}_1 + \hat{s}\hat{K}_0. \quad (4.2.3)$$

In questa sede ci si limiterà a calcolare termini fino al primo ordine. Una volta imposto le condizioni iniziali delle equazioni (4.2.2) e (4.2.3) come

$$\hat{K}_0(0) = \hat{I}, \quad \hat{K}_1(0) = 0, \quad (4.2.4)$$

si ha come soluzione della (4.2.2)

$$\hat{K}(\tau) = \exp(\tau\square). \quad (4.2.5)$$

Nella risoluzione dell'equazione differenziale che coinvolgono operatori è bene tenere a mente che in generale non commutano. Si risolve l'equazione (4.2.3) posto

$$\hat{K}_1(\tau) = \hat{K}_0(\tau)\hat{C}(\tau), \quad (4.2.6)$$

dove $\hat{C}(\tau)$ è un operatore che deve essere determinato, l'equazione (4.2.3) diventa

$$\frac{d\hat{K}_0(\tau)}{d\tau}\hat{C}(\tau) + \hat{K}_0(\tau)\frac{d\hat{C}(\tau)}{d\tau} = \square\hat{K}_0(\tau)\hat{C}(\tau) + \hat{s}\hat{K}_0(\tau).$$

Ora ricordando che la \hat{K}_0 risolve l'equazione (4.2.2) è immediato vedere che l'equazione sopra diventa

$$\hat{K}_0(\tau)\frac{d\hat{C}(\tau)}{d\tau} = \hat{s}\hat{K}_0(\tau). \quad (4.2.7)$$

Moltiplicando ad ambo i lati a sinistra per l'inversa di $\hat{K}_0(\tau)$ e integrando si ottiene

$$\hat{C}(\tau) = \int_0^\tau \hat{K}_0^{-1}(\tau')\hat{s}\hat{K}_0(\tau')d\tau'. \quad (4.2.8)$$

Per via delle condizioni iniziali (4.2.4), si ha che $\hat{C}(0) = 0$ deve valere necessariamente, di conseguenza si fa partire integrazione in $\tau' = 0$. Si può notare che per via della (4.2.5) si ha

$$\hat{K}_0(\tau)\hat{K}_0(\tau') = \hat{K}_0(\tau + \tau'), \quad \tau > 0, \tau' > 0$$

per cui l'inversa del nucleo di calore $\hat{K}_0^{-1}(\tau) = \hat{K}_0(-\tau)$, che però è indefinita per molte funzioni, perché con argomento $\tau < 0$ è solo applicabile a funzioni che decadono molto rapidamente per $|x|$ molto grandi. Si potrebbe essere tratti in inganno e pensare che quindi non è possibile costruire una soluzione per $\hat{K}_1(\tau)$. Basta però notare che inserendo la soluzione di $\hat{C}(\tau)$ nella (4.2.6) si ottiene

$$\begin{aligned} \hat{K}_1(\tau) &= \int_0^\tau \hat{K}_0(\tau)\hat{K}_0^{-1}(\tau')\hat{s}\hat{K}_0(\tau')d\tau' \\ &= \int_0^\tau \hat{K}_0(\tau)\hat{K}_0(-\tau')\hat{s}\hat{K}_0(\tau')d\tau' = \int_0^\tau \hat{K}_0(\tau - \tau')\hat{s}\hat{K}_0(\tau')d\tau', \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

dove quando $\tau \geq 0$ abbiamo che $\tau - \tau' \geq 0$ e $\tau' \geq 0$.

4.3 Gli elementi matriciali

Lo scopo è quello di ottenere la traccia del nucleo dell'equazione del calore. Per poter fare ciò prima si devono calcolare gli elementi di matrice di \hat{K}_0 e \hat{K}_1 . Ricordando la (4.2.5), si ottiene

$$\langle x|\hat{K}_0(\tau)|y\rangle = \langle x|e^{\tau\Box_x}|y\rangle = e^{\tau\Box_x}\delta(x-y),$$

dove \Box_x indica che le derivate dell'operatore di Laplace sono da fare rispetto ad x e non rispetto ad y . Si può ridurre gli elementi di matrice ad un integrale Gaussiano introducendo la rappresentazione di Fourier della Delta di Dirac in 2ω dimensioni,

$$\delta(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^{2\omega}} \int \exp(ik(x-y))d^{2\omega}k,$$

ed espandendo in serie di potenze $e^{\tau\Box_x}$. In effetti si ottiene

$$\begin{aligned} \langle x|\hat{K}_0(\tau)|y\rangle &= e^{\tau\Box_x}\delta(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^{2\omega}} \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tau\Box_x)^n}{n!} \right] \exp(ik(x-y))d^{2\omega}k \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{2\omega}} \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\tau k^2)^n}{n!} \right] \exp(ik(x-y))d^{2\omega}k \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{2\omega}} \int \exp(ik(x-y) - \tau k^2)d^{2\omega}k, \end{aligned}$$

che come può essere calcolato usando la formula (A.1.3), già incontrata in calcoli precedenti dimostrata nell'Appendice A. Si ottiene quindi il risultato

$$\langle x|\hat{K}_0(\tau)|y\rangle = \frac{1}{(2\tau)^{2\omega}} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4\tau}\right], \quad (4.3.1)$$

che è uguale alla funzione di Green dell'equazione del calore in 2ω dimensioni. Per arrivare agli elementi di matrice di \hat{K}_1 saranno necessari calcoli più lunghi e più difficili. Visto la soluzione trovata per \hat{K}_1 , si può notare che è lineare in \hat{s} . Ricordando che $\hat{s} = \hat{h} + \hat{\Gamma} + \hat{P}$ possiamo riscrivere \hat{K}_1 come

$$\hat{K}_1 = \hat{K}_1^h + \hat{K}_1^\Gamma + \hat{K}_1^P,$$

ed essendo che per la traccia ci servono solo gli elementi diagonali ci calcoliamo

$$\langle x|\hat{K}_1|x\rangle = \langle x|\hat{K}_1^h|x\rangle + \langle x|\hat{K}_1^\Gamma|x\rangle + \langle x|\hat{K}_1^P|x\rangle.$$

Necessariamente si incomincia a calcolare col termine riguardante \hat{K}_1^P , attraverso cui potranno essere calcolati anche i altri due termini. Usando il risultato ottenuto per \hat{K}_0 (4.3.1) e la definizione (4.1.7) si ottiene

$$\begin{aligned}
\langle x | \hat{K}_1^P(\tau) | x \rangle &= \int_0^\tau d\tau' \langle x | \hat{K}_0(\tau - \tau') \hat{P} \hat{K}_0(\tau') | x \rangle \\
&= \int_0^\tau d\tau' d^{2\omega} y d^{2\omega} z \langle x | \hat{K}_0(\tau - \tau') | y \rangle \langle y | \hat{P} | z \rangle \langle z | \hat{K}_0(\tau') | x \rangle \\
&= \int_0^\tau d\tau' d^{2\omega} y \langle x | \hat{K}_0(\tau - \tau') | y \rangle P(y) \langle y | \hat{K}_0(\tau') | x \rangle \\
&= \int_0^\tau d\tau' d^{2\omega} y \frac{\exp \left[-\frac{(x-y)^2}{4(\tau-\tau')} - \frac{(x-y)^2}{4\tau'} \right]}{[4\pi(\tau - \tau')]^\omega (4\pi\tau')^\omega} P(y) \\
&= \int_0^\tau d\tau' d^{2\omega} y \frac{\exp \left[-\tau \frac{(x-y)^2}{4(\tau-\tau')} \right]}{[4\pi(\tau - \tau')]^\omega (4\pi\tau')^\omega} P(y),
\end{aligned}$$

ora ricordando la (4.3.1) è facile verificare che

$$e^{\tau \square_x} P(x) = \int d^{2\omega} y \frac{1}{(4\pi\tau)^\omega} \exp \left[-\frac{(x-y)^2}{4\tau} \right] P(y),$$

e quindi si ottiene

$$\langle x | \hat{K}_1^P(\tau) | x \rangle = \frac{1}{(4\pi\tau)^\omega} \int_0^\tau d\tau' \exp \left[\frac{\tau'(\tau - \tau')}{\tau} \square_x \right] P(x). \quad (4.3.2)$$

Si può ottenere questo stesso risultato introducendo la trasformata di Fourier,

$$P(z) \equiv \frac{1}{(2\pi)^\omega} \int d^{2\omega} k e^{ik \cdot z} p(k)$$

e calcolando gli elementi matriciali $\langle x | \hat{K}_P^1 | y \rangle$ per passare successivamente al limite per $y \rightarrow x$. Si ha quindi

$$\langle x | \hat{K}_1^P(\tau) | y \rangle = \int_0^\tau d\tau' \int d^{2\omega} z \int \frac{d^{2\omega} k}{(2\pi)^\omega} \frac{\exp \left[-\frac{(x-z)^2}{4(\tau-\tau')} - \frac{(z-y)^2}{4\tau'} + ik \cdot x \right]}{[4\pi(\tau - \tau')]^\omega (4\pi\tau')^\omega} p(k),$$

Usando la (A.3.1) per calcolare integrale Gaussiano si ottiene

$$\begin{aligned} \langle x | \hat{K}_1^P(\tau) | y \rangle &= \frac{\exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4\tau}\right]}{(4\pi\tau)^\omega} \int_0^\tau d\tau' \\ &\times \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^\omega} \exp\left[-\frac{\tau'(\tau-\tau')}{\tau}k^2 + \frac{1}{\tau}ik \cdot (x\tau' + y(\tau-\tau'))\right] p(k), \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

che nel limite per $y \rightarrow x$ riproduce il risultato (4.3.2). Si è fatto questo ulteriore sforzo per poter usare quest'ultimo risultato nel calcolare degli elementi matriciali di \hat{K}_1^Γ e \hat{K}_1^h . Si viene ora a calcolare l'elemento matriciale di \hat{K}_1^Γ . Ricordando la sua definizione (4.1.6) si ha che

$$\begin{aligned} \langle x | \hat{K}_1^\Gamma(\tau) | y \rangle &= \int_0^\tau d\tau' \int d^{2\omega}z \langle x | \hat{K}_0(\tau-\tau') | z \rangle h_{,\nu}^{\mu\nu}(z) \frac{\partial}{\partial z^\mu} \langle z | \hat{K}_0(\tau') | y \rangle \\ &= -\frac{\partial}{\partial y^\mu} \int_0^\tau d\tau' \int d^{2\omega}z \langle x | \hat{K}_0(\tau-\tau') | z \rangle h_{,\nu}^{\mu\nu}(z) \langle z | \hat{K}_0(\tau') | y \rangle, \end{aligned}$$

dove si è fatto uso del fatto che essendo $\langle z | \hat{K}_0(\tau') | y \rangle$ dipendente da $(z-y)$ si può cambiare la derivata rispetto a z con meno quella rispetto a y . Rimpiazzando $h_{,\nu}^{\mu\nu}(z)$ con $P(z)$ si riottiene la (4.3.3) e quindi usando la (4.3.2) si ottiene infine

$$\begin{aligned} \langle x | \hat{K}_1^\Gamma(\tau) | x \rangle &= -\lim_{y \rightarrow x} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \langle x | \hat{K}_1^P(\tau) | y \rangle \Big|_{P(z) \rightarrow h_{,\nu}^{\mu\nu}(z)} \\ &= -\frac{1}{(4\pi\tau)^\omega} \int_0^\tau d\tau' \exp\left[\frac{\tau'(\tau-\tau')}{\tau} \square_x\right] \frac{\tau-\tau'}{\tau} h_{,\nu}^{\mu\nu}(z). \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Gli elementi matriciali $\langle x | \hat{K}_1^h(\tau) | x \rangle$ possono essere ottenuti in modo simile, e sono

$$\begin{aligned} \langle x | \hat{K}_1^h(\tau) | x \rangle &= \int d\tau' \frac{\exp\left[\frac{\tau'(\tau-\tau')}{\tau} \square_x\right]}{(4\pi\tau)^\omega} \left[-\frac{\delta_{\mu\nu} h^{\mu\nu}(x)}{2\tau} + \left(\frac{\tau-\tau'}{\tau}\right)^2 h_{,\mu\nu}^{\mu\nu}(x) \right]. \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Combinandola (4.3.2), la (4.3.4) e la (4.3.5) si ottengono gli elementi matriciali

$$\begin{aligned} \langle x | \hat{K}_1(\tau) | x \rangle &= \frac{1}{(4\pi\tau)^\omega} \int_0^\tau d\tau' \exp\left[\frac{\tau'(\tau-\tau')}{\tau} \square_x\right] \\ &\times \left[P(x) - \frac{1}{2\tau} \delta_{\mu\nu} h^{\mu\nu}(x) - \frac{\tau'(\tau-\tau')}{\tau^2} h_{,\mu\nu}^{\mu\nu}(x) \right], \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

dove sono stati trascurati termini di ordine superiori in h e si è posto

$$P(x) = \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \square h^{\mu\nu}(x) - V(x) + o(h^2).$$

4.4 La Traccia

Giunti ad avere calcolato gli elementi matriciali necessari si può calcolare la traccia dell'operatore nucleo dell'equazione del calore che è uguale a

$$Tr \hat{K}(\tau) = \int d^{2\omega} x \langle x | (\hat{K}_0 + \hat{K}_1) | x \rangle + o(\hbar^2).$$

Espandendo l'esponenziale nell'equazione (4.3.6) in serie

$$\exp \left[\frac{\tau'(\tau - \tau')}{\tau} \square_x \right] = \hat{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\tau'(\tau - \tau')}{\tau} \square_x \right)^n,$$

è possibile integrare termini a termine in τ' e facendo altre considerazioni e pochi passaggi di calcoli, che in questa sede non vengono fatte, facendo riferimento hai conti ottenuti da V.Mukhanov e S.Winitzki¹, si ottiene infine come risultato finale della traccia del operatore nucleo dell'equazione del calore

$$\begin{aligned} Tr \hat{K} &= \int d^{2\omega} x \langle x | (\hat{K}_0 + \hat{K}_1) | x \rangle \\ &= \frac{1}{(4\pi\tau)^\omega} \int d^{2\omega} \sqrt{g} \left[1 + \left(\frac{R}{6} - V \right) + o(\hbar^2) \right], \end{aligned}$$

dove R è lo scalare di Ricci.

¹3, pp. 176, 263, 264.

Conclusioni

Nella ricerca dell'impiego della Gamma di Eulero e della Zeta di Riemann si è arrivati a trattare l'integrale sui cammini di Feynmann e l'azione efficace. L'integrale sui cammini di Feynmann, che solo dopo l'avvento della teoria dei campi quantistici riescono ad avere successo, poteva, senza entrare nell'ottica della teoria dei campi, essere usato anche per calcolare per esempio gli elementi matriciali dell'oscillatore forzato trattato, ottenendo risultati in accordo con quanto ottenuto con i metodi operatoriali. Nel percorso dedicato agli integrali funzionali si è arrivati anche a conoscere il metodo della rotazione di Wick. Nel caso di questo elaborato gli integrali funzionali hanno permesso soprattutto di introdurre nel modo più semplice possibile l'azione efficace.

Oltre al formalismo di Dirac che è stato il punto fermo di questo percorso, si può notare che più volte si è avuto a che fare con il formalismo Lagrangiano e con quello Hamiltoniano. Il primo viene usato da Feynmann originariamente per introdurre gli integrali sui cammini, il secondo sta alla base delle descrizioni della meccanica quantistica ottenute prima dei tempi di Feynmann. L'impiego dei formalismi forniti dalla meccanica analitica non si limita certo a questi due casi e si estende su tanti campi della fisica.

Come base di partenza della meccanica analitica può essere considerata l'azione. Visto l'importanza dell'azione per le teorie della fisica si può supporre che si è cercato di estenderla su nuovi campi della fisica e questo ha portato all'azione efficace.

Appendix A

Calcolo di integrali Gaussiani

In questa Appendice saranno calcolati tre integrali che sono riconducibili ad un integrale di una Gaussiana.

A.1 Primo integrale

Si ha che un integrale Gaussiano è valutabile come segue

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x-x_0)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad (\text{A.1.1})$$

Questo risultato può essere esteso ad un'integrazione su uno spazio n dimensionale e si ottiene come risultato generale

$$\int e^{-\alpha(x-x_0)^2} d^n x = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{n}{2}}. \quad (\text{A.1.2})$$

Premesso questo diventano calcolabili anche integrali del tipo

$$\int e^{-\alpha x^2 + \beta x} d^n x.$$

Il metodo che si userà per fare ciò è quello di completare il quadrato del argomento dell'esponenziale. Si può notare che

$$-\alpha x^2 + \beta x = -\alpha \left(x - \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{\beta^2}{4\alpha},$$

rivalutando l'esponenziale tenendo conto di quanto scritto sopra l'integrale in questione si trasforma in

$$e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \int e^{-\alpha \left(x - \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2} d^n x = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}},$$

dove si è fatto uso della [A.1.2](#). Quindi si è ottenuto una formula del tutto generale

$$\int e^{-\alpha x^2 + \beta x} d^n x = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \quad (\text{A.1.3})$$

A.2 Secondo integrale

Un integrale del tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left[-\frac{(x - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2} \right], \quad (\text{A.2.1})$$

il cui integrando è il prodotto di due Gaussiane con con la loro media e deviazione standard. L'argomento dell'esponenziale si può riscrivere come

$$\begin{aligned} -\frac{(x - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2} &= -\left[\frac{x^2 - 2x \frac{(\mu_1 \sigma_2^2 + \mu_2 \sigma_1^2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} + \frac{\mu_1^2 \sigma_2^2 + \mu_2^2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{\frac{2\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right] \\ &= -\left[\frac{\left(x - \frac{\sigma_2^2 \mu_1 + \sigma_1^2 \mu_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)^2}{2 \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} + \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \right], \end{aligned}$$

quindi l'integrale [\(A.2.1\)](#) diventa

$$\begin{aligned} \exp \left[-\frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \right] \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left[\frac{\left(x - \frac{\sigma_2^2 \mu_1 + \sigma_1^2 \mu_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)^2}{2 \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right] \\ = \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \exp \left[-\frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \right]. \end{aligned}$$

Si è ottenuto per cui la formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left[-\frac{(x - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2} \right] = \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \exp \left[-\frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \right] \quad (\text{A.2.2})$$

A.3 Terzo integrale

In questo paragrafo si calcola un integrale simile al integrale però in n dimensioni [\(A.2.1\)](#) della forma seguente

$$\int d^n x \exp \left[-\alpha |x - u|^2 - \beta |x - v|^2 + 2x \cdot w \right], \quad (\text{A.3.1})$$

Sviluppando l'argomento dell'esponenziale si ottiene

$$\begin{aligned} & -\alpha |x - u|^2 - \beta |x - v|^2 + 2x \cdot w \\ = & -(\alpha + \beta) |x| + 2x \cdot (\alpha u + \beta v + w) - (\alpha u^2 + \beta v^2) \\ \equiv & -(\alpha + \beta) |x - p| + \gamma, \end{aligned}$$

dove

$$p \equiv \frac{\alpha u + \beta v + w}{\alpha + \beta}, \quad \gamma \equiv (\alpha + \beta) |p|^2 - (\alpha |u|^2 + \beta |v|^2).$$

L'integrale (A.3.1) quindi è uguale a

$$\int d^n x \exp [-(\alpha + \beta) |x - p| + \gamma] = \left(\frac{\pi}{\alpha + \beta} \right)^{\frac{n}{2}} e^\gamma, \quad (\text{A.3.2})$$

dove per il calcolo del integrale si è fatto uso della (A.1.2).

Appendix B

Calcolo dell'elemento matriciale $\langle p|q\rangle$

B.1 L'elemento matriciale $\langle q_1|\hat{p}|q_2\rangle$

Prima di poter calcolare l'elemento matriciale $\langle p|q\rangle$ è necessario calcolare l'elemento matriciale $\langle q_1|\hat{p}|q_2\rangle$. L'operatore posizione \hat{q} ha uno spettro continuo e i suoi autovalori sono tutte le possibili coordinate generalizzate. Essendo quindi che l'operatore non ha autoket appartenenti ha uno spazio di Hilbert separabile è necessario estendere lo spazio di Hilbert ad uno spazio vettoriale che lo contiene e introdurre ket "generalizzati" $|q\rangle$ come autoket dell'operatore \hat{q} . Assumendo che sia una base completa abbiamo che

$$\hat{I} = \int dq |q\rangle\langle q|,$$

e

$$\langle q|q'\rangle = \delta(q - q').$$

Ora sfruttando le relazioni di commutazione

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$$

si trova che

$$\langle q_1|[\hat{q}, \hat{p}]|q_2\rangle = \langle q_1|i\hbar|q_2\rangle = i\hbar\delta(q - q'),$$

e inoltre

$$\langle q_1|[\hat{q}, \hat{p}]|q_2\rangle = \langle q_1|(\hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q})|q_2\rangle = (q_1 - q_2) \langle q_1|\hat{p}|q_2\rangle.$$

Denotando con

$$F(q_1, q_2) \equiv \langle q_1|\hat{p}|q_2\rangle,$$

abbiamo ottenuto

$$F(q_1, q_2)(q_1 - q_2) = i\hbar\delta(q_1 - q_2).$$

Se si introduce una nuova variabile $q \equiv q_1 - q_2$, si ottiene facendo la trasformata di Fourier su entrambi i lati dell'uguaglianza

$$i\hbar = \int dq F(q_1, q_1 - q) q e^{-iqp} = i \frac{\partial}{\partial p} \int dq F(q_1, q_1 - q) q e^{-iqp},$$

integrando su p si trova

$$p\hbar + C(q_1) = \int dq F(q_1, q_1 - q) e^{-ipq}.$$

Ora si può fare l'inversa della trasformata di Fourier che porta a

$$\begin{aligned} F(q_1, q_2) &= \frac{1}{2\pi} \int dp (p\hbar + C(q_1)) e^{ipq} = \frac{1}{2\pi} \int dp (p\hbar + C(q_1)) e^{ip(q_1 - q_2)} \\ &= [-i\hbar \frac{\partial}{\partial q_1} + C] \frac{1}{2\pi} \int dp e^{ip(q_1 - q_2)} = [-i\hbar \frac{\partial}{\partial q_1} + C] \delta(q_1 - q_2). \end{aligned}$$

Per cui si è ottenuto

$$\langle q_1 | \hat{p} | q_2 \rangle = -i\hbar \delta'(q_1 - q_2) + C(q_1) \delta(q_1 - q_2).$$

Ora ridefinendo l'operatore \hat{p} si può eliminare il termine proporzionale a $\delta(q_1 - q_2)$ e quindi infine si è ottenuto

$$\langle q_1 | \hat{p} | q_2 \rangle = -i\hbar \delta'(q_1 - q_2). \quad (\text{B.1.1})$$

B.2 L'elemento matriciale $\langle p | q \rangle$

Ora si può calcolare $\langle p | q \rangle$. Si ha che

$$\langle p | \hat{p} | q \rangle = p \langle p | q \rangle,$$

e

$$\langle p | \hat{p} | q \rangle = \langle p | \left[\int dq_1 |q_1\rangle \langle q_1| \right] \hat{p} | q \rangle = -i\hbar \int dq_1 \langle p | q_1 \rangle \delta'(q_1 - q) = i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \langle p | q \rangle,$$

dove si è fatto uso della (B.1.1). Ricapitolando si è ottenuto l'equazione

$$p \langle p | q \rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \langle p | q \rangle$$

Che ha come soluzione

$$\langle p|q\rangle = C_1(p) \exp\left(-i\frac{pq}{\hbar}\right). \quad (\text{B.2.1})$$

In modo simile se si considera l'elemento matriciale $\langle p|\hat{q}|q\rangle$, avendo prima costruito una base $|p\rangle$ dell'operatore \hat{p} , si ottiene

$$q \langle p|q\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \langle p|q\rangle, \quad (\text{B.2.2})$$

che ha come soluzione

$$\langle p|q\rangle = C_2(q) \exp\left(-i\frac{pq}{\hbar}\right). \quad (\text{B.2.3})$$

Confrontando la (B.2.1) con la (B.2.3) si vede che sono solo compatibili se $C_1(p) = C_2(q) = \text{cost}$, e scegliendo per motivi di normalizzazione $C = (2\pi\hbar)^{-\frac{1}{2}}$ si ha come risultato finale

$$\langle p|q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left[-\frac{ipq}{\hbar}\right]. \quad (\text{B.2.4})$$

Bibliografia

- [1] Nico M Temme. *Special Functions: An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics*. John Wiley & Sons, 1996.
- [2] Harry Bateman. *Higher Transcendental Functions [Volumes I-III]*. McGraw-Hill Book Company, 1953.
- [3] Viatcheslav Mukhanov and Sergei Winitzki. *Introduction to quantum effects in gravity*. Cambridge University Press, 2007.
- [4] E. C. Titchmarsh revised by D.R. Heath-Brown. *The theory of the Riemann zeta-function*. Oxford University Press, 1986.
- [5] Fiorenzo Bastianelli. *Appunti sugli integrali funzionali (path integrals)*. 2008. URL: <http://www-th.bo.infn.it/people/bastianelli/path-integrals-09.pdf>.
- [6] Roberto Zucchini. *Quantum Mechanics: Lecture notes*. Università di Bologna, 2018.
- [7] Paul Bromiley. “Products and convolutions of Gaussian probability density functions”. In: *Tina-Vision Memo* 3.4 (2003), pp. 1–3.