View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by AMS Tesi di Laurea

Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

LA FORMULA DI FAÀ DI BRUNO

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Giovanni Dore

Presentata da:
Chiara Bernardini

Sessione I
Anno Accademico 2017-2018

Introduzione

La formula di Faà di Bruno, pubblicata nel 1855 in "Sullo sviluppo delle funzioni", *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche* [4], fornisce una regola per calcolare la derivata n-esima di una funzione composta, nel caso in cui le funzioni considerate abbiano un numero sufficiente di derivate. La formula è usata in analisi combinatoria, teoria delle matrici, teoria delle partizioni, statistica matematica e computer science.

In questo lavoro studieremo la forma fattoriale della formula di Faà di Bruno, dandone una prima dimostrazione basata su basilari nozioni di Analisi, per poi vedere una dimostrazione alternativa sfruttando i concetti fondamentali del Calcolo Umbrale. Successivamente tratteremo la formula dal punto di vista combinatorio, andando ad associare alle partizioni di insiemi le derivate di funzioni composte, fino ad arrivare ad esprimere la formula sotto forma di determinante.

Nonostante la formula prenda il nome da Faà di Bruno, fu precedentemente studiata da numerosi matematici; vedremo alcuni dei lavori sulla derivata n-esima di una funzione composta che anticiparono la regola di Faà di Bruno, tra questi è di notevole importanza il *Du calcul des dérivations* di Arbogast [1], nel quale si trova la prima esposizione della formula.

Infine ci occuperemo della generalizzazione della formula nel caso di funzioni in più variabili, e della sua applicazione nel calcolo della derivata n-esima della funzione inversa.

Indice

Capitolo 1

Forma fattoriale della formula di Faà di Bruno

1.1 Idea intuitiva

Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili n volte. Per calcolare la derivata n-esima di $f \circ g$ ricordiamo:

- la regola della catena per la derivata di una funzione composta:

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

- la derivata del prodotto (regola di Leibniz):

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

quindi si ottiene che:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)''(x) &= f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x) \\
(f \circ g)'''(x) &= f'''(g(x))(g'(x))^3 + 3f''(g(x))g'(x)g''(x) + f'(g(x))g'''(x) \\
(f \circ g)''''(x) &= f''''(g(x))g'(x)^4 + 6f'''(g(x))g''(x)g'(x)^2 + 3f''(g(x))g''(x)^2 + \\
&\quad + 4f''(g(x))g'''(x)g'(x) + f'(g(x))g''''(x).
\end{aligned}$$

Procedendo così si può notare che se n è un intero positivo, allora ciascun addendo di $(f \circ g)^{(n)}$ è del tipo:

$$cf^{(k)}(g(x))g'(x)^{a_1}...g^{(n)}(x)^{a_n}$$

dove $c, k, a_1, ...a_n$ sono numeri interi non negativi.

La formula di Faà di Bruno fornisce una regola per ottenere tutti gli addendi della derivata n-esima.

1.2 La formula di Faà di Bruno

Per gli argomenti trattati in questa sezione si faccia riferimento agli articoli di Flanders [5] e Spindler [20].

Da qui in poi per tutta la trattazione, consideriamo due funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : B \to \mathbb{R}$ con A e B intervalli di $\mathbb{R}$, tali che $g(B) \subseteq A$ e che siano derivabili n volte. Spesso nelle dimostrazioni seguenti, si richiederà inoltre, che le funzioni siano derivabili infinite volte e sviluppabili in serie di Taylor. A tal proposito, da quanto osservato nella sezione precedente segue che la derivata n-esima della funzione composta $f \circ g$, dipende solo dalle derivate fino all'ordine n delle funzioni che si compongono. Possiamo perciò rimpiazzare f e g con delle funzioni che abbiano le stesse derivate fino all'ordine n, e quindi con degli opportuni polinomi. Per comodità, nelle dimostrazioni seguenti assumiamo che f e g siano dei polinomi con le caratteristiche appena dette.

Teorema 1.2.1 (Formula di Faà di Bruno)**.**
Siano f e g due funzioni con le condizioni appena dette, si ha

$$(f \circ g)^{(n)}(x) = \sum \frac{n!}{k_1!k_2! \cdots k_n!} f^{(k)}(g(x)) \left(\frac{g'(x)}{1!}\right)^{k_1} ... \left(\frac{g^{(n)}(x)}{n!}\right)^{k_n} \quad (1.2.1)$$

dove la somma è su tutte le soluzioni intere non negative $k_1, ..., k_n$ di $k_1 + 2k_2 + ... + nk_n = n$ e dove $k = k_1 + ... + k_n$.

Esempio 1.2.1. Vediamo la formula nel caso di $n = 3$; troviamo le soluzioni intere non negative dell'equazione $k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 3$:

- $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 1$ in tal caso $k = 1$ e si ottiene il termine
$$\frac{3!}{0!0!1!} f'(g(x)) \frac{g'''(x)}{3!} = f'(g(x))g'''(x)$$
- $k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 0$ si ha $k = 2$ e si ottiene il termine
$$\frac{3!}{1!1!0!} f''(g(x)) \left(\frac{g'(x)}{1!}\right) \left(\frac{g''(x)}{2!}\right) = 3f''(g(x))g'(x)g''(x)$$
- $k_1 = 3, k_2 = 0, k_3 = 0$ quindi $k = 3$ e si ha il termine
$$\frac{3!}{3!0!0!} f'''(g(x)) \left(\frac{g'(x)}{1!}\right)^3 = f'''(g(x))g'(x)^3$$

quindi dalla formula di Faà di Bruno si ottiene:
$$(f \circ g)'''(x) = f'(g(x))g'''(x) + 3f''(g(x))g'(x)g''(x) + f'''(g(x))g'(x)^3$$
questo è lo stesso risultato ottenuto in precedenza nel paragrafo 1.1.

1.2.1 Una prima dimostrazione della formula

Introduciamo alcune nozioni che ci serviranno nella dimostrazione della formula:

Definizione 1.2.1 (Coefficiente multinomiale)**.**
Sia $n \in \mathbb{N}$ (in tutta la trattazione $\mathbb{N}$ è l'insieme di tutti gli interi non negativi) e $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_r) \in \mathbb{N}^r$ di norma-1 uguale a n. Il coefficiente multinomiale è definito come:
$$\binom{n}{\mathbf{v}} := \frac{n!}{\prod_{i=1}^{r} v_i!}$$

Osservazione 1.2.1. Il coefficiente multinomiale è pari al numero di modi in cui possono essere disposti n oggetti in r scatole, in modo che v_1 oggetti siano nella prima scatola, v_2 nella seconda e così via. Inoltre fornisce il numero di permutazioni di n oggetti di cui k_1 uguali tra loro, k_2 uguali tra loro e così via.

Osservazione 1.2.2. Il coefficiente multinomiale è un'estensione del coefficiente binomiale che invece è così definito:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \text{per } n, k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$$

$\binom{n}{k}$ indica il numero di sottoinsiemi di cardinalità k di un insieme di cardinalità n.

Lemma 1.2.2 (Teorema multinomiale)**.**
$\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ *si ha:*

$$(x_1 + x_2 + ... + x_r)^n = \sum_{k_1+...+k_r=n} \binom{n}{k_1, ..., k_r} \prod_{i=1}^{r} x_i^{k_i} \tag{1.2.2}$$

Infatti per ottenere $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_r^{k_r}$ basta scegliere x_1 da esattamente k_1 fattori tra gli n disponibili, poi scegliere x_2 da k_2 fattori tra i restanti $n - k_1$ fattori disponibili e così via. Dato che la scelta può essere fatta in $\binom{n}{k_1,...,k_r}$ modi possibili, segue la formula.

Dimostrazione del Teorema 1.2.1. Considerando la formula di Faà di Bruno, si osserva che $\frac{D^l g(x_0)}{l!}$ è l'l-esimo coefficiente del polinomio di Taylor della funzione g nel punto x_0; dividendo per $n!$ si ottiene a sinistra $\frac{D^n(f \circ g)(x_0)}{n!}$, che è l'$n$-esimo termine dello sviluppo di Taylor di $f \circ g$ in x_0. Moltiplicando e dividendo ogni $D_y^k f$ per $k!$ la formula può essere scritta così:

$$\frac{D^n(f \circ g)(x_0)}{n!} = \sum \frac{k!}{k_1! k_2! \cdots k_n!} \frac{(D^k f)(g(x_0))}{k!} \left(\frac{Dg(x_0)}{1!}\right)^{k_1} ... \left(\frac{D^n g(x_0)}{n!}\right)^{k_n}$$

dove la somma è su tutte le soluzioni intere non negative $k_1, ..., k_n$ di $k_1 + 2k_2 + ... + nk_n = n$ e dove $k = k_1 + ... + k_n$.

Si può notare che il fattore numerico in ogni addendo è un coefficiente multinomiale, quindi si ha:

$$\frac{D^n(f \circ g)(x_0)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k f(g(x_0))}{k!} \sum \binom{k}{k_1, ..., k_n} \left(\frac{Dg(x_0)}{1!}\right)^{k_1} ... \left(\frac{D^n g(x_0)}{n!}\right)^{k_n}$$

dove la somma interna si fa su tutte le n-uple $(k_1, ..., k_n)$ con somma k e tali che $k_1 + 2k_2 + ... + nk_n = n$.

Dimostriamo quest'ultima uguaglianza: si prova tramite una banale induzione che ci sono dei polinomi $P_{n,k}$ tali che

$$(f \circ g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} (f^{(k)} \circ g) P_{n,k}(g', g'', ..., g^{(n)})$$

quindi è ovvio che $(f \circ g)^{(n)}(x_0)$ dipende soltanto dai valori $g^{(k)}(x_0)$ e $f^{(k)}(g(x_0))$ per $0 \leq k \leq n$; perciò, come già osservato, per stabilire la validità della formula in un dato punto x_0, possiamo supporre che f e g siano due polinomi. Lavoriamo per comodità in $x_0 = 0$ e $g(x_0) = 0$, si ha:

$$f(y) = \sum_{k=0}^{n} b_k y^k \qquad \text{e} \qquad g(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

dove $b_k = f^{(k)}(0)/k!$ e $a_j = g^{(j)}(0)/j!$.

Vogliamo trovare il coefficiente di x^n nello sviluppo in potenze di x della funzione composta:

$$f(g(x)) = \sum_{k=0}^{m} c_k x^k$$

cioè il coefficiente di x^n in:

$$\sum_{k=0}^{n} b_k \left(\sum_{j=1}^{n} a_j x^j \right)^k .$$

Sviluppando la k-esima potenza con la formula (1.2.2) si ottiene:

$$\sum_{k=0}^{n} b_k \left[\sum_{k_1+...+k_n=k} \binom{k}{k_1, k_2, ..., k_n} a_1^{k_1} a_2^{k_2} ... a_n^{k_n} x^{k_1+2k_2+...+nk_n} \right]$$

perciò il coefficiente di x^n è:

$$\sum_{k=0}^{n} b_k \sum_{k_1+...+k_n=k} \binom{k}{k_1, k_2, ..., k_n} a_1^{k_1} a_2^{k_2} ... a_n^{k_n}$$

dove $k_1 + 2k_2 + ... + nk_n = n$. Si vede facilmente che la formula è dimostrata.

$\square$

1.3 Il calcolo umbrale e la formula di Faà di Bruno

1.3.1 Nozioni di calcolo umbrale

Per gli argomenti presentati in questa sezione si veda Roman [17]. Il calcolo umbrale si è cominciato a sviluppare nel XIX secolo, dapprima come una tecnica non del tutto rigorosa e poco giustificata che consentiva di derivare identità sulle successioni numeriche trattando gli indici come se fossero esponenti. A partire dagli anni Settanta del Novecento Rota, Roman e altri matematici sono riusciti a creare una teoria rigorosa basata sui funzionali lineari su spazi di polinomi.

Sia P l'algebra dei polinomi nella variabile x su un campo C (di solito i numeri reali o i complessi) e P^* lo spazio vettoriale duale formato dai funzionali lineari su P (un funzionale lineare è un'applicazione lineare dallo spazio vettoriale nel suo campo di scalari, quindi in questo caso è una funzione lineare da P in C). Usiamo la notazione $\langle L|p(x)\rangle$ per indicare il valore del funzionale lineare L in corrispondenza del polinomio $p(x)$.

Per ogni intero non negativo k definiamo il funzionale lineare A^k ponendo:

$$\langle A^k|x^n\rangle = n!\delta_{n,k} \tag{1.3.1}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dove $\delta_{n,k}$ è il Delta di Kronecker (nullo se $n \neq k$ e $\delta_{n,k} = 1$ se $n = k$); l'azione del funzionale lineare A^k su un qualsiasi polinomio $p(x)$ si ottiene prolungando per linearità.

Si osserva che ogni funzionale lineare su P può essere scritto come una serie formale di questo tipo:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k \tag{1.3.2}$$

dove $a_k \in C$. Questa serie rappresenta un funzionale lineare ben definito se fissiamo:

$$\langle \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k|p(x)\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \langle A^k|p(x)\rangle$$

infatti la somma a destra è finita, in quanto $\langle A^k|p(x)\rangle = 0$ per tutti gli interi k maggiori del grado di $p(x)$.

Teorema 1.3.1.
Se L è un funzionale lineare su P allora L può essere scritto così:

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle L|x^k\rangle}{k!} A^k \tag{1.3.3}$$

Dimostrazione. La serie formale rappresenta un funzionale lineare ben definito e si ha:

$$\langle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle L|x^k\rangle}{k!} A^k|x^n\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle L|x^k\rangle}{k!}\langle A^k|x^n\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle L|x^k\rangle}{k!} n!\delta_{n,k} = \langle L|x^n\rangle$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ e poiché L è lineare, il teorema è dimostrato. □

Da questo teorema segue che lo spazio vettoriale P^* è isomorfo allo spazio vettoriale F delle serie formali di potenze nella variabile A. Essendo F un'algebra, possiamo dare una struttura di algebra anche a P^*, definendo il prodotto così : $A^k A^j = A^{k+j}$ e analogamente per linearità.

Il calcolo umbrale è quindi lo studio dell'**algebra umbrale**, cioè l'algebra dei funzionali lineari nella quale il prodotto è così definito:
siano

$$L_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle L_1|x^k\rangle}{k!} A^k \quad \text{e} \quad L_2 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\langle L_2|x^j\rangle}{j!} A^j$$

due funzionali lineari, pongo:

$$L_1 L_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle L_1|x^k\rangle}{k!} A^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\langle L_2|x^j\rangle}{j!} A^j = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle L_1|x^k\rangle\langle L_2|x^{n-k}\rangle\right] A^n$$

e quindi abbiamo:

$$\langle L_1 L_2|x^n\rangle = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle L_1|x^k\rangle\langle L_2|x^{n-k}\rangle \tag{1.3.4}$$

da questa formula per induzione si ha:

$$\langle L_1 \cdots L_j|x^n\rangle = \sum_{k_1+\ldots+k_j=n} \binom{n}{k_1, \ldots, k_j} \langle L_1|x^{k_1}\rangle \cdots \langle L_j|x^{k_j}\rangle.$$

Indichiamo per comodità $L = f(A)$ dove con $f(A)$ si intende la serie (1.3.2), e consideriamo L', cioè il funzionale lineare ottenuto derivando formalmente la serie $f(A)$ rispetto alla variabile A, quindi $L' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k A^{k-1}$. Si ha il seguente:

Lemma 1.3.2.
Se $L = f(A)$ è un funzionale lineare su P, allora:

$$\langle f'(A)|p(x)\rangle = \langle f(A)|xp(x)\rangle \tag{1.3.5}$$

per tutti i polinomi $p(x)$

Dimostrazione. Sfruttando la linearità dell'operazione di derivazione e la linearità di $f(A)$, basta dimostrare il lemma per $f(A) = A^k$ e $p(x) = x^n$, in tal caso abbiamo:

$$\langle (A^k)'|x^n\rangle = \langle kA^{k-1}|x^n\rangle = k \cdot n!\delta_{n,k-1} = (n+1)!\delta_{n+1,k} = \langle A^k|x^{n+1}\rangle$$

nella prima uguaglianza abbiamo derivato formalmente A^k, nella seconda dopo aver portato fuori k abbiamo usato la definizione (1.3.1) e infine nella terza abbiamo usato il fatto che $\delta_{n,k-1}$ è diverso da zero per $n = k-1$ e quindi $k = n+1$. □

Con i concetti appena introdotti si può dare una dimostrazione alternativa della formula di Faà di Bruno (1.2.1).

1.3.2 Dimostrazione della formula tramite il calcolo umbrale

Dimostrazione del Teorema 1.2.1. Consideriamo $h = f \circ g$ e denotiamo con h_j la derivata $D^j h(t)$, $g_j := D^j g(t)$ e $f_j := D^j f(g(t))$. Allora si ha:

$$h_1 = Dh(t) = Df(g(t))Dg(t) = f_1 g_1$$

$$h_2 = f_1 g_2 + f_1 g_1^2$$

$$h_3 = f_1 g_3 + f_2 3 g_1 g_2 + f_1 g_1^3$$

quindi proseguendo nella derivazione si ottiene:

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} f_k l_{n,k}(g_1, ..., g_n) \tag{1.3.6}$$

dove $l_{n,k}(g_1, ..., g_n)$ è un polinomio nelle variabili $g_1, ..., g_n$. Dobbiamo trovare gli $l_{n,k}(g_1, ..., g_n)$ per $k = 1, ..., n$. Siamo liberi di scegliere f arbitrariamente, quindi prendiamo $f(u) = e^{au}$ dove a è una costante arbitraria non nulla, si ha:

$$f_k = D^k f(g(t)) = a^k e^{a \cdot g(t)} \qquad \text{e} \qquad h_n = \frac{d^n}{dt^n} e^{ag(t)}$$

sostituendo queste ultime due relazioni in (1.3.6) e moltiplicando per $e^{-a \cdot g(t)}$ si ottiene:

$$e^{-a \cdot g(t)} \frac{d^n}{dt^n} e^{ag(t)} = \sum_{k=1}^{n} a^k l_{n,k}(g_1, ..., g_n). \tag{1.3.7}$$

Se poniamo $B_n(t) = e^{-ag(t)} \frac{d^n}{dt^n} e^{ag(t)}$ per $n \geq 1$ si ha:

$$\begin{aligned} B_n(t) &= e^{-ag(t)} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (a g_1(t) e^{ag(t)}) = \\ &= a e^{-ag(t)} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} g_{k+1}(t) \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} e^{ag(t)} = \\ &= a \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} g_{k+1}(t) B_{n-k-1}(t) \end{aligned} \tag{1.3.8}$$

in cui nella seconda uguaglianza è stata usata la regola di Leibniz.

Ora possiamo pensare t come un valore fissato, quindi scriviamo $B_n(t) = B_n$ e $g_n(t) = g_n$; definiamo due funzionali lineari L e M su P in questo modo:

$$\langle L | x^n \rangle = B_n \qquad \text{e} \qquad \langle M | x^n \rangle = g_n$$

si noti che $\langle L | 1 \rangle = B_0 = 1$, $\langle M | 1 \rangle = g_0 = g$ e inoltre $L = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} A^k \quad M =$

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{g_k}{k!} A^k$. Perciò l'uguaglianza (1.3.8) diventa:

$$\begin{aligned}
\langle L|x^n\rangle &= a\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\langle M|x^{k+1}\rangle\langle L|x^{n-1-k}\rangle = \\
&\underset{(1.3.5)}{=} a\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\langle M'|x^{k}\rangle\langle L|x^{n-1-k}\rangle = \\
&\underset{(1.3.4)}{=} a\langle M'L|x^{n-1}\rangle
\end{aligned}$$

e quindi $\langle L'|x^{n-1}\rangle = a\langle M'L|x^{n-1}\rangle$, dato che questo vale per ogni $n \geq 1$, si può concludere che:

$$L' = aM'L. \tag{1.3.9}$$

Questa è un'equazione differenziale, sviluppando i calcoli formali si dimostra che l'equazione differenziale si può vedere come un'ordinaria equazione differenziale tra funzioni di una variabile, quindi le soluzioni sono della forma:

$$L = ce^{a(M-g_0)}$$

dove c è una costante e per determinarla consideriamo la condizione iniziale $1 = B_0 = \langle L|1\rangle = \langle ce^{a(M-g_0)}|1\rangle = c$ e quindi $L = e^{a(M-g_0)}$, da cui segue che:

$$\begin{aligned}
B_n = \langle L|x^n\rangle &= \langle e^{a(M-g_0)}|x^n\rangle = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}\langle (M-g_0)^k|x^n\rangle = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}\sum_{j_1+\ldots+j_k=n}\binom{n}{j_1,\ldots,j_k}\langle M-g_0|x^{j_1}\rangle\cdots\langle M-g_0|x^{j_k}\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}\sum_{\substack{j_1+\ldots+j_k=n\\ j_i\geq 1}}\binom{n}{j_1,\ldots,j_k} g_{j_1}\cdots g_{j_k}
\end{aligned}$$

e quindi uguagliando i coefficienti di a^k nelle due espressioni di B_n (quest'ultima e la (1.3.7)) si ottiene:

$$l_{n,k}(g_1, ..., g_n) = \frac{n!}{k!} \sum_{\substack{j_1+...+j_k=n \\ j_i \geq 1}} \left(\frac{g_{j_1}}{j_1!}\right) \cdots \left(\frac{g_{j_k}}{j_k!}\right) =$$

denotando con k_i il numero di volte che in un addendo della somma precedente compare il fattore g_i, si osserva che per ogni n-upla di valori $k_1, ..., k_n$ (con $k_1 + ... + k_n = k$ e $k_1 + 2k_2 + ... + nk_n = n$), ci sono esattamente $\binom{k}{k_1,...,k_n}$ addendi uguali nella somma precedente, raccogliendo si ottiene:

$$= \frac{n!}{k!} \sum \binom{k}{k_1, ..., k_n} \left(\frac{g_1}{1!}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{g_n}{n!}\right)^{k_n}$$

dove l'ultima sommatoria è sulle n-uple $k_1, ..., k_n$ per le quali $k_1 + ... + k_n = k$ e $k_1 + 2k_2 + ... + nk_n = n$. Infine si vede che:

$$\begin{aligned} h_n(t) &= \sum_{k=1}^{n} f_k l_{n,k}(g_1, ..., g_n) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} f_k \sum \frac{n!}{k_1! \cdots k_n!} \left(\frac{g_1}{1!}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{g_n}{n!}\right)^{k_n} = \\ &= \sum \frac{n!}{k_1! \cdots k_n!} f_k \left(\frac{g_1}{1!}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{g_n}{n!}\right)^{k_n} \end{aligned}$$

dove $k = k_1 + ... + k_n$ e l'ultima sommatoria è sulle n-uple $k_1, ..., k_n$ per le quali $k_1 + 2k_2 + ... + nk_n = n$. Quest'ultima non è altro che la formula di Faà di Bruno che si voleva dimostrare. $\square$

Capitolo 2

Forma combinatoria della formula di Faà di Bruno

In questo capitolo tratteremo la formula di Faà di Bruno dal punto di vista combinatorio: studieremo dapprima la sua versione con le partizioni di insiemi e poi la versione con il determinante, entrambe presentate nell'articolo di Johnson [8].

2.1 Polinomi di Bell

Introduciamo per prima cosa i polinomi di Bell, che sono associati alle partizioni di un insieme. Consideriamo i seguenti insiemi:

- $\{1\}$ ha un'unica partizione che è l'insieme stesso, vi associamo il monomio x_1 e si definisce $B_{1,1}(x_1) = x_1$
- $\{1, 2\}$ ha due partizioni possibili $\{\{1\}, \{2\}\}$ e $\{\{1, 2\}\}$ (la prima con due blocchi e la seconda con uno) a cui vengono associati i monomi x_1^2 e x_2 rispettivamente, e quindi $B_{2,1}(x_1, x_2) = x_2$ e $B_{2,2}(x_1, x_2) = x_1^2$
- $\{1, 2, 3\}$ ha 5 partizioni possibili, 3 di queste hanno 2 blocchi e cioè $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$ a ognuna di queste si associa il monomio x_1x_2 e quindi $B_{3,2}(x_1, x_2) = 3x_1x_2$, alla partizione

$\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ corrisponde il polinomio di Bell $B_{3,3}(x_1) = x_1^3$ e in fine alla partizione $\{\{1,2,3\}\}$ corrisponde $B_{3,1}(x_1,x_2,x_3) = x_3$

In generale definiamo il polinomio di Bell $B_{n,k}$ corrispondente alle partizioni di n elementi in k blocchi, ponendo:

$$B_{n,k}(x_1,x_2,...,x_{n-k+1}) = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{j_1+...+j_k=n \\ j_i \geq 1}} \binom{n}{j_1,...,j_k} x_{j_1} \cdots x_{j_k}$$

dove $B_{0,0}(x_1) = 1$. Si noti che la somma è sulle partizioni di $\{1,2,...,n\}$ in k blocchi di dimensioni $j_1,...,j_k$, si divide il tutto per $k!$ perché non importa l'ordine dei blocchi.

Osservazione 2.1.1. Se fissiamo ogni $x_i = 1$ il polinomio di Bell $B_{n,k}$ fornisce il numero di partizioni dell'insieme $\{1,2,...,n\}$ in k blocchi (anche detto numero di Stirling di seconda specie) e scriveremo:

$$B_{n,k}(1,1,...,1) = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}.$$

Osservazione 2.1.2. Il nome "polinomi di Bell" fu introdotto da Riordan, che fu il primo ad osservare che questi erano utili per descrivere la formula di Faà di Bruno. In realtà i polinomi che aveva studiato Bell erano i seguenti

$$Y_n(x_1,x_2,...,x_n) := \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(x_1,...,x_{n-k+1})$$

quindi per esempio $Y_3(x_1,x_2,x_3) = x_3 + 3x_1x_2 + x_1^3$.

2.2 Formula di Faà di Bruno, versione con le partizioni di insiemi

Associamo ora, allo stesso modo, le partizioni di insiemi alle derivate di funzioni composte. A $f'(g(x))g'(x)$ corrisponde $\{\{1\}\}$; le partizioni $\{\{1,2\}\}$ e $\{\{1\},\{2\}\}$ sono associate rispettivamente a $f'(g(x))g''(x)$ e $f''(g(x))(g'(x))^2$.

In generale, a ogni partizione di $\{1, 2, ..., n\}$ con k blocchi, corrisponde un termine di $(f \circ g)^{(n)}(x)$ con il fattore $f^{(k)}(g(x))$ e dove le cardinalità dei blocchi determinano gli altri fattori.

Consideriamo per esempio le partizioni dell'insieme $\{1, 2, 3\}$: ogni partizione formata da 2 blocchi, e cioè $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$, $\{\{2, 3\}, \{1\}\}$, corrisponde a $f''(g(x))g'(x)g''(x)$, mentre le altre due partizioni $\{\{1, 2, 3\}\}$ e $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ sono associate a $f'(g(x))g'''(x)$ e $f'''(g(x))(g'(x))^3$; sommando questi 5 termini otteniamo $(f \circ g)'''(x)$.

Si può quindi esprimere la formula di Faà di Bruno tramite le partizioni:

Teorema 2.2.1 (Formula di Faà di Bruno, versione con le partizioni)**.** *Siano f e g due funzioni con le caratteristiche dette inizialmente, si ha*

$$(f \circ g)^{(n)}(x) = \sum f^{(k)}(g(x))(g'(x))^{b_1}(g''(x))^{b_2} \cdots (g^{(n)}(x))^{b_n} \tag{2.2.1}$$

dove la somma è su tutte le partizioni di $\{1,2,...,n\}$, per ogni partizione k è il numero di blocchi e b_i è il numero di blocchi con esattamente i elementi.

Dimostrazione. Si dimostra per induzione su n.

Per $n = 1$ esiste un'unica partizione in un unico blocco e si ottiene la regola della catena.

Ogni partizione di $\{1, 2, ..., n + 1\}$ si può ottenere a partire da una partizione di $\{1, 2, ..., n\}$ in due modi diversi: si aggiunge il singoletto $\{n+1\}$ alla partizione, oppure si aggiunge l'elemento $n + 1$ ad un blocco, già esistente, di cardinalità i. Nel primo caso aumenta di uno il numero di blocchi con un unico elemento e ovviamente aumenta di uno anche il numero totale di blocchi. Nel secondo caso il numero di blocchi con i elementi diminuisce di uno, il numero di blocchi di cardinalità $i + 1$ aumenta di uno e il numero totale di blocchi resta invariato. Il primo caso corrisponde ad applicare $\frac{d}{dx}$ a $f^{(k)}(g(x))$ per ottenere $f^{(k+1)}(g(x))g'(x)$. Nel secondo caso, se inizialmente c'erano b_i blocchi di cardinalità i allora potevamo aggiungere l'elemento $n+1$ a uno qualsiasi di essi per ottenere lo stesso risultato, questo corrisponde ad applicare $\frac{d}{dx}$ a $(g^{(i)}(x))^{b_i}$ per ottenere $b_i(g^{(i)}(x))^{b_i-1}g^{(i+1)}(x)$. Il teorema è dimostrato. $\square$

Vista la stretta relazione tra polinomi di Bell e partizioni di un insieme, possiamo ottenere una scrittura della formula di Faà di Bruno tramite i polinomi di Bell:

$$(f \circ g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{m} f^{(k)}(g(x)) B_{n,k}\left(g'(x), g''(x), \cdots g^{(n-k+1)}(x)\right). \quad (2.2.2)$$

Questa è anche detta **Formula di Riordan**.

La forma fattoriale della formula, cioè (1.2.1), si ricava facilmente, infatti il numero di partizioni di $\{1, 2, ..., n\}$ in b_1 1-blocchi, b_2 2-blocchi,... sarà:

$$\binom{n}{\underbrace{1,...,1}_{b_1}, \underbrace{2,...,2}_{b_2}, \underbrace{3,...,3}_{b_3}, ...}$$

(vedi Oss.1.2.1) ma questo calcolo fa distinzione tra gli i-blocchi per ogni i, siccome l'ordine non conta si ha che il numero effettivo di partizioni è:

$$\binom{n}{\underbrace{1,...,1}_{b_1}, \underbrace{2,...,2}_{b_2}, \underbrace{3,...,3}_{b_3}, ...} \frac{1}{b_1! b_2! ... b_n!} \quad .$$

2.3 Formula di Faà di Bruno, versione con il determinante

Si possono usare le partizioni di insiemi anche per dimostrare la formula di Faà di Bruno espressa tramite il determinante.

Consideriamo il seguente lemma che fornisce una regola per calcolare Y_n, che come abbiamo visto precedentemente, è così definito:

$$Y_n(x_1, x_2, ..., x_n) := \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(x_1, ..., x_{n-k+1})$$

quindi Y_n rappresenta tutte le partizioni dell'insieme $\{1, 2, ..., n\}$.

Lemma 2.3.1.
Se $n \geq 1$ allora:

$$Y_n(x_1, ..., x_n) = \begin{vmatrix} \binom{n-1}{0}x_1 & \binom{n-1}{1}x_2 & \dots & \binom{n-1}{n-2}x_{n-1} & \binom{n-1}{n-1}x_n \\ -1 & \binom{n-2}{0}x_1 & \dots & \binom{n-2}{n-3}x_{n-2} & \binom{n-2}{n-2}x_{n-1} \\ 0 & -1 & \dots & \binom{n-3}{n-4}x_{n-3} & \binom{n-3}{n-3}x_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \binom{1}{0}x_1 & \binom{1}{1}x_2 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \binom{0}{0}x_1 \end{vmatrix} \tag{2.3.1}$$

tutti gli elementi nella prima sotto-diagonale sono -1 e tutti gli elementi sotto essa sono nulli.

Esempio 2.3.1. Si può vedere che per $n = 1$ e $n = 2$ si ha:

$$Y_1(x_1) = x_1 \qquad e \qquad Y_2(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ -1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1^2 + x_2$$

come prima il termine x_1^2 corrisponde alla partizione $\{\{1\}, \{2\}\}$ e il termine x_2 alla partizione $\{\{1, 2\}\}$. Consideriamo anche il caso $n = 3$ e sviluppiamo rispetto alla prima riga:

$$Y_3(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} x_1 & 2x_2 & x_3 \\ -1 & x_1 & x_2 \\ 0 & -1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ -1 & x_1 \end{vmatrix} - 2x_2 \begin{vmatrix} -1 & x_2 \\ 0 & x_1 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} -1 & x_1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} =$$
$$= x_1(x_1^2 + x_2) + 2x_2x_1 + x_3 \cdot 1$$

si può interpretare tale risultato in questo modo: la prima riga della matrice 3x3 rappresenta i blocchi che contengono l'elemento "3", quindi si avrà che il termine $x_1(x_1^2 + x_2)$ rappresenta tutte le partizioni di $\{1, 2, 3\}$ che hanno il blocco $\{3\}$, precisamente $x_1^3 \to \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ e $x_1x_2 \to \{\{1, 2\}, \{3\}\}$; il termine $2x_2(x_1)$ rappresenta le partizioni in cui l'elemento "3" è contenuto in un blocco di cardinalità 2 che sono $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$ e $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$; infine x_3 corrisponde alla partizione banale.

In generale sviluppando il determinante (2.3.1) rispetto alla prima riga otteniamo una somma di questo tipo: $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x_k c_{1,k}$ dove $c_{1,k}$ rappresenta il complemento algebrico relativo alla posizione $1, k$ della matrice di ordine n. Riconducendoci nuovamente alle partizioni, si può osservare che $\binom{n-1}{k-1}$ è il numero di modi in cui si possono scegliere i $k-1$ elementi da mettere nello stesso blocco dell'elemento n e $c_{1,k}$ rappresenta le partizioni possibili dei restanti $n-k$ elementi.

Sfruttando i ragionamenti appena visti si dimostra facilmente il Lemma per induzione su n.

Dimostrazione. Abbiamo già visto che vale per $n = 1$, supponiamo che l'uguaglianza valga per n e dimostriamo che vale anche per $n+1$. Si deve quindi dimostrare che:

$$Y_{n+1}(x_1, ..., x_{n+1}) = \begin{vmatrix} \binom{n}{0}x_1 & \binom{n}{1}x_2 & \dots & \binom{n}{n-1}x_n & \binom{n}{n}x_{n+1} \\ -1 & \binom{n-1}{0}x_1 & \dots & \binom{n-1}{n-2}x_{n-1} & \binom{n-1}{n-1}x_n \\ 0 & -1 & \dots & \binom{n-2}{n-3}x_{n-2} & \binom{n-2}{n-2}x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \binom{1}{0}x_1 & \binom{1}{1}x_2 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \binom{0}{0}x_1 \end{vmatrix}$$

sviluppando il determinante rispetto alla prima colonna e applicando l'ipotesi induttiva, si ottiene:

$$x_1 Y_n(x_1, x_2, ..., x_n) + \begin{vmatrix} \binom{n}{1}x_2 & \binom{n}{2}x_3 & \dots & \binom{n}{n-1}x_n & \binom{n}{n}x_{n+1} \\ -1 & \binom{n-2}{0}x_1 & \dots & \binom{n-2}{n-3}x_{n-2} & \binom{n-2}{n-2}x_{n-1} \\ 0 & -1 & \dots & \binom{n-3}{n-4}x_{n-3} & \binom{n-3}{n-3}x_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \binom{1}{0}x_1 & \binom{1}{1}x_2 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \binom{0}{0}x_1 \end{vmatrix}$$

Il primo addendo rappresenta le partizioni di $\{1, 2, ..., n+1\}$ che contengono il blocco formato dal solo elemento $n+1$. Sviluppando il determinante della matrice ottenuta rispetto alla prima riga, si può osservare che ritroviamo gli stessi complementi algebrici della matrice di ordine n considerata nell'enunciato del teorema. Si ottiene quindi:

$$x_1 Y_n(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x_{k+1} c_{1,k} \tag{2.3.2}$$

per ogni k da 1 a n il termine $\binom{n}{k} x_{k+1} c_{1,k}$ rappresenta tutte le partizioni dell'insieme $\{1, 2, ..., n+1\}$ in cui l'elemento $n+1$ è in un blocco di cardinalità $k + 1$. Basta osservare che ci sono $\binom{n}{k}$ modi di scegliere i k elementi da mettere nel blocco con $n + 1$, e per induzione, $c_{1,k}$ indica tutte le partizioni dei restanti $n - k$ elementi. Perciò (2.3.2) rappresenta tutte le partizioni di $\{1, 2, ..., n+1\}$ e quindi deve essere uguale a $Y_{n+1}(x_1, ..., x_{n+1})$; il che conclude la dimostrazione. □

Dal Lemma precedente segue facilmente il seguente teorema:

Teorema 2.3.2 (Formula di Faà di Bruno con il determinante).
Per $n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$(f \circ g)^{(n)}(x) = \begin{vmatrix} \binom{n-1}{0} g' f & \binom{n-1}{1} g'' f & \dots & \binom{n-1}{n-2} g^{(n-1)} f & \binom{n-1}{n-1} g^{(n)} f \\ -1 & \binom{n-2}{0} g' f & \dots & \binom{n-2}{n-3} g^{(n-2)} f & \binom{n-2}{n-2} g^{(n-1)} f \\ 0 & -1 & \dots & \binom{n-3}{n-4} g^{(n-3)} f & \binom{n-3}{n-3} g^{(n-2)} f \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \binom{1}{0} g' f & \binom{1}{1} g'' f \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \binom{0}{0} g' f \end{vmatrix} \tag{2.3.3}$$

dove $g^{(i)}$ denota $g^{(i)}(x)$ e quando si calcola il determinante, il termine f^k si deve interpretare come $f^{(k)}(g(x))$.

Osservazione 2.3.1. In [4] Faà di Bruno aveva già trovato l'espressione generale di $(f \circ g)^{(n)}(x)$ sotto forma di determinante, ma con alcune piccole differenze, infatti scrisse:

$$(-1)^n(f\circ g)^{(n+1)}(x) = \begin{vmatrix} g^{(n+1)}f & g'f & ng''f & \frac{n(n-1)}{g}'''f & \dots & ng^{(n)}f \\ g^{(n)}f & -1 & g'f & (n-1)g''f & \dots & (n-1)g^{(n-1)}f \\ g^{(n-1)}f & 0 & -1 & g'f & \dots & (n-2)g^{(n-2)}f \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ g''f & 0 & 0 & 0 & \dots & g'f \\ g'f & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

2.4 Formule “rivali”

Vediamo ora altre formule per calcolare la derivata n-esima di una funzione composta.

Come si può sviluppare in serie di potenze di h la funzione $(f\circ g)(x+h)$? Per il teorema di Taylor si ha:

$$(f\circ g)(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty}(f\circ g)^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!} \tag{2.4.1}$$

oppure si può sviluppare così (si veda Meyer [16]):

$$(f\circ g)(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(g(x))}{k!}(g(x+h)-g(x))^n. \tag{2.4.2}$$

Confrontando i due sviluppi di $(f\circ g)(x+h)$, Meyer notò che $\frac{1}{n!}(f\circ g)^{(n)}(x)$ è uguale al coefficiente di h^n in (2.4.2); perciò a seconda del metodo utilizzato per ottenere il coefficiente di h^n si ottengono diverse versioni della formula di Faà di Bruno.

Tiburce Abadie, un capitano di artiglieria (noto con lo pseudonimo T.A.) pubblicò alcuni articoli nei *Nouvelles annales de mathématiques* attorno al 1850-1855 (si veda per esempio T.A. [21]). T.A. si accorse che denotando con $\Delta_h g(x) := \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ si aveva che il coefficiente di h^n in $(g(x+h)-g(x))^k$ era lo stesso di quello di h^{n-k} in $(\Delta_h g(x))^k$ e quindi con dei piccoli accorgimenti ottenne la seguente formula:

Teorema 2.4.1 (Formula di T.A)**.**

$$(f \circ g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(g(x)) \left\{ \frac{d^{n-k}}{dh^{n-k}} (\Delta_h g(x))^k \right\} \Big|_{h=0}$$

Meyer invece per ottenere la derivata n-esima ragionò in modo più lineare:

Teorema 2.4.2 (Formula di Meyer)**.**

$$(f \circ g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(g(x))}{k!} \left\{ \frac{d^n}{dh^n} (g(x+h) - g(x))^k \right\} \Big|_{h=0}$$

Dimostrazione. Questa formula si dimostra facilmente derivando n volte la (2.4.2) rispetto ad h, e ponendo $h = 0$. Derivando il membro a sinistra si ottiene $\frac{d^n}{dx^n} f(g(x))$, mentre per il membro di destra si deriva n volte rispetto ad h il termine $(g(x+h) - g(x))^k$ per poi porre $h = 0$, si osserva che per $k \geq n$ il termine si annulla e quindi la sommatoria arriva fino a n. $\square$

Si può inoltre sviluppare $(g(x+h) - g(x))^k$ tramite la formula binomiale ottenendo:

$$(g(x+h) - g(x))^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-g(x))^{k-j} g(x+h)^j$$

poi si deriva n volte $g(x+h)^j$ rispetto ad h e si pone $h = 0$. Ciò equivale a derivare n volte $g(x)^j$ rispetto ad x. Attraverso queste osservazioni Meyer derivò la seguente formula, in realtà già enunciata da Hoppe in [7].

Teorema 2.4.3 (Formula di Hoppe)**.**

$$(f \circ g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(g(x))}{k!} A_{n,k}(g)(x) \tag{2.4.3}$$

dove

$$A_{n,k}(g)(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-g(x))^{k-j} \frac{d^n}{dx^n} g(x)^j \tag{2.4.4}$$

Dimostrazione. Questa formula si può dimostrare usando la seguente ricorrenza: $\frac{d}{dx}A_{n,k}(g)(x) = A_{n+1,k}(g)(x) - g'(x)A_{n,k-1}(g)(x)$ dove $A_{n,0}(g)(x) = 0$ per $n \neq 0$ e $A_{0,0}(g)(x) = 1$. □

Il matematico Schlömilch in [19], derivò la formula di Hoppe in modo diverso; notò che per alcune quantità $A_{n,i}(g)(x)$ che dipendono solo da g e non da f valeva l'uguaglianza:

$$(f \circ g)^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(g(x))}{i!} A_{n,i}(g)(x). \tag{2.4.5}$$

Per trovare tali quantità si prende $f(y) = y^j$ al variare di $j = 0, ..., n$, si calcolano quindi le derivate i-esime rispetto ad y: $\frac{d^i y^j}{dy^i} = i!\binom{j}{i} y^{j-i}$, e si sostituiscono in (2.4.5) ottenendo:

$$\frac{d^n}{dx^n} g(x)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} g(x)^{j-i} A_{n,i}(g)(x) \qquad \forall j, 0 \leq j \leq m \tag{2.4.6}$$

(la sommatoria arriva fino a j in quanto per $i > j$ la derivata è nulla). Per ogni j compreso tra 0 e k si moltiplicano entrambi i termini dell'uguaglianza appena vista per $\binom{k}{j}(-g(x))^{-j}$ e poi si somma su j:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-g(x))^{-j} \frac{d^n}{dx^n} g(x)^j = \\
&\quad = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-g(x))^{-j} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} g(x)^{j-i} A_{n,i}(g)(x) = \\
&\quad = \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{j} \binom{k}{j} \binom{j}{i} (-1)^{j-i} (-g(x))^{-i} A_{n,i}(g)(x) = \\
&\quad = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=i}^{k} \binom{k}{j} \binom{j}{i} (-1)^{j-i} (-g(x))^{-i} A_{n,i}(g)(x) =
\end{aligned}$$

usando l'uguaglianza $\binom{k}{j}\binom{j}{i} = \binom{k}{i}\binom{k-i}{j-i}$ e tirando fuori dalla sommatoria i termini che non dipendono da j si ottiene:

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-g(x))^{-i} A_{n,i}(g(x)) \underbrace{\sum_{j=i}^{k} \binom{k-i}{j-i} (-1)^{j-i}}_{(1-1)^{k-i}}.$$

Siccome $(1-1)^{k-i}$ per $i = k$ è uguale a 1 e per ogni $i \neq k$ è nullo, si ha:

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-g(x))^{-j} \frac{d^n}{dx^n} g(x)^j = (-g(x))^{-k} A_{n.k}(g(x))$$

che è l'equazione (2.4.4).

Consideriamo il seguente lemma che poi ci servirà in seguito:

Lemma 2.4.4 (Derivata n-esima del prodotto di k funzioni)**.**
Consideriamo k funzioni $f_1, ..., f_k$ tali che per ogni $i = 1...k$ $f_i : A \to \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}$ ed è derivabile n volte, allora:

$$(f_1 \cdot f_2 \cdots f_k)^{(n)}(x) = \sum_{j_1+...+j_k=n} \binom{n}{j_1, ..., j_k} f_1^{(j_1)}(x) \cdots f_k^{(j_k)}(x)$$

Prendendo ogni $f_i(x)$ uguale a $g(x)$ si ottiene:

$$\frac{d^n}{dx^n} g(x)^k = \sum_{j_1+...+j_k=n} \binom{n}{j_1, ..., j_k} g^{(j_1)}(x) \cdots g^{(j_k)}(x). \tag{2.4.7}$$

Confrontando la formula appena esposta con la (2.4.6) (per $j = k$) si ha:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g(x)^{k-i} A_{n,i}(g(x)) = \sum_{j_1+...+j_k=n} \binom{n}{j_1, ..., j_k} g^{(j_1)}(x) \cdots g^{(j_k)}(x). \tag{2.4.8}$$

Studiamo ora il coefficiente di $g(x)^{k-i}$ al membro destro dell'uguaglianza appena vista. Si osserva che per ottenere $g(x)^{k-i}$ si deve avere che esattamente $k-i$ dei j_h siano nulli, quindi ci sono $\binom{k}{i}$ modi diversi di scegliere i j_h positivi; quindi il coefficiente cercato è:

$$\binom{k}{i} \sum_{\substack{j_1+...+j_i=n \\ j_h \geq 1}} \binom{n}{j_1, ..., j_i} g^{(j_1)}(x) \cdots g^{(j_i)}(x).$$

Dalla (2.4.8) si ha:

$$\binom{k}{i} A_{n,i}(g)(x) = \binom{k}{i} \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_i=n \\ j_h \geq 1}} \binom{n}{j_1, \ldots, j_i} g^{(j_1)}(x) \cdots g^{(j_i)}(x)$$

e quindi, se $n \in \mathbb{N}$:

$$A_{n,i}(g)(x) = \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_i=n \\ j_h \geq 1}} \binom{n}{j_1, \ldots, j_i} g^{(j_1)}(x) \cdots g^{(j_i)}(x) \tag{2.4.9}$$

usando l'espressione per $A_{n,i}(g)(x)$ appena ricavata, e la formula (2.4.5), si ottiene nuovamente la formula di Riordan (2.2.2).

Schlömilch ha dimostrato la formula di Hoppe nel caso particolare in cui la funzione f sia una funzione potenza. Inoltre si può notare che nel risultato (2.4.9) non compaiono né potenze di g né segni meno; quindi nella formula (2.4.4) tutti i termini $(-g(x))^{k-j}$ con $j < k$ devono annullarsi, rimane solo il termine con $j = k$, alcuni componenti di tale termine hanno ancora un fattore $g(x)$ e anch'essi devono annullarsi. La formula di Hoppe si riduce alla seguente:

Teorema 2.4.5 (Formula di Scott)**.**

$$(f \circ g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(g(x))}{k!} \left\{ \left[\frac{d^n}{dx^n} g(x)^k \right] \Big|_{g(x)=0} \right\} \tag{2.4.10}$$

Questa è una scrittura puramente formale per cancellare i termini con la funzione g non derivata. Si può facilmente osservare che se fissiamo $g(x) = 0$ in (2.4.7) (in questo modo gli unici termini che rimangono sono quelli con ogni $j_i \geq 1$) e sostituiamo nella formula di Scott, riotteniamo la formula di Riordan.

Vediamo ora come si può derivare la formula di Riordan a partire dalla (2.4.2):

$$
\begin{aligned}
(g(x+h)-g(x))^k &= \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} g^{(j_1)}(x)\frac{h^{j_1}}{j_1!}\right)\cdots\left(\sum_{j_k=1}^{\infty} g^{(j_k)}(x)\frac{h^{j_k}}{j_k!}\right) = \\
&= \sum_{n=k}^{\infty}\frac{h^n}{n!}\sum_{\substack{j_1+\ldots+j_k=n\\ j_i\geq 1}}\binom{n}{j_1,\ldots,j_k} g^{(j_1)}(x)\cdots g^{(j_k)}(x) = \\
&= k!\sum_{n=k}^{\infty}\frac{h^n}{n!}B_{n,k}(g'(x),g''(x),\ldots,g^{(n-k+1)}(x))
\end{aligned}
$$

dove $B_{n,k}$ rappresenta il polinomio di Bell corrispondente alle partizioni di n elementi in k blocchi. La (2.4.2) diventa:

$$
\begin{aligned}
(f\circ g)(x+h) &= \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(g(x))\sum_{n=k}^{\infty}\frac{h^n}{n!}B_{n,k}(g'(x),g''(x),\ldots,g^{(n-k+1)}(x)) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n}{n!}\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(g(x))B_{n,k}(g'(x),g''(x),\ldots,g^{(n-k+1)}(x))
\end{aligned}
$$

si è ottenuto uno sviluppo in serie di potenze di $(f\circ g)(x+h))$ rispetto ad h, quindi la formula di Riordan segue facilmente confrontando con la (2.4.1).

2.5 Matematici che anticiparono la formula di Faà di Bruno

In questa sezione, seguendo l'articolo di Craik [2], illustriamo il lavoro di Arbogast, e le successive rielaborazioni di questi risultati da parte di alcuni matematici britannici come Knight, West e De Morgan.

2.5.1 Arbogast: *Du Calcul des Dérivations*

Arbogast nel suo trattato [1] pubblicato nel 1800, enunciò, con 55 anni di anticipo, la formula attribuita a Faà di Bruno e diede degli algoritmi equivalenti alla formula molto utili nelle applicazioni. Stabilì inoltre, delle relazioni tra coefficienti e derivate che permettono di calcolare i termini di ordine più alto a partire dai precedenti. Arbogast studiò anche il caso di composizioni di funzioni di questo tipo: $h[f(x), g(x)]$, $k[f(x), g(x), h(x)]$ e il caso in cui le funzioni interne fossero in più variabili.

In tutta la trattazione si ipotizza che la funzione interna nella composizione, sia già sviluppata in potenze di x, e quindi al posto di $f(g(x))$ si considera $\phi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 ...)$. Arbogast trovò la seguente formula per lo sviluppo in potenze di x della funzione ϕ:

$$\begin{aligned}\phi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + ...) = \phi(\alpha) + x \cdot D\phi \cdot \beta + x^2[D\phi \cdot \gamma + D^2\phi \cdot (\beta^2/2)] + \\ + x^3[D\phi \cdot \delta + D^2\phi \cdot (\beta\gamma) + D^3\phi \cdot (\beta^3/6)] + ...\end{aligned}$$

Riportiamo le formule con le stesse notazioni presenti in Arbogast [1], dove $D^r\phi$ denota la derivata r-esima di $\phi(y)$ valutata in $y = \alpha$. Si definisce *n-esima derivata polinomiale* il coefficiente di x^n moltiplicato per $n!$ e la si denota con $D^n.\phi\alpha$ (tale notazione indica che $D^n.\phi$ è valutato su α, il punto serve per distinguere la derivazione polinomiale dalla derivata n-esima di ϕ). La generica formula per trovare il coefficiente di x^n è:

$$\frac{D^n.\phi\alpha}{n!} = \frac{D^n\phi\alpha \cdot \beta^n}{n!} + \frac{D^{n-1}\phi\alpha \cdot D.\psi^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{D^{n-2}\phi\alpha \cdot D^2.\psi^{n-2}}{(n-2)!2!} + ... D\phi\alpha\frac{D^{n-1}.\psi}{(n+1)!}$$

questa formula permette di esprimere ogni derivata polinomiale di ϕ come una somma, per j da 0 a n, di termini di questo tipo:

$$\frac{D^{n-j}\phi\alpha \cdot D^j.\psi^{n-j}}{(n-j)!j!} \quad ;$$

si noti che ψ indica la funzione $\beta + \gamma x + \delta x^2 + ...$ Le varie derivate polinomiali delle potenze di ψ si ricavano facilmente dalle tabelle presenti nel trattato o applicando semplici regole.

Lo stesso Arbogast osservò che le quantità $D.\psi^{n-1}$, $\frac{D^2.\psi^{n-2}}{2!}$, $\frac{D^3.\psi^{n-3}}{3!}$... si potevano trovare anche ragionando con le combinazioni e con le partizioni. Il risultato finale, ovviamente, è identico a quello che si ottiene con la formula di Faà di Bruno.

Si trovano riferimenti al trattato di Arbogast in [14] di Kramp, il quale diede una versione piuttosto goffa della formula di Faà di Bruno, e successivamente anche nelle opere di Lacroix [15].

2.5.2 Il lavoro di Knight

Knight mostrò che i risultati ottenuti da Arbogast potevano essere ricavati in modo diverso, con la procedura da lui adottata fu in grado di arrivare a enunciare nuovi e importanti teoremi. Negli anni tra il 1811 e il 1817, pubblicò vari articoli [11]-[13], alcuni dei quali piuttosto banali e altri invece più complessi, nei quali rielaborava i risultati ottenuti da Arbogast; purtroppo però Knight usò notazioni ancora più "illeggibili"di quelle presenti in [1]. Gli scritti matematici di Knight erano poco conosciuti ai suoi tempi, perciò i lavori di West e De Morgan, i primi quasi contemporanei, furono certamente indipendenti.

2.5.3 West: *Mathematical Treatises*

John West scrisse i trattati [22] tra il 1800 e il 1810, ma non furono pubblicati fino al 1838, molti anni dopo la morte del matematico avvenuta nel 1817. Quando furono scritti, i trattati di West erano tra le più complete descrizioni, in lingua inglese, dell'opera di Arbogast [1]. I trattati di West forniscono un resoconto dei metodi di Arbogast; ma a differenza di Arbogast e Knight, West studiò solo funzioni di un singolo polinomio in x, cioè di questo tipo $\phi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + ...)$. West ricavò una nuova versione della formula per la derivata n-esima di una funzione composta, ed enunciò un teorema, che è esattamente il risultato conosciuto come formula di Hoppe (il lavoro di Hoppe [7] è datato 1845, quindi almeno trent'anni dopo che West scrisse le sue opere). I numerosi esempi numerici presenti in [22], mostrano la potenza dei metodi di Arbogast, e le tabelle per i coefficienti sono molto più utili nella pratica della stessa formula di Faà di Bruno.

2.5.4 Il contributo di De Morgan

Molto tempo dopo i lavori di West, De Morgan nel 1846 pubblicò [3] in cui formalizzò le operazioni per ricavare i coefficienti delle potenze di x nello sviluppo della funzione $\phi(a + bx + cx^2 + ex^3 + ...)$. Creò un insieme di operazioni $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, ...$ e le loro inverse, che agiscono sulle lettere $a, b, c, e, ...$. Le cosiddette "derivate polinomiali", già introdotte da Arbogast, si ottengono applicando a $\phi(a)$

$$D. = \alpha\beta^{-1} \qquad D^2. = (\alpha\beta^{-1} + \beta\gamma^{-1})\alpha\beta^{-1} = \alpha^2\beta^{-2} + \alpha\gamma^{-1}$$

$$D^3. = (\alpha\beta^{-1} + \beta\gamma^{-1} + \gamma\epsilon^{-1})(\alpha^2\beta^{-2} + \alpha\gamma^{-1}) = \alpha^3\beta^{-3} + \alpha^2\beta^{-1}\gamma^{-1} + \alpha\epsilon^{-1}$$

$$\text{etc.} \ldots$$

dove $\beta^{-1}, \gamma^{-1}, ...$ denotano l'integrazione rispetto $b, c, ...$ e α denota la derivazione rispetto ad a. Si noti che abbiamo riportato le notazioni di De Morgan in [3]. De Morgan diede inoltre delle regole analoghe alle precedenti ma dal punto di vista combinatorio, riuscendo ad arrivare ai risultati di Arbogast. Chiaramente, la derivazione combinatoria della formula di Faà di Bruno ha come antecedenti Arbogast, Knight e specialmente De Morgan.

Per quanto detto, possiamo affermare che la "formula di Faà di Bruno" fu enunciata per la prima volta da Arbogast nel 1800. Nonostante all'inizio del XIX secolo la matematica in Gran Bretagna non fosse ai suoi massimi livelli, tre matematici britannici (Knight, West e De Morgan) rielaborarono separatamente l'opera [1] di Arbogast, ottennero risultati equivalenti alla formula di Faà di Bruno e ad altre formule successive riscoperte da altri. Molto probabilmente Faà di Bruno non conosceva i lavori di Knight e West, mentre poteva conoscere i risultati di Arbogast e De Morgan (nonostante ciò non menzionò nessuno dei due). Faà di Bruno non diede una dimostrazione della sua formula, e nemmeno Arbogast, Knight, West e De Morgan in quanto interessati maggiormente all'utilità pratica dei loro metodi, piuttosto che alla ricerca teorica.

2.5.5 Lacroix: *Traité du calcul différential et du calcul intégral*

Anche Lacroix nella prima edizione di [15] enunciò alcune formule per il calcolo della derivata n-esima di una funzione composta. Sia y una funzione di x allora:

$$\phi(y)+\frac{d\phi(y)}{dx}\frac{dx}{1}+\frac{d^2\phi(y)}{dx^2}\frac{dx^2}{2!}+\frac{d^3\phi(y)}{dx^3}\frac{dx^3}{3!}+...=$$
$$=\phi\left(y+\frac{dy}{dx}\frac{dx}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx^2}{2!}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{dx^3}{3!}...\right)$$

e quindi $\frac{1}{n!}\frac{d^n\phi(y)}{dx^n}$ deve essere uguale al coefficiente di dx^n del membro destro dell'uguaglianza (richiama la successiva osservazione di Meyer). Nove anni dopo Lacroix perfezionò la formula, prendendo come prima y una funzione di x, si ha:

$$\frac{d^n\phi(y)}{dx^n}=\frac{d^n\phi(y)}{dy^n}T_0^n+n\frac{d^{n-1}\phi(y)}{dy^{n-1}}T_1^{n-1}+n(n-1)\frac{d^{n-2}\phi(y)}{dy^{n-2}}T_2^{n-2}+...+n!\frac{d\phi(y)}{dy}T_{n-1}^1$$

dove T_s^r è il coefficiente di dx^s nello sviluppo di $\left(\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{2!}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{dx^2}{3!}+...\right)^r$, inoltre quest'ultima espressione si può scrivere anche così:

$$\frac{r!}{a!b!c!...}\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^a\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^b\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^c...}{(1!)^a(2!)^b(3!)^c...}$$

dove $a,b,c,...$ soddisfano $a+b+c+...=r$ e $b+2c+...=s$.

Lo stesso Lacroix, citò tra le sue fonti Arbogast [1], dal quale trasse alcune idee.

2.5.6 La dissertazione di Scherk

Scherk nella sua tesi di dottorato [18], conseguito nel 1823 alla Friedrich-Wilhelms Universität di Berlino, enunciò una formula per la derivata n-esima di una funzione composta. Sia z una funzione di y e y una funzione di x, si ha:

$$\frac{d^n z}{dx^n} = A_n \frac{d^n z}{dy^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}} + A_{n-2} \frac{d^{n-2} z}{dy^{n-2}} + ... + A_1 \frac{dz}{dy}$$

dove

$$A_k = \sum \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{\alpha_2} \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{\alpha_3} \cdots \left(\frac{d^{n-k+1}y}{dx^{n-k+1}}\right)^{\alpha_{n-k+1}}}{\left(\prod 1\right)^{\alpha_1} \left(\prod 2\right)^{\alpha_2} \left(\prod 3\right)^{\alpha_3} \cdots \left(\prod n-k+1\right)^{\alpha_{(n-k+1)}}} \frac{\prod n}{\prod \alpha_1 \prod \alpha_2 \cdots \prod \alpha_{n-k+1}}$$

la somma è su tutti i possibili interi non negativi $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-k+1}$ che soddisfano queste due equazioni:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + ... + (n-k+1)\alpha_{n-k+1} = n$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{n-k+1} = k.$$

Inoltre Scherk osservò che prendendo $y = e^x$ e $z = e^{ax} = y^a$ e applicando la formula precedente si ottiene:

$$a^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (-r)^{n-k} (a)_{k,r}$$

quindi si può esprimere la potenza a^n in funzione del fattoriale crescente $(a)_{k,r} := a(a+r)(a+2r)\cdots(a+(k-1)r)$ dove $(a)_{0,r} := 1$.

Si può dimostrare la formula precedente per induzione, usando la relazione

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

dove $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ indica il numero di Stirling di seconda specie per n e k (si veda Osservazione 2.1.1).

2.5.7 Dimostrazione della formula di Faà di Bruno data da T.A.

Anche i lavori di Hoppe [7] e T.A. [21], di cui abbiamo trattato nel paragrafo 2.4, precedettero di alcuni anni l'opera di Faà di Bruno. In particolare una delle dimostrazioni più conosciute della formula di Faà di Bruno si trova in [21], pubblicato cinque anni prima della formula di Faà. Questa dimostrazione sfrutta il fatto che se si può vedere a priori che il coefficiente di $f^{(k)}(g(x))$ dipende solo da g e non da f, allora si possono prendere particolari funzioni f che permettono di ricavare tale coefficiente.

Dimostrazione del Teorema 1.2.1. Consideriamo dapprima lo sviluppo in serie di potenze di $e^{p\phi(x+h)}$ tramite il teorema di Taylor:

$$e^{p\phi(x+h)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{d^n}{dx^n} e^{p\phi(x)} \right\} \frac{h^n}{n!} \tag{2.5.1}$$

oppure si può sviluppare $\phi(x+h)$ in questo modo $\phi(x+h) = \phi(x) + \phi'(x)h + \phi''(x)\frac{h^2}{2!} + ...$ e quindi lo sviluppo in serie di $e^{p\phi(x+h)}$ è:

$$e^{p\phi(x+h)} = e^{p\phi(x)} e^{p\phi'(x)h} e^{p\phi''(x)\frac{h^2}{2!}} ...$$

sviluppando in serie tutti i fattori eccetto il primo e riordinando si ottiene:

$$e^{p\phi(x+h)} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n \sum_{k=0}^{n} p^k e^{p\phi(x)} \sum \frac{1}{b_1!...b_n!} \left(\frac{\phi'(x)}{1!} \right)^{b_1} \cdots \left(\frac{\phi^{(n)}(x)}{n!} \right)^{b_n} \tag{2.5.2}$$

dove la somma più interna è su tutte le possibili n-uple di interi non negativi $b_1, ..., b_n$ che soddisfano $b_1 + b_2 + ... + b_n = k$ e $b_1 + 2b_2 + ... + nb_n = n$.

T.A. ottenne la formula di Faà di Bruno confrontando (2.5.1) e (2.5.2).

□

Capitolo 3

Generalizzazione della formula di Faà di Bruno

In questo capitolo studieremo la formula per la derivata n-esima di una funzione composta nel caso di funzioni in più variabili; tale formula trova notevoli applicazioni in analisi, statistica e calcolo computazionale. Per gli argomenti trattati si veda l'articolo di Gzyl [6].

3.1 Formula multidimensionale

Alcune notazioni: un **multi-indice** di lunghezza m è un vettore $\mathbf{n} = (n_1, ..., n_m) \in \mathbb{N}^m$ (i multi-indice verranno indicati con le lettere in grassetto, mentre le loro componenti con caratteri normali). L'**ordine** di $\mathbf{n}$ è così definito $|\mathbf{n}| := n_1 + ... + n_m$; indichiamo con $\mathbf{n}!$ il prodotto $n_1! \cdots n_m!$ e se $\mathbf{a} = (a_1, .., a_m)$ si ha $\mathbf{a}^{\mathbf{n}} := a_1^{n_1} \cdots a_m^{n_m}$. Inoltre poniamo:

$$D^{\mathbf{n}} := \frac{\partial^{n_1}}{\partial \xi_1^{n_1}} \cdots \frac{\partial^{n_m}}{\partial \xi_m^{n_m}} \qquad \text{per opportune variabili } \xi_k.$$

Consideriamo due funzioni $f : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q$ che ammettano derivate parziali continue fino all'ordine $\mathbf{n}$, possiamo enunciare il seguente teorema:

Teorema 3.1.1 (Formula di Faà di Bruno multidimensionale)**.**

$$D^{\mathbf{n}}(f \circ g)(x) = \mathbf{n}! \sum_{1 \leq |\mathbf{l}| \leq |\mathbf{n}|} C(\mathbf{l}, \mathbf{n}) \tag{3.1.1}$$

dove $\quad C(\mathbf{l}, \mathbf{n}) = \frac{1}{\mathbf{l}!} \sum_{(\mathbf{n}_1, ..., \mathbf{n}_q) \in A_n} \prod_{j=1}^{q} \left(\sum_{(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_{l_j}) \in B_j} \prod_{s=1}^{l_j} \frac{D^{\mathbf{r}_s} g_j(x)}{\mathbf{r}_s!} \right) (\nabla^{\mathbf{l}} f)(g(x))$

con $\nabla = (\frac{\partial}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial}{\partial y_q})$, $\quad A_n = \{(\mathbf{n}_1, ..., \mathbf{n}_q) \in (\mathbb{N}^m)^q \mid \sum_{k=1}^{q} \mathbf{n}_k = \mathbf{n}\}$

e $\quad B_j = \{(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_{l_j}) \in (\mathbb{N}^m)^{l_j} \mid \sum_{s=1}^{l_j} \mathbf{r}_s = \mathbf{n}_j\}$

Dimostrazione. Analogamente al caso di una variabile, possiamo rimpiazzare le funzioni date con delle funzioni che abbiano le stesse derivate fino all'ordine $\mathbf{n}$. Per comodità assumiamo che g sia un polinomio; mentre per quanto riguarda f, prendiamo una funzione che sia di classe C^∞ e a supporto compatto. Queste condizioni sulla f assicurano che gli integrali che utilizzeremo nel corso della dimostrazione sono definiti e che si può derivare sotto il segno di integrale.

Per la formula di inversione della trasformata di Fourier, si ha:

$$f(g(x)) = \frac{1}{(2\pi)^q} \int_{\mathbb{R}^q} e^{-ig(x)\cdot\alpha} \hat{f}(\alpha) d\alpha \tag{3.1.2}$$

dove $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_q)$ e $\hat{f}(\alpha) = \int f(y) e^{i\alpha \cdot y} dy$ è la trasformata di Fourier di f (le operazioni su $f = (f_1, ..., f_p)$ sono fatte componente per componente).

Dalla formula (3.1.2) segue che per trovare $D^{\mathbf{n}}(f \circ g)(x)$ è sufficiente calcolare $D^{\mathbf{n}}(e_\alpha \circ g)(x)$ dove $e_\alpha(y) = e^{-i\alpha\cdot y}$.

Sia t un vettore fissato di $\mathbb{R}^m$ si ha che:

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^m} \frac{D^{\mathbf{n}}(e_\alpha \circ g)(x)}{\mathbf{n}!} t^{\mathbf{n}} = \exp(-i\alpha \cdot g(x+t)) = \exp\left(-i\alpha \cdot \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^m} \frac{(D^{\mathbf{n}} g)(x)}{\mathbf{n}!} t^{\mathbf{n}}\right) \tag{3.1.3}$$

ci sono infatti, due possibili sviluppi della funzione $e_\alpha \circ g$: lo sviluppo di Taylor di $e_\alpha \circ g$ e quello ottenuto sviluppando la funzione interna g. Sviluppiamo ulteriormente la seconda uguaglianza:

$$\exp(-i\alpha\cdot g(x+t)) = \exp\left(-i\alpha\cdot g(x)\right)\exp\left(-i\alpha\cdot\sum_{|\mathbf{n}|\geq 1}\frac{(D^{\mathbf{n}}g)(x)}{\mathbf{n}!}t^{\mathbf{n}}\right) = \\ = \exp\left(-i\alpha\cdot g(x)\right)\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{N}^q}\frac{1}{\mathbf{l}!}(-i\alpha)^{\mathbf{l}}\left(\sum_{|\mathbf{n}|\geq 1}\frac{(D^{\mathbf{n}}g)(x)}{\mathbf{n}!}t^{\mathbf{n}}\right)^{\mathbf{l}} \tag{3.1.4}$$

dove $\mathbf{l}=(l_1,...,l_q)$. Si noti che nella prima uguaglianza abbiamo spezzato la sommatoria, cioè $\sum_{\mathbf{n}}\frac{(D^{\mathbf{n}}g)(x)}{\mathbf{n}!}t^{\mathbf{n}}$ si può scrivere anche in questo modo: $g(x)+\sum_{|\mathbf{n}|\geq 1}\frac{(D^{\mathbf{n}}tg)(x)}{\mathbf{n}!}t^{\mathbf{n}}$ (il primo addendo corrisponde a $|\mathbf{n}|=0$). Nella seconda uguaglianza invece, abbiamo usato la seguente relazione, siano β e γ due vettori, si ha:

$$\exp(\beta\cdot\gamma)=\prod_{k=1}^{n}\exp(\beta_k\gamma_k)=\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{l_k=0}^{\infty}\frac{\beta_k^{l_k}\gamma_k^{l_k}}{l_k!}\right)=\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{N}^n}\frac{1}{\mathbf{l}!}\beta^{\mathbf{l}}\gamma^{\mathbf{l}}$$

nelle uguaglianze appena viste abbiamo usato lo sviluppo di Taylor per l'esponenziale: $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, con $x=\beta_k\gamma_k$. In questo caso essendo g una funzione a valori in $\mathbb{R}^q$, si ha:

$$\frac{(-i\alpha)^{\mathbf{l}}}{\mathbf{l}!}\left(\sum_{|\mathbf{n}|\geq 1}\frac{(D^{\mathbf{n}}g)(x)}{\mathbf{n}!}t^{\mathbf{n}}\right)^{\mathbf{l}}=\prod_{j=1}^{q}\frac{1}{l_j!}\left(-i\alpha_j\sum_{|\mathbf{n}|\geq 1}\frac{(D^{\mathbf{n}}g_j)(x)}{\mathbf{n}!}t^{\mathbf{n}}\right)^{l_j}$$

Quindi, andando a sviluppare la potenza l_j-esima, si ha che:

$$\left(\sum_{|\mathbf{n}|\geq 1}\frac{(D^{\mathbf{n}}g)(x)}{\mathbf{n}!}t^{\mathbf{n}}\right)^{\mathbf{l}}=\prod_{j=1}^{q}\left(\sum_{|\mathbf{n}|\geq 1}\frac{(D^{\mathbf{n}}g_j)(x)}{\mathbf{n}!}t^{\mathbf{n}}\right)^{l_j}= \\ =\prod_{j=1}^{q}\left(\sum_{|\mathbf{n}_j|\geq l_j}t^{\mathbf{n}_j}\sum_{(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_{l_j})\in B_j}\left(\prod_{s=1}^{l_j}\frac{D^{\mathbf{r}_s}g_j(x)}{\mathbf{r}_s!}\right)\right)$$

dove $B_j=\{(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_{l_j})\in(\mathbb{N}^m)^{l_j}\mid\sum_{s=1}^{l_j}\mathbf{r}_s=\mathbf{n}_j\}$. Si noti che $\mathbf{n}_j$ non indica la j-esima componente di $\mathbf{n}$, ma è un multi-indice. Per quanto detto $\sum_{(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_{l_j})\in B_j}$ denota la somma su tutte le l_j-uple $(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_{l_j})$ in cui ogni

$\mathbf{r}_i \in \mathbb{N}^m$ e sono tali che $\sum_{s=1}^{l_j} \mathbf{r}_s = \mathbf{n}_j$. Inoltre la sommatoria più esterna è sui multi-indice $\mathbf{n}_j$ per cui $|\mathbf{n}_j| \geq l_j$, perché facendo la potenza l_j-esima di $\sum\limits_{|\mathbf{n}|\geq 1} \frac{(D^{\mathbf{n}} g_j)(x)}{\mathbf{n}!} t^{\mathbf{n}}$ la più piccola potenza di t è $t^{\mathbf{n}_j}$ con $|\mathbf{n}_j| = l_j$.

Ora si può sviluppare il prodotto per $j = 1, ..., q$ e con ragionamenti analoghi ai precedenti, si ottiene:

$$\left(\sum_{|\mathbf{n}|\geq 1} \frac{(D^{\mathbf{n}} g)(x)}{\mathbf{n}!} t^{\mathbf{n}} \right)^{\mathbf{l}} = \sum_{|\mathbf{n}|\geq|\mathbf{l}|} t^{\mathbf{n}} \sum_{(\mathbf{n}_1,...,\mathbf{n}_q)\in A_n} \prod_{j=1}^{q} \left(\sum_{(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_{l_j})\in B_j} \left(\prod_{s=1}^{l_j} \frac{D^{\mathbf{r}_s} g_j(x)}{\mathbf{r}_s!} \right) \right) \tag{3.1.5}$$

dove $A_n = \{(\mathbf{n}_1, ..., \mathbf{n}_q) \in (\mathbb{N}^m)^q \mid \sum_{k=1}^{q} \mathbf{n}_k = \mathbf{n}\}$.

Quindi si ha che $\sum_{(\mathbf{n}_1,...,\mathbf{n}_q)\in A_n}$ denota la sommatoria su tutte le combinazioni di q multi-indici $(\mathbf{n}_1, ..., \mathbf{n}_q)$ tali che $\sum_{k=1}^{q} \mathbf{n}_k = \mathbf{n}$, e per ognuna di queste combinazioni $\sum_{(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_{l_j})\in B_j}$ indica la somma su tutte le combinazioni di l_j multi-indici $(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_{l_j})$ tali che $\sum_{s=1}^{l_j} \mathbf{r}_s = \mathbf{n}_j$.

Torniamo alla formula (3.1.4) e usiamo le relazioni appena viste, prima di tutto però spezziamo la sommatoria su $\mathbf{l}$ isolando il termine con $\mathbf{l} = 0$. Per comodità di notazione a volte indicheremo $\sum_{(\mathbf{n}_1,...,\mathbf{n}_q)\in A_n}$ brevemente con $\sum_{A_n}$ e allo stesso modo $\sum_{(\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_{l_j})\in B_j}$ con $\sum_{B_n}$. Si ha:

$$\begin{aligned}
&\exp(-i\alpha \cdot g(x+t)) = \\
&\quad = \exp(-i\alpha \cdot g(x)) \left(1 + \sum_{|\mathbf{l}|\geq 1} \frac{1}{\mathbf{l}!} (-i\alpha)^{\mathbf{l}} \left(\sum_{|\mathbf{n}|\geq 1} \frac{(D^{\mathbf{n}} g)(x)}{\mathbf{n}!} t^{\mathbf{n}} \right)^{\mathbf{l}} \right) = \\
&\quad = \exp(-i\alpha \cdot g(x)) \left(1 + \sum_{|\mathbf{l}|\geq 1} \frac{1}{\mathbf{l}!} (-i\alpha)^{\mathbf{l}} \sum_{|\mathbf{n}|\geq|\mathbf{l}|} t^{\mathbf{n}} \sum_{A_n} \prod_{j=1}^{q} \sum_{B_j} \prod_{s=1}^{l_j} \frac{D^{\mathbf{r}_s} g_j(x)}{\mathbf{r}_s!} \right) = \\
&\quad = e_\alpha(g(x)) + \sum_{|\mathbf{l}|\geq 1} \frac{1}{\mathbf{l}!} \left(\sum_{|\mathbf{n}|\geq|\mathbf{l}|} t^{\mathbf{n}} \sum_{A_n} (-i\alpha)^{\mathbf{l}} e_\alpha(g(x)) \prod_{j=1}^{q} \sum_{B_j} \prod_{s=1}^{l_j} \frac{D^{\mathbf{r}_s} g_j(x)}{\mathbf{r}_s!} \right) =
\end{aligned}$$

poiché abbiamo l'uguaglianza $(-i\alpha)^{\mathbf{l}} e_\alpha(g(x)) = (\nabla^{\mathbf{l}} e_\alpha)(g(x))$ si ottiene:

$$= e_\alpha(g(x)) + \sum_{|\mathbf{l}|\geq 1} \frac{1}{\mathbf{l}!} \sum_{|\mathbf{n}|\geq|\mathbf{l}|} t^{\mathbf{n}} \sum_{A_n} \prod_{j=1}^{q} \left[\sum_{B_j} \prod_{s=1}^{l_j} \frac{D^{\mathbf{r}_s} g_j(x)}{\mathbf{r}_s!} \right] (\nabla^{\mathbf{l}} e_\alpha)(g(x)) =$$

$$= e_\alpha(g(x)) + \sum_{|\mathbf{n}|\geq 1} t^{\mathbf{n}} \sum_{1\leq|\mathbf{l}|\leq|\mathbf{n}|} \frac{1}{\mathbf{l}!} \sum_{A_n} \prod_{j=1}^{q} \left[\sum_{B_j} \prod_{s=1}^{l_j} \frac{D^{\mathbf{r}_s} g_j(x)}{\mathbf{r}_s!} \right] (\nabla^{\mathbf{l}} e_\alpha)(g(x)).$$

Ponendo

$$C(\mathbf{l}, \mathbf{n}) := \frac{1}{\mathbf{l}!} \sum_{A_n} \prod_{j=1}^{q} \left[\sum_{B_j} \prod_{s=1}^{l_j} \frac{D^{\mathbf{r}_s} g_j(x)}{\mathbf{r}_s!} \right] (\nabla^{\mathbf{l}} e_\alpha)(g(x))$$

si ottiene:

$$\exp(-i\alpha \cdot g(x+t)) = \exp(-i\alpha \cdot g(x)) + \sum_{|\mathbf{n}|\geq 1} t^{\mathbf{n}} \sum_{1\leq|\mathbf{l}|\leq|\mathbf{n}|} C(\mathbf{l}, \mathbf{n}) \tag{3.1.6}$$

e quindi si ha:

$$D^{\mathbf{n}}(e_\alpha \circ g)(x) = \mathbf{n}! \sum_{1\leq|\mathbf{l}|\leq|\mathbf{n}|} C(\mathbf{l}, \mathbf{n}).$$

Derivando entrambi i membri della (3.1.2) e sostituendo quanto appena ottenuto, si prova che la stessa formula vale sostituendo f al posto di e_α. Il teorema è quindi dimostrato. □

La formula appena trovata è l'estensione multidimensionale della formula di Faà di Bruno, verifichiamo quindi che per $m = p = q = 1$ si riconduce alla formula (1.2.1). Dato che $q = 1$, sia la $\sum_{(\mathbf{n}_1,\dots,\mathbf{n}_q)\in A_n}$ che la $\prod_{j=1}^{q}$ scompaiono e quindi $C(\mathbf{l}, \mathbf{n})$ diventa:

$$\frac{1}{l!} \sum_{(r_1,\dots,r_l)\in B} \left[\prod_{s=1}^{l} \frac{(D^{r_s} g)(x)}{r_s!} \right] (D^l f)(g(x))$$

dove $B = \left\{ (r_1, ..., r_l) \in \mathbb{N}^l \mid \sum_{s=1}^{l} r_s = n \right\}$ e quindi:

$$\frac{D^n (f \circ g)(x)}{n!} = \sum_{1\leq l\leq n} \frac{1}{l!} \sum_{(r_1,\dots,r_l)\in B} \left[\prod_{s=1}^{l} \frac{(D^{r_s} g)(x)}{r_s!} \right] (D^l f)(g(x)) \tag{3.1.7}$$

ora trasformiamo la sommatoria $\sum_{(r_1,\ldots,r_l)\in B}$ che è una somma su tutte le l-uple di interi non negativi $(r_1, ..., r_l)$ tali che $\sum_{s=1}^{l} r_s = n$, in una sommatoria equivalente su tutti i sottoinsiemi di interi non negativi $\{k_1, ..., k_n\}$ tali che $\sum_{j=1}^{n} k_j = l$ e $\sum_{j=1}^{n} jk_j = n$, otteniamo:

$$\frac{D^n(f \circ g)(x)}{n!} = \sum_{l=1}^{n} \sum \left[f^{(l)}(g(x)) \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{k_j!} \left(\frac{g^{(j)}(x)}{j!} \right)^{k_j} \right] \tag{3.1.8}$$

dove la sommatoria più interna è su tutti i sottoinsiemi di interi non negativi $\{k_1, ..., k_n\}$ tali che $\sum_{j=1}^{n} k_j = l$ e $\sum_{j=1}^{n} jk_j = n$; si noti che abbiamo moltiplicato per il fattore $\frac{l!}{k_1!\cdots k_n!}$ perché per ognuno di tali sottoinsiemi ci sono $\frac{l!}{k_1!\cdots k_n!}$ l-uple che vi corrispondono.

3.2 Derivata della funzione inversa

La generalizzazione della formula di Faà di Bruno e la formula nel caso unidimensionale, possono essere usate per calcolare ricorsivamente le derivate di g^{-1} cioè l'inversa di g (quando definita). Consideriamo quindi una funzione invertibile $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ di classe C^n con inversa anch'essa di classe C^n e chiamiamo f la sua inversa.

Vediamo un esempio di questa applicazione nel caso unidimensionale:

Esempio 3.2.1. Sia $m = 1$, si ha $f(g(x)) = x$ ovviamente $D^n(f \circ g)(x) = \delta_{n,1}$ per $n \geq 1$ perciò sfruttando la formula (3.1.8) si deve avere:

$$\frac{\delta_{n,1}}{n!} = \sum_{l=1}^{n-1} \sum \left[f^{(l)}(g(x)) \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i!} \left(\frac{g^{(i)}(x)}{i!} \right)^{k_i} \right] + \frac{1}{n!} f^{(n)}(g(x))(g'(x))^n$$

a questo punto è facile ricavare $f^{(n)}$ dato che $g' \neq 0$.

Il caso multidimensionale è analogo ma molto più laborioso, dato che la formula (3.1.1) è più complicata. Consideriamo il caso $|\mathbf{n}| = 1$, quindi i possibili valori per $\mathbf{n}$ sono i multi-indice $\mathbf{e}_i = (0, ..., 1, ..., 0)$, cioè quelli con 1 in i-esima posizione e tutte le altre componenti nulle. Calcolando $D^{\mathbf{n}}(f \circ g)$

si ha:

$$D^{\mathbf{e}_i}(f \circ g)(x) = D^{\mathbf{e}_i}x = (D^{\mathbf{e}_i}x_1, ..., D^{\mathbf{e}_i}x_m) = (\delta_{i,1}, ..., \delta_{i,m}) \tag{3.2.1}$$

Si deve sommare sugli $\mathbf{l}$ per cui $1 \leq |\mathbf{l}| \leq |\mathbf{n}|$, ma in questo caso avendo imposto $|\mathbf{n}| = 1$, la somma è su gli $\mathbf{l}$ tali che $|\mathbf{l}| = 1$ e quindi sugli $\mathbf{l} = \mathbf{e}_k$ per $k = 1, ..., m$. Dalla formula (3.1.1) si ottiene:

$$D^{\mathbf{n}}x = \sum_{k=1}^{m} \sum_{(\mathbf{n}_1,...,\mathbf{n}_m)\in A_n} \prod_{j=1}^{m} \{...\}(\nabla^{\mathbf{e}_k} f)(g(x)) \tag{3.2.2}$$

dove $\sum_{(\mathbf{n}_1,...,\mathbf{n}_m)\in A_n}$ denota la sommatoria su tutte le combinazioni di m multi-indici $(\mathbf{n}_1, ..., \mathbf{n}_m)$ tali che $\sum_{a=1}^{m} \mathbf{n}_a = \mathbf{n} = \mathbf{e}_i$, quindi segue facilmente che quella è la sommatoria su tutte le m-uple del tipo $(\mathbf{0}, ..., \mathbf{e}_i, ..., \mathbf{0})$.

Per ogni $k = 1, ..., m$ nel prodotto $\prod_{j=1}^{m}\{...\}$ c'è solo un fattore che non è identicamente uguale a 1 ed è il k-esimo, e questo accade solo per una somma di $\sum_{(\mathbf{n}_1,...,\mathbf{n}_m)\in A_n}$ cioè quella per cui $\mathbf{n}_k = \mathbf{e}_i$. A seguito di queste considerazioni la (3.2.2) diventa:

$$\begin{aligned} D^{\mathbf{e}_i}x &= \sum_{k=1}^{m}(D^{\mathbf{e}_i}g_k(x))(\nabla^{\mathbf{e}_k} f)(g(x)) = \\ &= \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} g_k(x) \frac{\partial f_1}{\partial y_k}(g(x)), ..., \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} g_k(x) \frac{\partial f_m}{\partial y_k}(g(x))\right) \end{aligned}$$

e uguagliando con l'espressione iniziale (3.2.1) si ottiene:

$$\delta_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} g_k(x) \frac{\partial f_j}{\partial y_k}(g(x))$$

infine grazie all'invertibilità di g si ha:

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_k}(g(x)) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^{-1}_{ik}.$$

Vediamo ora un metodo alternativo a questo che usa i risultati precedenti. Nel caso $m = p = q = 1$ e $f(g(x)) = x$ otteniamo per $n = 1$ (ponendo $y = g(x)$):

$$f'(y) \cdot g'(f(y)) = 1 \qquad \text{e quindi} \qquad f'(y) = \frac{1}{g'(f(y))}$$

si vede che f' si può pensare come la composizione $h \circ f$ dove $h(x) = \frac{1}{g'(x)}$. Usando la formula (3.1.8) si ottiene:

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(y) &= (f')^{(n-1)}(y) = \\
&= (h \circ f)^{(n-1)}(y) = \\
&= (n-1)! \sum_{l=1}^{n-1} \sum \left(h^{(l)}(f(x)) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{k_i!} \left(\frac{f^{(i)}(y)}{i!} \right)^{k_i} \right).
\end{aligned}$$

La formula analoga multidimensionale si ottiene così:

$$\frac{\partial f_i(y)}{\partial y_k} = h_{ik}(f(x))$$

dove h_{ik} è l'elemento di posto (i,k) della matrice $\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^{-1}$. Quindi dalla (3.1.1) si ha:

$$\begin{aligned}
D^{\mathbf{n}+\mathbf{e}_k} f_i(y) &= D^{\mathbf{n}}(D^{\mathbf{e}_k} f_i)(y) = D^{\mathbf{n}} \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_k} \right)(y) = D^{\mathbf{n}}(h_{ik} \circ f)(y) = \\
&= \mathbf{n}! \sum_{1 \le |\mathbf{l}| \le |\mathbf{n}|} \sum_{(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_q) \in A_n} \prod_{j=1}^{q} \left(\sum_{(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{l_j}) \in B_j} \prod_{s=1}^{l_j} \frac{D^{\mathbf{r}_s} f_j(y)}{\mathbf{r}_s!} \right) (\nabla h_{ik}^{\mathbf{l}})(f(y))
\end{aligned}$$

questa formula consente di calcolare una derivata a partire da quelle di ordine inferiore.

Bibliografia

[1] Arbogast L.F.A., *Du Calcul des Dérivations*, Levrault, Strasbourg, (1800).

[2] Craik A.D.D., Prehistory of Faà di Bruno's Formula, *The American Mathematical Monthly* **112** (2005) 119-130.

[3] De Morgan A., On Arbogast's formulae of expansion, *Cambridge and Dublin Math. J.*, **1** (1846) 238-255.

[4] Faà di Bruno F., Sullo sviluppo delle funzioni, *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche* **6** (1855) 479-480.

[5] Flanders H., From Ford to Faà, *The American Mathematical Monthly* **108** (2001) 559-561.

[6] Gzyl H., Multidimensional Extension of Faà di Bruno's Formula, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **116** (1986) 450-455.

[7] Hoppe R., Theorie der independenten Darstellung der höheren Differentialquotienten, Johann Ambrosius Barth, Leipzig, (1845).

[8] Johnson W.P., The Curious History of Faà di Bruno's Formula, *The American Mathematical Monthly* **109** (2002) 217-234.

[9] Knight T., On the expansion of certain functions, *Leybourn 's Math. Repository*, **2** (1809) 64-67.

[10] Knight T., Two letters, on the expansion of any functions of a multinomial, *Leybourn's Math. Repository*, **2** (1809) 67-70.

[11] Knight T., On the expansion of any functions of multinomials, *Philos. Trans. R. Soc. London*, **101** (1811) 49-88.

[12] Knight T., The expansion of the formula $\phi(A + c \cos x)^m$, *Leybourn 's Math. Repository*, **3** (1814) 32-34.

[13] Knight T., On the sine and cosine of the multiple arc, *Leybourn's Math. Repository*, **3** (1814) 34-37.

[14] Kramp C., *Élemens d'Arithmétique universelle*, Thiriart, Cologne, (1808).

[15] Lacroix S.F., *Traité du calcul différential et du calcul intégral*, Duprat, Paris, (1810-1819).

[16] Meyer U.H., Sur les dériveés d'une fonction de fonction, *Archiv der Mathematik und Physik*, **9** (1847) 96-100.

[17] Roman S., The Formula of Faà Di Bruno, *The American Mathematical Monthly*, **87** (1980) 805-809.

[18] Scherk H.F., *De evolvenda functione* $yd.yd.yd...ydX/dx^n$ *disquisitiones nonnullae analyticae*, dissertation, Friedrich-Wilhelms-Universität, Berlin, (1823).

[19] Schlömilch O., Zur Theorie der höheren Differentialquotienten, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, **3** (1858) 65-80.

[20] Spindler K., A short proof of the formula of Faà di Bruno, *Elemente der Mathematik* **60** (2005) 33-35.

[21] Tiburce Abadie J.F.C. (T.A.), Sur la différentiation des fonctions de fonctions, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, **9** (1850) 119-125.

[22] West J., *Mathematical Treatises... edited.., by the late Sir John Leslie... accompanied by a memoir of... the author by Edward Sang*, Oliver & Boyd, Edinburgh and Simpkin, Marshall & Co., London, (1838).