Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Il concetto di probabilità nella scuola, nella teoria e nella pratica comune

Tesi di Laurea in Calcolo delle probabilità

Relatore:
Chiar.mo Prof.
PAOLO NEGRINI

Presentata da:
SARA GATTARI

I Sessione
Anno Accademico 2017/2018

Indice

Introduzione

> Che cos'è la probabilità?
>
> Dice un'antica sentenza latina, "tot capita, tot sententiae"; in nessun campo essa è tanto vera quanto nella teoria delle probabilità, e fin dai principi, fin da questa stessa domanda sul significato delle probabilità. Tuttavia, fra un matematico che la definisca come rapporto tra numero di casi favorevoli e possibili, uno statistico che la interpreti come un valore più o meno ideale della frequenza, e l'uomo della strada che dica "è la sensazione che mi guida in tutta la vita", non esito a dire che la risposta migliore, più completa, più sensata, è proprio quella dell'uomo della strada. [14, pag 1]

L'argomento della seguente tesi nasce dalle domande che emergono da questa citazione di Bruno de Finetti: qual è la definizione di probabilità? Cosa è la probabilità per "l'uomo della strada"? Come viene insegnata la probabilità?

Infatti il concetto di probabilità è tra i più complessi da apprendere e da comprendere pienamente durante la scuola secondaria di secondo grado e oltre ma è anche, allo stesso tempo, uno dei concetti matematici più applicabili e visibili nella vita di tutti i giorni.

Per capire cosa "l'uomo della strada" pensi di questo concetto è stato proposto un questionario anonimo a circa 100 persone di diverse fasce di età e con diverse occupazioni per comprendere sia il livello di conoscenze su questo argomento sia quale definizione di "probabilità" darebbero.

La tesi è quindi strutturata nel seguente modo.

Innanzitutto si osservano brevemente come il concetto di probabilità sia stato affrontato nella storia della matematica e le diverse definizioni che gli sono state date nel tempo.

Si analizzano i risultati del questionario dai quali si possono osservare elementi interessanti come ad esempio il fatto che non per tutti sia scontato che le facce di un dado abbiano la stessa probabilità di uscita o che per la maggior parte degli intervistati la probabilità sia qualcosa di astratto, qualitativo.

Inoltre si è notato come anche chi ha compiuto studi scientifici non abbia maggiore facilità nel dare questa definizione.

Attraverso il questionario si è proprio osservata la difficoltà di definire qualcosa che sembra chiaro, perché si usa spesso, ma che in realtà non lo è.

Nel secondo capitolo si approfondisce la definizione soggettiva di probabilità data da di Bruno de Finetti, secondo la quale la probabilità di un evento misura il grado di fiducia che un individuo coerente attribuisce, in base alle sue informazioni, al verificarsi dell'evento. Questa definizione è in qualche modo richiamata anche in alcune risposte date nel questionario ed è la più applicabile concretamente alla vita quotidiana. Si è riportato il percorso di de Finetti descritto in [2] nel quale partendo dalla definizione soggettiva si ottengono i teoremi del calcolo delle probabilità e le altre definizioni.

Il capitolo successivo dà qualche accenno di come questa definizione possa essere applicata alla didattica: vengono citati il metodo del triangolo dato da de Finetti e un percorso didattico ([6]) in cui, utilizzando la rappresentazione geometrica, si interpretano i giudizi qualitativi in modo tale da poterli tradurre in giudizi quantitativi.

Successivamente si analizzano quattro diversi manuali scolastici, di cui uno degli anni '80, per osservare come questi affrontino il tema della "probabilità" e quali esercizi propongano. Si è osservato che in effetti anche se tutte le definizioni sono riportate (lo spazio dedicato ad esse è differente per ogni libro), i teoremi e gli esercizi sono per lo più relativi alla definizione classica.

Si è analizzata poi la definizione di "probabilità" data dai "dizionari dell'uso" proposti dal sito dell'*Accademia della Crusca*, osservando che la maggior parte di queste definizioni sono di tipo qualitativo, alle volte circolare e non si approfondisce quasi mai l'aspetto matematico e quantitativo del termine.

Infine si affronta il tema dei rischi a cui questa poca comprensione e poca interiorizzazione delle basi del calcolo delle probabilità e della sua definizione possa portare. In particolare si analizza il gioco del Lotto, infatti ad esso sono legate molte conclusioni errate come ad esempio che i numeri ritardatari escono con maggiore probabilità o che ci siano alcuni numeri, detti "numeri spia", che anticipano l'uscita di numeri particolari. Sono considerazioni legate alla superstizione ma senza nessun fondamento, basterebbero poche conoscenze di probabilità per rendersene conto. Si citano un differente gioco, la Roulette, e l'assicurazione: altri due casi nei quali la conoscenza della probabilità può aiutare a fare delle valutazioni.

Inoltre, avere più conoscenze, aiuterebbe a rendersi conto della non equità del gioco che è favorevole al banco e del fatto che giocare sistematicamente non conduce ad una vittoria cospicua ma anzi, tutto il contrario, come si vedrà, condurrà ad una perdita.

Lo scopo della tesi è quindi cercare cosa sia per le persone la probabilità, evidenziare quanto sia interessante e completa la definizione soggettiva data da de Finetti, analizzare in modo critico come invece la probabilità viene definita nelle fonti più comuni che si hanno a disposizione ed evidenziare quanto sia importante interiorizzarne pienamente il significato.

Capitolo 1

La probabilità ieri e oggi

1.1 Un po' di storia

Il calcolo della probabilità nasce inizialmente come strumento per risolvere problemi posti dai giocatori d'azzardo. A partire dal XVI secolo con un trattato di Girolamo Cardano (*De ludo aleae*) e uno scritto di Galileo Galilei (*Sopra le scoperte dei dadi*) ha inizio una trattazione matematica di questi problemi, nonostante i giochi d'azzardo fossero già molto diffusi sin dall'antichità.

L'inizio del calcolo della probabilità in concezione moderna però risale al problema della "*régles des partis*": due o più giocatori si sfidano in un gioco versando una somma per partecipare. Il gioco è costituito da più manche e chi otterrà il numero richiesto di vittorie vincerà l'intera somma. La partita però viene interrotta prima del termine. Ci si domanda allora in quale modo debba essere divisa la posta tra i concorrenti.

Nel XVII secolo il Cavalier De Méré sottopose la questione a Blaise Pascal che risolse il problema e ne scrisse a Fermat. La corrispondenza epistolare tra i due diede inizio alla moderna teoria della probabilità. Pascal comunicò così la soluzione a Fermat in una lettera del 29 Luglio 1654:

> [...] quando due giocatori giocano, per esempio, tre partite e ciascuno ha messo in gioco 32: supponiamo che il primo ne abbia due e l'altro una; essi giocano adesso una partita della quale la sorte è tale che se la vince il primo, egli guadagna tutto il denaro che è in gioco, cioè 64 monete; se la vince l'altro, essi sono due a due e di conseguenza, se essi si vogliono separare, è necessario che ciascuno ritiri la sua posta, cioè ciascuno 32 monete. Considerate dunque, signore, che se il primo vince gli toccano 64; se egli perde gli toccano 32. Dunque se essi non vogliono arrischiare questa

> partita e separarsi senza giocarla, il primo deve dire: “ Io sono sicuro di avere 32 monete, perché la perdita stessa me le dà; ma per le altre 32, può essere che le avrò io, può essere che le avrete voi; il rischio è uguale; dividiamo dunque queste 32 monete a metà e datemi, oltre queste, le mie 32 che sono per me sicure”. Egli avrà dunque 48 monete e l’altro 16 [...]

Pascal, quindi, risolse con un ragionamento logico la questione. Si iniziano da questo momento in poi ad affrontare i problemi legati al calcolo della probabilità ma per avere una definizione vera e propria di cosa essa sia effettivamente bisogna aspettare il 1814, quando Pierre de Laplace, nell’opera *Essai philosophique des probabilités*, presenta quella che poi verrà chiamata “definizione classica” o “laplaciana”. Infatti come primo principio scrive:

> Il primo principio è la definizione stessa di probabilità, che è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e quello di tutti i casi possibili.

Nel secondo principio però precisa che questa definizione è valida solo se i diversi casi sono ugualmente possibili.

Il problema di definire la probabilità venne affrontato poi da altri matematici che proposero diverse soluzioni.

Un ulteriore approccio può essere quello, nei casi in cui la definizione classica non è applicabile, di riferirsi ad eventi passati e ciò conduce alla “definizione frequentista” secondo cui la probabilità è la frequenza relativa di un evento (rapporto tra il numero delle prove nelle quali l’evento si è verificato ed il numero delle prove effettuate) osservata in un numero sufficientemente grande di esperimenti avvenuti nelle medesime condizioni. Questa definizione è stata esposta da R. von Mises nel 1931 ma anch’essa si può applicare solo ad alcuni eventi, quelli che possono essere ripetuti.

Un metodo applicabile a tutti i tipi di eventi è quello proposto da Bruno De Finetti. Egli ha dato una “definizione soggettiva” secondo cui la probabilità di un evento è la misura del grado di fiducia che un individuo coerente attribuisce, in base alle sue informazioni, al verificarsi dell’evento. Approfondiremo nei prossimi capitoli il significato di questa definizione che è applicabile ad un qualsiasi evento e che meglio rappresenta il metodo con cui ogni persona prende decisioni scegliendo un’alternativa invece che un’altra.

Infine negli anni Trenta del XX secolo il matematico russo Kolmogorov propose una sistemazione della probabilità da un punto di vista assiomatico, si rinuncia a descrivere che cosa sia la probabilità di un evento e si esplicitano le condizioni sotto le quali si può parlare di probabilità esprimendola con un numero. Questa impostazione accetta qualunque definizione, purché questa rispetti le proprietà fondamentali, assunte come assiomi.

Storicamente quindi il problema della definizione del concetto di probabilità non è stato semplice da affrontare, proprio a proposito di questo Bertrand Russell affermò ironicamente "il concetto di probabilità è il più importante della scienza moderna , soprattutto perché nessuno ha la più pallida idea del suo significato". Ci si chiede ora se oggi la situazione sia cambiata.

1.2 Il questionario

Oggi più che in passato la parola "probabilità" è presente nella vita di tutti i giorni. Tutti i ragionamenti sono fatti in termini di probabilità in quanto tutti gli eventi sono incerti e si ha la necessità di prendere delle decisioni nonostante questa incertezza, basti pensare alle frasi legate al meteo o ai giochi di sorte. Ci si chiede allora cosa pensino le persone della probabilità, visto il suo frequente uso nella vita quotidiana. Per rispondere almeno in piccola parte a questa domanda ho proposto un questionario anonimo a persone di diverse fasce di età e con diversi percorsi di studio alle spalle.

Il questionario è stato realizzato con "Google moduli" e le domande poste sono le seguenti:

- Età
- Qual è il tuo titolo di studio?
- Quale scuola superiore hai frequentato?
  - Liceo Scientifico
  - Istituti tecnici
  - Istituti professionali
  - Altri licei
- Lavori o studi? (specifica cosa)
- Nella tua vita quotidiana usi le espressioni "probabilità" o "è probabile"?
  - Sì
  - No
  - Non so

- Quale dei seguenti ambiti ti sembra più pertinente all'applicazione della probabilità (puoi dare più risposte)?
  - Previsioni meteorologiche
  - Giochi di sorte (lotto, lotterie)
  - Giochi d'azzardo
  - Scommesse sportive
  - Voto riportato in una verifica scolastica
  - Decorso dopo un intervento chirurgico
  - Altro
- Secondo te, pensando al lancio di un dado, la probabilità di uscita del 3, rispetto alla probabilità di uscita del 6 è
  - Maggiore
  - Uguale
  - Minore
  - Non so
- Una scommessa sportiva offre 100 € in caso di vittoria di una squadra in una partita di calcio. Per partecipare bisogna pagare un determinato importo. Secondo te quali considerazioni consentono di stabilire se la tariffa richiesta è adeguata o eccessiva?
  - Le informazioni che ho sulla squadra
  - Quanto mi sento fortunato
  - L'esito di precedenti scommesse a cui ho partecipato
  - Non so
- L'acquisizione di ulteriori informazioni sulle squadre in campo può cambiare la tua decisione di partecipare alla scommessa?
  - Sì
  - No
  - Non so
- Descrivi con parole tue che cos'è la probabilità di un evento incerto (ad esempio che domani ci sia il sole)

Le domande iniziali aiutano a capire se la persona che sta rispondendo ha una formazione più scientifica o umanistica e quindi se il suo concetto di probabilità sia più legato all'esperienza personale o agli studi fatti a scuola. Per questo è stato chiesto sia il tipo di scuola secondaria di secondo grado, distinguendo appunto tra il liceo scientifico e gli altri licei, sia il titolo di studio. Infatti hanno risposto persone con percorsi di studio molto diversi: da chi non ha frequentato la scuola secondaria di secondo grado, chi ha cambiato radicalmente indirizzo tra la scuola secondaria e l'università a chi lavora da molti anni. Si è scelto di usare il termine non proprio preciso "scuola superiore" anziché "scuola secondaria di secondo grado" perché più comune e più conosciuto. Tra queste domande le prime due e la domanda sull'occupazione attuale sono state poste come obbligatorie.

I successivi quesiti a risposta multipla sono stati fondamentali per poter intuire il livello di consapevolezza di quanto la probabilità sia presente nella nostra vita e per comprendere il livello di conoscenze in questo ambito. In tutte le risposte è stata inserita l'opzione "non so" per lasciare liberi di non avere un'opinione e di non sapere effettivamente cosa rispondere.

Infine l'ultima domanda, la più importante, ha permesso di capire che cosa pensano le persone della probabilità. L'esempio tra parentesi è stato inserito per facilitare la risposta dando un suggerimento di un'applicazione piuttosto comune.

La domanda doveva essere aperta per osservare meglio la vera opinione di chi rispondeva anche se questo tipo di quesito ha dei rischi: la difficoltà delle persone nella verbalizzazione di un'opinione e l'alta percentuale di non risposta.

1.3 Analisi delle risposte

Il questionario, diffuso attraverso la condivisione del link usando applicazioni di messaggistica come "WhatsApp", è stato completato da un totale di 122 persone di cui 12 non hanno risposto all'ultima domanda.

L'età dei partecipanti è compresa tra i 14 e i 64 anni con una grande percentuale (circa il 43%) tra i 21 e i 25 anni. 112 persone hanno dichiarato di usare l'espressione "probabilità" nella propria vita, 5 hanno risposto di no e 5 che non lo sanno. La maggior parte dei partecipanti collega la probabilità ai giochi di sorte e alle previsioni meteorologiche. Alcuni hanno aggiunto degli altri ambiti oltre a quelli già presenti nelle risposte, ad esempio: "borse finanziarie" (aggiunto da chi studia matematica), "comportamenti delle persone" (in questo caso non è chiaro cosa il partecipante intendesse di preciso).

É stato interessante osservare le risposte alla domanda sul lancio del dado. Infatti, essendo un esempio così comune e molto presente sui libri di testo, ha stupito osservare che solo 107 persone su 122 hanno risposto in modo corretto. In 5 hanno risposto “maggiore” forse pensando che il 6, essendo agli “estremi” esca più raramente, 7 persone hanno risposto “minore” e 3 che non lo sanno. Tra chi ha risposto in modo errato troviamo soprattutto persone che o sono lontane dalla scuola da molto tempo o che non hanno fatto studi prettamente scientifici. In ogni caso è stato un risultato inaspettato.

Per quanto riguarda la domanda sui criteri per giudicare l'adeguatezza della tariffa richiesta per scommettere, 97 persone hanno risposto correttamente (si baserebbero sulle informazioni che si hanno sulla squadra), 12 persone si baserebbero su precedenti scommesse e 12 affermano di non saperlo. Una sola persona ha risposto che si baserebbe su quanto si sente fortunata. Questa è una domanda di difficoltà superiore rispetto alla precedente, anche solo a partire dalla formulazione, ed è meno inaspettato aver ottenuto questo tipo di risposte. Alcuni di coloro che non hanno ben capito questa domanda non hanno risposto correttamente alla domanda successiva alla quale comunque 113 persone hanno dato la risposta giusta.

Si arriva infine alla domanda aperta: “Descrivi con parole tue che cos'è la probabilità di un evento incerto (ad esempio che domani ci sia il sole)”. Come precedentemente detto, 12 persone non hanno risposto di cui 3 non hanno ancora terminato la scuola secondaria di secondo grado; tra gli altri 9 non ci sono caratteristiche comuni, sono lavoratori, universitari sia con percorsi scientifici sia con percorsi umanistici. Tra le motivazioni per aver saltato la domanda potrebbe esserci anche quella della mancanza di tempo e di voler terminare in fretta il questionario. Inoltre alla difficoltà della risposta aperta si va ad aggiungere in questo caso la difficoltà di un quesito su un argomento considerato difficile già solo per il fatto che riguarda la matematica.

Le risposte a questa domanda sono state suddivise in quattro grandi categorie: chi non ha capito pienamente il quesito, chi ha interpretato il termine in senso linguistico facendo riferimento al linguaggio comune, chi ha scritto esattamente le definizioni dei libri di testo ed infine chi ha in qualche modo collegato la probabilità ad un'espressione numerica, a qualcosa che può essere quantificato e che dipende dalle informazioni che si hanno.

Nel primo gruppo ci sono 36 risposte. In alcune tra queste c'è solo un esempio (“domani è più probabile che piova piuttosto che ci sia il sole”), questo comunque è un tentativo che vuole far capire che si sa come usare la parola ma non si riesce a spiegarla. Altri hanno dato una risposta tautologica (“la probabilità che un determinato evento si verifichi o no”). In questo gruppo ci sono anche coloro che hanno dato risposte che mostrano di essere proprio lontani da questo concetto (“la probabilità è un concetto matematico e fisico") o che proprio non ne hanno la minima idea ("boh"). Quattro persone invece hanno scritto che cos'è per loro un evento incerto ("è un evento che non è possibile controllare"), questo è sicuramente conseguenza di una incomprensione della domanda posta.

Tra chi ha dato risposte di questa categoria ci sono 5 di coloro che non hanno risposto correttamente alla domanda sul dado e 11 di coloro non hanno risposto correttamente alla domanda sulla scommessa, quindi persone per le quali l'argomento è in generale poco chiaro. 33 risposte su 36 sono state date da individui che stanno svolgendo studi umanistici a livello universitario (4 con un liceo scientifico alle spalle) o che lavorano. Le tre risposte date da ingegneri sono quelle in cui viene descritto cos'è un evento incerto anziché che cos'è la probabilità.

Nel secondo gruppo ci sono 40 risposte che descrivono il concetto di probabilità in senso strettamente linguistico quindi come possibilità dell'accadere di un evento, eventualità, previsione. Ad esempio alcune definizioni date sono:

- "Possibilità che qualcosa accada o non accada"
- "La possibilità che si verifichi un evento rispetto a quella che al suo posto se ne verifichino altri"
- "La probabilità è quel dato che ti permette di capire forse come può o non può andare una cosa"
- "Una previsione di cui non si ha la certezza del risultato"

Tra queste persone, 14 hanno risposto in modo errato alle domande precedenti.

Inoltre si può osservare che in queste risposte 8 sono state date da persone che frequentano facoltà scientifiche (ingegneria, matematica, medicina, economia), 2 da persone che frequentano la scuola secondaria di secondo grado, 4 da persone che lavorano ed il resto da persone che frequentano facoltà umanistiche (lettere, lingue etc..) e questo non stupisce in quanto un approccio linguistico è più facile e viene spontaneo per chi appunto si occupa di queste discipline.

Nel terzo gruppo ci sono 11 risposte. Sono risposte che rappresentano un esempio di "delega formale": ci si affida alla definizione imparata a memoria e crolla il controllo critico, ci si estranea dal problema e si lascia fare alle procedure matematiche cioè non c'è reale interpretazione del concetto. Ad esempio coloro che hanno risposto che la probabilità "è il rapporto tra il numero di casi favorevoli (al verificarsi di un evento) e il numero di casi possibili" non hanno spiegato e forse non si sono interrogati su come e se questa definizione si possa adattare al generico evento incerto. Qualcuno ha tentato scrivendo: "la probabilità è la proporzione di un certo tipo di evento (giornata soleggiata) sul numero totale di eventi (giornate)". Altri hanno cercato di approfondire dimostrando però proprio di non aver capito, ad esempio: "è un rapporto tra l'evento considerato e la sommatoria degli eventi che si possono verificare. Quindi sole o non sole 50% di possibilità". Inoltre è interessante notare che 8 persone tra queste sono iscritte a facoltà scientifiche o lavorano come ingegneri. Quindi si potrebbe concludere che chi ha fatto studi scientifici ed ha visto più spesso questo tipo di definizioni è abituato a pensare alla probabilità soprattutto in questi termini.

Nel quarto e ultimo gruppo sono presenti coloro che hanno dato una definizione usando un loro linguaggio dando però anche un'idea di probabilità come qualcosa di numerico, che si possa quantificare. Queste risposte sono 23 e sono le più vicine a quello che si stava cercando. Ad esempio:

- "la probabilità di un evento incerto rappresenta la misura dell'attendibilità di una affermazione in base alle informazioni che si hanno sull'evento e sul suo contesto;"
- "la probabilità di un evento incerto è il calcolo, in base a fattori precedentemente verificatisi o detraibili da fattori certi, delle possibilità che tale evento si verifichi;"
- " la probabilità di un evento è la percentuale di percezione che si ha in base alle conoscenza dell'evento;"
- "quanto sia ragionevole aspettarsi che avvenga un evento".

Questa tipologia di risposte ricorda in qualche modo la definizione soggettiva da data da De Finetti.

Tra queste emergono anche due definizioni di tipo frequentista ad esempio:

- "la probabilità è la frequenza secondo la quale un evento può verificarsi o meno"

Tra chi ha dato questo tipo di risposte ci sono in particolare 9 persone che studiano materie umanistiche (lingue, lettere, ...) e 4 che studiano materie scientifiche, il resto lavora. Inoltre 3 di queste persone non hanno risposto bene alle domande precedenti e questo è interessante perché è un esempio di come pur non essendo sicuri che le facce di un dado siano equiprobabili l'idea di probabilità può essere abbastanza chiara.

In conclusione questo questionario ha mostrato quanto ancora oggi come in passato la definizione di probabilità non sia banale né scontata. Si deve notare anche come aver compiuto studi prettamente scientifici non implichi avere più facilità nel dare questa definizione. Inoltre si osserva la difficoltà delle persone nel definire qualcosa che usano spesso. Parlandone sembra di sapere cosa sia ma poi fermandosi a riflettere non si riesce a descriverlo con parole proprie.

Capitolo 2

Il concetto di probabilità: nella teoria

Ciò che è emerso dal questionario conferma l'idea, esposta in [1], di Bruno De Finetti secondo la quale nessuno riesce a spiegare la probabilità in un modo che sia accettabile per gli altri, vi è cioè una *pseudoconoscenza* del suo significato che è diversa dalla *non-conoscenza*:

> Avviene purtroppo, infatti, che, sentendo ripetere una stessa parola (più o meno misteriosa o comunque per lui nuova) nel contesto di varie frasi di cui pensa di intuire grosso modo il senso, uno finisca per associarvi un qualche "press'a-poco-significato" che però si sbriciola in mille controsensi se si tenta di precisarlo. [1, pag 435]

Inoltre egli sostiene che la probabilità non può essere descritta solo come entità astratta e che essa è inevitabilmente legata alle valutazioni che se ne fanno per pensare in condizioni di incertezza, il suo senso è cioè già insito nelle persone. Su questo racconta un aneddoto nell'articolo [5]: entrando in un bar vede in un tabellone delle sequenze di numeri riferiti alle partite di calcio della domenica seguente e chiede al barista cosa siano. Egli con estrema naturalezza risponde che sono probabilità. Bruno de Finetti, facendo riferimento a questa idea di probabilità legata alla vita delle persone, nel 1931 ne dà una definizione nuova e diversa da tutte le altre. La sua definizione dice che la probabilità di un evento è misura del grado di fiducia che un individuo coerente attribuisce, in base alle sue informazioni, al verificarsi dell'evento. É interessante notare come questa definizione sia molto simile ad alcune risposte del questionario dove nell'ultimo gruppo di descrizioni del concetto di probabilità troviamo ad esempio: "la probabilità di un evento incerto rappresenta la misura dell'attendibilità di una affermazione in base alle informazioni che si hanno sull'evento e sul suo contesto". In questo capitolo si approfondirà l'idea di de Finetti. Prima di proseguire nella trattazione, un breve accenno alla vita del matematico.

2.1 Bruno de Finetti: la vita [5]

Bruno de Finetti nasce a Innsbruck il 13 Giugno 1906, frequenta le scuole a Trento e si iscrive al Politecnico di Milano. Al terzo anno si rende conto del fatto che non è quella la sua strada e si iscrive alla Facoltà di Matematica dell'Università di Milano. Si interessa particolarmente alla matematica applicata e alla genetica e scrive un articolo sulle conseguenze della legge di Mendel con le ipotesi di accoppiamento casuale. Dopo questo articolo il suo interesse per la statistica cresce ed inizia a lavorare per l'ISTAT a capo dell'ufficio matematico. In seguito lavora per le Assicurazioni Generali a Trieste. Viene nominato docente di matematica finanziaria all'università di Padova per poi diventare professore prima a Trieste e poi, nel 1954, a Roma. Ha scritto moltissimi articoli e libri tra i quali: *Probabilità*, *Induzione e statistica (1972)* e *Teoria della probabilità (1970)* che sono stati tradotti in inglese e tedesco. Fa parte dell'Accademia dei Lincei, è socio fondatore dell'Associazione per la matematica applicata alle scienze economiche e sociali e negli anni settanta è parte di un gruppo di ricerca sulla didattica della matematica. Muore a Roma nel 1985.

2.2 Bruno de Finetti: interpretazione soggettiva

Innanzitutto, per parlare di probabilità, occorre capire cosa sia l'incertezza. Essa descrive lo stato di un'affermazione o di un evento di cui non si possa dire se sia vero o falso ([1]). De Finetti descrive tre possibili interpretazioni dell'incertezza: in un senso stretto (personalistico), in un senso intermedio (empiristico) e in un senso meno stretto (deterministico). Nel primo caso si parla di un'incertezza che cessa appena si ricevono notizie sicure, nel secondo caso si parla di un'incertezza che termina nel momento in cui l'evento si avvera e nell'ultimo caso l'incertezza cessa già dal momento in cui l'evento risulta determinato e cioè quando esso dipende solo da leggi deterministiche senza possibilità di altri influssi.

Quindi per parlare di probabilità non è necessaria una "incertezza oggettiva", per spiegarsi meglio de Finetti cita Borel:

> Si può scommettere, a testa o croce, mentre la moneta, già lanciata, è in aria, e il suo movimento è perfettamente determinato, e si può anche scommettere dopo che è caduta, sotto la condizione di non vedere su quale faccia riposi.[1, pag 437]

Inoltre secondo de Finetti il calcolo delle probabilità è la logica del probabile [4, pag 262] infatti la logica formale deduce la verità o falsità di alcune conseguenze a partire da verità o falsità delle premesse, allo stesso modo la probabilità insegna a capire il grado di verosimiglianza delle conseguenze a partire dal grado di verosimiglianza delle premesse. E proprio come per la logica è preferibile un senso soggettivo, secondo cui essa è legata ai processi mentali e insegna la coerenza del pensiero con se stesso, al senso oggettivo secondo cui essa è una proprietà del mondo reale, così, per la probabilità basta limitarsi all'interpretazione soggettiva cioè vederla come grado di fiducia che un individuo pone nell'avverarsi di un evento e da questa si possono dimostrare tutti i noti teoremi che sono condizioni necessarie e sufficienti perché l'individuo sia coerente, cioè tale che la scommessa che egli giudica non gli dia un guadagno certo.

Nella vita di tutti i giorni infatti continuamente si ragiona basandosi sull'attendibilità di alcune previsioni e quindi, anche se inconsciamente, si ragiona secondo il calcolo delle probabilità e si usano i suoi teoremi (basti pensare a quando si sceglie se prendere l'ombrello o no). Ma come si misura questa probabilità soggettiva? Cioè, come si traduce in numero? Per approfondire la concezione soggettiva di de Finetti si seguirà il suo articolo [2].

Il metodo che viene usato è legato al grado di fiducia di un individuo in un determinato evento e quindi a ciò che egli sia disposto a scommettere.

Supponiamo che un individuo O tenga un banco di scommesse pro o contro un una serie di eventi $E_1, E_2, ...E_n$, ad esempio una gara a cui partecipano n concorrenti in cui ogni evento corrisponde alla vincita dell' $n-esimo$ concorrente. Il soggetto O decide il prezzo p di un buono che dà diritto a vincere 1 se l'evento si verifica cioè, chi vuole scommettere su un evento E può comprare al prezzo pS un'obbligazione che gli dà diritto, se vince, ad avere una somma S. Quindi p sarà tanto più grande tanto più è elevato il grado di fiducia che si ha nell'avverarsi dell'evento e dipenderà di conseguenza dal soggetto O. Il soggetto, come detto prima, deve necessariamente essere coerente.

Ecco un esempio usato da de Finetti per spiegare la coerenza:

> A una gara partecipino due italiani: i concorrenti A e B; si valutino $p_A = 0,60, p_B = 0,20, p_C = 0,70$ rispettivamente la pro-

> babilità di una vittoria di A, di una vittoria di B, di una vittoria italiana. Allora sarebbero eque le tre scommesse che diano:
>
> - la prima un guadagno di 40 L o una perdita di 60 a seconda che A vinca o non vinca;
> - la seconda un guadagno di 80L o una perdita di 20 a seconda che B vinca o perda;
> - la terza una perdita di 30 L o un guadagno di 70 a seconda che un italiano vinca o no.
>
> Vinca A, vinca B o vinca un concorrente straniero, in ogni caso si vince una scommessa e se ne perdono due, e il risultato è che si perdono sempre 10 lire ($40-20-30 = 80-60-30 = 70-60-20 = 10$). Mentre se si rispetta il teorema delle probabilità totali, facendo $p = p_A + p_B$ (ad es. se si valuta $p_A = 0,60$ e $p_B = 0,20$, valutando coerentemente $p = 0,8$) un simile inconveniente non può mai aver luogo. [4, pag 3]

Da questo si può notare anche come il teorema delle probabilità totali sia legato al concetto di coerenza.

Dalla coerenza segue anche che la probabilità di un evento certo è uguale a 1 e che la probabilità di un evento impossibile è uguale a 0 e che quindi quella di un evento incerto è compresa tra 0 e 1. Infatti non si scommette nulla su un evento impossibile e si scommette tutto su un evento che accadrà con certezza. D'altra parte si dimostrerà anche il viceversa e cioè che un individuo che segue queste condizioni è coerente.

Una breve introduzione prima di precedere con le dimostrazioni.

Un evento E è un'affermazione di cui non si sa se sia vera o falsa, si dirà *somma logica* degli eventi $E^{'}$ e $E^{''}$ l'evento $E^{'} + E^{''}$ che è falso quando sono falsi entrambi gli eventi. Il *prodotto logico* dei due eventi è l'evento $E^{'} \cdot E^{''}$ che è vero quando sono veri entrambi. Se il prodotto logico è impossibile i due eventi si dicono *incompatibili.* Con $-E$ si indica la *negazione* di E. Due eventi sono uguali, $E^{'} = E^{''}$, se dire che si verifica il primo equivale a dire che si verifica il secondo. Si deve ora descrivere analiticamente la funzione numerica $P(E)$ che è una valutazione di probabilità non contraddittoria. Chi valuta la probabilità di un evento p è disposto ad accettare scommesse con un giocatore che fissa a suo piacimento la puntata S in modo che il suo guadagno sia

$$G(E) = (1-p)S$$
$$G(-E) = -pS$$

Si dimostra che condizione necessaria e sufficiente per la coerenza è che $P(E)$ abbia un unico valore non negativo e non maggiore di 1. In particolare se E è certo o impossibile la sua probabilità è rispettivamente 1 o 0.

Dimostrazione Se E è certo, l'unico guadagno possibile è $G(E) = (1-p)S$. Se $1-p \neq 0$ è possibile scegliere S tale che $G(E) > 0$ e quindi per la coerenza è necessario che sia $P(E) = 1$. Viceversa se $p = 1$, $G(E) = 0$ e questo assicura la coerenza.

Analogamente se E è impossibile, l'unico evento possibile è $-E$ e l'unico guadagno possibile è $G(-E) = -pS$ e per la coerenza è necessario e sufficiente che $p = 0$.

Si proverà ora che $P(E)$ ha un unico valore non negativo. Se l'evento è incerto, supponiamo per assurdo di attribuire alla probabilità di E due valori distinti $p^{'}$ e $p^{''}$ e quindi di essere disposti ad accettare scommesse con puntate $S^{'}$ e $S^{''}$. Si avranno due guadagni possibili:

$$G(E) = (1-p^{'})S^{'} + (1-p^{''})S^{''}$$
$$G(-E) = -p^{'}S^{'} - p^{''}S^{''}$$

Se

$$\begin{vmatrix} 1-p^{'} & 1-p^{''} \\ -p^{'} & -p^{''} \end{vmatrix} = p^{'} - p^{''} \neq 0$$

è sempre possibile determinare $S^{'}$ e $S^{''}$ in modo che $G(E)$ e $G(-E)$ siano entrambi positivi e questo è assurdo per l'ipotesi di coerenza.

Inoltre un soggetto coerente deve attribuire alla probabilità di un evento un unico valore compreso tra 0 e 1 (estremi inclusi).

Se fosse $p < 0$ sarebbe $1-p > 1 > 0$ e se $S > 0$ sarebbero positivi $G(E)$ e $G(-E)$, lo stesso accadrebbe se $p > 1$, con $S < 0$. Dimostriamo che questa condizione è anche sufficiente.

Si osserva che, per ogni S, si ha

$$pG(E) + (1-p)G(-E) = p(1-p)S - (1-p)pS = 0$$

quindi se $0 \leq p \leq 1$ è $p \geq 0$, $1-p \geq 0$ e quindi i due guadagni non possono mai risultare entrambi positivi.

$\square$

Si dimostra ora il teorema delle probabilità totali.

Teorema 2.2.1. *Siano $E_1, E_2, ...E_n$ eventi incompatibili, si ha che*

$$P(E_1 + E_2 + ... + E_n) = P(E_1) + P(E_2) + ... + P(E_n)$$

In particolare

$$P(E_1) + P(E_2) + ... + P(E_n) = 1$$

se $E_1, E_2, ...E_n$ *è una classe completa di eventi incompatibili, cioè se è certo che uno di essi debba verificarsi.*

Dimostrazione. Si svolgerà la dimostrazione supponendo che $E_1, E_2, ...E_n$ è una classe *completa* di eventi incompatibili, perché anche se non lo fosse, lo sarebbe la classe $E_0, E_1, ...E_n$ dove $E_0 = -(E_1 + E_2 + ... + E_n)$.
Si ha quindi che

$$P(E_0) + P(E_1) + ... + P(E_n) = 1$$

e anche

$$P(E_0) + P(E_1 + E_2 + ... + E_n) = 1$$

in quanto anche la classe dei due eventi incompatibili E_0 e $(E_1+E_2+...+E_n)$ è completa. Da questo risulta

$$P(E_1 + E_2 + ... + E_n) = P(E_1) + P(E_2) + ... + P(E_n)$$

Ci si limita inoltre al caso di eventi tutti possibili poiché gli eventi impossibili hanno probabilità nulla. Si tratta quindi di dimostrare che, se $E_1, E_2, ...E_n$ è una classe di eventi incompatibili, le loro probabilità $p_1, p_2, ..., p_n$, hanno somma uguale a 1.

Se si facessero puntate $S_1, S_2, ..., S_n$ su tali eventi i guadagni rispettivi sarebbero:

$$\begin{gathered} G_1 = S_1 - \sum_{i=1}^{n} p_i S_i \\ G_2 = S_2 - \sum_{i=1}^{n} p_i S_i \\ \dots \\ G_n = S_n - \sum_{i=1}^{n} p_i S_i \end{gathered}$$

Il determinante di questo sistema di equazioni di equazioni lineari in $S_1, S_2, ..., S_n$ è

$$\begin{vmatrix} 1-p_1 & -p_2 & ... & -p_n \\ -p_1 & 1-p_2 & ... & -p_n \\ ... & ... & ... & ... \\ -p_1 & -p_2 & ... & 1-p_n \end{vmatrix} = 1 - (p_1 + p_2 + ... + p_n)$$

Dunque a meno che non sia $p_1+p_2+...+p_n = 1$ si può sempre trovare un S in modo che G assuma valori tutti positivi. Per la coerenza è quindi necessario il teorema delle probabilità totali. Esso è anche sufficiente. Si osservi che

$$\sum_{h=1}^{n} p_h G_h = \sum_{h=1}^{n} p_h (S_h - \sum_{i=1}^{n} p_i S_i) = \sum_{h=1}^{n} p_h S_h - (\sum_{h=1}^{n} p_h) \sum_{i=1}^{n} p_i S_i = \\ (1 - \sum_{h=1}^{n} p_h) \sum_{i=1}^{n} p_i S_i$$

Se $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ si avrà $\sum_{h=1}^{n} p_h G_h = 0$ per ogni S. Le p_1 inoltre sono sono ≥ 0 quindi le G_n non possono mai essere tutte positive.

□

Corollario 2.2.2. *Le probabilità di due eventi contrari E e $-E$ sono tali che $P(-E) = 1 - P(E)$.*

Infatti E e $-E$ sono una classe finita e completa di eventi incompatibili.

Corollario 2.2.3. *Se E implica E' allora $P(E) \leq P(E')$.*

Infatti $E' = E + (E' - E)$ e i due eventi sono incompatibili. Si ha quindi $P(E') = P(E) + P(E' - E) \geq P(E)$.

Sia S l'insieme (finito o infinito) degli eventi E di cui un individuo valuta la probabilità $P(E)$ allora si è visto che $P(E)$, per la coerenza, deve godere delle seguenti proprietà:

- per qualunque E, $0 \leq P(E) \leq 1$
- se E_1 e E_2 sono due eventi incompatibili qualunque, si ha $P(E_1+E_2) = P(E_1) + P(E_2)$
- $P(E) = 1$ se l'evento è certo e $P(E) = 0$ se l'evento è impossibile.

Queste proprietà sono anche sufficienti infatti, assumendo che S contenga la somma, il prodotto e il contrario dei suoi elementi, si può dimostrare che, se $P(E)$ soddisfa le proprietà sopra elencate, un competitore non può scegliere nessun sistema di scommesse sugli eventi di S in base a $P(E)$ che gli consenta di avere un guadagno sicuro.

Dimostrazione. Si supponga che scommettendo cifre $S_1, S_2, ..., S_n$ sugli eventi $E_1, E_2, ..., E_n$ il guadagno sia sicuro. Gli eventi $E_1, E_2, ..., E_n$ si possono esprimere come somme di costituenti (eventi ottenuti dal prodotto logico $E_1 \cdot$

$E_2 \cdot ... \cdot E_n$ cambiando un numero qualunque dei fattori dell'evento contrario) che siano una classe completa di eventi incompatibili $C_1, C_2, ..., C_m$. Cioè se E_1 è somma logica di h costituenti una scommessa su esso con puntata S_1 equivale ad h scommesse sugli h eventi $C_{i_1}, C_{1_2}, ..., C_{i_h}$. Quindi un sistema di scommesse su $E_1, E_2, ..., E_k$ equivale sempre a un sistema di scommesse sui costituenti. Ma gli eventi costituenti costituiscono una classe di eventi completa incompatibili e si è visto che un tale sistema di scommesse non può far ottenere un guadagno sicuro. Per la proprietà additiva la stessa proprietà vale per un numero finito qualunque di eventi incompatibili.

□

Da notare che il teorema delle probabilità totali assicura che per la speranza matematica valga la proprietà distributiva: $M(X+Y) = M(X)+M(Y)$. In una scommessa equa la speranza matematica è nulla quindi i valori del guadagno non possono essere tutti positivi.

A questo punto de Finetti fa notare, senza approfondire la questione, che per una classe infinita di eventi incompatibili la probabilità della somma logica non è uguale ma uguale o maggiore della somma delle probabilità.

Si affronta ora il problema dei criteri utili per la valutazione numerica di una probabilità. Quando si hanno n casi ugualmente probabili la probabilità di ognuno di essi è $\frac{1}{n}$ e la probabilità della somma logica di m tra essi è $\frac{m}{n}$. Questa proprietà che di solito è data come prima definizione è un corollario della proprietà additiva. Essa è utile ad esempio, per i giochi di lotteria e sorteggi e inoltre è fondamentale perché prova come dalla definizione da cui si è partiti si arrivi in effetti a misurare la probabilità che un individuo attribuisce senza lasciarsi influenzare da timori personali. Infatti si poteva supporre che di fronte a n casi ugualmente probabili di cui m favorevoli e $(n - m)$ sfavorevoli a un certo evento, un individuo potesse non essere disposto a scommettere per l'evento E in base alla probabilità $p = \frac{m}{n}$ ma fosse disposto a scommettere in base a un valore più grande o più piccolo. Per tutte le proprietà precedentemente dimostrate, ad un individuo coerente questo non può accadere.

Si deve però osservare che, questo metodo usuale di definire la probabilità come numero di casi favorevoli su numero di casi possibili, non può essere enunciato prima di aver dimostrato che, se un evento E_1 ha m_1 casi favorevoli sugli n_1 possibili e un evento E_2 ha m_2 casi favorevoli sugli n_2 possibili, allora, E_1 è più probabile se $m_1 n_2 \geq m_2 n_1$. Si devono cioè chiarire i motivi logici secondo cui chi ha di fronte due urne riterrà più probabile estrarre una palla bianca dall'urna in cui ci siano più palle bianche nel caso in cui l'estrazione di una qualunque palla sia ugualmente probabile.

Si prenda ora una funzione $Q(E)$ che rappresenta una misura possibile della probabilità, essa dovrà quindi essere tale che $Q(E^{'}) \leq Q(E^{''})$ se $P(E^{'}) \leq P(E^{''})$. Ne risulta che se $P(E) = x$, $\xi = Q(E) = \varphi(x)$ con $\varphi(x)$ funzione crescente di x. Limitandosi al caso in cui φ sia continua, si osserva che tutti i valori dell'intervallo (ω, τ), con $\omega = \varphi(0)$ e $\tau = \varphi(1)$ sono le probabilità $Q(E)$. Se

$$x + y = z \text{ si ha che } \varphi(x + y) = \varphi(z)$$

e chiamando:

$$\varphi(x) = \xi,\ \varphi(y) = \eta,\ \varphi(z) = \zeta$$

si ha

$$\zeta = \varphi[\varphi^{-1}(\xi) + \varphi^{-1}(\eta)]$$

Per una funzione Q quindi il teorema delle probabilità totali si traduce nell'esistenza di una legge di addizione generale. Cioè, se una funzione Q può rappresentare la probabilità, esiste una funzione S tale che, se per due eventi incompatibili si ha $Q(E^{'}) = \xi, Q(E^{''}) = \eta$,

$$Q(E^{'} + E^{''}) = S(\xi, \eta)$$

Si può notare che la funzione S nell'intervallo (ω, τ) è simmetrica, che ω è nullo rispetto ad S ($S(\omega, \xi) = \xi$), è continua, crescente delle due variabili, associativa e archimedea (comunque piccolo si scelga ξ, calcolando $\xi_2 = S(\xi, \xi)$, $\xi_3 = S(\xi_2, \xi)$... dopo un numero finito di operazioni si ottiene un numero maggiore di τ). Queste condizioni sono anche sufficienti cioè, presa una funzione S che abbia queste proprietà e un numero τ per cui S sia archimedea, si può sempre determinare una funzione $Q(E)$ che misuri le probabilità che si attribuiscono agli eventi E per cui la legge di addizione sia data da S. La $Q(E)$ è anche univocamente determinata infatti è univocamente determinata la funzione crescente $\varphi(x)$ tale che $S(\xi, \eta) = \varphi[\varphi^{-1}(\xi) + \varphi^{-1}(\eta)]$ ed è quindi $Q(E) = \varphi(P(E))$[1].

Si è visto finora che la proprietà fondamentale del calcolo delle probabilità è il teorema delle probabilità totali, il quale dipende dal metodo di rappresentare la probabilità con numeri reali come è convenzione usuale. Esso contiene anche qualcosa che non dipende da questa convenzione ma che rimane immutato per qualunque altro metodo di misura: l'esistenza di una legge di addizione che dà la probabilità della somma logica di due eventi incompatibili in funzione delle probabilità di questi eventi. Ma de Finetti usa anche un altro metodo per far vedere questo: la via assiomatica e intrinseca.

[1]Per la dimostrazione si può vedere [2, pag 319]

Si indica con $E^{'} \geq E^{''}$ la frase "$E^{'}$ è non meno probabile di $E^{''}$". La relazione "$\geq$" soddisfa le seguenti proprietà:

1. dati due eventi $E^{'}$ ed $E^{''}$, è sempre $E^{'} \geq E^{''}$ oppure $E^{''} \geq E^{'}$; se valgono entrambe le cose si scrive $E^{'} \cong E^{''}$ e si dice che i due eventi sono identicamente probabili; se $E^{'} \geq E^{''}$ ma non $E^{''} \geq E^{'}$ si scrive $E^{'} > E^{''}$;

2. se A è un evento certo e B un evento impossibile, per ogni evento E possibile (né certo né impossibile) si ha $A > E > B$;

3. se si ha $E^{'} \geq E$, $E \geq E^{''}$, è anche $E^{'} \geq E^{''}$ (proprietà transitiva), ne consegue che se $E^{'} \cong E$, $E \cong E^{''}$ allora $E^{'} \cong E^{''}$;

4. se E_1 ed E_2 sono due eventi incompatibili con un evento E, ed è $E_1 \geq E_2$ è anche $E + E_1 \geq E + E_2$ e ciò vale anche in caso di $>, \cong, <$.

Da quest'ultima si deduce una proprietà più generale:

4$^{'}$. se E, E_1 sono incompatibili ed $E^{'}$ ed $E_1^{'}$ sono incompatibili, perché sia $(E + E_1) \geq (E^{'} + E_1^{'})$ è necessario che valga almeno una delle due condizioni $E \geq E^{'}$, $E_1 \geq E_1^{'}$, ed è sufficiente che valgano entrambe.

Si dimostra ora come dalla (4) si può dedurre la (4$^{'}$).
Dimostrazione. Innanzitutto la (4) è un caso particolare della (4$^{'}$) quando $E = E^{'}$. Si supponga ora che $E, E_1, E^{'}, E_1^{'}$ siano quattro eventi incompatibili con

$$E \geq E^{'},$$
$$E_1 \geq E_1^{'}.$$

La (4) dà

$$E + E_1 \geq E + E_1^{'} \geq E^{'} + E_1^{'}$$

quindi, per la (3)

$$E + E_1 \geq E^{'} + E_1^{'}.$$

Analogamente se fosse

$$E^{'} > E \text{ e } E_1^{'} > E + E_1$$

si otterrebbe

$$E^{'} + E_1^{'} > E + E_1.$$

Passando la caso generale, si può scrivere:

$$E = EE' + E(-E'),\ E_1 = E_1E_1' + E_1(-E_1')$$
$$E' = EE' + E'(-E),\ E_1' = E_1E_1' + E_1'(-E_1)$$

E si avrà:

$$E + E_1 = (EE' + E_1E_1') + E(-E') + E_1(-E_1')$$
$$E' + E_1' = (EE' + E_1E_1') + E'(-E) + E_1'(-E_1).$$

Se

$$E = EE' + E(-E') \geq E' = EE' + E'(-E)$$

la (4) dà:

$$E(-E') \geq E'(-E).$$

Analogamente se $E_1 \geq E_1'$ si ha $E_1(-E_1') \geq E_1'(-E_1)$.

I quattro eventi $E(-E'), E'(-E), E_1(-E_1'), E_1'(-E_1)$ sono incompatibili e, per i passaggi precedenti si può concludere che

$$E(-E') + E_1(-E_1') \geq E'(-E) + E_1'(-E_1).$$

Applicando la (4) e la precedente scomposizione di $E + E_1$ e $E' + E_1'$ si può vedere che

$$E + E_1 \geq E' + E_1'.$$

La dimostrazione è analoga per la reciproca.

□

La proprietà fondamentale è appunto la $4'$, in particolare essa dice che se $E \cong E'$ e $E_1 \cong E_1'$ allora $(E + E_1) \cong (E' + E_1')$ e cioè che la probabilità della somma di eventi è funzione delle probabilità degli eventi stessi; la disuguaglianza dice che la funzione è crescente e si può dedurre che è possibile calcolare la probabilità nel modo usuale.

Infatti se ci sono n casi possibili identicamente probabili $E_1, E_2, ..., E_n$, sia E la somma di m tra essi e allo stesso modo se si hanno n' casi possibili $E_1', E_2', ..., E_n'$ di cui E' è la somma di m' tra essi, si ponga $nn' = N, mn' = M, m'n = M'$.

Si immagini una classe completa di N eventi incompatibili identicamente probabili $A_1, A_2 ..., A_n$, sia A una somma di M, A' una somma di M' tra essi. 1 Si mostrerà ora che $E \cong A$, $E' \cong A'$ e $A' > A$, $A' \cong A$ o $A' < A$ se $M < M'$, $M = M'$, $M > M'$.

Quindi $E^{'}$ è più, meno o identicamente probabile di E a seconda che $\frac{m^{'}}{n^{'}}$ sia maggiore, minore o uguale ad $\frac{m}{n}$.

Per mostrarlo si dividono gli eventi $A_1, A_2..., A_n$ in n classi di $n^{'}$ eventi ciascuna, le loro somme logiche $B_1, B_2..., B_n$ sono una classe di eventi incompatibili identicamente probabili (per la 4).

Esse sono anche identicamente probabili degli $E_1, E_2, ..., E_n$: se per assurdo non lo fossero e si avesse ad esempio $B_1 > E_1$ allora si avrebbe anche $B_2 > E_2$,.., $B_n > E_n$, ma $(B_1 + B_2 + ... + B_n) \cong (E_1 + E_2 + ... + E_n)$ essendo entrambi eventi certi e ciò non è possibile se non è $E_i \geq B_i$ per nessun i (per la $4^{'}$).

Inoltre anche E (somma di m eventi E_i) è identicamente probabile di A (somma di $mn^{'}$ eventi A_i che può considerarsi somma di m eventi B_i) e ciò avviene anche per $E^{'}$ ed $A^{'}$.

Finora si è dimostrata la possibilità di ridursi ad un denominatore comune. Ora resta da provare che essendo i denominatori uguali la probabilità cresce all'aumentare del numeratore, cioè che una somma A di M eventi identicamente probabili di una classe incompatibile completa $A_1, A_2..., A_n$ è più probabile di una somma $A^{'}$ di $M^{'}$ tra essi se $M > M^{'}$.

Tutte le somme di un numero uguale di A sono identicamente probabili, si può supporre che $A^{'}$ sia somma di $M^{'}$ fra gli M eventi contenuti in A. Se per assurdo $A^{'} \geq A$ si avrà $A^{'} + (-A) \geq A + (-A)$ ma questo è assurdo i quanto al primo membro c'è un evento incerto (mancano gli $M^{'} - M$ casi possibili) e al secondo un evento certo.

Si è così mostrato che i quattro postulati assicurano la legittimità della convenzione usuale cioè, se E è identicamente probabile alla somma di m tra n eventi identicamente probabili che costituiscono una classe completa, $P(E) = \frac{m}{n}$.

In generale $P(E) = x$, se per un qualunque evento $E^{'}$ con probabilità y definita nel modo precedente, si ha $E^{'} < E$ se $y < x$ e viceversa.

Inoltre $P(E) \geq P(E^{'})$ se $E \geq E^{'}$ ma non vale il viceversa. Infatti se ad esempio si hanno due eventi A e B, il primo impossibile e il secondo possibile ma con probabilità nulla si ha che $P(A) = P(B) = 0$ ma $A < B$ per il postulato 2. Infine che due eventi identicamente probabili ($E^{'} \cong E$) sono sempre ugualmente probabili ($P(E) = P(E^{'})$) ma non viceversa.

Dopo aver enunciato i postulati si può dire che un individuo è coerente se valuta le disuguaglianza fra i gradi di probabilità in modo da non contraddire i quattro postulati.

Per spiegare meglio il significato psicologico del quarto postulato riportiamo l'esempio fatto da Bruno de Finetti:

> se un individuo giudica, all'inizio del campionato di calcio, che la Roma abbia maggiore probabilità dell'Ambrosiana[2] di aggiudicarsi il titolo, e che la Lazio abbia maggiore probabilità del Milan, egli deve anche pensare, perché la sua opinione non sia intrinsecamente incoerente, che è più probabile che il titolo sia conquistato da una squadra romana che da una squadra milanese. In questo esempio abbiamo quattro eventi incompatibili: la vittoria finale di una delle quattro squadra nominate, e li indicheremo con le iniziali R, A, L, M. Abbiamo supposto che un individuo ritenga $R > A$, $L > M$, e abbiamo detto che, per soddisfare il postulato quarto, egli deve allora ritenere $R + L > A + M$; egli deve infatti ritenere $R + L > A + L > A + M$. [2, pag 325-326]

Gli eventi sono tutti incompatibili, basta quindi dimostrare un enunciato generale secondo cui se A è un evento incompatibile con B e con C, $A + B > A + C$ se $B > C$ e viceversa.

Infatti per godere di un certo vantaggio V subordinatamente al verificarsi di A siamo disposti a sostenere un gruppo S di sacrifici, per goderne subordinatamente al verificarsi di B siamo disposti a sostenere un ulteriore gruppo $S^{'}$ di sacrifici. Quindi per poter godere di V subordinatamente al verificarsi di $A + B$ si devono sostenere $S + S^{'}$ sacrifici. Se C è un altro evento incompatibile con A, non meno probabile di B, allora siamo ancora disposti a sostenere in più $S^{'}$ sacrifici per poter godere di V anche nel caso in cui si verifichi C e quindi si è ancora disposti a sostenere $S + S^{'}$ sacrifici per godere di V subordinatamente ad $A + C$. Cioè si giudica $A + C$ non meno probabile di $A + B$.

Per concludere il discorso de Finetti fa un'interessante analogia:

> Si può definire la temperatura di un corpo cominciando col definire la disuguaglianza fra due temperature [...]. Ma se uno volesse arrivare effettivamente a misurare la temperatura di un corpo seguendo questa via, dovrebbe disporre di una serie sufficientemente numerosa di corpi ad altre temperature che gli permettessero di verificare tutte le disuguaglianze che gli occorrono per giungere a una conclusione. Se dico invece: la temperatura è il numero segnato dal termometro, ne do una definizione che mi permette immediatamente di misurare la temperatura di un corpo, direttamente, senza aver bisogno d'altri corpi a temperatura diversa

[2] con Ambrosiana si intende l'Inter, l'esempio è stato scritto nel 1930, durante il ventennio fascista, quando il nome della squadra dell'Inter è stato sostituito con Ambrosiana a causa del riferimento di Inter a Internazionale

> come termini di riferimento, purché naturalmente si disponga di un termometro. Questo termometro, nel caso della probabilità, è dato dal criterio della speranza matematica. E non è nemmeno un termometro privo di significato immediato, come quello della temperatura, che chi non ne conosce il funzionamento potrebbe leggere senza avvertire che misura il caldo e il freddo. [...] [2, pag 327]

Da queste dimostrazioni ne consegue che tutti i risultati del calcolo delle probabilità sono conseguenze della definizione di coerenza.

Un altro elemento fondamentale della concezione di Bruno de Finetti è il significato del termine *evento* ([1]). Lui distingue tra un'interpretazione in senso specifico e una in senso generico. Nel primo caso si parla di un caso singolo e ben determinato e cioè tale che sia poi chiaro se si è verificato o meno. Nel secondo caso è un termine più ambiguo e confuso, usato in senso collettivo per indicare uno tra infiniti possibili eventi del primo senso. Può essere utile usare un termine per indicare degli eventi che hanno caratteristiche comuni ma bisogna evitare fraintendimenti che possono portare ad attribuire loro altre somiglianze che invece non hanno. Si può dire ad esempio "prove di un medesimo fenomeno", perché dicendo "prove di un medesimo evento" si rischia che da questo ne consegua automaticamente che siano prove ugualmente probabili e indipendenti col rischio di arrivare a confondere la probabilità con la frequenza. Per chiarire: nella visione oggettivista, l'evento che indica un caso singolo si chiama prova di un evento e il nome collettivo è detto evento ma questo appunto crea ambiguità. Nella visione soggettivista il primo è un evento (prova di un fenomeno) e il secondo è un fenomeno.

A questo punto si deve introdurre una nozione che per de Finetti pone definitivamente chiarezza alla terminologia da usare: la nozione di eventi *scambiabili*. Due eventi scambiabili sono due eventi ugualmente probabili e indipendenti di cui non si conosce la probabilità.

Inoltre molto importante è anche lo stato di informazione in base al quale cambia la probabilità. Infatti $P(E|H)$ è il prezzo da pagare per una scommessa che viene vinta o persa in base al verificarsi o meno di H. Al variare dell'informazione $H_0, H_1, ..., H_n$ la probabilità diventa $P(E|H_k) = P(EH_k)/P(H_k)$ con $k = 0, 1, 2, .., n, ..., etc.$. e non è altro che la probabilità condizionata o subordinata all'evento H.

Spesso si crede che $P(E|H)$ sia qualcosa di accessorio a $P(E)$ dimenticando che tutto dipende dallo stato di informazione. Questo potrebbe portare a pensare che l'indipendenza sia assoluta anziché relativa ad un certo stato di informazione H. Basti pensare al seguente esempio: le estrazioni con reimbussolamento da un'urna di composizione nota sono indipendenti ma se la composizione non è nota ogni informazione sul risultato di una nuova estrazione fa accrescere la probabilità attribuita alla composizione del colore di quella estratta. Il vero significato di "probabilità costante ma incognita" è data appunto dalla nozione scambiabilità. Le estrazioni sono cioè scambiabili, non indipendenti nel senso che la probabilità non varia per permutazioni. Ad esempio ogni successione di 9 estrazioni (es. 5 bianche e 4 nere) ha la stessa probabilità per permutazioni:

$$P(N-B-N-B-B-B-N-N-B) =$$
$$P(B-B-B-N-B-N-N-B-N) = ...$$

Questa non-indipendenza consente una valutazione della probabilità di casi futuri basata sulla frequenza dei casi osservati nelle condizioni di scambiabilità.

2.3 Sulle altre definizioni

Si analizziano ora le altre due definizioni di probabilità e come esse derivino direttamente dalla definizione soggettiva, si seguirà [3]. Per quanto riguarda la definizione classica data da Laplace, come detto precedentemente, essa è un corollario della definizione che deriva dal teorema della probabilità totali. La definizione classica potrebbe essere considerata oggettiva ma non lo è perché è soggettivo lo stesso giudizio di uguale probabilità in quanto esso deriva da considerazioni soggettive che portano alla valutazione di probabilità in base a certe circostanze. Inoltre è da notare la circolarità della definizione data da Laplace che descrive la probabilità parlando di casi equiprobabili.

Per quanto riguarda la seconda valutazione che lega la probabilità alla frequenza, questa secondo de Finetti non ha alcun senso se non si precisano le condizioni, condizioni legate alla scambiabilità come precedentemente detto. Secondo questa definizione la probabilità è il limite della frequenza al tendere del numero delle prove all'infinito, il problema di questa definizione è il significato pratico, in quanto essa avrebbe senso solo nel caso in cui si eseguano effettivamente le successive infinite prove. Per spiegare questo concetto de Finetti fa questo esempio:

> prendiamo ad esempio il gioco della roulette, e vediamo cosa significhi, per chi segua tale definizione, dire che la probabilità[3] è $p = \frac{1}{2}$. Significa affermare che, in una serie prestabilita di prove,

[3] L'autore si riferisce alla probabilità di uscita del nero

> la frequenza tende al limite $\frac{1}{2}$, ciò che si giustifica con l'osservazione empirica che, facendo un numero molto grande di prove, ordinariamente la frequenza è prossima a $\frac{1}{2}$ e l'approssimazione è tanto maggiore quanto maggiore è il numero delle prove. In particolare, significa affermare l'impossibilità che venga sempre nero, indefinitamente. E qui vien spontaneo d'osservare che se è innegabile da un lato l'estrema inverosimiglianza che su un gran numero di prove, e peggio quindi su infinite prove, appaia sempre nero, è altrettanto innegabile che non si vede però alcuna ragione di escludere come impossibile a priori tale eventualità, che non contiene certo nulla di per sé stesso contraddittorio. [3, p 5]

Può portare a gravi errori confondere l'infinitamente poco verosimile con l'impossibile. Infatti se ad esempio si assiste saltuariamente alle prove e si tiene conto solo di ciò che vedo non si hanno motivi per arrivare a concludere qualcosa di diverso dal fatto che la frequenza limite sia $\frac{1}{2}$ e che sarà impossibile che si veda sempre nero. Si può dire altrettanto per una qualunque serie di prove e se per ogni serie di prove è impossibile che venga sempre nero vuol dire che può esserci il nero solo in un numero finito di prove ma ciò contraddice l'ipotesi della frequenza limite. Un altro punto debole citato dall'autore è il seguente: il fatto che si ritenga impossibile che in una successione infinita di prove alla roulette ci appaia sempre il nero deriva semplicemente dal fatto che questo evento sia ritenuto poco probabile anche in un numero n di prove e ciò perché sarebbe un unica successione sulle 2^n possibili ed ugualmente probabili. Essa non ha una ragione speciale per essere ritenuta poco probabile ma semplicemente è una fra le possibili.

L'unica cosa che si può dire è che, per una certa categoria di problemi si può, immaginando una successione infinita di prove, costruire un esempio di possibile andamento dei risultati in modo da avere per ogni successione di eventi analoghi una frequenza limite uguale alla probabilità.

Infine de Finetti si riferisce al metodo di Cantelli che rappresenta gli eventi come figure piane e le loro probabilità come le rispettive aree. Con questo metodo il teorema delle probabilità totali diventa facilmente comprensibile, meno intuitivo è per le probabilità composte perché gli eventi indipendenti sono rappresentati da aree moltiplicabili e questa proprietà non è facilmente rappresentabile geometricamente. A livello didattico questo metodo potrebbe essere funzionale ma anche in questo caso ci sono dei punti deboli. Ad esempio si rischia di insegnare la teoria della probabilità senza insegnarne il significato eliminando di fatto la nozione empirica di probabilità.

L'idea di Cantelli non si allontana troppo dall'assiomatizzazione fatta da Kolmogorov nel 1933 che ha chiarito definitivamente il concetto di probabilità ponendosi sopra le parti e distaccandosi da ogni significato empirico. Questa impostazione accetta ogni approccio purché rispetti gli assiomi:

- La probabilità di un evento A è un numero unico maggiore o uguale a 0;
- La probabilità dell'evento certo è 1;
- Siano A e B due eventi incompatibili, allora la probabilità della loro unione è la somma delle singole probabilità di A e B.

In conclusione, nel suo articolo de Finetti scrive che la cosa migliore è definire la probabilità usando il suo naturale significato, quello soggettivo. A quel punto tutte le altre possibili definizioni sono diversi criteri pratici per la sua valutazione in base al caso in cui ci si trova: estrazioni, frequenze etc..

> L'importante è di liberarsi da quelle visioni particolari e unilaterali che costringono ad avvizzire la teoria delle probabilità in un campo ristretto privo di respiro e di vita, come se essa non potesse darci il suo ausilio in tutti i casi in cui ci dobbiamo basare su previsioni e congetture, come se fosse una creatura artificiosa estranea alle nostre facoltà istintive, come se non avesse la tempra necessaria per lanciarsi nel mare aperto della realtà. [3, p 25]

Capitolo 3

Bruno de Finetti e la didattica

Dopo aver visto come dalla definizione soggettiva di probabilità si possono ricavare tutti i teoremi del calcolo delle probabilità, ci si chiede se e come questo approccio possa essere applicato alla didattica della matematica. Nelle scuole quando si inizia a parlare di probabilità vengono date agli studenti le tre le definizioni per poi concentrarsi sulla classica e approfondire teoremi e fare esercizi solo nel caso di equiprobabilità (dadi, monete..), perché applicabile ai casi semplici. Si accenna solo alla definizione soggettiva con qualche esempio sulle scommesse ippiche. Infatti anche nelle indicazioni nazionali del 2010 per i licei sia scientifici che non, è scritto:

> Sarà introdotta la nozione di probabilità, con esempi entro un contesto classico.

Nelle indicazioni nazionali per istituti tecnici e professionali la situazione non è diversa. Tra le conoscenze per il primo biennio c'è scritto:

> Significato della probabilità e sue valutazioni. Semplici spazi (discreti) di probabilità: eventi disgiunti, probabilità composta, eventi indipendenti. Probabilità e frequenza.

Per quanto riguarda le abilità:

> Calcolare la probabilità di eventi elementari.

Cioè nelle indicazioni nazionali non si nomina la definizione soggettiva, questo perché forse è più complicata sia da spiegare sia da applicare e perché potrebbe confondere i ragazzi il mettere la parola "soggettivo" in qualcosa che riguarda la matematica.

Allo stesso tempo però la definizione soggettiva collega meglio la probabilità al mondo reale e questo aspetto è molto importante per l'apprendimento della matematica.

Di conseguenza, data la grande importanza attribuita alla definizione classica e alle applicazioni della probabilità nei casi elementari non stupisce che molti studenti universitari, anche di discipline scientifiche, abbiano definito la probabilità come rapporto tra numero di casi favorevoli e numero di casi possibili nel questionario, come se essa non avesse altro significato e senza chiedersi come questa definizione potesse essere applicata all'esempio che era proposto nella domanda (probabilità che domani ci sia il sole).

Questo forse perché studiando solo questo caso difficilmente applicabile alla realtà si tende a distaccare le due cose: ciò che si studia da ciò che si vive.

Infatti il problema della definizione classica, da un punto di vista didattico, è il suo poco immediato legame con la vita reale: dire che la probabilità è il rapporto tra numero di casi favorevoli e numero di casi possibili non dice nulla su cosa sia la probabilità che domani ci sia il sole, che una squadra vinca una partita o la probabilità di vincere una scommessa.

Quindi, quando si usa la parola "probabilità" nella vita quotidiana non viene in mente di applicare i teoremi che la riguardano, sembrano due cose piuttosto lontane, anche e soprattutto perché trovare casi equiprobabili nella realtà è molto raro.

Un'altra conseguenza è il rischio di delega formale: quando si è a scuola si risponde dando questa definizione che è stata assegnata dall'insegnante, senza sapere di fatto il vero senso intrinseco e soprattutto senza interessarsene, per poi scordarsela una volta lontani dal contesto scolastico.

Anche la definizione frequentista ha dei punti deboli. Infatti si applica solo a eventi ripetibili nelle medesime condizioni e quindi anche in questo caso nel mondo reale è molto raro osservarla. Non si possono far ripetere più volte un rigore o una partita.

Per gli studenti questo ambito della matematica è particolarmente ostico da comprendere. Un altro rischio infatti è l'errore del giocatore d'azzardo, di cui parleremo ampiamente nell'ultimo capitolo. Questo errore ad esempio nel lotto consiste nel credere che i numeri cosiddetti ritardatari abbiano più probabilità di essere estratti.

Bruno de Finetti nella sua vita si è interessato molto alla didattica della matematica, ha collaborato con il gruppo di ricerca di Roma, di cui faceva parte anche, tra gli altri, Emma Castelnuovo. Il suo impegno educativo ha toccato moltissimi aspetti ([9]), dai programmi di insegnamento della matematica per la scuola secondaria, alla denuncia dei difetti della scuola italiana, all'analisi dei problemi di apprendimento e di formazione degli insegnanti. Ha promosso gare di matematica intorno al 1960, per poi far partecipare i migliori a gare internazionali.

Secondo lui la matematica deve condurre alla giusta interpretazione dei fenomeni naturali e dei processi dell'attività mentale umana, è necessario suscitare interesse negli allievi, contrastare l'atteggiamento passivo, mostrare l'utilità della matematica che non è solo un insieme di nozioni da memorizzare.

Ha scritto di didattica in moltissimi articoli e si è occupato sia della didattica in generale, sia di proposte di nuove forme di esercizi e di approcci. Ad esempio in [8, pag 384] de Finetti fa un esempio per l'"addestramento nelle valutazioni" presentando uno schema che può essere usato anche come gioco. Potrebbe riguardare eventi di varia natura, in questo caso si occupa di calcio.

L'esercizio consiste nell'individuare, per ogni partita, tre probabilità che una persona attribuisce ai risultati "1", "X", "2" (vittoria, pareggio, sconfitta), ad esempio riempiendo una schedina in questo modo:

Partite	Probabilità (in %)		
	1	X	2
A – B	50	30	20
C – D	45	30	25
E – F	80	15	5
G – H	25	35	40
I – J	35	45	20
K – L	60	25	15
M – N	30	40	30
O – P	75	15	10
Q – R	15	50	35

Dopo aver saputo i risultati si calcola, per ogni partita, una penalizzazione in base a delle tabelle e se ne fa la somma. Se si ammettono solo indicatori di probabilità di 5 in 5, cioè in percentuale, con ultima cifra 0 o 5, le penalizzazioni si possono calcolare in base alla tabella di seguito.

probabilità		00	05	10	15	20	25	30	35	40	45	50		XXXXXX XXX
Penalizz. se l'evento risulta	VERO	400	361	324	289	256	225	196	169	144	121	100	FALSO	*Penalizz. se l'evento risulta*
	FALSO	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	VERO	
XXXXXXXX XXX		100	95	90	85	80	75	70	65	60	55	50	·	Probabilità

(N.B.: le probabilità da 0 a 50 si leggono *sopra* e per esse VERO-FALSO si legge *a sinistra*; le probabilità da 50 a 100 si leggono *sotto* e per esse VERO-FALSO si legge a destra; nella colonna e riga così individuate si trova la penalizzazione).

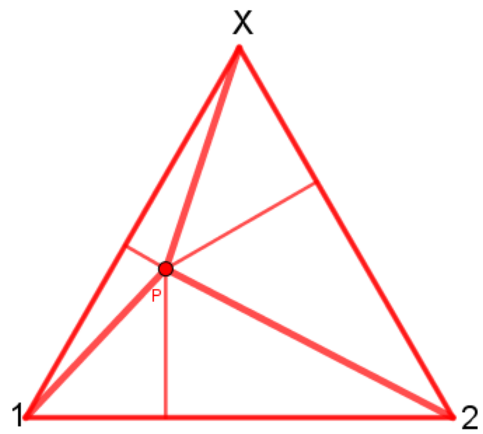
Le classifiche finali e di giornata sono fatte al minimo delle penalizzazioni. Ad esempio, si prenda una partita O-P con pronostici 75-15-10. Supponiamo sia terminata in pareggio. La penalizzazione si calcola nel seguente modo:

Probabilità	Evento	Risultato	Penalizzazioni
75%	"1"	FALSO	225
15%	"X"	VERO	289
10%	"2"	FALSO	4

Siccome il primo risultato è falso si ha una penalizzazione di 225, il secondo è vero e gli era stato dato un valore di probabilità 15 quindi dà una penalizzazione di 289 e il terzo valore che aveva una bassa probabilità ed è infatti risultato falso, dà una penalizzazione di 4.

Ora si dà un significato geometrico alla regola. In un triangolo equilatero la somma delle distanze dai lati è costante e uguale all'altezza per tutti i punti interni P. Prendendo l'altezza uguale a 1 ogni punto P rappresenta un pronostico coerente con somma delle probabilità 1. Le distanze di P dai lati sono le rispettive probabilità. I vertici (contraddistinti con 1, X, 2) rappresentano il pronostico di probabilità massima attribuita a quel risultato.

La penalizzazione è il quadrato della distanza tra il punto P del pronostico e il vertice corrispondente al risultato che si è avuto.



Quindi la penalizzazione minima che è 0 si avrà solo se si era attribuita probabilità uguale a 1 all'evento che si è avverato. Non conviene però tentare di indovinare esattamente cosa accadrà infatti la penalizzazione massima si avrà se si attribuisce tutta la probabilità ad un evento che non si verifica. Inoltre bisogna abituarsi a pensare anche che i casi poco probabili sono sempre possibili. Questo metodo, secondo de Finetti, sarebbe utile anche per gli esami a quiz perché appunto porta ad evitare il "rispondere a caso" infatti conviene sempre fare un pronostico in base a delle valutazioni perché indicare un punto diverso da quello che rappresenta la propria opinione equivale ad aumentare la penalizzazione.

Questo esperimento mostra anche molte delle caratteristiche che de Finetti attribuisce alla probabilità: [7, pag 89]

- la probabilità è soggettiva, il soggetto deve rispettare delle regole di coerenza senza le quali avrebbe perdite superiori al minimo possibile;
- ogni valutazione di probabilità è una probabilità condizionata in quanto dipende dalle informazioni che si hanno;
- l'acquisizione di ulteriori notizie permette di modificare le valutazioni sugli eventi futuri;
- ogni nuova informazione influisce non solo insieme alle altre (quando la ricerca è conclusa) ma anche singolarmente;
- l'ordine di acquisizione delle informazioni può essere sia influente che non per le valutazioni delle probabilità, il secondo caso rappresenta la situazione di scambiabilità.

Questo è inoltre un vero e proprio esperimento comportamentale come si dice in [7] che insegna alle persone a pensare e ragionare in base a delle valutazioni ed obbligando a indicare le probabilità numericamente.

Ad evidenziare questa caratteristica è anche una ricerca svolta da Alberto Piatti e Gianfranco Arrigo nel 2005 [6], nella quale si sostiene che una rappresentazione geometrica della probabilità può essere utile per analizzare molti tipi di situazioni in cui i giudizi e le valutazioni vengono fatte in modo impreciso e appunto soggettivo, situazioni molto vicine all'esperienza degli studenti analizzando le quali si può rendere più interessante lo studio della probabilità.

Infatti spesso nelle situazioni quotidiane si tende a dare un giudizio di tipo qualitativo piuttosto che quantitativo ed è importante poter analizzare i giudizi qualitativi. Ne esistono tre tipi:

- *classificatori*: espressi su un unico evento, ad esempio: "A è probabile";
- *comparativi*: espressi confrontando le probabilità di due eventi;
- *di rapporto*: che considerano i rapporti tra due probabilità, ad esempio: "A è il triplo più probabile di B".

I giudizi qualitativi sulla probabilità di un evento A ($P(A)$) non sono precisi e quindi conviene trovare un intervallo in cui $P(A)$ può trovarsi piuttosto che un valore preciso di $P(A)$. Ad esempio dire "A è probabile" significa dire che si ritiene più probabile l'evento A piuttosto che l'evento $\neg A$, questo giudizio si può quindi quantificare con

$P(A) > \frac{1}{2}$.

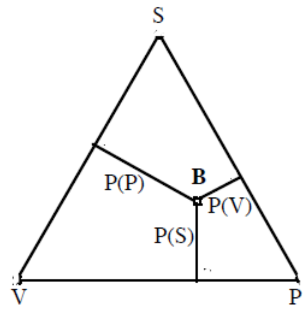
Analogamente dire "A è improbabile" significa dire:

$P(A) < \frac{1}{2}$.

Dire "A è almeno il doppio più probabile di B" significa dire:

$P(A) \geqslant 2P(B)$.

Si consideri il solito esempio della squadra di calcio che può vincere con probabilità $P(V)$, perdere con probabilità $P(S)$ e pareggiare con probabilità $P(P)$. Trattandosi di tre esiti si può rappresentare la situazione con le coordinate baricentriche. I tre esiti sono quindi ai vertici di un triangolo equilatero di lato unitario e ogni tripla $(P(V), P(P), P(S))$ è un punto B del triangolo.



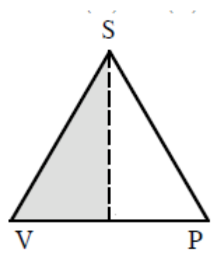
L'obbiettivo è trovare l'insieme di punti $(P(V), P(P), P(S))$ che rappresenta il giudizio qualitativo espresso.

Ad esempio questi tre giudizi:

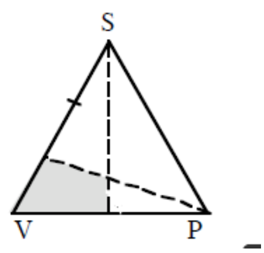
- G1: è più probabile vincere che pareggiare;
- G2: vincere è almeno il doppio più probabile che perdere;
- G3: è più probabile che si vinca.

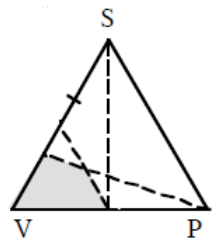
si possono rappresentare simultaneamente in un triangolo equilatero.

G1 si traduce in: $P(V) > P(P)$, la parte grigia corrisponde alle triple che rappresentano il G1.



G2 si traduce in: $P(V) \geq P(S)$. Incorporandolo a G1 si ottiene:

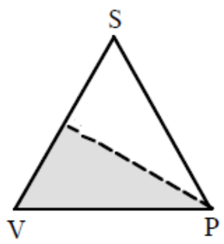




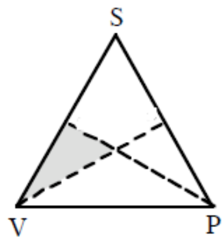
G3 si traduce in $P(V) > \frac{1}{2}$. Unendolo ai primi due si ottiene:

Si può notare che G2 e G3 rendono ridondante G1. Due giudizi sono coerenti se esiste almeno un punto in comune tra i loro insiemi di probabilità. Potrebbe anche capitare che non esista alcun punto che soddisfi tutti i giudizi e cioè che la situazione sia incoerente, ad esempio dicendo:

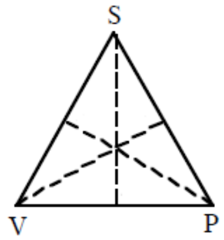
- G1: vincere è più probabile di perdere;



- G2: perdere è più probabile di pareggiare;



- G3: pareggiare è più probabile di vincere;

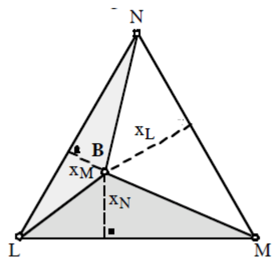


Questa tecnica può quindi essere usata per verificare la coerenza dei giudizi espressi.

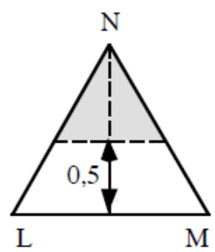
A questo punto gli autori descrivono una proposta didattica con una serie di esercizi (di cui si riportano degli esempi) che, partendo dalla visione geometrica, portano a far interpretare i giudizi qualitativi sulla probabilità.

Innanzitutto propongono di costruire con un software di geometria dinamica un triangolo equilatero LMN qualsiasi con un punto B interno.

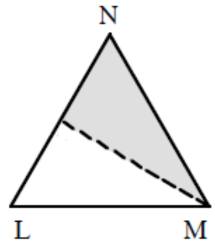
Trascinando il punto B si può notare che la somma $x_L + x_M + x_N$ è costante, non difficilmente si dimostra che è proprio uguale all'altezza del triangolo.



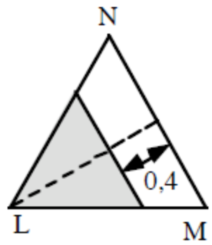
Si fanno poi trovare graficamente i punti B che rispettano determinate condizioni, ad esempio $x_N > 0,5$.



La domanda seguente è: quali punti B sono tali che $x_M \leq x_N$? Risposta:



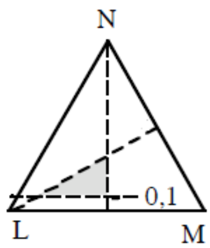
Si prosegue facendo l'esercizio al contrario: si dà la figura e si chiedono le condizioni da porre per ottenerla. Ad esempio:



Risposta: $x_L \geq 0,4$.

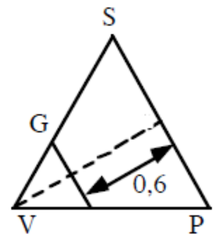
Nell'attività seguente si danno più condizioni che il punto B deve rispettare simultaneamente. Ad esempio:

$$\begin{cases} x_L > x_M \\ x_M > x_N \\ x_N > 0,1 \end{cases}$$ Risposta:



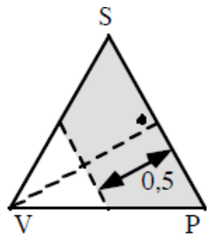
A questo punto si applica al triangolo l'esempio della partita con i tre possibili risultati (V, S, P) e le distanze del punto B dai lati vengono chiamate probabilità (p_V, p_S, p_P). Le prime domande possibili riguardano gli intervalli delle probabilità. Ad esempio: se $p_P \geq p_S$ quanto vale il $\max(p_S)$?

Risposta: $\max(p_S) = 0,4$.



Segue un esercizio in cui si chiede agli studenti di esprimere delle affermazioni qualitative in linguaggio matematico e rappresentarle. Ad esempio: rappresentare l'espressione "vincere è improbabile".

Risposta: $p_V < 0,5$.



Nella penultima attività si propone un gioco. Ci sono tre giocatori e ognuno esprime un giudizio sulla probabilità di vincere degli altri due che deve essere coerente con la situazione. Vince chi ottiene la maggiore probabilità di vincere.

Molto interessante è l'ultima attività proposta nella quale si danno dei giudizi meteorologici sulla presenza di neve per l'organizzazione dei giochi olimpici. Le tre situazioni sono:

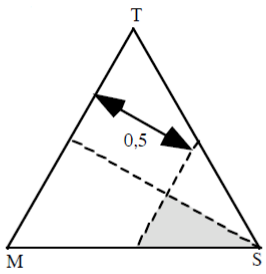
- M: non c'è abbastanza neve (le gare devono essere posticipate);
- S: c'è neve a sufficienza (le gare possono svolgersi);
- T: c'è troppa neve (le gare devono essere posticipate).

Due esperti stimano le condizioni meteo nei giorni delle gare.

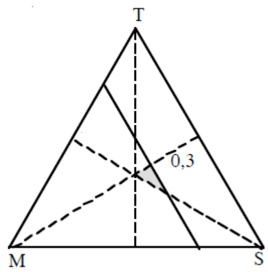
Esperto 1: è probabile che ci sia neve a sufficienza, è più probabile che ci sia mancanza di neve che troppa neve.

Esperto 2: è meno probabile che ci sia mancanza di neve che neve a sufficienza, è meno probabile che ci sia troppa neve che neve a sufficienza, è più probabile che ci sia troppa neve che mancanza di neve, stimo la probabilità che ci sia mancanza di neve maggiore o uguale a 0,3.

Gli studenti devono rappresentare questi giudizi e dire se sono coerenti.
Risposta:
Esperto 1.



Esperto 2.



Analizzando i giudizi ci si accorge che le opinioni dei due esperti sono tra loro incompatibili. Questo è un esercizio applicabile davvero alle esperienze quotidiane. Gli esercizi proposti nell'articolo sono adatti al secondo biennio della scuola secondaria di primo grado e nelle classi di scuola secondaria di secondo grado

Gli autori concludono dicendo che nella scuola di solito si parte da ragionamenti teorici tramite i quali si costruiscono precisi valori di probabilità, basandosi su casi equiprobabili o su frequenze, ma:

> [...] chi ha meno esperienza nel calcolo delle probabilità incontra maggiore difficoltà nell'interpretare risultati del tipo $P(A) = 0,25$. Che senso dare a questa uguaglianza? Si sarebbe indotti a dire che "teoricamente" su cento prove aleatorie, in 25 si realizzi l'evento A. Ma in realtà lo studente stesso sa per esperienza che ciò non si avvera, se non in casi rari. [...] la concezione imprecisa della probabilità è più vicina all'esperienza pregressa dell'allievo[...] [6]

Quindi si può dire che l'uso di questo particolare triangolo è utile per poter interpretare con un senso numerico le valutazioni di probabilità.

Dare più rilievo alla definizione soggettiva potrebbe inoltre evitare, come scrive de Finetti in [1], di insegnare il formalismo matematico senza aver fatto capire a cosa serve. De Finetti parla di alcuni rischi cui si può andare incontro nell'insegnamento del calcolo delle probabilità ([1, pag 458]):

- se si inizia da casi banali e studiabili meccanicamente si rischia di far passare l'idea che tutto sia riducibile al calcolo combinatorio, il calcolo combinatorio è uno strumento che spesso serve in molti problemi di calcolo delle probabilità ma non è il calcolo delle probabilità;

- se si usa una logica ridotta solo a un simbolismo formalistico si rischia di considerare la probabilità come una probabilità non di fatti ma di proposizioni e quindi come qualcosa di soltanto astratto;

- se si rimane in un livello astratto e non si associa a simboli e operazioni un significato concreto non si trasmette la giusta interpretazione delle conclusioni;

- altri approcci, anche se affrontano casi molto interessanti (come le catene di Markov), non approfondiscono il vero significato del termine probabilità e cosa si intenda con essa.

Sarebbe molto importante, quindi, poter approfondire con gli studenti l'approccio di tipo soggettivo nell'introdurre la probabilità, facendo capire che anche le frasi che si usano normalmente hanno un senso e che ciò che fanno a scuola è collegato a ciò che vivono.

Si è mostrato che esistono delle attività interessanti per far capire questo e dopo le quali si può continuare con i teoremi usuali del calcolo delle probabilità.

In questo approccio si possono notare dei punti deboli. Ad esempio, come detto all'inizio del capitolo, dare molta importanza alle opinioni degli individui può creare confusione nella mente di uno studente abituato alla rigidità del formalismo matematico. Inoltre l'uso del triangolo potrebbe dare un'idea sbagliata di probabilità, in quanto c'è il rischio di una interpretazione puramente geometrica. Di più, l'esempio, pure interessante, non si generalizza facilmente a situazioni in cui gli esiti da considerare sono più di tre.

D'altra parte però introducendo le attività in modo adeguato, dando cioè il giusto peso alla caratteristica di coerenza, e facendo attenzione che tutti comprendano che il vero significato del triangolo, si potrebbero ottenere risultati notevoli.

Sarebbe interessante inoltre iniziare interrogando gli studenti su quali siano gli argomenti in cui sentono maggiormente la parola “probabilità” perché, come l’uomo del bar citato da de Finetti, anche gli studenti hanno un’idea di che cosa essa sia, anche se non chiara e difficilmente esprimibile a parole. Potrebbe essere utile partire proprio da questa idea e da lì andare avanti evitando di creare un’idea parallela che useranno solo all’interno delle mura scolastiche.

Capitolo 4

Libri di testo e dizionari

Dopo aver visto come le persone vedono la probabilità, come la definirebbero e come la definizione soggettiva potrebbe essere la più vicina all'intuito umano ed essere anche applicabile alla didattica in classe, si sposta ora l'attenzione verso i mezzi che si hanno oggi per darsi una formazione sul tema della probabilità.

In particolare, pensando a chi si è trovato di fronte all'ultima domanda del questionario ("Descrivi con parole tue che cos'è la probabilità di un evento incerto (ad esempio che domani ci sia il sole)"), si potrebbe pensare che, non sapendo cosa dire, si provi a cercare una risposta, ma dove?

Sono state analizzate due possibili fonti: i libri di testo, per chi ancora li ha in casa o li usa (anche studenti hanno svolto il questionario), e dizionari disponibili in rete. Si è osservato come anche utilizzando queste fonti, con poche eccezioni, non si abbiano risposte soddisfacenti in quanto ciò che si trova difficilmente approfondisce il significato tecnico effettivo di "probabilità".

4.1 Libri di testo

I libri di testo sono il principale strumento didattico degli studenti. Nei libri si cercano informazioni e si svolgono esercizi. Si è quindi ritenuto interessante osservare come alcuni libri di testo affrontano l'argomento della probabilità.

Innanzitutto bisogna dire che il calcolo della probabilità è entrato nei programmi scolastici del liceo scientifico molto presto, nel 1936 ([15]), per poi avere più spazio soprattutto nei programmi PNI (piani nazionali per l'informatica, varato nel 1985) fino alle indicazioni nazionali del 2010.

I libri analizzati sono:

- *Matematica blu 4* di Bergamini, Trifone, Barozzi [10];

- *Nuova matematica a colori 4* di Leonardo Sasso [11];
- *Matematica controluce per i programmi sperimentali*, tomo II, di Andreini, Manara, Prestipino, 2011 [12];
- *Matematica per ragionieri programmatori*, volume I, di Gambotto Manzone, 1986 [13].

Si sono scelti due libri utilizzati nelle scuole secondarie di secondo grado oggi, un libro del 2011 e uno del 1986 per osservare se ci sono stati cambiamenti nel tempo.

Il primo libro citato è *Matematica blu* della Zanichelli, usato nel Liceo Scientifico in classe quarta. Nella parte teorica, si inizia dalla definizione di evento:

> Un evento è un avvenimento, descritto da una proposizione, che può accadere o non accadere. [10]

La definizione è linguistica in questo caso. Si definiscono poi l'evento aleatorio e lo spazio campionario.

Nel secondo paragrafo si parla della definizione classica di probabilità facendo degli esempi con applicazione del calcolo combinatorio. Nel terzo paragrafo si introduce la concezione statistica di probabilità e i casi in cui questa definizione si può applicare. Nel quarto paragrafo si dà la definizione soggettiva e si dice esplicitamente che è l'unico metodo utilizzabile quando i primi due non possono essere usati.

Da notare che anche se le tre definizioni vengono date e approfondite, non vengono citati i loro punti deboli, come ad esempio la questione dell'equiprobabilità nel caso della definizione classica.

Nel quinto paragrafo viene enunciata la definizione assiomatica ed è in questo punto che vengono definite le relazioni tra eventi (eventi disgiunti, eventi indipendenti, etc...). In seguito vengono enunciati i teoremi del calcolo delle probabilità con esempi in un contesto classico.

Per quanto riguarda la parte dedicata agli esercizi, in riferimento ai paragrafi a proposito delle definizioni, vengono proposti gli esercizi appositi.

In seguito tutti gli esercizi proposti sono a proposito di monete, urne etc... Tra gli esercizi finali sono presenti problemi (presenti in tutti i libri di testo) del tipo:

> Due giocatori tirano a un bersaglio. La probabilità che ha il primo di fare centro è 0,7, mentre per il secondo è 0,5. Calcola la probabilità che entrambi colpiscano il bersaglio [...] [10]

Questi esercizi sono interessanti perché stimolano il ragionamento; tuttavia i valori di probabilità vengono dati a priori senza dare una spiegazione su come questi dati possano essere ottenuti. Sarebbe utile approfondire il fatto che questi numeri non sono certamente ottenibili con la definizione classica; si può vedere qualche collegamento con quella frequentista ma soprattutto è pertinente la concezione soggettiva. Gli studenti non sono portati a riflettere su questo fatto dovendo solo maneggiare i valori.

Infine c'è un ultima pagina di esercizi su "Realtà e modelli" con quattro esercizi i cui contesti sono legati al mondo reale. Ad esempio:

> In un gioco televisivo americano al concorrente vengono mostrate tre porte chiuse. Dietro a una c'è un'automobile, dietro alle altre una capra: il giocatore vincerà il contenuto della porta prescelta. Dopo che il giocatore ha fatto la sua scelta, il presentatore, che sa dove si trova l'automobile, apre una delle altre porte e mostra una capra; a questo punto chiede al concorrente se vuole cambiare la sua scelta. Se il concorrente decide di cambiare la sua scelta, migliora la probabilità di vincere l'automobile? [10, pag 105]

Il secondo libro, [11], è usato nel Liceo delle Scienze umane in classe quarta. Nella parte teorica si inizia dalla definizione di evento e di spazio campionario. L'evento si definisce nel seguente modo:

> Dato uno spazio campionario Ω, si chiama evento ogni sottoinsieme di Ω. [11]

I questo caso la definizione è più tecnica che linguistica. In seguito si definiscono le operazioni tra eventi: unione, intersezione, evento contrario e si dà la definizione di eventi incompatibili. Si dà poi una tabella di sintesi in cui è rappresentata la notazione usata e il suo significato facendo un paragone tra la teoria degli insiemi e il calcolo delle probabilità.

Si inizia quindi a parlare del concetto di probabilità facendo riferimento alla definizione soggettiva:

> Ognuno di noi possiede un'idea, almeno vaga, del concetto di probabilità. Intuitivamente, possiamo dire che probabilità di un evento E è un numero che esprime il *grado di fiducia* attribuito al verificarsi di E. Resta però da capire come attribuire a un evento la sua probabilità, [...]

Il primo accenno che viene dato in questo testo, quindi, fa riferimento alla definizione data da de Finetti, anche se in modo vago e sintetico, in quanto solo funzionale ad introdurre l'argomento. Segue un esempio sulle carte da gioco e due esempi presi da casi concreti: assicurazione e scommesse. Per ognuno degli esempi si usa una definizione diversa di probabilità. Ora il libro propone le tre diverse definizioni, vicine, una di seguito all'altra. A questo punto si elencano gli inconvenienti dei tre tipi di valutazione: la definizione classica richiede casi equiprobabili e che lo spazio degli eventi sia finito, si cita inoltre la circolarità della definizione; la definizione frequentista richiede che l'esperimento possa essere ripetuto nelle stesse condizioni molte volte e la probabilità può variare a seconda del numero di esperimenti svolti; la definizione soggettiva viene criticata proprio per la soggettività insita in essa.

Si cita infine la definizione assiomatica che dà delle regole formali che una misura di probabilità deve soddisfare per essere dichiarata tale, si enunciano gli assiomi e, alla fine del paragrafo, la legge dei grandi numeri.

É interessante che questo testo proponga agli studenti tutti gli approcci possibili e anche le critiche fatte a questi approcci in modo approfondito e chiaro, nonostante il testo sia rivolto a un tipo di scuola in cui la matematica è più debole che in altre. Non va tuttavia sottovalutato il rischio che la presentazione formalmente impeccabile appaia troppo astratta agli studenti. Compito dell'insegnante è proprio aiutare gli allievi a superare questa difficoltà.

Nel secondo paragrafo si affronta la valutazione della probabilità secondo la definizione classica: innanzitutto si mostra come la definizione classica sia coerente con gli assiomi, si approfondisce la nozione di equiprobabilità e l'importanza di porre tale ipotesi. Si mostrano degli esercizi in spazi equiprobabili finiti mostrando l'uso del diagramma ad albero, della tabella a doppia entrata e del calcolo combinatorio con esempi su monete, dadi e urne.

Nel terzo paragrafo si enunciano i primi teoremi sul calcolo delle probabilità (probabilità dell'evento contrario, dell'unione, dell'intersezione etc..) ma con esempi sempre entro un contesto classico. Cioè, a partire dal secondo paragrafo, ci si concentra solo sulla definizione classica tralasciando le altre.

Alla fine del capitolo è presente un approfondimento di "matematica nella storia" nel quale si dà spazio alla storia del calcolo delle probabilità. Ciò è utile perché dà sia un'idea di come questo ambito si sia sviluppato nel tempo sia di quanto i matematici ci abbiano lavorato. Dare dei contenuti di storia della matematica è sempre funzionale per avvicinarsi a questa disciplina come pure ad altre.

Per quanto riguarda la parte dedicata agli esercizi, in questo libro la maggior parte sono su urne, dadi, monete, sono cioè tutti esercizi in cui si può applicare il calcolo combinatorio o al massimo la definizione classica. Soltanto alla fine vengono proposti alcuni esercizi legati alla realtà o comunque ambientati in contesti diversi: competizioni sportive, pezzi difettosi etc..

In ogni caso la maggior parte dei problemi che gli studenti si trovano ad affrontare sono legati al calcolo combinatorio e non alla vita quotidiana.

Il libro di testo *Matematica controluce*, usato nei Licei Scientifici PNI, presenta una struttura diversa dai precedenti infatti suddivide l'argomento della probabilità in due capitoli: il primo dal titolo "Probabilmente", nel quale si introduce la definizione classica, esempi storici e si definiscono gli eventi; il secondo dal titolo "Probabilità condizionata", nel quale si presentano la definizione assiomatica e i principali teoremi del calcolo della probabilità.

Si può dire quindi che in questo testo viene data molta importanza alla questione della definizione, sia per la presenza di un capitolo apposito sia perché tra i due capitoli è presente un contrappunto dal titolo "Diverse concezioni a confronto" nel quale si mettono appunto a confronto le diverse definizioni.

Di questo libro quindi parleremo del primo capitolo e del contrappunto.

Nel capitolo "Probabilmente" si inizia parlando del termine probabilità e di come esso sia di uso comune, si introduce poi la frequenza con l'esempio del gioco della zara citato da Dante nel VI Canto del Purgatorio. Il gioco della zara consisteva nel lancio di tre dadi dopo aver scommesso sulla somma dei numeri indicati dalle tre facce. Dante per descriverlo scrive:

> *Quando si parte il guoco della zara*
> *Colui che perde si riman dolente*
> *Ripetendo le volte, e tristo impara* [Purgatorio, Canto VI, 1-3]

Parafrasando: chi perde al gioco della zara si avvilisce ma ripetendo il gioco più volte impara, cioè si accorge di alcune regolarità. Infatti si possono osservare quali siano i casi più frequenti a cui quindi si assegna una maggiore probabilità di uscita nelle partite future. Questo corrisponde al concetto di frequenza di un evento rilevata dopo un gran numero di prove eseguite nelle medesime condizioni.

Gli autori chiariscono subito che nel capitolo si approfondirà la definizione classica e motivano questa scelta:

> Abbiamo deciso di riferirci inizialmente alla definizione classica non perché ci riconosciamo nella concezione *oggettivistica*, ma per due motivi: 1) è tra le prime definizioni che nella storia sono state date; 2) didatticamente è vantaggiosa, perché con semplicità aiuta a inquadrare il problema e a introdurre i primi elementi di calcolo. ([12, pag 405])

Quindi viene fatta una scelta che però viene motivata in modo tale da far capire che non è l'unica possibile. Si introduce la definizione classica continuando a parlare del gioco della zara ma semplificandolo, considerando solo due dadi. Si mostra come calcolare la probabilità ad esempio che la somma delle facce venga 7: i casi possibili sono 36, i casi favorevoli sono 6 in quanto sono 6 le coppie di numeri ottenibili dal lancio dei due dadi la cui somma è 7 (1 e 6, 2 e 5, 3 e 4, 4 e 3, 5 e 2, 6 e 1). La probabilità quindi di ottenere la somma uguale a 7 è $\frac{6}{36}$. Viene specificato che questo rapporto corrisponde alla definizione classica di probabilità e si enunciano infine i due principi di Laplace:

> **I principio.** Il primo principio è la definizione stessa di probabilità, che [...] è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e quello di tutti casi possibili.
>
> **II principio**. Ma ciò presuppone che i diversi casi siano ugualmente possibili. Se non lo sono, si determinano prima le loro rispettive possibilità, la cui esatta valutazione è uno dei punti più delicati della teoria dei casi. Allora la probabilità sarà la somma delle possibilità di ciascun caso favorevole.

Viene fatto notare inoltre il problema della circolarità della definizione.

Nel paragrafo seguente si definisce l'evento (in modo non particolarmente chiaro):

> Nell'ambito della teoria della probabilità l'esito di una qualsiasi esperienza viene detto evento. [12, pag 411]

Si approfondiscono quindi le operazioni tra eventi.

Infine, nel terzo paragrafo, si mettono in evidenza esempi di errori tipici del calcolo della probabilità, errori che derivano dall'erronea attribuzione di equiprobabilità. Questi esempi vengono ripresi dalla storia: il primo è fornito da Laplace nell' *Essai philosophique des probabilités.* In questo esempio l'autore mette in evidenza un errore commesso da d'Alembert: si parla del lancio di una moneta in cui ci si chiede la probabilità di avere croce almeno una volta in due lanci, Laplace spiega che ci sono quattro casi equiprobabili ma che si potrebbe fare l'errore di credere che ce ne siano solo tre (croce al primo lancio, testa al primo lancio e croce al secondo, testa al primo e al secondo lancio) ma essi allora non sono equiprobabili.

Il secondo esempio riporta il problema dei tre assi (inventato dal matematico Weaver nel 1950):

> Sono date tre carte che presentano un asso su entrambe le facce: la prima ha un asso di picche su entrambe le facce; la seconda ha un asso di quadri su entrambe le facce; mentre la terza ha un asso di picche su una faccia e un asso di quadri sull'altra. Dopo

> aver mischiato le tre carte in un cilindro, se ne estrae una a caso mostrando una sola delle sue due facce, che presenta un asso di picche. Si chiede di valutare la probabilità p che la faccia nascosta presenti un asso dello stesso seme. [12]

Anche in questo caso si potrebbe fare l'errore di attribuire la stessa probabilità alle due configurazioni picche-picche e picche-quadri mentre i casi equiprobabili sono tre e non due perché le carte picche-picche possono presentarsi in due modalità. Il terzo esempio è l'esempio di Pascal sulla partita interrotta, citato all'inizio della tesi.

A questo punto è presente il contrappunto sulle definizioni a confronto. A partire dalla *régle des partis*, dicendo che a ciascun giocatore si deve consegnare una parte della vincita proporzionale alla sua attuale probabilità di vittoria, si introduce la definizione soggettiva, approfondendo il concetto di coerenza e proponendo alcuni esempi. Si parla poi della definizione frequentista e delle critiche a questa concezione. Si conclude con la costruzione assiomatica di Kolmogorov che fa da denominatore comune tra tutte le varie definizioni.

Nell'ultimo paragrafo gli autori si chiedono, quindi, a quale criterio bisogna affidarsi per una valutazione di una probabilità. La risposta che si danno è molto interessante e utile. Sarà il problema in esame e le informazioni che si hanno che suggeriranno il metodo migliore da usare e quindi il calcolo delle probabilità non si fonda solo su un ragionamento teorico a priori ma richiede il giudizio di un soggetto. D'altronde il termine *probabilità* deriva dal verbo *probare* e indica lo sforzo di voler spiegare dei fatti. Per quanto riguarda gli esercizi, in questo libro non sono diversi dagli altri, sono tutti in contesto classico e sono poco numerosi.

Si può osservare che questo testo fa, innanzitutto, moltissimi riferimenti alla storia della matematica e lascia molto spazio alla riflessione. Sicuramente tra i libri analizzati non è il più semplice per uno studente ma è il più completo, tranne che per gli esercizi. Da notare che oggi questo testo non è più usato nelle scuole poiché non c'è più l'opzione PNI nel Liceo Scientifico.

L'ultimo libro di cui si parlerà, *Matematica per ragionieri programmatori*, è stato utilizzato nel 1986, in classe terza, nell'istituto tecnico per ragionieri programmatori. Si è scelto un testo degli anni '80 per capire come veniva affrontata la probabilità nella scuola qualche decennio fa. In realtà non ci sono molte differenze. Nei primi tre paragrafi vengono date le tre definizioni specificando per ognuna i campi di applicazione e facendo degli esempi. Si dà poi la definizione assiomatica e da lì si inizia con tutte le operazioni tra eventi e i teoremi del calcolo delle probabilità. Non viene quindi dato molto spazio alle critiche delle varie definizioni, ma non ne viene nemmeno preferita nessuna rispetto ad un'altra. Il libro è più sintetico degli altri nella spiegazione teorica, ma contiene moltissimi esempi.

Per quanto riguarda la parte dedicata agli esercizi è da notare che i primi vanno risolti usando le diverse definizioni in base al contesto e questo può essere interessante perché si comprende che è il soggetto che affronta la situazione che, in base ai dati che ha, sceglie la definizione da usare. Ad esempio un esercizio in cui è opportuna la definizione soggettiva è:

> Ad una corsa di cavalli, Tizio è disposto a scommettere £ 500 per riceverne 1000 se vince il cavallo A, oppure scommettere £ 300, sempre per riceverne 1000, se vince il cavallo B. Calcolare quali probabilità di vittoria attribuisce a ciascuno dei due cavalli. [13, pag 398]

Un esempio di esercizio in cui è più opportuno usare la definizione classica è:

> Un'urna contiene 90 palline numerate da 1 a 90; si estrae una pallina. Calcolare la probabilità di avere:
>
> **a)** un numero pari;
>
> **b)** un numero superiore a 20 ed inferiore a 35;
>
> **c)** un numero la cui somma delle cifre sia 8.
>
> [13, pag 397]

Infine un esempio di esercizio per la definizione frequentista (nel caso di questa definizione viene specificato il metodo da usare) è:

> Un'urna contiene palline rosse, bianche e nere, ma non si conosce la composizione ed il numero totale di palline. Si effettuano 6000 estrazioni, rimettendo ogni volta la pallina nell'urna. Sapendo che è uscito:
>
> - 3360 volte pallina rossa;
> - 1830 volte pallina bianca;
> - 810 volte pallina nera;
>
> calcolare, utilizzando la definizione dell'impostazione statistica, le relative probabilità. [13, pag 398]

Gli esercizi seguenti riguardano l'applicazione dei principali teoremi del calcolo delle probabilità.

I libri analizzati finora sono molto diversi tra loro, basti pensare alle diverse definizioni di evento che vengono date o all'ordine che viene seguito. In tutti vengono citate le tre diverse concezioni, anche se gli viene dato uno spazio diverso di approfondimento e in tutti c'è una carenza di esercizi funzionali ad un maggiore collegamento tra matematica e realtà. Perciò non stupisce la presenza di risposte, nel nostro questionario, che rappresentano una delega formale. Pur dando più definizioni, solo quella applicata maggiormente resta e soprattutto, per problemi di tempistica, è solo su questa che l'insegnante si ferma maggiormente. Da questo nasce il rischio di delega formale, di pensare che tutta la probabilità si possa ridurre a calcolo combinatorio ma soprattutto di dimenticare che i momenti in cui usiamo maggiormente la probabilità non coinvolgono monete e urne bensì eventi quotidiani e decisioni da prendere.

4.2 Dizionari

Un altro mezzo, il più comune, per cercare la definizione di un termine, è, senza ombra di dubbio, il dizionario. Infatti la prima cosa che si fa oggi quando non si sa cosa sia una determinata cosa è digitare la parola nei motori di ricerca, che a loro volta rimandano ai dizionari online. Questo procedimento è rapidissimo ed efficace in quanto si ha, in pochi secondi, una grandissima quantità di informazioni da poter confrontare e consultare.

Il criterio che è stato usato per scegliere i dizionari da citare in questo elaborato è il seguente: si sono scelti i "dizionari dell'uso" citati nel sito dell'*Accademia della Crusca*, uno dei punti di riferimento per la lingua italiana da più di quattrocento anni ([16]). I dizionari citati sono:

- *Garzanti*;
- *Hoepli*;
- *Nuovo De Mauro*;
- *Sabatini-Coletti*;
- *Treccani.*

La definizione del *Garzanti* è la seguente:

> 1. l'essere probabile, verosimile, ammissibile: *ammettere, negare la probabilità di rischio*;

2. il grado, la misura in cui si considera che un evento possa accadere, sia probabile: *avere una probabilità su mille; ci sono molte, scarse probabilità di riuscita*;
3. (filos., mat.) secondo la teoria classica (enunciata da P.S. de Laplace nel 1814), il rapporto fra il numero dei casi favorevoli al verificarsi di un evento e il numero di tutti i casi possibili in pari grado. [17]

In questa definizione si può notare innanzitutto che, nel primo significato, si dà una spiegazione più qualitativa del termine, riferendosi alla verosimiglianza e all'ammissibilità. Nel secondo significato dato ci si avvicina al dare l'idea di una probabilità che si possa misurare, una grandezza. Ed infine nel terzo caso si enuncia la definizione classica. Questo vocabolario può in qualche modo essere utile ai cittadini che non sanno definire la probabilità anche se l'unico significato realmente significativo è il secondo.

La definizione del *Hoepli* è la seguente:

1. carattere, condizione di ciò che è probabile: *la probabilità di un fatto, di un avvenimento; la probabilità di un'ipotesi, di un'opinione*. Contrario: improbabilità;
2. misura, grado in cui un evento si considera probabile o realizzabile: *c'è una probabilità su mille che l'esperimento riesca; c'è qualche probabilità di vincere?*. Sinonimo: eventualità;
3. MAT, STAT: calcolo delle probabilità, studio delle regolarità statistiche di certi fenomeni attribuiti al caso, per stabilire la misura probabile del loro verificarsi. [18]

In questo caso nella primo significato dato, si usa la parola "probabile" per spiegare la probabilità e questo non è molto di aiuto ma ricorda molte risposte tautologiche date nel questionario. Il secondo significato è simile a quello dato dal *Garzanti*. Per quanto riguarda l'ultima definizione data, riferita al calcolo delle probabilità, essa non è molto chiara ma anzi potrebbe confondere e scoraggiare di più una persona che si approccia a queste definizioni facendo sembrare la probabilità qualcosa di molto lontano e molto complicato.

Il *Nuovo De Mauro* dà la seguente definizione:

AU

1. carattere, condizione di ciò che è probabile: *probabilità di un avvenimento*;

2. la misura, il grado in cui si ritiene che un evento possa accadere, sia probabile: *ho poche probabilità di passare l'esame*;
3. TS mat. rapporto tra il numero dei casi favorevoli e quello dei casi possibili quando tutti i casi presi in esame siano ugualmente possibili;
4. TS filos., teol. il carattere distintivo di un'opinione sostenuta, le cui ragioni non sono tali da escludere l'opinione a essa contraria. [19]

Dove con AU si intende: "significati di alto uso" e con TS: "significato tecnico-specialistico".

Il *Nuovo De Mauro*, come il precedente vocabolario, utilizza il termine "probabile" per spiegare cosa sia la probabilità. Il secondo significato è simile ai precedenti, si enuncia anche in questo caso la definizione classica senza nominare le altre definizioni e nel caso (4) si dà un significato filosofico di tipo qualitativo.

La definizione del *Sabatini-Coletti* è:

1. mat. Concetto fondamentale intorno al quale si sviluppa la formalizzazione matematica dei fenomeni casuali; nella teoria classica è definita come il rapporto tra il numero dei casi in cui l'evento può verificarsi e il numero dei casi possibili. || Il calcolo delle probabilità, teoria, derivata da quella classica e da altre più recenti, che formalizza i concetti relativi alla probabilità;
2. estens. Possibilità che si ritiene possa tramutarsi in realtà: *non ha nessuna probabilità di vincere* || con tutta, con ogni probabilità, molto probabilmente, quasi certamente. [20]

In questo caso, si dà al significato matematico il primo posto e si nominano le altre definizioni più recenti anche se, è da notare che non viene specificato che è necessario avere l'equiprobabilità per la definizione classica. Il secondo significato è di tipo qualitativo.

L'ultima definizione è del *Treccani*:

1. Carattere di ciò che è probabile; condizione di un fatto o di un evento che si ritiene possa accadere, o che, fra più fatti ed eventi possibili, appare come quello che più ragionevolmente ci si può attendere: *affermare la probabilità che un avvenimento (o un'aspettativa) si realizzi; le dichiarazioni*

delle parti confermano la probabilità di un accordo; in molti casi, esprime la misura in cui si ritiene che un evento possa realizzarsi: *l'ipotesi ha un alto grado di probabilità; c'è appena una probabilità su cento di riuscita; con molta probabilità verrò anch'io con voi; c'è ancora qualche probabilità che si faccia in tempo; una probabilità minima, nulla, o massima, elevata*; spesso al plur.: *hai molte probabilità di vincere; le probabilità di partire sono ormai pochissime.*

2. In matematica, e più in generale nel linguaggio scientifico, in presenza di fenomeni casuali (o aleatori), si dice *probabilità di un evento* il numero, compreso fra 0 e 1, che esprime il grado di possibilità che l'evento si verifichi, intendendo che il valore minimo 0 corrisponda al caso in cui l'evento sia impossibile, mentre il valore massimo 1 corrisponda al caso in cui l'evento sia certo. *Calcolo delle probabilità o teoria delle probabilità*, il ramo della matematica nel quale si studia come sono collegate fra loro le probabilità dei diversi eventi, e come quindi si possa determinare il valore di ciascuna di esse. Il concetto generale di probabilità viene precisato attraverso differenti impostazioni (a cui corrispondono differenti criteri per il calcolo numerico della probabilità di un determinato evento), in base sia a principi filosofici generali sia al contesto al quale ci si riferisce: l'impostazione *classica* definisce la probabilità di un evento come il rapporto tra il numero dei casi favorevoli al verificarsi dell'evento e il numero dei casi possibili (tale impostazione è applicabile quando, come nel lancio di un dado non truccato, i vari casi possibili appaiono ciascuno nelle stesse condizioni degli altri e quindi si possono ritenere equiprobabili); l'impostazione basata sul concetto di frequenza (perciò detta correntemente "impostazione *frequentistica*") assume come probabilità di un evento (ripetibile) il rapporto fra il numero dei successi e il numero delle prove effettuate, supponendo quest'ultimo numero sufficientemente grande (si tratta dell'impostazione solitamente utilizzata, in modo più o meno consapevole, nelle scienze sperimentali, che si fondano proprio sulla ripetibilità degli esperimenti); l'impostazione *soggettiva o bayesiana* (dal nome del matematico ingl. Th. Bayes, 1671-1746) determina il valore della probabilità di un evento come il grado di fiducia che una singola persona attribuisce al verificarsi

> dell'evento stesso sulla base delle proprie conoscenze e delle informazioni di cui dispone (questa terza impostazione si rifà direttamente all'idea di scommessa). Da un altro punto di vista, il calcolo delle probabilità può essere formulato in modo *assiomatico*: si considera l'insieme di tutti i possibili eventi e si introduce la probabilità come una funzione che soddisfa certe proprietà formali (assiomi). Oltre che singoli eventi, la teoria delle probabilità prende in esame le *variabili aleatorie*, cioè le grandezze il cui valore, assunto in successive determinazioni, non è univoco, ma appartiene a un insieme discreto o continuo: la probabilità con cui è assunto ogni possibile valore è data da una funzione, detta *distribuzione di p.*; sono esempi di tali distribuzioni la distribuzione degli *errori di misura* [...] e le *funzioni d'onda* della meccanica quantistica, che descrivono le distribuzioni di probabilità delle variabili che definiscono lo stato di un corpuscolo o di un sistema quantistico (in questo senso si parla di *nuvole di p.* per indicare le regioni di spazio in cui possono essere localizzati i corpuscoli di un sistema atomico). [21]

Questa definizione è sicuramente la più completa, nonostante anche in questo caso, nel primo significato, la definizione sia circolare. Viene dato, però, molto spazio al significato matematico, citando tutte le definizioni e alcune delle applicazioni. Leggendo questa voce del vocabolario ci si può fare un'idea abbastanza chiara di ciò che si stava cercando e si può osservare il quadro completo della situazione.

In conclusione si può osservare che spesso anche cercare la parola in rete può non risolvere i dubbi che si hanno in quanto solo nel caso *Treccani* si ha una visione completa mentre negli altri casi si lascia più spazio a sinonimi di tipo qualitativo e si trascura la visione matematica che è poi la vera visione della probabilità. Essa è descritta al più come un carattere ordinato ma non quantitativo, come una gerarchia militare. Infatti la parola probabilità non è di per sé una parola astratta come ad esempio l'"amicizia". É un termine tecnico che necessita di una esatta definizione. Allo stesso tempo questa definizione tecnica non può essere incomprensibile alle persone che non frequentano facoltà scientifiche ma deve essere chiara e semplice da capire e da applicare per poter avere immediatamente il collegamento con la vita reale.

Capitolo 5

I rischi della “pseudoconoscenza”

5.1 Giochi d’azzardo: lotto e non solo

Il fatto di non conoscere o conoscere in modo impreciso il significato del termine “probabilità” può portare a ragionamenti errati e a fraintendimenti sui concetti probabilistici e statistici.

Come scrive de Finetti in [8] questa conoscenza errata può condurre ad una avversione per l’incertezza: o non si applicano i concetti che esprimono incertezza o si applicano ma in modo errato trasformando previsioni incerte in previsioni certe e ricavando conclusioni distorte o inesatte.

Ad esempio è vero che in un gran numero di prove (in estrazioni, giochi, etc...) è probabile l’apparire di “regolarità statistiche”, di una “compensazione”, grazie alla legge dei grandi numeri, si deve però porre molta attenzione a non trarre informazioni errate:

- che se si sono verificati scarti in un senso (per esempio uno è stato sfortunato al gioco) sia da attendersi uno scarto in senso opposto per dar luogo alla “compensazione”;
- che se qualcosa è eccezionalmente improbabile (come un lungo ritardo di un numero al lotto) sia da attendersi qualcosa che l’impedisca (per esempio che un numero arretrato si affretti ad uscire);
- che sia meno rischioso giocare molti colpi piuttosto che pochi o uno solo (per dar modo di funzionare alla “legge dei grandi numeri”).

> Infatti la “compensazione” è il comportamento prevedibile in base all’ammissione che ogni prova dia un risultato a caso, senza memoria del passato, ed è assurdo pensare di trarne conclusioni in contraddizione con le ipotesi di partenza. [8, pag 380]

Uno degli esempi in cui è possibile riscontrare le conseguenze di queste conclusioni sbagliate è il gioco del Lotto. Infatti basare il proprio gioco su “regole” inesatte date da una comprensione errata dei concetti probabilistici può portare a perdere molti soldi.

Ovviamente non si parla di chi, giocando occasionalmente una cifra non elevata, tenta la fortuna, ma di chi, credendo di giocare seguendo regole razionali, lo fa sistematicamente aspettandosi un grande guadagno.

Il funzionamento del gioco del lotto è il seguente: si scommette sull’estrazione di 5 numeri tra 1 e 90 da una o più urne, chiamate “ruote”. Le estrazioni vengono fatte tre volte alla settimana in undici città italiane, infatti si parla di “Ruota di Milano”, “Ruota di Firenze”, etc...

In caso di vincita, se viene cioè estratto il numero su cui si è puntato, il gioco prevede un moltiplicatore dell’importo scommesso, altrimenti il giocatore non riceverà nulla e perderà quindi la cifra giocata.

Ecco la tabella (presa dal sito [22]) relativa agli importi che un giocatore riceverà, in caso di vittoria, se avrà scommesso 1€ su uno degli eventi considerati:

Numeri	Premi per sorte su singola ruota con una giocata da 1€						
	estratto	estratto determinato	ambetto*	ambo	terno	quaterna	cinquina
1 numero	11,23 €	55,00 €	-	-	-	-	-
2 numeri	5,62 €	27,50 €	65,00 €	250,00 €	-	-	-
3 numeri	3,74 €	18,33 €	21,67 €	83,33 €	4.500,00 €	-	-
4 numeri	2,81 €	13,75 €	10,83 €	41,67 €	1.125,00 €	120.000,00 €	-
5 numeri	2,25 €	11,00 €	6,50 €	25,00 €	450,00 €	24.000,00 €	6.000.000,00 €
6 numeri	1,87 €	9,17 €	4,33 €	16,67 €	255,00 €	8.000,00 €	1.000.000,00 €
7 numeri	1,60 €	7,86 €	3,10 €	11,90 €	128,57 €	3.428,57 €	285.714,29 €
8 numeri	1,40 €	6,88 €	2,32 €	8,93 €	80,36 €	1.714,29 €	107.142,86 €
9 numeri	1,25 €	6,11 €	1,81 €	6,94 €	53,57 €	952,38 €	47.619,05 €
10 numeri	1,12 €	5,50 €	1,44 €	5,56 €	37,50 €	571,43 €	23.809,52 €

Ad esempio, se si scommette sull'uscita di un determinato numero tra i 5 estratti, la probabilità di vincere è $\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$ (5 sono i numeri favorevoli in quanto sono quelli estratti e 90 i numeri possibili tra cui il giocatore può scegliere). Il premio ricevuto in caso di vittoria è 11,23€. Il premio sarebbe equo se, moltiplicandolo per la probabilità di riceverlo, uguagliasse la cifra scommessa. Dovrebbe quindi essere pari a 18€ e non 11,23€. Il gioco è quindi sfavorevole allo scommettitore e lo è per tutti i tipi di scommesse. Ad esempio, indovinare la cinquina estratta dopo aver scommesso proprio su quei cinque numeri, dà una vincita pari a 6 milioni ma la probabilità di indovinarla è 1 su 44 milioni quindi il premio che il gioco offre è meno di un settimo del premio equo.

Le probabilità degli eventi considerati sono presenti nel sito del Lotto:

IL GIOCO DEL LOTTO

PROBABILITA' DI VINCITA 1 SU..

Sorti	Numeri giocati									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
estratto	18	9.2	6.3	4.8	3.9	3.4	2.9	2.6	2.4	2.2
estratto det	90	45	30	23	18	15	13	11	10	9
ambo	-	401	137	70	43	29	21	16	13	11
terno	-	-	11748	2989	1217	619	360	229	156	111
quaterna	-	-	-	511038	103167	34715	15020	7583	4254	2577
cinquina	-	-	-	-	43949268	7324878	2092822	784808	348804	174402
AMBETTO probabilità massima*	-	100.3	35.5	18.8	11.9	8.4	6.3	5.0	4.1	3.5
AMBETTO probabilità minima**	-	200.3	102.8	69.9	53.4	43.5	36.9	32.2	28.7	26.0

* La probabilità massima si ha giocando numeri tutti non consecutivi

** La probabilità minima si ha giocando numeri tutti consecutivi

Già questi dati dovrebbero scoraggiare dall'intraprendere un gioco sistematico. Infatti, per la legge dei grandi numeri, il giocatore perderà, in quanto essa dice che, quando si ripete per un gran numero di volte un esperimento nelle medesime condizioni, è molto alta la probabilità che la frequenza relativa di successo ($\frac{\text{numero di successi conseguiti}}{\text{numero di ripetizioni dell'esperimento}}$) assuma un valore prossimo alla probabilità di vincita nel singolo esperimento.

```
SeedRandom[0];
n = 3;
ordine = Table[k, {k, 10}];
a = Table[RandomVariate[BinomialDistribution[n, 1 / 18]], {i, 10}];
b = Table[11.23 a[[k]] - n, {k, 10}];
Print[MatrixForm[{ordine, a, b}]];
Print[10 * N[Mean[b]]];
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3. & -3. & -3. & -3. & 8.23 & 8.23 & -3. & -3. & -3. & -3. \end{pmatrix}$$

-7.54

Figura 5.1: Codice scritto utilizzando Wolfram Mathematica

Ad esempio si potrebbe prevedere l'esito che avranno 10 giocatori, ciascuno dei quali gioca 3 volte, scommettendo 1€ su un estratto singolo.

La prima riga mostra il numero d'ordine, la seconda mostra quante volte il giocatore ha vinto, la terza il bilancio delle giocate e se il segno è negativo si tratta di perdita. Infine sotto è riportata la somma dei numeri della terza riga cioè il bilancio complessivo per i 10 giocatori.

In questo caso i giocatori numero 5 e numero 6 hanno vinto una volta su tre quindi il loro bilancio è positivo (8,23€); gli altri giocatori hanno perso tre volte. Tutti insieme hanno avuto una perdita di 7,54€. Si può pensare, vedendo questi dati, che sia possibile sia vincere che perdere.

I risultati cambiano quando le giocate diventano più sistematiche. Ad esempio se i giocatori scommettono 360 volte, 3 volte alla settimana, l'esperimento va in questo modo:

```
SeedRandom[0];
n = 360;
ordine = Table[k, {k, 10}];
a = Table[RandomVariate[BinomialDistribution[n, 1 / 18]], {i, 10}];
b = Table[11.23 a[[k]] - n, {k, 10}];
Print[MatrixForm[{ordine, a, b}]];
Print[10 * N[Mean[b]]];
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 24 & 21 & 18 & 18 & 27 & 26 & 29 & 24 & 17 & 18 \\ -90.48 & -124.17 & -157.86 & -157.86 & -56.79 & -68.02 & -34.33 & -90.48 & -169.09 & -157.86 \end{pmatrix}$$

-1106.94

Figura 5.2: Codice scritto utilizzando Wolfram Mathematica

Si può osservare che il bilancio dei giocatori è sempre negativo, quindi "il banco vince sempre". Il giocatore numero 7 vince per 29 volte ma comunque non recupera le spese sostenute per giocare.

La perdita aumenta aumentando le giocate, come si può vedere nel seguente esperimento, dove i giocatori hanno giocato 3600 volte (tre volte alla settimana):

Il sito di Lottomatica ([22]), contiene, come previsto dalla legge, le tabelle con le probabilità di vincita per le diverse giocate, e l'avvertimento che mette in guardia dal gioco sistematico. Tuttavia, con assai maggiore evidenza sono presentate statistiche e "regole" che possono indurre un cittadino sprovveduto a credere che applicando opportune tecniche sia possibile pianificare il gioco in modo redditizio.

Tutte le immagini presenti nelle prossime pagine sono state prese dal sito [22].

Se si guarda il menù in alto si trova un pulsante "Statistiche lotto".

Aprendo la pagina ci sono varie opzioni:

```
SeedRandom[0];
n = 3600;
ordine = Table[k, {k, 10}];
a = Table[RandomVariate[BinomialDistribution[n, 1 / 18]], {i, 10}];
b = Table[11.23 a[[k]] - n, {k, 10}];
Print[MatrixForm[{ordine, a, b}]];
Print[10 * N[Mean[b]]];
1        2         3         4         5         6         7         8         9        10
79       184       174       193       188       186       193       219       213       218
39.83  -1533.68  -1645.98  -1432.61  -1488.76  -1511.22  -1432.61  -1140.63  -1208.01  -1151
                                      -14 135.2
```

Figura 5.3: Codice scritto utilizzando Wolfram Mathematica

- “Numeri ritardatari Lotto” dove è possibile vedere le tabelle dei 10 numeri più in ritardo per ogni ruota e dei 10 numeri più in ritardo in assoluto. Inoltre si può fare una ricerca di numeri specifici per osservarne le frequenze:

- "Numeri frequenti Lotto" dove è possibile osservare la tabella con i 10 numeri usciti con maggiore frequenza per ogni ruota;
- "90 numeri Lotto" in cui è possibile cercare frequenze, ritardi e ultima posizione di ogni numero;
- "Estratto determinato Lotto", per osservare frequenza, ritardo massimo e ritardo attuale di ogni numero;
- "Ambi Lotto" in cui sono scritti tutti i tipi possibili di ambi (gemelli, vertibili etc..) e i loro ritardi;
- "Serie Lotto classiche" in cui sono presenti i ritardi di alcune "serie" di numeri particolari come ad esempio i terni consecutivi;
- "Numeri spia Lotto":

> La tradizione vuole che l'estrazione di certi numeri "preannunci" l'uscita di altri. La tabella indica, per ogni estratto (o "numero spia"), i 5 numeri(cosiddetti "spiati") che avrebbero la maggiore probabilità di uscire all'estrazione successiva. [22, https://www.lottomaticaitalia.it/it/prodotti/lotto/statistiche/numero-spia]

Bari		Cagliari		Firenze		Genova		Milano		Napoli		Palermo	
39	4 5 34 36 66	62	4 5 51 66 80	36	2 40 54 78 83	7	51 56 61 73 83	20	8 18 36 68 83	86	7 41 43 45 74	40	8 12 49 62 81
44	4 10 43 48 61	43	4 32 42 47 52	29	2 4 20 56 65	72	3 22 29 39 84	8	31 35 53 63 66	14	6 27 29 43 86	80	30 37 61 62 76
49	13 59 60 74 89	8	32 36 47 74 90	48	15 19 25 27 73	63	20 51 56 80 90	30	19 29 55 68 89	52	36 38 49 64 71	18	26 47 65 67 89
48	12 27 46 58 59	65	28 39 43 52 70	44	13 31 33 53 82	10	11 19 27 45 85	54	15 25 40 52 59	74	26 27 41 69 80	39	23 35 49 87 90
79	10 22 48 78 87	15	1 16 58 73 82	61	12 27 50 57 60	15	1 33 72 73 75	77	14 19 27 32 55	51	24 45 64 74 76	49	13 33 38 50 61

Da notare l'utilizzo dell'espressione "maggiore probabilità di uscita" associata ad un concetto legato ad una tradizione e per nulla matematico.

- "Statistiche Lotto per ruota" in cui si possono leggere le frequenze e ritardi degli ambi e delle serie classiche in ciascuna ruota;
- "Ruota nazionale Lotto" dove sono riportate le frequenze e i i ritardi riferite soltanto alla ruota nazionale;
- "Sistemi Lotto" dove sono presentati vari tipi di giocata, ad esempio il sistema ridotto per 11:

  > Un sistema ridotto (a pronostico esatto) garantisce una vincita $n-1$ rispetto all'integrale. Ovvero si giocano tutte le colonne che, rispetto al sistema integrale, garantiscono (a pronostico esatto) il conseguimento di un punteggio minimo inferiore di un punto rispetto al numero di pronostici: se si gioca un sistema ridotto per il terno, la garanzia minima sarà quella dell'ambo. Questo perché non vengono giocate tutte le combinazioni matematicamente possibili, ma solo una parte di esse rispondenti alle caratteristiche di cui sopra. Il vantaggio ovviamente sta nella spesa molto più contenuta rispetto all'integrale. [22, https://www.lottomaticaitalia.it/it/prodotti/lotto/statistiche/sistema-ridotto-11-numeri]

  Esistono anche altri tipi di sistemi come il sistema condizionato che garantisce la vincita a patto che si verifichi una condizione imposta. Oppure il sistema ortogonale:

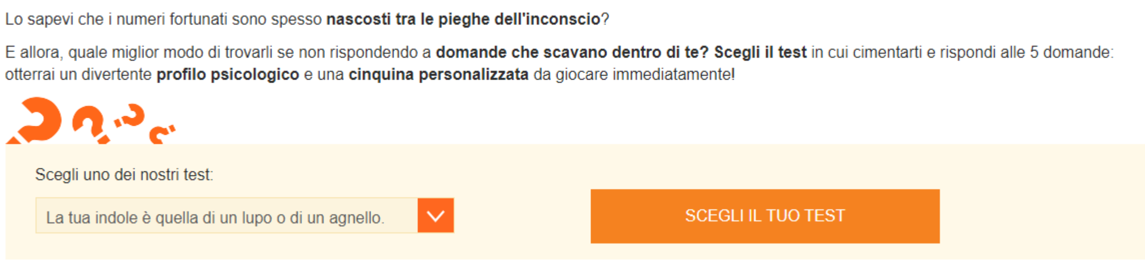
  > Il sistema ortogonale garantisce la presenza di tutte le combinazioni senza ripetizioni o esclusioni indicate nello stesso. Ad esempio un sistema di sette numeri in sette terzine a garanzia dell'ambo garantisce che tutti gli ambi possibili siano rappresentati in una e una sola delle sette terzine. [22, https://www.lottomaticaitalia.it/it/prodotti/lotto/statistiche/sistema-ortogonale-11-numeri]

  Infine il sistema a vincite plurime, che può essere ortogonale, ridotto o condizionato e garantisce, se il pronostico di partenza viene rispettato, la presenza di più di una vincita.

Come si è potuto notare, questa parte del sito basata sulle statistiche può illudere il giocatore che non conosce le basi matematiche del gioco e non sa cosa sia la probabilità, che esistano davvero numeri che ne preannunciano altri, che un numero in ritardo abbia più probabilità di uscire, che certe serie speciali di numeri siano più probabili di altre. Infatti spesso sono usate parole che danno credibilità a questi metodi e di fronte alle quali chi non ne coglie il significato si illude: “maggiore probabilità”, “frequenze”, “garantiscono” etc...

Inoltre, per chi non ama le statistiche, è presente un altro bottone sul menù, “La Smorfia”, il cui sottomenù presenta le seguenti opzioni:

- “La smorfia” in cui, inserendo la descrizione di un sogno o un evento, si hanno i numeri ad esso associati;
- “Amore e numeri” in cui viene “calcolata” la cinquina legata a date e “luoghi del cuore”;
- ”Nomi e numeri” per scoprire il numero legato al proprio nome;
- “Lottoroscopo” per scoprire i numeri legati al proprio segno zodiacale;
- “Numeri e cucina” in cui trovare i numeri legati alle ricette;
- “Test psicolottico” per scoprire la cinquina legata al proprio profilo psicologico.



In questo caso è evidente che matematica e probabilità non vengono citate ed è evidente che tutto viene lasciato ad una sorta di superstizione. Ovviamente potrebbe essere divertente cercare la cinquina legata alla propria personalità o per una volta giocare il numero legato alla data di inizio della propria storia d'amore ma essendo sempre consapevoli che tutto ciò non ha nessun fondamento scientifico e che appunto la probabilità di vittoria, come spiegato precedentemente, rimane la stessa e non dipende da quanto siamo affezionati ad una certa cifra.

Da notare che le "Statistiche" sono presenti anche per altri giochi proposti dalla Lottomatica, come "Million Day" e "10eLotto". Il primo è un gioco nel quale si può scommettere sull'uscita di 5 numeri da 1 a 55. "10eLotto" permette di giocare da 1 a 10 numeri compresi tra 1 e 90.

Per entrambi questi giochi è possibile vedere quali sono i numeri ritardatari e i numeri più frequenti.

Il sito però fa degli avvertimenti ai giocatori, non presenti nel menù e non evidenti come lo sono i collegamenti alla smorfia. Gli avvertimenti si possono trovare o cliccando in altro a destra sul bottone "Gioca senza esagerare" o sul pulsante "Regolamenti Lotto" del menù e poi sulla prima opzione "Gioca senza esagerare". Da questa pagina sono prese le immagini seguenti: [23].

In entrambi i casi si arriva alla pagina in cui ci sono dei suggerimenti per evitare gli eccessi. In particolare, oltre alle avvertenze per evitare patologie e dipendenze, vengono consigliate delle regole da seguire:

Per fare in modo che il gioco resti sempre un piacere, segui alcune regole elementari:

- Imposta i tuoi limiti di gioco e non superarli mai
- Gioca solo la quantità di denaro stabilita inizialmente
- Smetti di giocare quando hai superato il limite di tempo stabilito inizialmente
- Non giocare somme di denaro che non puoi permetterti di perdere
- Evita di spendere al gioco il denaro destinato ad altri scopi
- Se hai deciso di smettere di giocare, o di giocare meno, sforzati di mantenere questo proposito
- Evita di spendere troppo spesso il resto per il gioco
- Non giocare per rifarti quando perdi
- Evita di considerare il gioco come una soluzione per i tuoi problemi e per le tue preoccupazioni
- Non chiedere mai soldi in prestito per giocare
- Considera che il denaro speso al gioco è il prezzo che paghi per il tuo divertimento
- Non mentire ai tuoi cari sulle somme che hai perso al gioco o sul tempo dedicato al gioco
- Chiedi aiuto se pensi che stai spendendo troppo o stai giocando troppo frequentemente
- Non assentarti dal lavoro per andare a giocare
- Non giocare quando ti senti depresso, solo, annoiato, teso o ansioso

Inoltre vengono sfatati alcuni miti:

MITO: “se continuo a giocare la fortuna girerà e riguadagnerò i soldi che ho perso finora: devo solo andare avanti a giocare” VERITÀ: ogni volta che giochi, l’esito è completamente indipendente dalle giocate precedenti: le tue probabilità di vincere non cambiano nel tempo.

MITO: “ho quasi vinto: questo vuol dire che la prossima volta vincerò”

VERITÀ: avvicinarsi alla vincita non significa che si sta per vincere: l’esito della prossima giocata non è influenzato dall’avere quasi vinto in precedenza.

MITO: “mentre sto giocando il tenere in mano un oggetto fortunato, incrociare le dita, ecc., aumentano le probabilità che ho di vincere”

VERITÀ: l’esito della giocata non dipende MAI dai riti scaramantici che si fanno mentre si gioca.

MITO: “la mia conoscenza e la mia abilità nel gioco contribuiscono ad aumentare la probabilità che ho di vincere”

VERITÀ: nei giochi che dipendono solo dalla fortuna (come il Gratta e Vinci, il Lotto, le Lotterie) l’abilità del giocatore non può influenzare in alcun modo l’esito della giocata.

MITO: "le vincite e le perdite tendono ad accadere in modo ciclico"

VERITÀ: nei giochi non c'è ciclicità nelle vincite e nelle perdite.

[22, https://www.lottomaticaitalia.it/it/gioca-senza-esagerare/miti-e-credenze-sul-gioco]

Quindi in qualche modo il giocatore viene avvertito del fatto che numeri ritardatari, numeri spia, etc... non hanno rilevanza ma questi consigli sono più nascosti rispetto agli avvisi sui numeri in ritardo che invece appaiono appena si entra nel sito.

Un altro esempio di gioco che può essere citato è la Roulette Americana, ci sono 38 caselle di cui 36 numerate da 1 a 36, metà rosse e metà nere, una casella "0" e una casella "00" che sono verdi. La Roulette Francese ha 37 caselle in quanto manca la "00".

Il gioco della Roulette è più equo del gioco del Lotto infatti per esempio, se si punta 1€ sul 36 si vincono 36€ e la probabilità di uscita del 36 è, nel caso della Roulette Americana, $\frac{1}{38}$ quindi la vincita equa sarebbe 38€. Non c'è quindi moltissima differenza con quello che si vince in realtà. Come nel caso de Lotto, però, giocando ripetutamente la perdita è quasi certa.

Un metodo che potrebbe essere efficace per vincere quasi certamente è la "Strategia del Raddoppio".

Si punta alla Roulette francese 1€ sul "rosso", se uscirà il rosso, il giocatore avrà 2€ (la probabilità che accada è $\frac{18}{37}$). Se perderà punterà sul rosso di nuovo ma questa volta il doppio. In caso di vittoria avrà 4€ con il guadagno di 1€. In caso di perdita scommetterà di nuovo raddoppiando ancora, scommettendo cioè 4€. E così via, raddoppiando ogni volta sperando di vincere.

La probabilità di perdere n volte consecutive è $(\frac{19}{37})^n$ ed è quindi vicina a 0 per un n molto grande, perciò è ragionevole credere che prima o poi il "rosso" uscirà ed il giocatore otterrà il guadagno di 1€.

Il problema è, che aumentando le giocate, aumenta la cifra scommessa e quindi potrebbe accadere che il giocatore non abbia abbastanza denaro o che il banco stabilisca una puntata massima. Inoltre ricevere il guadagno di 1€ potrebbe non essere soddisfacente ma per poter aumentare il guadagno è necessario aumentare la posta.

La probabilità che il primo successo avvenga dopo k insuccessi (k intero e $k \geq 0$) è descritta dalla distribuzione geometrica:

$$\begin{cases} (1-p)^k p \text{ se } k \geq 0 \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Se, nel caso in cui si voglia un guadagno di 50€ e si abbiano a disposizione 6350€, la puntata massima fosse di 5000€, il giocatore potrà giocare al massimo 7 volte, quindi, se per 7 volte non apparirà il rosso, egli avrà perso tutto il suo capitale iniziale. La probabilità di vincere è

$$[1 - (\frac{19}{37})^7]$$

che equivale a 0,988593.

In questo caso quindi la probabilità di vincere è elevata, ma la posta da giocare è alta se si pensa al premio ricevuto. Infatti giocando 7 volte si spendono:

$$\sum_{k=1}^{7} 50 \cdot 2^{k-1} = 6350€$$

per ricevere 50€.

Da notare che, giocando un'ottava volta, la puntata sarebbe

$$50 \cdot 2^7 = 6400€$$

si supererebbe cioè il massimo possibile per una puntata.

In questo caso, anche se il gioco fosse equo non converrebbe giocare dato il premio poco cospicuo.

In conclusione, il gioco deve essere considerato tale, cioè è accettabile scommettere ogni tanto e tentare la fortuna ma non bisogna lasciarsi ingannare.

5.2 Le assicurazioni contro furti e danni

Un altro caso che però esula dal gioco ma nel quale è utile avere conoscenze in ambito probabilistico è l'assicurazione, anch'essa, in un certo senso, gioco d'azzardo.

Il funzionamento dell'assicurazione, nel caso più semplice, è il seguente: si paga una certa somma di denaro per fare in modo di ricevere un importo prestabilito in caso accada un determinato evento, nulla altrimenti.

Come si vede è la stessa regola che governa il gioco del lotto: si paga 1€ scommettendo sull'uscita di un numero; ne riceverò 11,23 se quel numero uscirà, nulla altrimenti.

Nel caso dell'assicurazione, supponiamo per esempio che la mia auto valga 20000€, e io la voglia assicurare contro furto e incendio. Pago il premio di assicurazione (supponiamo 300€); riceverò 20000€ se entro un anno la mia auto verrà distrutta, nulla altrimenti.

Come tutti i giochi d'azzardo, anche questo è ampiamente favorevole al "banco", qui rappresentato dalla Compagnia assicuratrice. Questa infatti avrà calcolato su dati statistici quale sia la probabilità dell'evento assicurato: se, per esempio, la probabilità è $\frac{1}{500}$, la "tariffa equa" ammonterebbe a 40€, non 300.

Ciò significa che "giocando" molte volte, ossia rinnovando annualmente la polizza, sicuramente avrò una perdita.

La differenza sostanziale dai giochi di azzardo propriamente detti consiste nel fatto che l'evento che dà luogo alla "vincita" comporta contestualmente una spesa imprevista di uguale importo; la sottoscrizione della polizza mi protegge dal rischio di dover far fronte a questa spesa senza disporre del denaro necessario. Partecipo dunque consapevolmente a questo gioco sfavorevole, per evitare questo rischio.

Conclusione

In questa tesi si è cercato di approfondire il significato del termine "probabilità", che cosa essa sia per le persone e come la probabilità venga descritta in alcuni manuali scolastici e dizionari.

Si è osservato come non sia facile né scontato dare una propria spiegazione di un termine che è in realtà molto comune e si è approfondita la definizione soggettiva in quanto essa è applicabile a tutti i tipi di eventi.

In ambito didattico sarebbe quindi utile dare maggiore spazio a questa definizione, dare così un'idea di probabilità più vicina alla realtà in quanto applicabile ad eventi che si vivono e trasmettere dei metodi applicativi, come ad esempio riuscire a tradurre in termini quantitativi i giudizi qualitativi che si ascoltano ogni giorno, come osservato nell'ultimo esercizio della proposta didattica citata nel terzo capitolo.

Sarebbe interessante inoltre introdurre più esercizi sulla definizione soggettiva piuttosto che far lavorare esclusivamente su casi equiprobabili.

La definizione di probabilità è difficile da trovare anche cercandola su altre fonti, in quanto se la si vuole cercare online nei dizionari, tranne nel caso *Treccani* dove è più completa, non si hanno risultati che ne facciano capire il significato intrinseco, ma solo definizioni tautologiche o poco precise.

Infatti innanzitutto vengono distinti due significati: quello di uso comune e quello scientifico, per quanto riguarda il primo di solito si hanno definizioni circolari o sinonimi che però trascurano la parte quantitativa, ad esempio una di esse è: "l'essere probabile, verosimile, ammissibile".

Per quanto riguarda il significato scientifico, esso o si riduce alla definizione classica o è impreciso.

Si dovrebbe dare un significato di uso comune ma che dia l'idea scientifica di probabilità in quanto la parola è di per sé scientifica, non può essere fatta questa distinzione che invece fa pensare che ci sia un significato astratto che tutti possono capire e un significato scientifico solo per pochi.

Ciò può condurre chi non si occupa di materie scientifiche a fidarsi di affermazioni errate o trarre conclusioni inesatte rispetto a giochi di sorte o scommesse, come si è visto nell'ultimo capitolo.

Spesso chi studia materie scientifiche, in particolare matematica, sente dire da amici o conoscenti che, dato che si è esperti della materia, si dovrebbe investire nel lotto o nei giochi di sorte. Già dietro un'affermazione di questo tipo si nasconde una lacuna sul tema in questione.

In conclusione, tornando alla difficoltà di fronte ad una domanda in cui si chieda quale sia la definizione di probabilità da usare, si può dire che di fronte ad un problema è il soggetto a decidere in base alle informazioni che ha.

Infatti si deve essere consapevoli del fatto che

> come ogni teoria che voglia dire qualcosa di sensato sulla realtà, anche il calcolo delle probabilità non si fonda puramente su un ragionamento logico a priori, ma richiede degli atti di giudizio di un soggetto. [12, pag 433]

La probabilità è, cioè, qualcosa di insito nell'uomo, usata da tutti, come è emerso anche dal nostro questionario, e quindi è giusto che venga compresa pienamente da tutti.

Concludiamo citando colui che per primo ha tentato di definirla e il cui contributo è ancora oggi il più usato e insegnato: Laplace, che ha scritto:

> La teoria della probabilità non è in fondo che il buon senso ridotto a calcolo: essa fa apprezzare con precisione ciò che gli spiriti giusti sentono per una sorta di istinto, senza che essi possano, sovente, rendersene conto.

Appendice

Vengono di seguito riportate, in ordine casuale, le risposte più significative alla domanda "Descrivi con parole tue che cos'è la probabilità di un evento incerto (ad esempio che domani ci sia il sole)" ottenute con il questionario.

- Secondo analisi statistiche e calcoli matematici, tenendo conto della storia degli eventi passati con gli eventi conseguenti, è molto più possibile il verificarsi di un evento rispetto ad un altro.
- Evento determinato da fattori che non possiamo prevedere completamente.
- La possibilità che si verifichi un determinato evento rispetto ad un altro. Se viene aria fredda dalla Russia c'è più probabilità che il tempo sia freddo rispetto a caldo. La probabilità è poi influenzata da diversi fattori, in questo caso l'arrivo di aria fredda dalla Russia.
- Possibilità che qualcosa accada o non accada.
- La possibilità che qualcosa di non certo possa avvenire.
- Evento che presenta fattori che non possiamo prevedere completamente.
- La possibilità che qualcosa di non certo possa avvenire.
- La probabilità sarà un valore (o comunque una espressione) che dipende da previsioni basate su dati relativi a eventi passati e, per quanto possibile, su eventi futuri.
- Una funzione da una σ-algebra degli eventi nell'intervallo $]0.1[$. In questo caso l'intervallo è aperto perché l'evento è incerto.
- É un evento che non può essere previsto in modo certo.
- La possibilità che ha una determinata situazione di verificarsi realmente.

- L'eventualità che possa succedere qualcosa.
- Probabilità è la possibilità che qualcosa avvenga o meno, ed è calcolabile in base alle informazioni presenti al momento.
- La probabilità è la misura in cui una cosa più succedere più prevedibilmente rispetto ad un'altra.
- È la possibilità o meno del verificarsi di un certo evento.
- Un evento dipende da altri fattori, es. Domani ci sarà il sole ma se soffia il vento potrebbero arrivare le nuvole.
- La probabilità per me è la possibilità che si verifichi un evento.
- È il rapporto tra il numero di casi favorevoli (al verificarsi di un evento) e il numero di casi possibili.
- La probabilità è un concetto matematico e fisico.
- La probabilità che domani ci sia bel tempo è data dalle condizioni meteo di stasera. Se stasera ci sarà brutto tempo probabilmente domani non ci sarà il sole. Se stasera il tempo migliorasse è più probabile che domani ci sia il sole.
- Per probabilità di un evento incerto si intende quanto sia possibile un avvenimento in un determinato caso reale o no, possibile o no. (È probabile che andrò all'università vuol dire che non sono sicura al 100% ma che sono piuttosto convinta che succederà).
- La probabilità dipende dal cambiamento o dalla stabilità di alcune varianti, come l'arrivo improvviso di qualche perturbazione.
- Si riferisce alla possibilità che l'evento possa verificarsi o meno.
- La possibilità reale su una soglia d'incertezza resa da una gamma di possibili eventi che si verifichi proprio quell'evento.
- La probabilità è la proporzione di un certo tipo di evento (giornata soleggiata) sul numero totale di eventi (giornate).
- Il cielo sembra sgombro dalle nuvole,monte Doglia non e' incappucciato molto probabilmente domani sarà una bella giornata.
- Quanto possibile sia il succedere di una aspettativa.

- La probabilità è che l'evento può avvenire con maggiore possibilità o è più probabile che avvenga.
- La possibilità che si verifichi rispetto a quella che al suo posto se ne verifichino altri.
- Quantificare quanto un evento possa accadere.
- La probabilità è che l'evento può avvenire con maggiore possibilità o è più probabile che avvenga.
- Rapporto tra casi favorevoli e possibili che accada l'evento.
- È la probabilità che un evento non favorito si verifichi.
- La probabilità che un evento accada o meno.
- Possibilità di accadimento.
- Una previsione di cui non si ha la certezza del risultato.
- La probabilità che un determinato evento si verifichi o no.
- La probabilità di un evento incerto rappresenta la misura dell'attendibilità di una affermazione in base alle informazioni che si hanno sull'evento e sul suo contesto.
- La probabilità di un evento è la percentuale di percezione che si ha in base alle conoscenza dell'evento.
- Rapporto tra casi favorevoli e totale dei casi possibili.
- La probabilità non è certezza. Intervengono altri fattori che scatenano la probabilità con i risultati.
- La valutazione che il caso in esame si verifichi
- Un evento incerto ha la stessa probabilità di verificarsi di qualsiasi altro evento, a prescindere dai precedenti.
- È molto più probabile che domani ci sia il sole piuttosto che piova.
- É la possibilità che un evento incerto si realizzi sulla base delle informazioni che si possiedono.
- La probabilità di un evento incerto è il numero di possibilità che tale evento avvenga tra tutte le possibilità totali.

- In un certo senso è un evento che non è possibile controllare ma che potrebbe accadere come non potrebbe accadere.
- È il livello d'incertezza che determina il grado di probabilità, altissime sono le probabilità che domani sorga il sole, molto più basse più basse quelle che muoia il papa.
- La possibilità che un certo evento si verifichi, considerate tutte le altre alternative.
- In una certa gamma di eventualità, l'esito dato dalle condizioni presenti.
- La percentuale che un determinato evento si verifichi, senza averne la piena certezza.
- La percentuale del caso preso in esame nell'insieme di casi possibili, vagliando i dati a disposizione.
- La reale possibilità che l'evento stesso abbia luogo.
- La probabilità è la possibilità che un determinato evento accada sulla base di un calcolo matematico.
- La possibilità che avvenga quell'evento.
- È una stima in percentuale di quello che penso possa o meno avverarsi.
- Il grado con cui un certo evento possa verificarsi facendo riferimento a dati verificabili.
- Possibilità che un evento avvenga considerando il caso di riuscita della previsione rispetto alla totalità dei casi possibili.
- La probabilità è la frequenza secondo la quale un evento può verificarsi o meno.
- Fa riferimento alla possibilità che un evento possa avverarsi in base a variabili misurabili o non misurabili.
- La probabilità è di un evento incerto quando nell'ambito e nella situazione che si ha a che fare si ritrova a non sapere cosa succederà (appunto incerto).
- La probabilità di un evento incerto ci dà qualche informazione in più riguardo alla possibilità di veder accadere quel dato evento (ad esempio sapere la probabilità che domani ci sia il sole ci dice quanto è realmente possibile vederlo)

- È un'eventualità.
- Non sono sicura che ciò possa accadere (che domani ci sia il sole), ma non posso comunque escluderne la possibilità.
- La probabilità è la previsione di un evento futuro che si può calcolare in base a delle informazioni.
- Sono le probabilità di un evento casuale, le quali cause non possono essere controllate direttamente.
- Dato un campione di tentativi la probabilità è il numero di volte che si verifica l'evento desiderato in confronto al totale dei tentativi.
- La possibilità in percentuale che l'evento succeda.
- Il grado con cui un certo evento possa verificarsi facendo riferimento a dati verificabili.
- La probabilità di un evento incerto è il calcolo, in base a fattori precedentemente verificatisi o detraibili da fattori certi, delle possibilità che tale evento si verifichi.
- La probabilità è quel dato che ti permette di capire forse come può o non può andare una cosa.
- La probabilità che quell'evento si verifichi oppure no, eventi il cui verificarsi dipende dal caso.
- É un numero compreso tra 0 e 1.
- Quanto sia ragionevole aspettarsi che avvenga un evento.
- L'ipotesi che l'avvenimento di questo evento sia favorevole rispetto a tutti gli altri.
- È la consapevolezza che un certo evento possa verificarsi oppure no perché non è l'unico evento che può esserci, ma è uno degli eventi fra altre opzioni.
- Numero maggiore o minore di possibilità che un evento si verifichi.
- È una cosa insicura.
- Numero maggiore o minore di possibilità che un evento si verifichi.

- È cercare di descrivere un evento futuro che non è prevedibile al 100% (domani il sole sorgerà).

- La probabilità è un qualcosa che, come dice la parola stessa, può essere probabile o meno, quindi non è un qualcosa di certo: è probabile che domani piova, è probabile che vinca al lotto, sono tutte ipotesi in un certo senso, che non hanno appunto una certezza, una sicurezza.

- È il calcolo attraverso il quale viene stimata la percentuale per cui un dato fenomeno possa verificarsi sulla base di dati/informazioni posseduti.

- È la percentuale di certezza che un evento accada in base a eventi simili successi nel passato e alle variabili prese in considerazione nel momento presente

- Incertezza ma sostenuta da motivi validi.

- Cercare di valutare tutte le variabili che intervengono in una situazione e provare ad anticipare il futuro.

- La possibilità, più o meno alta, che un evento accada.

- Domani è più probabile che piova piuttosto che ci sia il sole.

- È un rapporto tra l'evento considerato e la sommatoria degli eventi che si possono verificare. Quindi sole o non sole 50% di possibilità.

- La probabilità è la possibilità che un evento si verifichi attraverso calcoli matematici.

- La possibilità che un evento si manifesti sulla base di statistiche.

Bibliografia

[1] Bruno de Finetti. *La probabilità: guardarsi dalle contraffazioni*. In *La Matematica nella Società e nella Cultura*, Rivista dell'Unione Matematica Italiana Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, pp. 431-462

[2] Bruno de Finetti. *Sul significato soggettivo della probabilità*. In *Fundamenta mathematicae*, Warsawa, 1931, T.XVII, pp. 298-329.

[3] Bruno de Finetti. *Sul concetto di probabilità*. In *Rivista italiana di Statistica, Economia e Finanza*, Bologna, 1933, anno V, n.4, pp. 723-747.

[4] Bruno de Finetti. *Fondamenti logici del pensiero probabilistico*. In *Bollettino dell'Unione Matematica italiana*, 1930, n.5, pp.1-3.

[5] Bruno de Finetti. *Probability and my life*. In *The making of Statisticians*, edito da J.Gani, 1982, Springer.

[6] Alberto Piatti, Gianfranco Arrigo. *Il senso della probabilità è impreciso*. In *Bollettino dei Docenti di Matematica*, numero 50, maggio 2005, Bellinzona, UIM-CDC, pp. 55-68.

[7] Carla Rossi. *La probabilità per tutti seguendo l'insegnamento creativo, i suggerimenti e l'esempio di Bruno de Finetti*. In *La matematica nella Società e nella Cultura*, Rivista dell'Unione Matematica Italiana Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, pp. 73-108.

[8] Bruno de Finetti. *Il "saper vedere" in matematica*. In *La matematica nella Società e nella Cultura*, Rivista dell'Unione Matematica Italiana Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, pp. 299-408.

[9] Silvia Capuzzo, Erika Luciano. *Bruno de Finetti e l'insegnamento della matematica nella scuola secondaria*. In F. Ferrara, L. Giacardi, M. Mosca (a cura di), *Conferenze e seminari 2008-2009*, Torino. Ass. Sub. Mathesis, Kim Williams Book, 161-183.

[10] Bergamini, Trifone, Barozzi. *Matematica blu 2.0*. Zanichelli, 2017.

[11] Leonardo Sasso. *Nuova matematica a colori 4*. Edizione azzurra secondo biennio, Petrini, 2017

[12] Andreini M., Manara R., Prestipino F. *Matematica controluce per i programmi sperimentali*. Tomo II, Etas, 2011.

[13] Gambotto Manzone. *Matematica per ragionieri programmatori*. Volume primo, Tramontana, 1986.

[14] Bruno de Finetti. *Lezioni sulla probabilità*. Trieste, 1933.

Riferimenti tratti dalla rete

[15] *Istruzioni e piani di studio 1944. Programmi di Matematica per il Liceo Scientifico* http://www1.mat.uniroma1.it/ricerca/gruppi/education/programmiLS.htm

[16] *Accademia della Crusca: i dizionari dell'uso* http://www.accademiadellacrusca.it/it/link-utili/dizionari-sincronici

[17] *Garzanti* http://www.garzantilinguistica.it/ricerca/?q=probabilità

[18] *Hoepli* http://dizionari.repubblica.it/Italiano/P/probabilita.php

[19] *Nuovo De Mauro* https://dizionario.internazionale.it/parola/probabilita

[20] *Sabatini Coletti* http://dizionari.corriere.it/dizionario_italiano/P/probabilita.shtml

[21] *Treccani* http://www.treccani.it/vocabolario/probabilita/

[22] *Lottomatica* https://www.lottomaticaitalia.it/it/prodotti/lotto

[23] *Gioca senza esagerare* https://www.lottomaticaitalia.it/it/gioca-senza-esagerare