Alma Mater Studiorum
Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Astronomia

Dipartimento di Fisica e Astronomia

ENERGIA GRAVITAZIONALE IN ASTROFISICA

Tesi di laurea

Relatore:
**Chiar.mo Prof.
Daniele Dallacasa**

Candidato:
Giovanni Francesco Baldini

Sessione II
Anno Accademico 2017/2018

Indice

Sommario

Con il termine energia gravitazionale si fa riferimento all'energia potenziale posseduta da un corpo dotato di massa all'interno di un campo gravitazionale.
In questa trattazione presenterò una breve introduzione alla teoria del potenziale rimanendo nella teoria classica di gravitazione Newtoniana: ricaveremo l'equazione di Poisson e in seguito un'espressione per l'energia potenziale.
Successivamente dedurremo il teorema del viriale, che fornisce una relazione tra alcune energie in gioco in un sistema all'equilibrio ed è un teorema estremamente importante in astrofisica e trova numerosissime applicazioni.
Poi, analizzeremo il caso di singola particella che spiraleggia attorno ad un buco nero, per mostrare che nei Nuclei Galattici Attivi, Quasar e in alcuni classi di stelle binarie collassate l'estrazione dell'energia gravitazionale dal materiale che sta accrescendo su questi oggetti è un meccanismo potentissimo per la produzione di radiazione elettromagnetica ad alte energie.
I calcoli ci mostreranno infatti che l'effecienza di conversione da massa in energia può raggiungere il 40%, mentre, per confronto, l'energia prodotta dalle reazioni di fusioni nucleare, nel caso più efficiente, di idrogeno, è circa del 0.7%.
Nella seconda applicazione studieremo il problema dell'instabilità di Jeans, in cui considereremo il caso di una nube molecolare sferica autogravitante il cui collasso porta alla formazione di stelle.
Infine, applicheremo il teorema del viriale in astrofisica stellare, e vedremo come è utile per descriverne l'evoluzione ed altre quantità di interesse.
I vari casi studiato saranno solo una breve e generale trattazione o introduzione al problema, data l'impossibilità di approfondirne i particolari che esulano dallo scopo di questo lavoro.

Capitolo 1

Teoria

1.1 Teoria del potenziale

La forza totale agente su una particella di massa m nella posizione $\mathbf{x}$ generata dall'attrazione gravitazionale di una distribuzione di massa $\rho(\mathbf{x}')$ è:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = m\mathbf{g}(\mathbf{x}) \tag{1.1}$$

dove

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \equiv G \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \rho(\mathbf{x}') \tag{1.2}$$

è il **campo gravitazionale**, la forza per unità di massa.
Se definiamo il **potenziale gravitazionale** come

$$\phi(\mathbf{x}) \equiv -G \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|}, \tag{1.3}$$

e notiamo che

$$\nabla_{\mathbf{x}} \left(\frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \right) = \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \tag{1.4}$$

possiamo scrivere $\mathbf{g}$ come

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \int d^3\mathbf{x}' \, \frac{G\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \tag{1.5}$$

$$= -\nabla\phi \tag{1.6}$$

Abbiamo dunque espresso il campo come il gradiente del potenziale.
Ora, se consideriamo la divergenza dell'equazione 1.2, avremo

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = G \int d^3\mathbf{x}' \; \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) \rho(\mathbf{x}'). \tag{1.7}$$

e si può mostrare che

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) = 0 \quad \forall \quad (\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}). \tag{1.8}$$

Quindi ogni contributo all'integrale 1.7 deve provenire dal punto $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$, e possiamo restringere il volume di integrazione ad una sfera di raggio h centrata in questo punto. Inoltre, per h piccolo a piacere, la densità sarà costante attraverso questo volume e possiamo portare $\rho(\mathbf{x}')$ fuori dall'integrale.
Gli altri termini possono essere riscritti nel seguente modo:

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = G\rho(\mathbf{x}') \int_{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}| \le h} d^3\mathbf{x}' \, \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) \tag{1.9}$$

$$= -G\rho(\mathbf{x}') \int_{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}| = h} d^2\mathbf{S}' \cdot \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \tag{1.10}$$

Dove abbiamo utilizzato il teorema della divergenza per convertire l'integrale di volume in un integrale di superficie.
Ora sulla sfera di raggio h abbiamo $d^2\mathbf{S}' = (\mathbf{x}' - \mathbf{x})h \, d^2\Omega$, dove $d^2\Omega$ è un elemento infinitesimo di angolo solido. Quindi l'equazione 1.10 diventa

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = -G\rho(\mathbf{x}) \int d^2\Omega = -4\pi G\rho(\mathbf{x}) \tag{1.11}$$

Se sostituiamo dall'equazione 1.5 per $\nabla \cdot \mathbf{g}$, otteniamo l'**equazione di Poisson**, che lega il potenziale ϕ alla densità ρ

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \tag{1.12}$$

Questa equazione è molto utile perchè permette di calcolare il potenziale ϕ e di conseguenza il campo $\mathbf{g}$ data una distribuzione di densità ρ e delle condizioni al contorno appropriate.
Siccome $\mathbf{g}$ è determinato dal gradiente del potenziale, il campo gravitazionale è conservativo, e il lavoro fatto contro le forze gravitazionali per assemblare una distribuzione continua arbitraria di massa $\rho(\mathbf{x})$ è indipendente dal cammino che si è scelto per assemblarla ma dipende solo dai due estremi, ed esso corrisponde all'**energia potenziale** della distribuzione di massa.
É possibile ora trovare un'espressione per l'energia potenziale, e una strada è la seguente: supponiamo che della massa sia già posizionata ed è quindi definito $\rho(\mathbf{x})$ e $\phi(\mathbf{x})$. Se aggiungiamo un elemento infinitesimo δm dall'infinito alla posizione x, il lavoro compito è $\delta m\phi(\mathbf{x})$ e l'incremento $\delta\rho(\mathbf{x})$ è una variazione nell'energia potenziale:

$$\delta W = \int d^3\mathbf{x} \, \delta\rho(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) \tag{1.13}$$

e secondo l'equazione di Poisson

$$\delta W = \frac{1}{4\pi G} \int d^3\mathbf{x} \, \phi\nabla^2(\delta\phi) \tag{1.14}$$

utilizzando il teorema della divergenza possiamo riscrivere

$$\delta W = \frac{1}{4\pi G} \int \phi\nabla(\delta\phi) \cdot d^2\mathbf{S} - \frac{1}{4\pi G} \int d^3\mathbf{x} \, \nabla\phi \cdot \nabla(\delta\phi) \tag{1.15}$$

L'integrale di superficie scompare poichè l'integrando $\propto r^{-3}$ mentre l'area totale $\propto r^2$, il secondo integrale invece possiamo trasformarlo attraverso un'identità e integrando su tutti i contributi δW avremo quindi un'espressione per l'energia potenziale

$$W = -\frac{1}{8\pi G}\left(\int d^3\mathbf{x}\,|\nabla\phi|^2\right) \tag{1.16}$$

Applicando nuovamente il teorema della divergenza e sostituendo l'equazione di Poisson si può ottenere un'espressione alternativa

$$W = \frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}\,\rho(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}). \tag{1.17}$$

Infine, presentiamo il *tensore energia potenziale di Chandrasekhar*, da cui dedurremo qualche utile proprietà. Esso è definito come

$$W_{jk} = \int d^3\mathbf{x}\,\rho(\mathbf{x})x_j\frac{\partial\phi}{\partial x_k} \tag{1.18}$$

Omettiamo ora alcuni calcoli per arrivare all'espressione

$$W_{jk} = -\frac{1}{2}G\int d^3\mathbf{x}\int d^3\mathbf{x}'\,\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')\frac{(x'_j - x_j)(x'_k - x_k)}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \tag{1.19}$$

Da questa notiamo innanzitutto che il tensore $\mathbf{W}$ è simmetrico, cioè $W_{jk} = W_{kj}$. Se ora prendiamo la traccia dell'equazione 1.19, avremo

$$\text{traccia}(\mathbf{W}) = \sum_{j=1}^{3} W_{jj} = \frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}\,\rho(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) \tag{1.20}$$

Confrontandola con l'equazione 1.17 notiamo che la traccia del tensore $\mathbf{W}$ è l'energia potenziale gravitazionale. Se invece calcoliamo la traccia di 1.18 troviamo

$$W = -\int d^3\mathbf{x}\,\rho\mathbf{x}\cdot\nabla\phi \tag{1.21}$$

che fornisce un'altra espressione utile per l'energia potenziale di un corpo.
Si può mostrare che $\mathbf{W}$ per un sistema sferico è diagonale, cioè $W_{jk} = 0$ per $j \neq k$ e ha la forma

$$W_{jk} = \frac{1}{3}W\delta_{jk} \tag{1.22}$$

dove δ_{jk} è la delta di Kronecker.
L'espressione più semplice per l'energia potenziale in questa simmetria si può ottenere dall'equazione 1.21 e ha la forma

$$W = -4\pi G\int_0^\infty dr\,r\rho(r)M(r) \tag{1.23}$$

1.1.1 Sistemi sferici

Il caso di simmetria sferica è molto importante in astrofisica poichè oltre a presentare alcune semplificazioni nei calcoli, molti problemi trattano sistemi sferici, più o meno idealizzati.
A questo scopo Newton ha fornito due teoremi fondamentali che ci permettono di calcolare il potenziale di una distribuzione qualsiasi di materia dotata di questa simmetria.

I teorema di Newton. La forza gravitazionale esercitata da un guscio sferico avente densità uniforme su un corpo posto al suo interno è nulla.

II teorema di Newton. La forza gravitazionale esercitata su un corpo che si trova all'esterno di una distribuzione di materia sferica è la stessa che avrebbe se tutta la materia fosse concentrata nel suo centro.

Non ci occuperemo delle dimostrazioni[1], ben note in fisica, ma ci limitiamo ad osservare che un importante corollario del I teorema è che il potenziale all'interno di un guscio sferico è costante, se è vero che il campo è nullo, essendo $\nabla\phi = -\mathbf{g}$, ed è facile calcolarlo attraverso l'espressione 1.3 per $\mathbf{r}$ in un punto interno qualsiasi. Ponendo $\mathbf{r}$ nel centro, si ha immediatamente

$$\phi = -\frac{GM}{R} \tag{1.24}$$

Un'altra importante proprietà di una distribuzione sferica è la sua **velocità circolare** $v_c(r)$, definita come la velocità di una massa di prova (con massa trascurabile) in un'orbita circolare ad un raggio r. Dal secondo teorema di Newton è facile ottenere la forza gravitazionale

$$\mathbf{F}(r) = -\frac{GM(r)}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r \tag{1.25}$$

e quindi ora basta uguagliare la forza $|\mathbf{F}|$ all'accelerazione centripeta v_c^2/r

$$v_c^2 = r|\mathbf{F}| = r\frac{d\phi}{dr} = \frac{GM(r)}{r} \tag{1.26}$$

Infine, un'ultima quantità di interesse è la **velocità di fuga**, associata ad un qualsiasi corpo massivo, e definita come[2]

$$v_e(r) \equiv \sqrt{2\phi(r)} \tag{1.27}$$

Un qualsiasi corpo in un campo gravitazionale può allontanarsi indefinitamente dal campo solo se ha un'energia cinetica positiva $\frac{1}{2}v^2$ che eccede il valore assoluto della sua energia potenziale (negativa).
Nel caso dei buchi neri la velocità di fuga supera la velocità della luce e neanche quest'ultima riesce a sfuggire dall'attrazione gravitazionale, ed è questa peculiarità che da il nome a questa classe di oggetti.[3]

[1]Newton ha impiegato circa dieci anni per fornire una dimostrazione del secondo teorema
[2]Questo risultato è corretto solo se il potenziale $\phi(r) \to 0$ per $r \to \infty$
[3]Una trattazione con l'utilizzo della teoria della relatività generale sarebbe molto più rigorosa ma porterebbe allo stesso risultato

1.2 Teorema del viriale

Il concetto di viriale è stato introdotto nel XIX secolo per indicare la quantità

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_i$$

che è l'energia potenziale di un sistema di N particelle.
Una completa e chiara trattazione del teorema richiederebbe molte più pagine di quelle a disposizione, per questo riassumerò alcuni concetti matematici e fisici che lo anticipano per poterci subito ricondurre ad una forma a noi famigliare ed esplicativa.
Lo spazio delle fasi associato ad un sistema di N particelle è $\Re^{6N}$, che indicheremo con Ω, e ad ogni istante il sistema è completamente rappresentato da un punto in questo spazio che viene detto *microstato*. Per il teorema di esistenza ed unicità le particelle sono distinguibili e cambiandone due di posizione il punto in Ω cambia ma da un punto di vista macroscopico il sistema non è cambiato. Questo concetto si sviluppa introducendo il concetto di *macrostato* come insieme di caratteristiche macroscopiche che ci interessano. Ciascun punto in Ω evolve trasportato dal flusso di fase determinato dall'Hamiltoniana. Si introduce una funzione di distribuzione microscopica

$$f^{6N}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_N, t) \tag{1.28}$$

Se $F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_N)$ descrive il macrostato oggetto di studio, il valore del macrostato al tempo t è dato da

$$F(t) = \int_{\Omega} F f^{6N} \, d^3\mathbf{x}_1 d^3\mathbf{x}_2 ... d^3\mathbf{x}_N d^3\mathbf{v}_1 d^3\mathbf{v}_2 ... d^3\mathbf{v}_N \tag{1.29}$$

e poiche il flusso é Hamiltoniano e quindi solenoidale

$$\frac{Df^{6N}}{Dt} = 0 \tag{1.30}$$

Questa equazione è molto difficile da risolvere e facciamo ora delle assunzioni:

- Esiste una funzione $\rho(\mathbf{x}, t)$ che descrive la densità del sistema
- A tale ρ è associato tramite l'equazione di Poisson 1.12 un potenziale liscio, cioè continuo e differenziabile

Ci siamo così posti nel limite non collisionale, ogni particella si muove in un potenziale continuo e non consideriamo quello per urti. In questo caso il sistema sarà descritto dall'equazione di Boltzmann non collisionale (CBE):

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \langle \mathbf{v}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \rangle - \langle \nabla \phi_T, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \rangle = 0 \tag{1.31}$$

Questa equazione è comunque troppo difficile da risolvere in maniera generale. Un approccio per estrarre informazioni dalla CBE senza doverla risolvere è quello dei *momenti*, ottenendo così le **equazioni di Jeans**[4]:

[4]Queste equazioni furono derivate originariamente da Maxwell, ma esisteva già un set di equazioni che portava il suo nome.

1) *Equazione di continuità*

$$\int_{\Re^3} (CBE)\, d^3\mathbf{v} = 0 \tag{1.32}$$

e sviluppando i termini di questa identità possiamo riscrivere

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \overline{v}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1.33}$$

2) *Equazione dell'impulso*

$$\int_{\Re^3} v_i (CBE)\, d^3\mathbf{v} = 0 \tag{1.34}$$

procedendo analogamente a quanto sopra si ha

$$\frac{\partial \rho \overline{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho \overline{v_i v_j}}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0 \tag{1.35}$$

Potremmo procedere indefinitamente scrivendo una gerarchia infinita di equazioni, ma esso rimarrà un set incomplento e la chiusura del sistema è possibile solo in speciali circostanze. É interessante notare che l'equazione 1.34 è esattamente l'equazione di Eulero per un fluido in moto.
Infine, moltiplicando l'equazione dell'impulso di Jeans per x_k e integrando su tutte le posizioni, convertiremo queste equazioni differenziali in un'equazione tensoriale che lega le proprietà globali di interesse

$$\int d^3\mathbf{x}\, x_k \frac{\partial(\rho \overline{v}_j)}{\partial t} = \int d^3\mathbf{x}\, x_k \frac{\partial(\rho(\overline{v_i v_j})}{\partial x_i} - \int d^3\mathbf{x}\, \rho x_k \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \tag{1.36}$$

Per quanto riguarda il membro di destra, il secondo termine è esattamente il tensore energia potenziale definito nella prima sezione, mentre il primo termine può essere riscritto come

$$\int d^3\mathbf{x}\, \delta_{ki} \rho \overline{v_j v_k} = -2K_{kj} \tag{1.37}$$

dove abbiamo definito il *tensore energia cinetica totale*

$$K_{jk} \equiv \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x}\, \rho \overline{v_j v_k} \tag{1.38}$$

che può essere separato nei due contributi

$$K_{jk} = T_{jk} + \frac{1}{2}\Pi_{jk} \tag{1.39}$$

con

$$T_{jk} \equiv \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x}\, \rho \overline{v}_j \overline{v}_k \quad ; \quad \Pi_{jk} \equiv \int d^3\mathbf{x}\, \rho \sigma_{jk}^2 \tag{1.40}$$

che rappresentano rispettivamente il *tensore energia cinetica ordinata* e il *tensore energia cinetica di dispersione*. Infine, σ_{jk} è il *tensore di dispersione di velocità* e infatti Π_{jk} può assumere il ruolo di una pressione, nel caso σ sia isotropico.

Il membro di sinistra può essere riscritto in una forma più intuitiva introducendo il *tensore momento d'inerzia polare*

$$I_{jk} \equiv \int d^3\mathbf{x}\, \rho x_j x_k \tag{1.41}$$

derivandolo rispetto al tempo, e con l'applicazione dell'equazione di continuità e del teorema della divergenza, avremo

$$\frac{dI_{jk}}{dt} = \int d^3\mathbf{x}\, \rho(x_k \overline{v}_j + x_j \overline{v}_k) \tag{1.42}$$

La derivata rispetto al tempo nell'equazione 2.9 può essere portata fuori dall'integrale e mediando le componenti (j,k) e (k,j) otteniamo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int d^3\mathbf{x}\, \rho(x_k \overline{v}_j + x_j \overline{v}_k) = 2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk} \tag{1.43}$$

Combinando questi risultati arriviamo finalmente ad un espressione per il **teorema viriale in forma tensoriale**

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I_{jk}}{dt^2} = 2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk} \tag{1.44}$$

Se il sistema è in uno stato stazionario $\frac{d^2 I}{dt^2} = 0$ e prendendo la traccia di questa equazione si avrà

$$2K + W = 0 \tag{1.45}$$

che rappresenta il **teorema viriale in forma scalare**.
Dunque abbiamo ottenuto questi risultati calcolando i momenti della CBE: i momenti sulle velocità ci hanno portato all'equazione del moto di Eulero, i momenti sulla posizione dell'equazione di Eulero forniscono il teorema viriale. Momenti di ordine più alto vincolerebbero il comportamento del sistema ulteriormente.
Molte semplificazioni sono possibili, per esempio se il sistema è in uno stato stazionario e non c'è moto d'insieme, avremo l'equilibrio idrostatico tra pressione e gravità, $-W_{ij} = \Pi\delta_{ij}$.
Questo teorema può essere applicato in tanti casi: dai satelliti che ruotano attorno ad un pianeta fino agli ammassi di galassie. Quando applicati a gruppi di molti corpi, fornisce un ordine di grandezza tra le dimensioni del sistema e la sua velocità di dispersione, e permette anche di calcolarne la massa.

Capitolo 2

Applicazioni

2.1 Energia gravitazionale in oggetti ultra-compatti

Nel XX secolo si è compreso che è la gravità ad alimentare gli oggetti più luminosi nell'universo, come Nuclei Galattici Attivi o Quasar, per i quali le reazioni nucleari delle stelle sono inadeguate a soddisfare i requisiti energetici ossservati con i telescopi, e anche in alcune classi di stelle binarie è all'accrescimento gravitazionale che si fa riferimento come principale sorgente di energia.
Dalla forma del potenziale è ovvio intuire che l'efficienza è fortemente dipendente dalla compattezza dell'oggetto in questione: più è grande il rapporto M/R, più grande sarà l'efficienza. Per questo, nel trattare l'accrescimento su oggetti di massa stellare vorremo considerare buchi neri e stelle di neutroni, mentre nelle nane bianche le reazioni nucleari sono ancora più efficienti di un fattore $10^1 - 10^2$, anche se questo semplice ragionamento non tiene conto dei tempi di scala in cui i due processi avvengono e quindi l'accrescimento non può essere trascurato; è chiaro che questo problema non si pone nel caso si stiano trattando buchi neri supermassicci solitamente situati nel centro delle galassie, per i quali l'accrescimento gravitazionale è l'unico meccanismo di produzione di energia da considerare.
In questa trattazione analizzeremo il caso di singola orbita di una particella che spiraleggia sul piano equatoriale di un buco nero, nel caso in cui sia rotante e non, e deriveremo alcune grandezze fondamentali di interesse in questo problema.
Anche in questa sezione riassumerò alcuni risultati e passaggi per rimanere in un approccio introduttivo e non troppo teorico del problema.
Iniziamo esaminando il caso della soluzione di Schwarzschild delle equazioni di campo della relatività generale, cioè il caso di buco nero privo di momento angolare. L'equazione che descrive esattamente la metrica fuori da un qualsiasi oggetto massivo con simmetria sferica è

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \tag{2.1}$$

Da questo, è possibile scrivere la Lagrangiana del moto

$$\mathcal{L} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_s}{r}} - r^2\dot{\theta}^2 - r^2\dot{\sin}^2\dot{\phi}^2 \tag{2.2}$$

in cui $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ è il raggio di Schwarzschild, una quantità associata ad un qualsiasi oggetto massivo e che rappresenta il raggio minimo che dovrebbe raggiungere per diventare un buco nero.
Siccome la Lagrangiana è ciclica in ϕ, il suo momento coniugato conservato è

$$p_\phi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = -r^2 \dot{\sin}^2 \theta \, \dot{\phi} \equiv l_z \tag{2.3}$$

dove l_z è il momento angolare specifico attorno all'asse z, ed è una costante del moto. Inoltre, la Lagrangiana è ciclica anche in t, quindi

$$p_t \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t} \equiv E_\infty \tag{2.4}$$

e anche l'energia E_∞ è una costante.
La Lagrangiana non è però ciclica in θ. La componente dell'equazione del moto lungo θ risulta essere

$$\frac{d}{d\lambda}\left(-r^2 \dot{\theta}\right) = r^2 \sin\theta \cos\theta \, \dot{\phi}^2 \tag{2.5}$$

in cui λ è un qualsiasi parametro che parametrizza l'orbita.
Siccome la metrica è in simmetria sferica, possiamo scegliere il piano equatoriale come vogliamo e lo prendiamo dunque in modo che $\theta = \pi/2$ è esattamente questo piano.
L'equazione del moto nella direzione r può essere ottenuta immediatamente se ci ricordiamo che in relatività il modulo del quadrivettore velocità è una costante, q: per particelle massive $q = 1$, e $q = 0$ per i fotoni. Quindi avremo $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$ e

$$\frac{E_\infty^2}{2} = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{1}{2}\left(q + \frac{l_z^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \equiv \frac{\dot{r}^2}{2} + V_{eff}(r) \tag{2.6}$$

Questa espressione differisce dal caso Newtoniano nel termine del potenziale effettivo, per particelle massive avremo infatti

$$V_{eff} - \phi_{eff} = \frac{1}{2} - \frac{GMl_z^2}{c^2 r^3} \tag{2.7}$$

Il termine costante (che non influenza comunque la dinamica) compare perchè in relatività generale l'energia include anche la massa a riposo e quindi $E_\infty = 1$, mentre in fisica Newtoniana l'energia totale all'infinito scompare. Il termine $1/r^3$ ha invece importanti conseguenze.
La stabilità dell'orbita è determinata dal segno di $\partial^2 V_{eff}/\partial r^2$, quando questa è quantità è > 0, l'orbita è stabile e l'energia effettiva ha un minimo. Se invece $\partial^2 V_{eff}/\partial r^2 < 0$, l'orbita circolare corrisponde ad un massimo del potenziale effettivo. Troviamo dunque che V_{eff} ha un massimo e un minimo per

$$r_e = \frac{r_s}{4}\left(\frac{l_z c}{GM}\right)^2 \left(1 \pm \sqrt{1 - 12\left(\frac{GM}{l_z c}\right)^2}\right) \tag{2.8}$$

Quando $l_z < \sqrt{12}GM/c$ il potenziale effettivo non ha un minimo e non ci possono essere orbite circolari. $l_z = \sqrt{12}GM/c$ è invece il valore minimo di l_z per un orbita circolare, ad un raggio

$$r_{mso} = 3r_s = \frac{6GM}{c^2} \tag{2.9}$$

chiamato anche orbita marginalmente stabile. Se calcoliamo ora l'energia dell'ultima orbita stabile inserendo queste quantità nell'equazione 2.6 avremo

$$E_\infty = \sqrt{8/9} \tag{2.10}$$

Avevamo già anticipato che $E_\infty = 1$ quindi c'è una differenza di energia che in qualche modo è stata irradiata (attraverso meccanismi che non tratteremo), e dunque l'efficienza di un disco di accrescimento di un buco nero non rotante è

$$\eta = 1 - \sqrt{8/9} \approx 0.06 \tag{2.11}$$

dove $0 < \eta < 1$ rappresenta l'efficienza gravitazionale, cioè la quantità di massa trasformata in energia durante il processo: per la conservazione dell'energia un incremento dell'energia potenziale deve essere compensato con un incremento dell'energia cinetica, e se una parte dell'energia cinetica si trasforma in energia interna, alcuni tipi di processi di radiazione possono dissipare questa energia.
Nella metrica di Kerr, cioè per un buco nero rotante, l'analisi è più complessa e ci limiteremo a confrontarne i risultati. In questo caso avremo

$$r_{mso} = \begin{cases} \frac{GM}{c^2} & \text{co-rotante} \\ \frac{9GM}{c^2} & \text{contro-rotante} \end{cases} \tag{2.12}$$

Per orbite co-rotanti con il buco nero

$$\eta = 1 - 1/\sqrt{3} \approx 0.42 \tag{2.13}$$

L'efficienza è molto più alta per il semplice fatto che l'ultima orbita stabile è più piccola di un fattore 6 che nel caso non rotante.
Era già stato anticipato nell'introduzione che le reazioni nucleari hanno efficienze di almeno un'ordine di grandezza più basso ($\eta_{\mathrm{H}} \approx 0.007$) e nessun altro meccanismo di produzione di energia in natura è comparabile, fatta eccezione per l'annichilimento materia-antimateria per cui $\eta = 1$.
Questi risultati permettono di ottenere una stima delle masse delle sorgenti centrali delle galassie, cioè i buchi neri supermassicci. Infatti data una luminosità L e un tempo di vita Δt, allora una quantità di massa

$$M = L\Delta t/\eta c^2 \tag{2.14}$$

deve essersi accumulata nel sistema. Per esempio se scegliamo una gigante ellittica, assumiamo un $\Delta t \sim 4 * 10^7$yr, che può essere dedotto da altre considerazioni, e con la luminosità che proviene dalle ossevazioni, otteniamo $M \sim 10^8 M_\odot = 10^{41}$g. Argomenti teorici ed osservazioni che permettono di ottenere una stima della massa possono invece fornire un'età della sorgente o in quelle più antiche (Quasar per esempio) anche una stima dell'età dell'universo.

2.2 Instabilità gravitazionale di Jeans

L'instabilità di Jeans è un problema studiato dall'omonimo nei primi anni del XX secolo. In ambito astrofisico l'analisi delle instabilità dei sistemi stellari può essere semplificata grazie alle analogie con altri tipi di sistemi, ad esempio i fluidi perfetti barotropici e autogravitanti. Più in generale un mezzo interstellare è descritto da un plasma magnetoidrodinamico, realisticamente non isotermo e in cui si possa tenere conto anche di effetti collisionali di rilassamento, sia termici che viscosi.
Nel presente problema, si considera una nube di gas omogenea, infinita spazialmente, in quiete e dotata di potenziale Newtoniano di autogravità e si analizza come una di una fluttuazione di densità di piccola ampiezza si propaga in essa.
Prendiamo il modello di Eulero-Poisson, di seguito esplicitato, e facendo uso del cosiddetto inganno di Jeans, assumiamo che l'equazione di Poisson descriva solo la relazione tra le perturbazioni della densità e del potenziale di autogravità. Lo stato di equilibrio sia dato da $v_0 = 0$, $\rho_0 > 0$ e $\phi_0 \mid \nabla\phi_0 = 0$ e il nostro sistema di equazioni che governano le perturbazioni $\delta\rho$, δv e $\delta\phi$ è il seguente

$$\begin{cases} \delta\rho_t + \rho_0 \nabla \cdot \delta\mathbf{v} = 0 \\ \rho_0 \delta\mathbf{v} + p'(\rho_0)\nabla\delta\rho = -\rho_0\nabla\delta\phi \\ \nabla^2\delta\phi = 4\pi G\delta\rho \end{cases} \tag{2.15}$$

in cui rispettivamente la prima è l'equazione scalare di continuità; la seconda è l'equazione vettoriale del moto di Eulero, e la terza è l'equazione di Poisson, tutte presentate nella prima sezione.
Richiediamo ora che le perturbazioni siano del tipo onde dispersive, cioè

$$\begin{cases} \delta\rho(x,t) = \rho_1 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \\ \delta\mathbf{v}(x,t) = v_1 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \\ \delta\phi(x,t) = \phi_1 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \end{cases} \tag{2.16}$$

I calcoli sono ora un po lunghi e macchinosi: inseriamo le perturbazioni nel sistema e attraverso l'utilizzo di alcune identità, linearizziamo le equazioni per ottenere un sistema di Cramer algebrico lineare e omogeneo nell'incognita $\mathbf{u}_1 = (\rho_1, \mathbf{v}_1, \phi_1)$ in $\Re^5$. In seguito, con alcuni artefici matematici è possibile ottenere la matrice associata al sistema[1]

$$\begin{vmatrix} -\omega & \rho_0 k & 0 & 0 & 0 \\ \frac{p'(\rho_0)k}{\rho_0} & -\omega & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 \\ 4\pi G & 0 & 0 & 0 & k^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.17}$$

e con un po' di algebra si arriva all'equazione di dispersione

$$\omega^2\left(\omega^2 + 4\pi G\rho_0 - p'(\rho_0)k^2\right) = 0 \tag{2.18}$$

[1] Si considera il versore normale e il piano tangente all'onda dispersiva e decomponendo v nelle tre direzioni si proietta la seconda equazione del sistema lungo i tre versori.

Escludendo la soluzione stazionaria $\omega = 0$, si ricava la seguente legge di dispersione per ω, ricordando che $p'(\rho_0) = c_s^2(\rho_0)$, con c_s velocità del suono,

$$\omega^2 = c_s^2(\rho_0)(k^2 - k_J^2) \tag{2.19}$$

dove

$$k_J = \sqrt{\frac{4\pi G\rho_0}{p'(\rho_0)}} \tag{2.20}$$

è il **numero d'onda critico di Jeans**.
Per $k < k_J \Rightarrow \omega^2 < 0 \Rightarrow \omega \in \mathbb{C}$. In particolare ω è immaginario puro e fisicamente vi è una crescita/descrescita esponenziale che conduce comunque alla scomparsa della perturbazione.
Per $k > k_J \Rightarrow \omega^2 > 0 \Rightarrow \in \Re$. Si formano delle onde, dette *onde gravitazionali di Jeans*, che si propagano lungo la direzione del vettore d'onda con velocità di fase

$$v_J = \pm c_s(\rho_0)\left(1 - \left(\frac{k_j}{k}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.21}$$

detta *velocità di Jeans.*
In termini di lunghezza d'onda, si definisce la *lunghezza d'onda di Jeans*

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = \sqrt{\frac{\pi p'(\rho_0)}{G\rho_0}} \tag{2.22}$$

cioè quando le regioni di compressione corrispondono a dimensioni sufficientemente grandi, l'aumento di gravità nella zona di compressione prevale sulla spinta della pressione e quindi la perturbazione cresce esponenzialmente e la nube collassa.
Si definisce quindi un **criterio di Jeans** per l'insorgenza del collasso gravitazionale

$$k < k_J \quad \vee \quad \lambda > \lambda_J \tag{2.23}$$

Infine, è possibile definire la *massa di Jeans* come la massa di una sfera di raggio λ_J del gas iniziale

$$M_J = \frac{4}{3}\pi\lambda_J^3\rho_0 = \frac{4}{3}\left(\frac{p'(\rho_0)}{G}\right)^{\frac{3}{2}}\rho_0^{-\frac{1}{2}} \tag{2.24}$$

La massa di Jeans è quindi la massa critica da superare per avere il collasso gravitazionale. Il gas cosmico può frammentarsi in nubi di massa uguale o inferiore, che possono a loro volta collassare e formare altri cluster di stelle.
Sostituendo i dati tipici del gas interstallare, si ottiene che le nubi instabili devono avere masse $M > 10^5 M_\odot$, valore che corrisponde ai tipici ammassi stellari.
Bisogna però ricordare che il gas interstellare non è omogeneo, come ipotizzato, e che nella realtà risente della presenza di campi magnetici, rotazioni, effetti viscosi; queste componenti cambiano quantitativamente il processo descritto, che può comunque essere considerato generalmente valido qualitativamente.

2.3 Evoluzione stellare e teorema del viriale

Il teorema del viriale gioca un ruolo fondamentale nella teoria dell'evoluzione stellare. Consideriamo un sistema di gas sferico di massa M in equilibrio idrostatico tra pressione e gravità, cioè $\nabla p = -\nabla \phi$, e studiamo il problema in termini della coordinata m, cioè la massa, secondo la relazione

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \tag{2.25}$$

moltiplichiamo l'equilibrio idrostatico per $4\pi r^3$ e integriamo

$$\int_0^M \frac{dP}{dm} 4\pi r^3 dm = -\int_0^M \frac{Gm}{r} dm \tag{2.26}$$

assumendo che $P = 0$ sulla superficie, $r = 0$ nel centro e utilizzando l'espressione 2.25, otteniamo

$$3\int_0^M \frac{P}{\rho} dm = \int_0^M \frac{Gm}{r} dm \tag{2.27}$$

Il membro di è destra è $-W$, dove W è l'energia potenziale gravitazionale del sistema.
Il termine di sinistra invece è correlato alla termodinamica del sistema: se assumiamo un gas perfetto monoatomico l'energia interna per unità di massa è $E = \frac{3}{2}\frac{P}{\rho}$ e l'equazione 2.27 può quindi essere riscritta come

$$E = -\frac{W}{2} \tag{2.28}$$

che rappresenta il teorema viriale. L'energia totale è negativa in accordo con l'ipotesi che il sistema sia legato.
Nel caso specifico di una stella l'equilibrio idrostatico è perturbato quando l'energia è irradiata via dalla superficie e di conseguenza l'energia totale diminuisce secondo la legge

$$L = -\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{dW}{dt} \tag{2.29}$$

quindi l'energia gravitazionale deve dimuire per produrre una luminosità positiva, e la stella si contrae. Allo stesso tempo l'energia interna aumenterà e quindi la stella si scalda quando l'energia in superficie va dispersa ($E \propto T$).
Riassumendo, le perdite di energia in superficie causano una contrazione del sistema: metà del guadagno di energia gravitazionale va in energia interna, l'altra metà è irradiata. La stella perde energia e diventa più calda, contraendosi. Ciò viene descritto dicendo che la stella ha calore specifico negativo, caratteristica del campo gravitazionale.
Più in generale si può esprimere il viriale per l'equazione di stato di un gas, che possiamo scrivere

$$u = \gamma \frac{P}{\rho} \tag{2.30}$$

con u energia interna, γ l'indice adiabatico e $\gamma = 3/2$ per un gas perfetto. Questa relazione è valida solo per particelle non relativistiche. Se γ è costante attraverso la stella

$$E_{int} = -\frac{1}{3}\gamma E_{gr} \tag{2.31}$$

Ponendo l'energia cinetica nulla per l'equilibrio idrostatico e nel caso di gas ideale, quest'espressione fornisce la 2.28.

Stima della temperatura centrale. Il viriale può fornire una stima della temperatura media di una stella composta di gas ideale. L'energia interna per unità di massa di un gas perfetto è

$$u = \frac{3}{2}\frac{P}{\rho} = \frac{3}{2}\frac{kT}{\mu m} \tag{2.32}$$

Integriamo su tutto il sistema per ottenere

$$E_{int} = \frac{3}{2}\frac{k\overline{T}M}{\mu m} \tag{2.33}$$

in cui $\overline{T}$ è la temperatura mediata su tutti gusci i di massa dm. Sostituendo questo nella relazione $E_{gr} = -\frac{GM^2}{R}$, otteniamo

$$\overline{T} = \frac{1}{3}\frac{\mu m}{k}\frac{GM}{R} \tag{2.34}$$

Assumendo una massa molecolare media $\mu = 0.5$ per l'idrogeno ionizzato, otteniamo $\overline{T} \sim 4 \times 10^6$K. Questa è la temperatura richiesta per fornire la pressione per tenere il Sole in equilibrio idrostatico. Siccome la temperatura diminuisce allontanandosi dal nucleo, è un limite inferiore approssimativo per la temperatura centrale di una stella e infatti la temperatura reale è leggermente più elevata, $T \sim 1.5 \times 10^7$K.

Tempo di scala di Kelvin-Helmholtz. Nello studio dell'evoluzione stellare vengono definiti alcuni tempi di scala utili alla comprensione o descrizione di alcuni processi. Se non consideriamo le reazioni nucleari, e alcun tipo di pressione interna, possiamo calcolare il tempo in cui avverrebbe la contrazione gravitazionale come

$$\tau_{KH} = \frac{E_{int}}{L} = \frac{E_{gr}}{2L} = \frac{GM^2}{2RL} \approx 1.5 \times 10^7 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \frac{R_\odot}{R}\frac{L_\odot}{L}\text{yr} \tag{2.35}$$

Il tempo di scala termico per il Sole è dunque circa 1.5×10^7 yr.
Alla fine del XIX secolo la contrazione gravitazionale era stata proposta come sorgente di energia del Sole da Kelvin ed Helmholtz, ciascuno indipendentemente, questo però portava ad un età del Sole troppo piccola, in conflitto anche con evidenze geologiche dell'età terrestre, e si capì in seguito che le reazioni nucleari sono una fonte molto più potente di energia, e permettono alla stella di rimanere in equilibrio termico per la maggior parte del suo tempo di vita.

Bibliografia

[1] J. Binney, S. Tremaine *Galactic Dynamics.*

[2] L. Ciotti *Appunti di dinamica stellare.*

[3] J. Frank, A. King, D. Raine *Accretion Power in Astrophysics.*

[4] M. Vietri, *Foundations of high-energy astrophysics*

[5] G. Carigi *Il modello iperbolico del fluido perfetto barotropico e il problema dell'instabilità gravitazionale secondo Jeans*, Tesi di laurea in meccanica dei sistemi complessi

[6] M. Salaris, S. Cassisi *Evolution of Stars and Stellar Populations.*

[7] R. Kippenhahn, A. Weigert *Stellar structure and evolution*