VNiVERSiDAD Ð SALAMANCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA
DEPARTAMENTO DE FILOSOFÍA, LÓGICA Y ESTÉTICA

The Germanic Development of the Pre-Modern Notion of Number

From c. 1750 to Bolzano's *Rein analytischer Beweis*

Elías Fuentes Guillén

Tesis presentada para obtener el grado de
Doctor en Lógica y Filosofía de la Ciencia

Dirigida por:
Dr. José Manuel Ferreirós Domínguez
Dra. María Gracia Manzano Arjona

VNiVERSiDAD Ð SALAMANCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA
DEPARTAMENTO DE FILOSOFÍA, LÓGICA Y ESTÉTICA

The Germanic Development of the Pre-Modern Notion of Number

From c. 1750 to Bolzano's *Rein analytischer Beweis*

Tesis presentada por Elías Fuentes Guillén
para obtener el grado de
Doctor en Lógica y Filosofía de la Ciencia

Dirigida por:
Dr. José Manuel Ferreirós Domínguez
Dra. María Gracia Manzano Arjona

V.º B.º

Septiembre, 2017

A mis padres y a mi hermana.

A Alejandrina.

A José.

Contents

Agradecimientos

Comencé mi doctorado a finales del año 2010 y lo termino siete años después. Nada es ya lo mismo. Me fui a un país ajeno para estudiar un Máster y volver, al año siguiente, a este pedazo de tierra, donde mis padres y mi hermana. Pero no regresé: me dieron una beca y allá estaba José. Y me quedé cuatro años más, durante los cuales viví entre Salamanca y Sevilla, y entre medias en Nancy y Paris. El proyecto de tesis pasó de las prácticas matemáticas involucradas en el desarrollo de la teoría de conjuntos de Cantor a las prácticas matemáticas de quienes le precedieron y luego, a su vez, a las de quienes antecedieron a estos. Yo pasé de ser alumno a impartir clase y de sólo asistir a congresos a participar en ellos. Y en la distancia estreché lazos con mi familia y en la cercanía me hice de muy buenos amigos.

Mi último año en España, sin embargo, lo cambió todo. Cansado de la academia y sus vicios, en el verano del 2014 viajé a Praha con motivo de un congreso. Ahí, donde Bolzano y Kafka, supe que no había obtenido un apoyo para quedarme en España un año más, una posibilidad que tenía enteramente asumida. Pero, además, ocurrió lo indecible. Así que volví a Salamanca triste por lo uno y profundamente decepcionado por lo otro y fue entonces cuando descubrí que correr me hacía bien y que era bueno en ello. A partir de ese momento y hasta el último día que estuve en España corrí y volví a México y seguí corriendo. Más allá del “primer semáforo del infinito” puede que no haya nada, pero aquí ya voy en la segunda vuelta a la Tierra por su diámetro más amplio y, tras ocho meses de trabajo como si en ello se me fuera mi último aliento, presento al mundo la tesis que sucede a estas líneas.

Retomar algo, regresar a algún lado, siempre tienen algo de peregrinación hacia lo imposible. Esta tesis, por ejemplo, aunque en parte es lo que ya era hace algunos años, ya no será lo que hubiera sido si entonces la hubiera terminado. Yo mismo, aunque en parte el mismo, ya no seré, del verbo ser, el pretérito pluscuamperfecto del subjuntivo. Pero es un hecho que entonces, como ahora, yo soy un montón: de sangre, de libros, de comidas, de música, de sitios y, sobre todo, de otros. A todas esas personas que hoy día soy y que saben, ya olvidaron, nunca lo han sabido o ni siquiera imaginan que contribuyeron a la consecución de este trabajo, ¡gracias!

Ante todo a mi mamá y a mi papá, Hortensia y Elías, quienes siempre han estado ahí y a quienes debo mucho de la persona que soy, por su amor, apoyo, ánimo, ejemplo, comprensión... En especial durante los dos últimos años como atleta, sumamente complicados para mí, y aún más durante los últimos meses, en los que he vivido prácticamente enclaustrado y ajeno a tanto. A mi hermana, Hortencia, por su amor, apoyo y cercanía sobre todo durante mis años en el extranjero, en las buenas y en las malas. A mi abuela María Luisa y a mi tía Nadia, quienes siempre han tenido palabras de aliento y cariño para mí. A Alejandrina, por su amor que ha sido apoyo, porras, comprensión, y por nuestro proyecto de vida juntos.

A José Ferreirós, mi mentor, quien hace 12 años me presentó a Cantor y Dedekind, por su amistad, todo lo que me ha enseñado, la confianza que me ha tenido aún en los altibajos y la cuidadosa revisión y mejora de estas páginas. A Dolores, Inés, Lucía y Juana, por acogerme.

A María Manzano, por todo su apoyo durante estos siete años, las clases de lógica que compartimos y las convivencias durante mis años en España. A Marco Panza, por la estancia en el IHPST, su asesoría sobre las obras de Lagrange y Cauchy, su apoyo y las convivencias. A Hourya Benis Sinaceur, por su asesoría sobre la obra de Bolzano y por valorar y animar mi trabajo con los textos originales. A Max Fernández de Castro, por la estancia en la UAM, su asesoría sobre mi trabajo acerca de Bolzano, su apoyo, las convivencias y su revisión de este trabajo. A Abel Lassalle Casanave, por su apoyo durante estos siete años, las convivencias y su revisión de este trabajo.

A Miguel Benítez, por su amistad y lo que me ha enseñado. A Hartley Slater, por animar mi investigación e interesarse en ella cuando apenas iba empezando. A Jeremy Gray, por sus asesorías cuando mi investigación estaba enfocada en Cantor. A Davide Crippa, por su amistad, su interés en mi trabajo, su ayuda para conseguir algunos textos y la discusión de algunos de los temas que aquí abordo. A Nicasio Ledesma, por sus asesorías y sus clases sobre geometría proyectiva. A Andrés Chaves, por su amistad, su apoyo y su ayuda con detalles matemáticos de los primeros trabajos de Cantor. A Steve Russ, por su interés en mi trabajo y sus sugerencias y comentarios al avance de mi trabajo sobre Bolzano que presenté en Praha. A Paul Rusnock, por sus observaciones a ese mismo avance de mi trabajo sobre Bolzano. A Gregory H. Moore, por compartir conmigo su trabajo sobre Weierstrass. A Hans Niels Jahnke, por compartir conmigo su trabajo sobre Lagrange y la escuela combinatoria alemana.

A Iago, María, Cristina, Concha, Lucas, Dune y Xose, por todo su cariño y apoyo, y por dejarme ser parte de su familia. A Iván, Renata, Ivett, David, Dominik, Fara, Rocío, Manuel, Sole, Nelson, Guillermo, Ruth, Mario, Julio, Sharif, Laura, Mattia, Diego y Sonia, por su amistad y apoyo dentro y fuera de las aulas. A Remedios, Omar, Diego, Arturo, Amado, Alexis, Miguel, Dan, Ramiro y el C. D. La Armuña, por su amistad y apoyo dentro y fuera de la pista.

Al Programa de Formación de Profesorado Universitario (FPU), del Ministerio de Educación de España, por la beca-contrato (AP2009-3398) que me otorgó para realizar el doctorado. A la Universidad de Salamanca (en especial al Departamento de Filosofía, Lógica y Estética) y la Universidad de Sevilla (en especial al Departamento de Filosofía, Lógica y Filosofía de la Ciencia), por brindarme las facilidades para realizar mi trabajo de investigación durante mis años en España. Al Institut d'Histoire et de Philosophie des Sciences et des Techniques y la Universidad Autónoma Metropolitana, por brindarme las facilidades para realizar mi investigación durante mis respectivas estancias. Al Laboratoire d'Histoire des Sciences et de Philosophie – Archives Henri-Poincaré, por las facilidades para mi investigación durante el verano del 2011. Al Colegio de España, en especial a Ramón Sole, y a la Maison des Provinces de France, por las facilidades durante mi estancia en Paris. A la Cité Universitaire Monbois, por las facilidades durante mi estancia en Nancy. A la Universidad Autónoma del Estado de México, en especial a Osiris Ramírez Prado, por su apoyo durante los dos últimos años. A los organizadores del First International Meeting of the APMP en Brussel (en especial a Karen Francois y Bart Van Kerkhove), el 14th Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science en Nancy (en especial a Pierre Edouard Bour), el Second International Meeting of the APMP en Urbana-Champaign (en especial a Andy Arana) y Bolzano in Prague 2014 (en especial a Arianna Betti y Steve Russ), por los apoyos que me otorgaron para asistir a dichos eventos.

Por último, a lo largo de mi tesis agradezco casos específicos en los que las digitalizaciones de ciertos textos antiguos o manuscritos me fueron facilitadas, si bien aunado a ello deseo agradecer en general a todas las personas e instituciones que se ocupan de tal labor día a día.

Introducción

La historiografía y la filosofía de la matemática usualmente describen las reformas educativas llevadas a cabo en Francia y los territorios germánicos durante la última década del siglo XVIII y la primera del siglo XIX de la siguiente manera: mientras que en Francia tales reformas se realizaron tras la Revolución Francesa, particularmente con la creación de la *École polytechnique* y la *École normale* en París en 1794 y 1795, respectivamente, las reformas germánicas comenzaron alrededor de 1810 con la fundación de la *Universität zu Berlin*.[1] Esta descripción, si bien acaso sea útil para resumir el periodo antes mencionado cuando el interés radica en lo que ocurrió antes –por ejemplo, el desarrollo del análisis matemático en el siglo XVIII– o después –por ejemplo, el desarrollo del análisis real y la teoría de conjuntos en el siglo XIX–, ha contribuido a una falta de comprensión, cuando no a una mala compresión, de lo que ocurrió en la matemática no sólo entre tales desarrollos sino además durante los propios siglos XVIII y XIX.

Primero, mientras que a inicios del siglo XIX el territorio comprendido por el Imperio Francés era muy similar a la Francia actual, la Alemania de hoy tiene poco que ver con los territorios germánicos de aquella época; esto es, mientras que en cierto sentido aquellas reformas educativas francesas tuvieron un impacto en 'una nación', no puede decirse lo mismo acerca de las reformas germánicas. Segundo, estrictamente hablando esas reformas no comenzaron en Francia en 1794 ni en los territorios germánicos en 1810, sino antes de esas fechas. Por último, así como el enfoque científico conceptual del siglo XIX (que condujo al desarrollo del análisis real matemático y la teoría conjuntista) suele ser vinculado a esas reformas germánicas, el enfoque científico utilitario (opuesto al análisis matemático del siglo XVIII) normalmente es asociado con aquellas reformas francesas. Empero, como lo evidencian tanto la tradición analítica Euleriana como la propuesta de Bernard Bolzano, tanto si aquellas reformas educativas elogiaban la utilidad de la geometría (en el caso de Francia) o un enfoque conceptual (en el caso de los territorios germánicos), lo cierto es que ni aquella tradición había conseguido librarse de sus raíces geométricas a principios de la última década del siglo XVIII, ni la propuesta de Bolzano a principios del siglo XIX puede ser considerada como el punto de partida del análisis real.

[1] Así ocurre, por ejemplo, en (Struik, 1981: 14-15), (Jahnke, 1993: 266) y (Ferreirós, 2007: 4-6).

Dejando de lado lo que ocurrió con la tradición Euleriana, en lo concerniente al análisis matemático moderno hoy en día dos autores son considerados como sus pioneros, a saber, Cauchy y Bolzano. Desde cierto punto de vista, Cauchy quizás fue "la figura más importante en el comienzo del análisis riguroso" (Grabiner, 1982: 2), mientras que las contribuciones de Bolzano –"en la fundamentación del análisis real"– acaso "no solamente [bosquejaron] los contornos generales de las nuevas matemáticas emergentes del siglo XIX, sino que además [efectuaron] el trabajo con considerable detalle" (Rusnock, 2000: 18). Aún más, a partir de cierta interpretación de la obra de ambos autores, se podría afirmar que "el logro de Cauchy fue la denominada 'aritmetización' del análisis" (Grattan-Guinness, 1970: 373), "el proyecto de colocar la teoría de la línea real sobre un fundamento sólido, aritmético, [que] habría de ser llevado adelante a lo largo del siglo XIX, en gran medida ajeno al trabajo de Bolzano" (Ewald, 1999: 226).

Sin embargo, al igual que con la descripción usual de dichas reformas educativas francesas y germánicas, hay algo erróneo en la narrativa habitual sobre las contribuciones de Bolzano al desarrollo del análisis moderno: mientras que algunos autores que mencionan o estudian los primeros trabajos matemáticos de Bolzano son cuidadosos al vincular las propuestas contenidas en esos trabajos con lo que posteriormente se llamaría "la aritmetización del análisis", así como al vincular sus resultados en esos trabajos con los de autores posteriores, en especial con Karl Weierstrass (cf. Kitcher, 1984: 191 y 263; Laugwitz, 1989: 205; Belna, 2000: 55; Moore, 2000 y 2008; Russ, 2004; Gray, 2015: 240), muchos de aquellos autores asumen ambas relaciones o al menos la segunda de ellas. De hecho, así como la emergencia de ambas lecturas anacrónicas puede ser datada, a grandes rasgos, en el Imperio Alemán (*Deutsches Reich*) durante el último tercio del siglo XIX (en el caso de quienes asumen el vínculo entre resultados particulares) y principios del siglo XX (en el caso de quienes asumen el vínculo entre propuestas generales), en ambos casos se puede señalar a ciertos matemáticos germánicos como figuras clave en la promoción de una y otra lectura, a saber, respectivamente, Karl Weierstrass y Felix Klein.

Respecto a aquella segunda lectura, Weierstrass reconocía a Bolzano como el matemático cuyo trabajo (particularmente su *Prueba puramente analítica*, de 1817)[2] fue la base para el desarrollo del llamado teorema de Bolzano-Weierstrass, teorema esencial del análisis moderno que hoy

[2] El título completo del trabajo de Bolzano es: *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*.

día sostiene que un conjunto infinito y limitado de números reales tiene un punto límite; testimonio de ello se encuentra en las notas de clase de Weierstrass tomadas por algunos de sus alumnos y en algunos escritos de estos y de él. Sin duda, el reconocimiento de Weierstrass contribuyó a la idea de que aquel teorema y su prueba –enunciado y ofrecida por él– fueron de alguna manera anticipados por Bolzano (cf. Weierstrass, 1868/1986: 79; 1874: 304; 1886: 59-63 y 238-239). No obstante, más allá de lo engañosa que pudo resultar la narrativa del propio Weierstrass, lo que sobre todo consolidó y propagó esa idea fue: a) la importancia atribuida por los estudiantes de Weierstrass a las referencias de éste a Bolzano y b) la lectura efectuada por esos estudiantes de la obra de este último. El "Anexo A" incluido al final de este trabajo ilustra este argumento sobre la propagación, consolidación y pervivencia de semejante lectura.

Ahora bien, en cuanto a la primera de aquellas lecturas, si bien Leopold Kronecker, por ejemplo, se refirió a la "aritmetización" (*arithmetisiren*) del análisis y de todas las disciplinas matemáticas (cf. Kronecker, 1887: 338-339),[3] su propuesta no fue exactamente la misma que la de aquella "importante tendencia matemática que", como dijo Klein en 1895, "[tuvo] a Weierstrass como su máximo exponente" (cf. Klein, 1896: 241): si bien ambas propuestas compartían la convicción en el desarrollo de las matemáticas sobre la base de la aritmética de los números naturales, Weierstrass y otros pretendieron desarrollar una teoría de los números irracionales, algo que al menos en algún momento Kronecker rechazó. Así, a partir de inicios del siglo XX fue más habitual identificar la propuesta de Weierstrass y otros bajo la designación de "aritmetización del análisis" (concebida acaso la propuesta de Kronecker como una versión restrictiva de esta), siendo incluso entonces habitual encontrar elogios hacia ella semejantes a los de Poincaré en 1900: "La matemática", dijo, "ha sido aritmetizada. [...] Uno puede decir que actualmente se ha alcanzado el rigor absoluto" (Poincaré, 1902: 120 y 122).[4] Pero fue precisamente Klein, si no el primero en identificar a Bolzano con tal aritmetización, al menos aquel cuya tal identificación se hizo eco entre matemáticos e historiadores y filósofos de las matemáticas: "Bolzano", escribió

[3] Kronecker escribió: "Y yo también creo que algún día se logrará 'aritmetizar' todo el contenido de todas estas disciplinas matemáticas, es decir, sobre la sola base del concepto de número considerado en el sentido más restringido [esto es, en el sentido de los números naturales], eliminando así las modificaciones y extensiones de este concepto, originadas principalmente por aplicaciones en geometría y mecánica" ("Und ich glaube auch, dass es dereinst gelingen wird, den gesammten Inhalt aller dieser mathematischen Disciplinen zu 'arithmetisiren', d. h. einzig und allein auf den im engsten Sinne genommenen Zahlbegriff zu gründen, also die Modificationen und Erweiterungen dieses Begriffs wieder abzustreifen, welche zumeist durch die Anwendungen auf die Geometrie und Mechanik veranlasst worden sind".).

[4] Poincaré escribió: "Il ne reste plus aujourd'hui en Analyse que des nombres entiers ou des systèmes dinis ou infinis de nombres entiers, reliés entre eux par un réseau de relations d'égalité ou d'inégalité. Les Mathématiques, comme on l'a dit, se sont arithmétisées. [...] Or, dans l'Analyse d'aujourd'hui, quand on veut se donner la peine d'être rigoureux, il n'y a plus que des syllogismes ou des appels à cette intuition du nombre pur, la seule qui ne puisse nous tromper. On peut dire qu'aujourd'hui la rigueur absolue est atteinte".

en sus *Lecturas sobre el desarrollo de las matemáticas en el siglo XIX* (*Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19.Jahrhundert*) publicadas póstumamente en 1926-27, "es uno de los padres de la actual 'aritmetización' de nuestra ciencia" (Klein, 1826: 56).[5]

Como se muestra en el "Anexo B" de este trabajo, aún es común la inclusión de Bolzano entre los matemáticos que abogaron por la aritmetización Weierstrassiana del análisis, dos siglos después de la publicación en Praha de su *Prueba puramente analítica*. Por el contrario, el *Curso de análisis* (*Cours d'Analyse*) de Cauchy, publicado cuatro años después en París, no sólo fue más conocido durante el siglo XIX, sino que además ha sido más ampliamente estudiado desde entonces. Como consecuencia, se sostiene aquí, tanto la propuesta general, como los resultados particulares contenidos en los primeros trabajos matemáticos de Bolzano (1804-1817), continúan siendo malinterpretados: en 1817 las nociones y prácticas matemáticas de Bolzano, si bien dejaban entrever preocupaciones y características innovadoras, eran muy diferentes de las nociones y prácticas Weierstrassianas aritmetizadoras venideras, en la medida en que la obra de Bolzano aún tenía rasgos esenciales de una concepción semántico-ontológica del análisis.

De hecho, la lectura de Bolzano como un matemático de transición, esto es, uno cuyos primeros trabajos de cierta manera se orientaban hacia el terreno en el cual fue desarrollado el análisis real del siglo XIX, pero que a la vez tenía profundas raíces en concepciones y prácticas heredadas que eran comunes entre matemáticos germánicos de *c.* 1800, está estrechamente vinculada a lo dicho al principio de esta introducción sobre la narrativa sesgada de las reformas educativas germánicas a principios del siglo XIX. Tanto si se estudia cuidadosamente lo que ocurrió en las matemáticas germánicas medio siglo después de 1817 (digamos, hasta *c.* 1872), como medio siglo antes de 1804 (digamos, desde *c.* 1750), tal rol de Bolzano queda sustentado. Empero, dado que el punto de llegada de esta tesis son los trabajos de Bolzano de 1804-1817, la atención se centrará en las generaciones de matemáticos germánicos previas a Bolzano, así como en los vínculos y diferencias entre ellos y éste. Más específicamente, el interés aquí radica en la obra de los matemáticos germánicos de la segunda mitad del siglo XVIII, mismos que generalmente son pasados por alto por los matemáticos e historiadores y filósofos de la matemática.

[5] Klein escribió: "Diese Punkte wurden erst 1817 durch die Schrift von B. Bolzano 'Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege' (Prag, = Ostw. Klass. 153) erledigt, der damit auch über die späteren Entwicklungen von Cauchy hinausgegangen ist. Bolzano ist einer der Väter der eigentlichen 'Arithmetisierung' unserer Wissenschaft".

Justamente, más allá de las prácticas y los conceptos matemáticos implícitos en los primeros trabajos matemáticos de Bolzano, sus fuentes matemáticas explícitas refuerzan dos principales tesis –entrelazadas– de este trabajo. Así, mientras que hasta 1817 Bolzano cita sobre todo a matemáticos germánicos (una vasta mayoría) y franceses, y en menor medida a británicos y griegos antiguos, claramente se puede distinguir entre ellos a tres grupos de acuerdo a su conexión con cierta tradición o escuela: a) la tradición Newtoniana (Newton y, por ejemplo, John Colson, Samuel Horsley, Thomas Simpson, William Sewell y John Landen); b) la tradición francesa (Euler y, por ejemplo, Simon Antoine Jean L'Huilier, Johann Castillon, Alexis Claude Clairaut, Jean-Baptiste le Rond d'Alembert, Jean-Baptiste d'Estienne du Bourguet, François Daviet de Foncenex, Pierre-Simon Laplace, Adrien-Marie Legendre, Sylvestre François Lacroix y Joseph-Louis Lagrange); y c) la denominada escuela combinatoria de Hindenburg (Hindenburg y, por ejemplo, Heinrich August Rothe, Georg Simon Klügel y Johann Friedrich Pfaff). Empero, mientras que tales referencias de Bolzano a los autores pertenecientes a los dos primeros grupos fueron en su mayoría menciones aisladas,[6] sus referencias a Hindenburg y Klügel, así como a diversos matemáticos germánicos,[7] sobre todo de la segunda mitad del siglo XVIII y principios del siglo XIX, pone de manifiesto la importancia de estos (especialmente de aquellos inmediatamente previos) en el desarrollo de su propuesta matemática temprana.

Así, hay algo especialmente llamativo en lo concerniente a las fuentes germánicas de Bolzano: junto con Wolff (uno de los filósofos y matemáticos más influyentes del siglo XVIII) y Kant (un de los filósofos germánicos más influyentes a principios del siglo XIX), Bolzano se refiere sobre todo a matemáticos que en su mayoría ni eran seguidores de aquel filósofo, ni habían sido educados conforme a las ideas de aquel matemático. Indudablemente, esos autores germánicos a los que Bolzano se refiere con mayor frecuencia que a otros no fueron ajenos a las ideas y obras de Wolff y Kant, pero su acercamiento a las matemáticas estuvo moldeado por las obras e ideas de otros autores. Algo que, si bien dependió de la región y época en que se formaron, tuvo a sus

[6] De hecho, el grueso de ellos sólo aparecen nombrados ya sea en la lista que autores incluida al inicio del prefacio de su trabajo sobre el teorema del binomio de 1816 (cf. Bolzano, 1816: III-IV), o en la lista de autores incluida al inicio del prefacio a su primer trabajo de 1817 (cf. Bolzano, 1817B: 3 y 5).

[7] Los matemáticos germánicos cuya referencia en la obra temprana de Bolzano va más allá de una mera mención son: Christian Wolff, Abraham Kästner, Johann Schultz, Immanuel Kant (filósofo), Johann Andreas Christian Michelsen, Georg Simon Klügel, Carl Friedrich Hindenburg, Karl Christian von Langsdorf, Johann Heinrich Lambert, August Leopold Crelle, Johann Carl Friedrich Gauss, Johann Friedrich Gensichen, Ernst Platner y Ernst Gottfried Fischer. Mientras que la lista de sus fuentes germánicas la completan Bendavid, Karl Friedrich August Grashof, Franz Anton Ritter von Spaun, (Joseph-Louis Lagrange), Jakob Hermann, Leonhard Cochius, Christian Gottlieb Selle, Franz Ulrich Theodor Aepinus, Johann Andreas von Segner, Karl Scherffer, Wenceslaus Johann Gustav Karsten, Johann Friedrich Pfaff, Heinrich August Rothe, Christian Lebrecht Rösling, Mathias Metternich, Friedrich Gottlieb von Busse, Christian Friedrich Kausler, János Pasquich, Friedrich Wilhelm Jungius, Karl Christian Friedrich Krause y Gottlob Nordmann.

figuras clave en Kästner, Karsten y Segner, los profesores de matemáticas en las universidades de Göttingen y Halle. Ellos tres y sus respectivos maestros de matemáticas, en cambio, sí se formaron durante el apogeo de la influencia de Wolff, si bien, conforme a la tesis aquí defendida, no deben ser considerados como meros propagadores de las ideas de este.

Es verdad que entonces los trabajos más conocidos de Kästner, Karsten y Segner eran sus libros de texto, así como en algunos casos sus traducciones de trabajos de autores extranjeros, por lo que su influencia sobre las nuevas generaciones tuvo que ver ante todo con concepciones y prácticas matemáticas generales y no tanto con resultados o desarrollos particulares. Pero, así como Bolzano no repitió meramente lo que heredó, esos tres autores tampoco lo hicieron.[8] Más aún, así como los trabajos de esos tres matemáticos no fueron simplemente "versiones más populares y legibles [de la obra de Wolff]" (Bullynck, 2006: 4), como se suele contar, ellos paulatinamente introdujeron modificaciones significativas en sus trabajos que los alejaron cada vez más de ideas de Wolff aún presentes en los trabajos de éste de la década de 1740.

Ese último punto es relevante, dado la idea generalizada sobre el estancamiento de las matemáticas germánicas durante la segunda mitad del siglo XVIII. Mientras que a lo largo del siglo pasado se pueden encontrar menciones aisladas sobre algunos aspectos de los trabajos matemáticos de esos tres autores (cf. Cantor, 1904; Cajori, 1913 y 1923; Fellmann, 1983; Clewis, 2015), lo cierto es que existen pocos estudios enfocados –al menos parcialmente– en ellos. El trabajo de Gert Schubring (2005), así como otros trabajos recientes, entre ellos (Kleinert, 2002) y (Bullynck, 2006 y 2013), son las excepciones. Debido a su estudio detallado y extenso de las nociones de cantidad y número entre los matemáticos franceses y germánicos del siglo XVIII, el libro de Schubring ha de ser considerado la principal referencia en el tema. De hecho, muchos de los autores cuyo trabajo es abordado en el capítulo B del presente trabajo, también son estudiados por Schubring y, por ende, el análisis ofrecido aquí de dichos autores ha de ser entendido como una contribución al trabajo de él y a los otros estudios existentes.

La investigación de Schubring aborda el desarrollo del análisis matemático en los siglos XVII, XVIII y XIX, sobre todo en Francia y Alemania y enfocado en el desarrollo de los conceptos de

[8] Lo mismo puede decirse de Wolff pero ello va más allá de los alcances de este trabajo, por lo que habrá de bastar esta nota a pie de página para evitar que en este punto se atribuya el mismo error que aquí se está criticando. Así, a lo largo de este trabajo las ideas de Wolff que son mencionadas son atribuidas al año específico de la obra citada.

números negativos y cantidades infinitamente pequeñas. Como aquí, él presta especial atención a los libros de texto, dado que "ofrecen buenos indicadores respecto al horizonte conceptual de un cierto periodo y cultura" (Schubring, 2005: 7). A Bullynck, por su parte, le interesa el estado de las matemáticas Germánicas a finales del siglo XVIII y principios del XIX "en la educación elemental y superior", así como en "las formas de mediación y comunicación que acompañaron y prepararon el camino para las revistas especializadas en matemáticas" (Bullynck, 2006 y 2013). Esta tesis comparte con ambos trabajos tales intereses y algunas elecciones metodológicas, si bien aquí el interés radica en las nociones básicas de número y cantidad durante la última parte del siglo XVIII, para así comprender mejor el surgimiento de la noción pre-moderna de número entre los matemáticos germánicos, en particular en la obra matemática temprana de Bolzano.

La comprensión de la evolución de las ideas matemáticas de Kästner, Karsten y Segner, se sostiene aquí, contribuye a su vez a comprender el panorama matemático germánico de finales del siglo XVIII e inicios del XIX. Los vínculos entre Kästner, el matemático más influyente de aquellos tres, y la escuela combinatoria de Hindenburg, así como entre ésta y Lagrange, no son fortuitos, si bien en última instancia tales proyectos eran diferentes, como lo eran sus nociones y procedimientos subyacentes. Pero, al mismo tiempo, tal comprensión de la matemática germánica a principios del siglo XIX es de suma importancia para analizar algunos aspectos clave de los trabajos matemáticos de Bolzano de 1804-1817.

Finalmente, establecidos los momentos de llegada (1817) y de partida (*c*. 1750), el territorio (las matemáticas germánicas) y la ruta a seguir (de Göttingen y Halle a Praha), así como explicadas las razones para tales elecciones, ¿dónde comenzar, en términos geográficos, esta tesis sobre el desarrollo germánico de la noción pre-moderna de número? El trabajo del agrimensor consiste precisamente no sólo en delimitar el territorio y estudiarlo, sino también en fijar un punto de partida adecuado para la óptima consecución del trabajo: "K. se detuvo durante un largo tiempo en el puente de madera que conducía desde el camino hasta la aldea, mirando lo que parecía ser un vacío" (Kafka, 2009: 5). Como consecuencia, y dada la situación política de los territorios germánicos durante ese periodo, el punto de partida estará a medio camino entre el Reino de Prussia (*Königreich Preußen*) y el Archiducado de Austria (*Erzherzogtum Österreich*), las dos partes constituyentes más importantes del Sacro Imperio Romano en ese momento (mismo que entonces comprendía la mayoría de los territorios germánicos), a saber, Silesia (*Schlesien*).

Introduction

The historiography and philosophy of mathematics usually characterize the educational reforms undertaken in France and the Germanic territories during the last decade of the 18th century and the first decade of the 19th century as follows: while in France such reforms were carried out after the French Revolution and in particular with the creation of the *École polytechnique* (in 1794) and the *École normale* (in 1795) in Paris, the Germanic reforms began around 1810 with the foundation of the *Universität zu Berlin*.[9] This characterization, although it might be useful to summarize the aforementioned period when the interest lies in what happened before –e.g. the development of mathematical analysis in 18th century– or later –e.g. the development of real analysis and set theory in 19th century–, has contributed to a lack of awareness, if not a misunderstanding, of what happened in mathematics not only in between such developments but also during the 18th and 19th centuries.

To begin with, even though at the beginning of the 19th century the territory comprised by the French Empire (*Empire Français*) was very similar to modern-day France, 21st century Germany has little to do with the Germanic territories of that time; that is, while in a sense it can be said that those French educational reforms had an impact on a 'whole nation', the same cannot be said about the Germanic. Secondly, strictly speaking those reforms did not begin in 1794 in France, nor in 1810 in the Germanic territories but in both cases before those dates. Finally, just as the scientific conceptual approach (that led to the development of real mathematical analysis and set theory) is usually linked to those Germanic reforms, the scientific utilitarian approach (opposed to 18th century mathematical analysis) is normally associated with those French reforms. However, as evidenced by both the Eulerian analytical tradition and Bernard Bolzano's proposal, whether those educational reforms praised highly the usefulness of geometry (in the case of France) or a more conceptual approach (in the case of Germanic territories), the fact is that neither that tradition had managed to rid of the geometrical roots of mathematical analysis by the beginning of last decade of the 18th century, nor Bolzano's proposal at the beginning of the 19th century can be considered the starting point of real analysis.

[9] This is the case in, for example, (Struik, 1981: 14-15), (Jahnke, 1993: 266) and (Ferreirós, 2007: 4-6).

Leaving aside what happened with the Eulerian tradition, with regard to modern mathematical analysis nowadays two authors are commonly considered as its pioneers, namely, Cauchy and Bolzano. From a certain perspective, Cauchy perhaps was "the most important figure in the initiation of rigorous analysis" (Grabiner, 1982: 2), while Bolzano's contributions –"in the foundations of real analysis"– might have "not only [sketched] the general contours of the emerging new mathematics of the nineteenth century, but also [carried] the work out in considerable detail" (Rusnock, 2000: 18). Even more, from a certain interpretation of the works of those two authors someone could state that "Cauchy's achievement was the so-called 'arithmeticisation' of analysis" (Grattan-Guinness, 1970: 373), "the project of putting the theory of the real line on a solid, arithmetical foundation [which] was to be carried forward, largely in ignorance of Bolzano's work, throughout the nineteenth century" (Ewald, 1999: 226).

Nevertheless, as with the common description of the above-mentioned French and Germanic educational reforms, there is something fundamentally wrong in the usual narrative on the contributions of Bolzano to the development of modern analysis: while some of the authors that mention or study the early mathematical works of Bolzano are wary of linking the proposals contained in those works to what would later be called the "arithmetization of analysis", as well as to link the results in them with the ones of later authors, especially Karl Weierstrass (cf. Kitcher, 1984: 191 & 263; Laugwitz, 1989: 205; Belna, 2000: 55; Moore, 2000 & 2008; Russ, 2004; Gray, 2015: 240), many of those authors either assume this second relation or both of them. Indeed, the emergence of both readings can be roughly dated during the last third of the 19th century (for those who assume that link between particular results) and the early 20th century (for those who assume that link between general proposals), and in both cases it is possible to point out certain Germanic mathematicians as key figures in the promotion of each reading, scilicet, Karl Weierstrass and Felix Klein.

Concerning the second of those readings, it is known that Weierstrass acknowledged Bolzano as the mathematician whose work (particularly his *Purely Analytic Proof*, from 1817)[10] was the basis for the development of the so-called Bolzano-Weierstrass theorem, an essential theorem of modern analysis which nowadays states that an infinite and bounded set of real numbers has

[10] The full title of Bolzano's text is: *Purely Analytic Proof of the Theorem, that between any two Values which give Results of Opposite Sign, there lies at least one real Root of the Equation* (*Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*).

a limit point; evidence of this is found both in notes of Weierstrass' lectures taken by his students, as well as in some works of these ones and him. Undoubtedly, Weierstrass' own recognition of Bolzano contributed to the idea that the theorem –enunciated by Weierstrass– and its proof –provided by Weierstrass– were somehow anticipated by Bolzano (cf. Weierstrass, 1868/1986: 79; 1874: 304; 1886: 59-63 & 238-239). However, beyond the fact that Weierstrass' narrative was misleading, what mainly consolidated and spread that idea was: a) the importance given by the students of Weierstrass to his reference to Bolzano and b) the reading made by those students of the latter's work. The table included at the end of this work as "Annex A" illustrates this argument on the propagation, consolidation and prevalence of such a reading.

As to the first of those readings, although Leopold Kronecker, for example, talked about the "arithmetization" (*arithmetisiren*) of analysis and all mathematical disciplines (cf. Kronecker, 1887: 338-339),[11] his proposal was not entirely the same as that advocated by that "important mathematical tendency which", as Klein said in 1895, "[had] as its chief exponent Weierstrass" (cf. Klein, 1896: 241): while both proposals shared the conviction in the development of mathematics on the basis of the arithmetic of natural numbers, Weierstrass and others intended to develop a theory of irrational numbers, something that at least at some point Kronecker rejected. Thus, from the early 20th century onwards it became increasingly common to identify the proposal of Weierstrass and others under the designation of "arithmetization of analysis" (conceived in any case Kronecker's proposal as a restrictive version of this one), and to celebrate it as Poincaré did in 1900: "Mathematics", he said, "has been arithmetized. [...] One can say that nowadays absolute rigor has been achieved" (Poincaré, 1902: 120 & 122).[12] But it was Klein, if not the first author to identify Bolzano with such arithmetization, at least the first one whose identification of this mathematician with that project was echoed among mathematicians and historians and philosophers of mathematics: "Bolzano", he wrote in his *Lectures on the Development of Mathematics in the 19th century* (*Vorlesungen über die*

[11] Kronecker wrote: "And I also believe that someday it will be achieved to 'arithmetize' the whole content of all these mathematical disciplines, i. e. on the sole basis of the concept of number taken in the narrowest sense [that is, in the sense of natural numbers], so to strip away the modifications and extensions of this concept, which have mostly been caused by the applications in geometry and mechanics" ("Und ich glaube auch, dass es dereinst gelingen wird, den gesammten Inhalt aller dieser mathematischen Disciplinen zu 'arithmetisiren', d. h. einzig und allein auf den im engsten Sinne genommenen Zahlbegriff zu gründen, also die Modificationen und Erweiterungen dieses Begriffs wieder abzustreifen, welche zumeist durch die Anwendungen auf die Geometrie und Mechanik veranlasst worden sind.").

[12] Poincaré wrote: "Il ne reste plus aujourd'hui en Analyse que des nombres entiers ou des systèmes dinis ou infinis de nombres entiers, reliés entre eux par un réseau de relations d'égalité ou d'inégalité. Les Mathématiques, comme on l'a dit, se sont arithmétisées. [...] Or, dans l'Analyse d'aujourd'hui, quand on veut se donner la peine d'être rigoureux, il n'y a plus que des syllogismes ou des appels à cette intuition du nombre pur, la seule qui ne puisse nous tromper. On peut dire qu'aujourd'hui la rigueur absolue est atteinte."

Entwicklung der Mathematik im 19.Jahrhundert) published posthumously in 1926-27, "is one of the fathers of the current 'arithmetization' of our science" (Klein, 1826: 56).[13]

As shown in "Annex B" table, it is still common to include Bolzano among the mathematicians who advocated for Weierstrass' arithmetization of analysis, despite the fact that two centuries have passed since the publication of his *Purely Analytic Proof* in Prague. On the contrary, Cauchy's *Course of Analysis* (*Cours d'Analyse*), published four years later in Paris, not only was a much better known work during the 19th century, but also since then has been more widely studied. As a consequence, according to the thesis here defended, both the general proposal and the particular results contained in Bolzano's early works (1804-1817) continue to be misread: by 1817 Bolzano's mathematical notions and practices, though they hinted some ground-breaking concerns and features, were heavily deviant from later Weierstrassian arithmetizing notions and practices, insofar as Bolzano's work still had essential traits of a semantic-ontological conception of analysis.

In fact, Bolzano's account as a transitional mathematician, that is, as one whose early works were aimed in some way towards the land on which the 19th century real analysis was developed, yet deeply rooted in inherited views and practices which were common among Germanic mathematicians around 1800, is a thesis closely linked to the one stated at the outset on the biased narrative of Germanic educational reforms of the early 19th century. Whether it is carefully studied what happened in Germanic mathematics around half a century after 1817 (up to c. 1872), as around half a century before 1804 (since c. 1750), Bolzano's role as a transitional author is sustained. But, since the arrival point in this thesis is precisely the work of Bolzano from 1804-1817, the focus here lies in the previous generations of Germanic mathematicians and the links and differences between them and Bolzano. More specifically, the interest rests on the Germanic mathematicians of the second half of the 18th century, those who have generally been overlooked by mathematicians and historians and philosophers of mathematics.

[13] Klein wrote: "Diese Punkte wurden erst 1817 durch die Schrift von B. Bolzano 'Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege' (Prag, = Ostw. Klass. 153) erledigt, der damit auch über die späteren Entwicklungen von Cauchy hinausgegangen ist. Bolzano ist einer der Väter der eigentlichen 'Arithmetisierung' unserer Wissenschaft."

Precisely, beyond the mathematical concepts and practices implicit in Bolzano's early mathematical works, his explicit mathematical sources reinforce two main –intertwined– theses of this work. That way, while until 1817 he primarily quoted Germanic (a vast majority) and French mathematicians, and to a lesser extent British and ancient Greek ones, among them three groups can be clearly defined according to their connection to a certain tradition or school: a) the Newtonian tradition (Newton and, for example, John Colson, Samuel Horsley, Thomas Simpson, William Sewell, John Landen); b) the French tradition (Euler and, for example, Simon Antoine Jean L'Huilier, Johann Castillon, Alexis Claude Clairaut, Jean-Baptiste le Rond d'Alembert, Jean-Baptiste d'Estienne du Bourguet, François Daviet de Foncenex, Pierre-Simon Laplace, Adrien-Marie Legendre, Sylvestre François Lacroix, Joseph-Louis Lagrange); and c) the so-called Hindenburg's combinatorial school (Hindenburg and, for example, Heinrich August Rothe, Georg Simon Klügel, Johann Friedrich Pfaff). However, while the references by Bolzano to authors of the first groups were mostly isolated ones,[14] his references to Hindenburg and Klügel, as well as to several Germanic mathematicians (mainly from the second half of the 18th century and the early 19th century),[15] highlight the importance of these mathematicians and especially of those immediately prior to him in the development of his early mathematical proposal.

Furthermore, there is something outstanding with regard to Bolzano's Germanic sources: along with Wolff (one of the most influential philosophers and mathematicians of the 18th century) and Kant (one of the most influential Germanic philosophers by the early 19th century), Bolzano referred mainly to mathematicians who for the most part were not followers of that philosopher, nor strictly had they been educated under the ideas of that mathematician. Undoubtedly, those Germanic authors were not stranger to the ideas and works of Wolff and Kant. However, their education was mediated by the works of other auhors. This depended on the region and epoch, but the key figures during that period were Kästner, Karsten and Segner, the math teachers at the leading universities of Göttingen and Halle who, along with their math

[14] As a matter of fact, most of them are only named in the list of authors included at the beginning of his 1816 work on the binomial theorem (cf. Bolzano, 1816: III-IV) or in the one included at the beginning of his *Purely Anlytic Proof* (cf. Bolzano, 1817B: 3 & 5).

[15] The Germanic mathematicians whose mention in Bolzano's early mathematical works is not an isolated one are: Christian Wolff, Abraham Kästner, Johann Schultz, Immanuel Kant (philosopher), Johann Andreas Christian Michelsen, Georg Simon Klügel, Carl Friedrich Hindenburg, Karl Christian von Langsdorf, Johann Heinrich Lambert, August Leopold Crelle, Johann Carl Friedrich Gauss, Johann Friedrich Gensichen, Ernst Platner and Ernst Gottfried Fischer. A list (of his Germanic sources) that is completed by: Lazarus Bendavid, Karl Friedrich August Grashof, Franz Anton Ritter von Spaun, (Joseph-Louis Lagrange), Jakob Hermann, Leonhard Cochius, Christian Gottlieb Selle, Franz Ulrich Theodor Aepinus, Johann Andreas von Segner, Karl Scherffer, Wenceslaus Johann Gustav Karsten, Johann Friedrich Pfaff, Heinrich August Rothe, Christian Lebrecht Rösling, Mathias Metternich, Friedrich Gottlieb von Busse, Christian Friedrich Kausler, János Pasquich, Friedrich Wilhelm Jungius, Karl Christian Friedrich Krause and Gottlob Nordmann.

teachers, did grow during the heyday of Wolff's influence, though they were not mere propagators of this latter's ideas.

It is true, on the one hand, that by then the best known works of Kästner, Karsten and Segner were their textbooks, as well as in some cases their translations of the works of foreign authors, and so their influence on the next generations had to do primarily with general conceptions and practices and not so much with particular mathematical results or developments. But, just as Bolzano did not merely repeat what he inherited, those three mathematicians did not either.[16] Moreover, just as the works of those three mathematicians were not merely "more popular and readable version[s] [of Wolff's work]" (Bullynck, 2006: 4), as it is commonly told, they gradually introduced significant modifications in their works, which increasingly drove them away from certain ideas of Wolff that were still present in this one's works of the 1740s.

The latter point is crucial to note, given the widespread idea about the state of stagnation of Germanic mathematics during the second half of the 18th century. While isolated mentions on some relevant aspects of the mathematical works of those three authors can be found all throughout the last century (cf. Cantor, 1904; Cajori, 1913 & 1923; Fellmann, 1983; Clewis, 2015), there are few studies focused –at least partially– on them. The exception to this is the excellent work of Gert Schubring (2005), as well as some other recent works, such as (Kleinert, 2002) and (Bullynck, 2006 & 2013). Because of its extensive and detailed study of the notions of quantity and number among French and Germanic mathematicians of the 18th century, the book of Schubring must be considered the main reference in the subject. Indeed, many of the authors whose work is discussed here in chapter B are studied by Schubring and thus the analysis offered here of those authors aims to contribute to his work and the other existing studies.

Schubring's investigation treats the development of mathematical analysis mostly in France and Germany, with special focus on the development of the concepts of negative numbers and infinitely small quantities throughout the 17th, 18th and 19th centuries. Just like we do here, he pays special attention to textbooks, since "they yield good indicators as to the intended conceptual horizon of a certain period and culture" (Schubring, 2005: 7). Bullynck, on the other

[16] The same can be said about Wolff but this goes beyond the scope of this work, so this footnote shall suffice to avoid the mistake that is being criticized here. Thus, throughout this work the ideas of Wolff that are mentioned are attributed to the specific year of the quoted work.

hand, is interested in the state of Germanic mathematics in the late 18th and early 19th century, "both on a level of elementary and higher education", and in "the forms of mediation and communication that accompanied and prepared the way for specialised mathematical journals" (Bullynck, 2006 & 2013). This dissertation shares with both works such interests and some methodological options, but the focus here is placed on the basic notions of numbers and quantities during the last part of the 18th century, in order to better understand the emergence of the pre-modern notion of number among Germanic mathematicians, particularly in the early work of Bolzano.

On the one hand, understanding the evolution of the mathematical ideas and practices of Kästner, Karsten and Segner in turn contributes to a better understanding of the Germanic mathematical panorama by the end of the 18th century and the beginning of the 19th century. The links between Kästner, the most influential of those mathematicians, and the so-called Hindenburg's combinatorial school, as well as the links between this school and Lagrange, are not fortuitous, although ultimately the project of each of them was different, as different were some of their procedures and underlying notions. Whereas, on the other hand but coupled with that, understanding the state of things in Germanic mathematics in the early 19th century is of utmost importance for a careful examination of some key aspects of Bolzano's mathematical works of 1804-1817.

Finally, once established the arrival (1817) and departure (c. 1750) times, the territory (the Germanic mathematics) and the way forward (from Göttingen and Halle to Prague), as well as explained the reasons for such decisions, last but not least, where to begin (geographically) this thesis on the Germanic development of the pre-modern notion of number? The work of the land surveyor is not only to delimit the territory and study it, but also to set a geographical point of departure suitable for the optimal completion of his work: "K. stood on the wooden bridge leading from the road to the village for a long time, looking up at what seemed to be a void" (Kafka, 2009: 5). As a consequence, and given the political situation in the Germanic territories during that period, starting point here will be a halfway territory between the Kingdom of Prussia (*Königreich Preußen*) and the Archduchy of Austria (*Erzherzogtum Österreich*), the two most important constituent parts of the Holy Roman Empire by that time (which then comprised most of the Germanic territories), namely, Silesia (*Schlesien*).

Conclusions

The opening lines of Dedekind's work of 1872, *Continuity and Irrational Numbers* (*Stetigkeit und irrationale Zahlen*), the one in which he presented his definition of real numbers, are devoted to explain the origin of that work: in preparing his lessons on differential calculus at the beginning of his career as a teacher (1858), he wrote, he had to rely "on geometrical evidence" "in the notion of the approximation of a variable quantity to a fixed limit value", something didactically acceptable but lacking in "scientificity" (*Wissenschaftlichkeit*) (Dedekind, 1872: 9).[249] In addition to which, sixteen years later, in the preface to *What are the numbers and what are they for?* (*Was sind und was sollen die Zahlen?*), he pointed out that, as he had already shown in his aforementioned work, the "gradual extension of the concept of number" (*die shrittweise Erweiterung der Zahlbegriffes*) could be carried out without using "foreign ideas" (*fremdartiger Vorstellungen*), such as "measurable quantities" (*messbaren Grössen*) (Dedekind, 1888: X).

Dedekind's standpoint was that of a 19th century Germanic mathematician who proposed arithmetization of analysis but arrived there independently of Weierstrass, that is, without the influence of the author who traditionally is regarded as the key figure in that project. As mentioned in the introduction, even though Kronecker, for example, also proposed a sort of arithmetization, he did not take the steps given by Dedekind, Weierstrass and many other mathematicians, including students of the latter such as Cantor and Heine. Precisely, probably due to the impact of Weierstrass on new generations, as well as due to his temporal preeminence over those other authors, the traditional way of speaking identifies the arithmetizing project with Weierstrass' proposal. But it should not be forgotten that just as the usual way of speaking of 'arithmetization' rules out some proposals that shared some key features with the Weierstrassian, it also makes blurry the differences between this latter and some others.

[249] Dedekind wrote: "Bei dem Begriffe der Annäherung einer veränderlichen Grösse an einen festen Grenzwerth und namentlich bei dem Beweise des Satzesm dass jede Grösse, welche beständig, aber nicht über alle Grenzen wächst, sich gewiss einem Grenzwerth nähern muss, nahm ich meine Zuflucht zu geometrischen Evidenzen."

That said, it is true that 'arithmetization' of analysis entailed a detachment from geometric foundations whose crucial step during the 19th century was, precisely, the abandonment of such a notion of quantity and the embracement of a purely mathematical domain of objects, namely, numbers. A domain, it must be stressed, which was required to be a given continuous one, but static. From this perspective, the set of real numbers was not only infinite in the sense of not having a last member, as for example the set of natural numbers, but also infinite inasmuch as its de facto given members could measure any given quantity and thus correspond to any ordinary quantity. That way, the core notion of variable quantity was eventually replaced by syntactic variables (i.e. a character that represents a number) and functions of a real variable (i.e. functions within the real domain), while the real domain was conceived statically and characterized as totally ordered, dense and continuous.

Nonetheless, all that was only achieved through a long process whose strict periodization simply cannot be established.[250] As denounced by Dedekind, even in the 1870s there were still in –modern– real analysis some remnants of foreign ideas to it, which can even be found, for example, in the works of Weierstrass and Cantor: during that decade, both authors still used the appellative "numerical quantities" (*Zahlengrössen*) to refer to rational and irrational numbers within a pretty modern abstract conception (cf. Cantor, 1872/1932: 97; Weierstrass, 1878/1988: 7, 8 & 40), even though it evoked a previous understanding of mathematics as the science of discrete and continuous quantities which was still present in the mid-19th century (cf. Hoffmann, 1864: 144; Ferreirós, 2007: 42). That way, the work of Weierstrass himself, the author historically regarded as the chief exponent of the proposal nowadays commonly identified with 'the arithmetization of analysis', is evidence of the aforementioned process.

More importantly for the objectives of this thesis, in a sense Bolzano's early mathematical work is also evidence of that process, though in a different way from that of Weierstrass. This means that, despite the fact that, from c. 1900 onwards, that work of Bolzano (in particular his *Purely Analytic Proof*) has been interpreted as an isolated and largely ignored antecedent of that arithmetizing project and of Weierstrassian procedures and notions, this was not the case. Instead, what a careful reading of that work seems to show is the Germanic transition towards a pre-modern notion of number, that is, a transition towards the Germanic mathematical scenario

[250] However, attempts can be made to establish a certain periodization, as is done, for example, in (Ferreirós, 2016: 216ff.).

that without specifically anticipating that later project and those later notions and procedures, preceded them. So, while all those proposals undoubtedly shared common traits, this was not because the one of Bolzano was in the line of the later ones, but rather because Weierstrass and others developed their proposals on the ground plowed by Bolzano and other mathematicians. Which is not just a matter of drawing a line to distinguish what happened before and after: Bolzano's early mathematical work was pre-Weierstrassian and not proto-Weierstrassian since it still featured traits of mathematical notions (of quantities and numbers) and practices that were heavily deviant from the Weierstrassian and later ones.

Even more, those works of Bolzano represent a sort of confluence of two core ideas that shaped Germanic mathematics during the second half of the 18th century and the beginning of the 19th century: strictly speaking, zero and infinitesimals could not be considered quantities and numbers were only the –positive– whole ones. Bolzano was very clear about this in his 1816 work on the binomial theorem: he talked about "the self-contradictory [concept] of infinitely small quantities"; he wrote that it was "possible to divide by every finite (i.e. actual) quantity, but never by a zero (i.e. by nothing)"; and he referred to an exponent n that could denote a "whole number, [and] also a fractional, irrational or negative quantity" (cf. Bolzano, 1816: XI & 2). Or, as he wrote in his *Paradoxes of the Infinite* (*Paradoxien des Unendlichen*), published posthumously in 1851: "[If] the multitude of all numbers is infinite (the set of all the so-called natural or whole) [...], then so is the multitude of quantities [...] an infinite one. [For] not only all numbers are also quantities, but [...] the fractions [...] and the so-called irrational expressions [...] denote quantities" (Bolzano, 1851: 20-21).[251]

On the one hand, it is true that Bolzano's standpoint in *Paradoxes of the Infinite* was not exactly the same as that in his works of 1804-1817 but, on the other hand, it is also true that one and the other were not exactly the same as the views of his Germanic mathematical predecessors. As explained and shown in the second chapter of this work, throughout the second half of the 18th century Germanic mathematicians were taught mathematics in a post-Wolffian context. In other words, those mathematicians grew up in a context in which, although in general Wolff's

[251] Bolzano wrote: "die Menge aller Zahlen (der sogenannten natürlichen oder ganzen [...]) unendlich sei. [...] Ist die Menge der Zahlen (nämlich der sogenannten ganzen Zahlen) unendlich: so ist um so gewisser die Menge der Größen (nach der § 6 und Wissenschaftslehre § 87 vorkommenden Erklärung) eine unendliche. Denn jener Erklärung zufolge sind nicht nur alle Zahlen zugleich auch Größen, sondern es gibt noch weit mehr Größen als Zahlen, weil auch die Brüche $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$, ingleichen die sogenannten irrationalen Ausdrücke $\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \ldots, \pi, e, \ldots$, Größen bezeichnen."

philosophy and mathematical method did not undergo profound modifications, some mathematical notions and practices were increasingly different from those that at least at some point –if not always– Wolff defended. Thus, while at the *Académie Royale des Sciences et Belles Lettres* of Berlin not only French was made the official language, but also the works of Euler, Johann III Bernoulli, Lambert, Lagrange and other 'foreign' mathematicians were conceived and published (in its *Histoire* and *Mémoires*), in much of the Germanic territories central notions and practices of these mathematicians were rejected.

Precisely, because of the relevance of the universities of Göttingen and Halle in shaping the Germanic mathematics of the second half of the 18th century, rather than the relevance of the Academies of Prussia, Paris and St. Petersburg, the second chapter focused on the works of Kästner, Karsten and Segner. Three authors for whom, firstly, numbers were aggregates of units and, as a consequence, numbers par excellence were the –positive– whole ones, from which rationals could be formed, although those that could be called irrational numbers, as Segner clearly stated, could never be accurately –arithmetically– expressed, while zero was not a number but a sign. The reluctance to consider negative numbers within arithmetic framework and the usual absence of the term 'natural numbers' (whose positivity would only arise once considered the negative numbers) in the works of the Germanic mathematicians of that period, were both rooted in an eminently geometric and kinetic conception of mathematics.

Evidence of the above is the fact that, while in the entry 'number' in the English *Cyclopædia* and in the French *Encyclopédie* it was stated that –positive– whole numbers or "simply numbers" were "also known as natural numbers" (Chambers, 1728: 641; Diderot, 1765: 202),[252] by contrast in the entry "*Zahl*" in Klügel's *Mathematisches Wörterbuch* the alternative appellation of "natural numbers" was not employed (Klügel *et al*., 1831: 1053ff.). This is relevant not only because of the date, but also because the division of the "whole science of numbers" into arithmetic and number theory accounts for a change that occurred during those years (*id*.: 1057; cf. Legendre, 1798; Gauss, 1801), while the notion of 'number' makes evident the prevalence of conflicts around it. Just as in his book on the groundings of arithmetic, Klügel only introduced the irrationals and negatives to say that a) the quantity of the former could only be accurately

[252] Louis de Jaucourt (D. J.) wrote: "Les nombres entiers, appelés aussi nombres naturels ou simplement nombres, sont ceux que l'on regarde comme des tous, sans supposer qu'ils soient parties d'autres nombres."

represented in geometry and b) the members (numbers) of the arithmetic progression, if read backwards, would lead to “negated” members (Klügel, 1792: 31 & 50-51), the same can be found in his dictionary (Klügel, 1805: 104ff. & 949).

Secondly, for Kästner, Karsten, Segner and many of the Germanic mathematicians of the second half of the 18th century, ‘quantity’ was that capable of increase and decrease, as –at some point– for Wolff, and therefore just as zero was not a quantity, neither were quantities the differentials and infinitesimals associated to zeros. Ultimately, one could mathematically consider the variability of a quantity but one could not ascribe to it a –finite– numerical value. As summarized by Segner when he explained the variability that led from positive to negative quantities and vice versa, there were “infinitely many types of quantities, [...] such as possessions, debts; accepted, spent; gravity, force directed upwards; water flowing into vessel, water emanating [from it], and very many other” (Segner, 1758: 5).[253] A variability, it must be stressed, that at that time Germanic mathematicians primarily interpreted in geometric terms; hence the law of continuity was introduced within the geometric framework.

Coupled with the reluctance towards those new foreign developments, however, it is worth noting two crucial aspects of Germanic mathematical practices of the time, namely, their use of irrational and infinitely large quantities. On the one hand, despite the differences between their proposals, Kästner, Karsten and Segner, like many others, conceived irrational numbers as those that could not be properly expressed by whole units or aliquote parts of the unit. As a consequence, irrationals were not numbers in the strict sense, since they were closer to geometric magnitudes, although they were referred to as ‘numbers’. On the other hand, for many Germanic mathematicians, as insistently stated by Karsten, infinitely large quantities were not problematic and so one was entitled to use them as $= \infty$ in mathematics.

By contrast, in his early mathematical works Bolzano: a) was equally reticent towards infinitely large and small quantities (cf. Bolzano, 1810: 30); b) considered that the concept of the irrationality of a quantity still had to be clearly developed (cf. Bolzano, 1816: 143-144), in spite

[253] Segner wrote: “Caeterum infinita sunt quantitatum genera, quarum altera refertur ad alteram, quemadmodum progressus refertur ad regressum, ascensus ad descensum, vel motus quicunque versus aliquam partem, ad motum versus partem oppositam. Tales sunt, possessiones, debita; accepta, expensa; gravitas, vis sursum directa; aqua in vas influens, aqua effluens, & aliae plurimae, quarum quaedam in sequentibus clare exponentur.”

of which he referred to "irrational quantities" but not to "irrational numbers";[254] and c) although he did not refer to the "commonly called" natural numbers, as he did some years later in his *Paradoxes*, he did use this expression (*natürlichen Zahlen*) by 1817 (cf. Bolzano, 1816: 41, 43, 85 & 96). Which means that, while Bolzano's mathematical terminology and practice show a step forward with regard to the basic notion of natural numbers, his general notions of quantity and number in a sense were drawn more rigorously but at the same time more modernly than the ones of his predecessors. The assumption of positive whole numbers as the most natural multiplicity of numbers entailed that there was also the –not so natural– multiplicity of negative numbers, to which he usually referred in terms of quantities with negative whole-numbered values (that is, quantities to which could be assigned numerical values). But, at the same time, such a notion of 'numbers' implied that these ones were less than the quantities, among which were the whole positive, but also the fractional, negative and irrational ones; concepts, these last two, that from his perspective still required to be clearly developed.

Furthermore, by 1817 Bolzano was reluctant towards the concept of an infinite quantity, and this included both the infinitely big and small quantities. As he wrote in 1810, it was still to be decided whether both concepts could be regarded, not as quantities, but as symbolic expressions (that is, in current terms, as tools), as they were, for example $\sqrt{-1}$ (1810) or π, e and others (1851).[255] So, while whole negative and fractional quantities could be numerically expressed, the irrationals and the infinitely small and big could not be –finitely– numerically expressed or, as he emphasized in his works of 1816-1817, infinite quantities could not be strictly determined: for example, a) while the magnitude of an infinite straight line could not be determined and therefore this one was an "indeterminate line" (1804), the magnitude of a straight line between points a and b could be determined and so he would refer to it as a "determinable line" (1817A); and b) he said that a function $\frac{a}{b-x}$ "does not have any determinate value when $x = b$, but becomes what is called infinitely big" (1817B), but spoke of a determined multitude of infinite functions $fx, \bar{f}x, \bar{\bar{f}}x, \ldots$ that varied by the law of continuity for x (1817A).

[254] As explained in the last chapter of this thesis, although it is true that Bolzano referred once to "*irrationalen Zahl*" in his mathematical works of 1804-1817 (cf. Bolzano, 1816: 137), it seems appropriate to interpret his reference to "whole, fractional or even irrational number" (§73) as meaning what he wrote at the beginning of that work, namely, "whole number, [and] also a fractional, irrational or negative quantity" (Bolzano, 1816: 2), given that in his solution to the problem stated in §73 he referred once again to "irrational quantities" (*irrationaler Grössen* and *Irrationalgrösse*).

[255] It is worth stressing that the conception as "symbolic expressions" of some of what we now consider numbers was not entirely strange at the time: as it was said before, Bolzano, Cauchy and Jandera, for example, regarded imaginary numbers as "symbolic expressions" (cf. Bolzano, 1810: 30; Cauchy, 1821: iij-iv & 173ff.; Jandera, 1830: XXIX).

His definition of a continuous function and quantities ω, definitions which closely resemble the modern ones of a continuous function of a real variable and Weierstrassian ε, and so constitute two of the pillars that have traditionally sustained much of the attributed modernity of his *Purely Analytic Proof*, should be interpreted within that framework and not within later ones (cf. C.2.2).

What Bolzano did in his mathematical works of 1816-1817 seems, therefore, consistent with his conception of mathematics and his notions of quantity and number. He defined mathematics as the science about the general laws or forms to which things must conform in their existence, because mathematical disciplines were not only purely scientific but also useful for everyday needs. To mathematically study things (i.e. objects of thought or empirical), however, quantities still played a crucial role in his system, but also their modes of composition or forms. This seems to be the reason why combinatorial theory was so appealing to him to the extent that he considered it a core part of mathematics. Even more, if one takes into account that underlying Hindenburg's program there was an aim to work mathematically in finite terms, Germanic combinatorial theory of the early 19th century fitted perfectly with Bolzano's own objectives: quantities varied but in order to study analytically their variation one could not resort to geometric or kinetic notions and arguments, since these ones were alien to analysis and in fact belonged to mathematical parts subordinated to analysis, just as one could not rely on actually infinite quantities, i.e. non determined quantities, but in any case on infinite multitudes.

That way, when Bolzano explained in the preface to his 1816 work the concept of quantities ω, he said that there was nothing objectionable in it and added that the existence of such quantities in space and time could be ascertained; a remark that does not fit with the syntactic conception of variables within the later analytical framework and indeed implies assuming space and time as continuous, something that later mathematicians would consider an axiom (cf. Cantor, 1872; Dedekind 1872). For him, variable quantities ω were not numbers (i.e. were not Weierstrassian ε), but neither were they quantities that tended to zero in a strictly dynamic way (i.e. were not Cauchy's infinitesimals, implicitly dynamic, nor Carnot's "continuously decreasing" quantities, explicitly dynamic).

In other words, quantities ω were for Bolzano variable quantities that should not be assumed as *being* smaller than any conceivable possible quantity, as the strictly dynamic conception of quantities required, but as *capable of becoming* smaller than any given quantity. Hence his distinction between “variable” and “constant” variable quantities (cf. Bolzano, 1817B: 30-31), as well as his much-criticized proof procedure of his [convergence] criterion, where: a) he first discarded to prove that the quantity X (to which a sequence of quantities [converged]) could be assumed to be variable, an hypothesis that he took for obviously true, since that way it could always be assumed as close as desired to the term of the sequence with which it was supposed to be compared; and, secondly, b) he stated that the hypothesis of X as a constant quantity also contained nothing impossible and proved that the sequence approached to such a quantity, which could be determined as accurately as pleased.

It is not only, therefore, that by 1817 Bolzano named ‘quantities’ what later would be called ‘real numbers’. For him, it must be stressed, irrational quantities were not numbers and, indeed, the irrationality of a quantity was a concept that still required to be clarified. Thus, just as he worked with finite segments of infinite series (i.e. determined segments), ultimately he worked with –indeterminate– irrational quantities by means of determined fractions (cf. Bolzano, 1816: 23, 76 & 137-138; Bolzano, 1817B: 38). Even his definition of quantities ω could be interpreted as a sort of attempt to finitely treat the potentially infinite variability of those quantities towards zero.

In that way, though some of his mathematical practices not only differ a lot from the ones of his Germanic mathematicians predecessors and contemporaries, but in fact they resemble the modern ones, the underlying ideas to those practices of Bolzano reveal how heavily deviant they were from later practices, strictly speaking. Because, while within his analytical framework a) he introduced the notion of a “multitude of infinite elements”, an object of mathematical study inasmuch as it was determined by a law or a finite number of laws, and, moreover, b) he assumed that quantities were determined by the law of continuity, c) he did not give the step to consider a quantity as an actual multitude of infinite elements. Would he have done it, he would have considered actual infinite quantities as objects of analytical study and irrational quantities would not have been problematic. Moreover, would he have done it, a further step would have still been required for Bolzano’s ω to be Weierstrassian ε, namely, to consider some ‘numbers’ as multitudes of infinite elements. But the one and the other step would have contravened not only his idea of a correct mathematical procedure, but also his notions of quantity and number.

While in 1865 Weierstrass enunciated what today is known as Bolzano-Weierstrass theorem in terms of a point in –or on the boundary of– a bounded part of a plane (cf. Weierstrass, 1865/66: 16[B]) and later in his formulation of that theorem he identified "an unbounded variable magnitude, which [formed] a simple manifold", with its geometrical representation by a straight line (Weierstrass, 1886: 60),[256] those could not have been valid procedures for Bolzano, at least according to his early mathematical proposal. As a matter of fact, one of the few places throughout his 1816 work and his *Purely Analytic Proof* where he used the term "point" as identified with, traditional reading would say, the value of a Weierstrassian real quantity,[257] was in the preface of that latter work: one of the usual types of proof of the intermediate value theorem, he wrote, depended on a geometric truth, namely, "that every continuous line of simple curvature whose ordinates are first positive [and] then negative (or vice versa), must necessarily intersect the abscissa line somewhere at a point lying between those ordinates" (Bolzano, 1817B: 6).[258] From Bolzano's perspective, this was an invalid mathematical procedure due to the subordination of geometry to analysis. But, ultimately, this also highlights how deviant were Bolzano's mathematical notions and practices from later Weierstrassian and arithmetizing ones.

Last but not least, in the transition from the kinetic approach of the 18th century, in which quantities prevailed, to the static standpoint that would be characteristic of 'arithmetized' analysis (e.g. the one of Weierstrass, Dedekind, Cantor and others), one of the crucial points was the *realization that a clear conceptual characterization of the continuity* of the real-number domain was needed. Success in arithmetizing the continuity of this domain was to become a key element in that project, perhaps even its climax, as expressed in the title of Dedekind's 1872 work, *Continuity and irrational numbers*. By contrast, it was characteristic of pre-Weierstrassian proposals, among them the early one of Bolzano, to not yet envision that project and apparently

[256] As said before, both Cantor and Dedekind stressed their right to do so in their works of 1872 (cf. Cantor, 1872/1932: 97; Dedekind, 1872: 18-19).

[257] Other place in those works where such identification can be found is in the §13 of his *Purely Analytic Proof*, when he exemplified his so-called "least upper bound" theorem by means of a rectangular hyperbola (cf. Bolzano, 1817B: 49-50).

[258] Bolzano wrote: "Eine jede continuirlicheLinie von einfacher Krümmung, deren Ordinaten erst positiv, dann negativ sind (oder umgekehrt), die Abscissenlinie nothwendig irgendwo in einem Puncte, der zwischen jenen Ordinaten liegt, durch schneiden müsse."

had no clear notion of a "theory of the continuum" (i.e. topological), nor any proposal about how to approach the elements of topology (cf. Ferreirós, 2007: 137ff.), despite Bolzano's pre-set-theoretical and pre-topological ideas. A difference that, precisely, stresses the distance between Bolzano's proposal in 1817 and, for example, the one of Cantor (who used limit points and derived sets) and Dedekind (who used his cut principle of continuity) in 1872.

And yet, once again, at the same time Bolzano appears as an important pre-Weierstrassian author and a pioneering figure, given, for example, the method of partition of intervals that he used in his *Purely Analytic Proof* and that was highly valued by Weierstrass. Once the problem of characterizing the continuity of $\mathbb{R}$ became clear, as it was not in Bolzano's early mathematical work, that method could be turned into the so-called Bolzano-Weierstrass principle, [259] according to which an infinite sequence of nested, closed intervals, always has nonvoid intersection (i.e. at least one point belongs to every interval). As it increasingly became clear, that principle offered a satisfactory characterization of the continuity of the real number system, alternative to the cut property proposed by Dedekind in 1872. Thus, for example, in 1884 Cantor emphasized the importance of that "very old" principle, which, he said, "was hardly possible to replace by an essentially different one" (Cantor, 1884/1932: 212).[260] By that time, however, the Germanic mathematical context was very different from that of Bolzano's *Purely Analytic Proof*, a work that in the end would be as widely recognized as Bolzano wanted his first works to be (cf. Bolzano, 1817B: 27), although often interpreted in a way that, according to this thesis, seems alien to what he actually proposed.

[259] This expression, used in (Ferreirós, 2007: 139-141), is quite common in mathematical terminology, even though strictly speaking it is anachronistic.

[260] Cantor wrote: "Ich bemerke, dass die hier angewandte Beweismethode, welche wohl schwerlich durch eine wesentlich andere ersetzt werden kann, ihrem Kerne nach sehr alt ist; in neuerer Zeit findet man sie unter anderem in gewissen zahlentheoretischen Untersuchungen bei Lagrange, Legendre und Dirichlet, in Cauchy's *Cours d'analyse* (Note troisième) und in einigen Abhandlungen von Weierstrass und Bolzano; es scheint mir daher nicht richtig, sie vorzugsweise oder aussechliesslich auf Bolzano zurückzuführen, wie solches in neuerer Zeit beliebt worden ist."

Conclusiones

Las líneas iniciales del trabajo de Dedekind de 1872, *Continuidad y números irracionales* (*Stetigkeit und irrationale Zahlen*), el mismo en el que presentó su definición de los números reales, están dedicadas a explicar el origen de dicho trabajo: al preparar sus lecciones sobre cálculo diferencial al inicio de su carrera como profesor (esto es, en 1858), escribió, tuvo que basarse en "evidencia geométrica" "en la noción de aproximación de una cantidad variable a un valor límite establecido", algo didácticamente aceptable pero carente de "cientificidad" (*Wissenschaftlichkeit*) (Dedekind, 1872: 9).[261] Aunado a lo cual, dieciséis años después, en el prefacio a *¿Qué son y para qué sirven los números?* (*Was sind und was sollen die Zahlen?*), él señaló que, como ya había mostrado en su trabajo antes mencionado, la "extensión gradual del concepto de número" (*die shrittweise Erweiterung der Zahlbegriffes*) se podía llevar a cabo sin emplear "ideas extrañas" (*fremdartiger Vorstellungen*), como por ejemplo la de "cantidades medibles" (*messbaren Grössen*) (Dedekind, 1888: X).

El punto de vista de Dedekind era el de un matemático germánico del siglo XIX quien propuso una aritmetización del análisis a la cual llegó independientemente de Weierstrass, esto es, sin la influencia del autor que tradicionalmente es considerado como la figura clave en dicho proyecto. Como se mencionó en la introducción, pese a que Kronecker, por ejemplo, también propuso una especie de aritmetización, él no dio los pasos dados por Dedekind, Weierstrass y otros matemáticos, incluyendo a Cantor, Heine y otros estudiantes de aquel último. Por ello, probablemente debido al impacto de Weierstrass en las nuevas generaciones, así como debido a su preeminencia temporal sobre aquellos otros autores, la narrativa tradicional identifica el proyecto aritmetizador con la propuesta de Weierstrass. Sin embargo, no se ha de olvidar que así como el modo habitual de referirse a la 'aritmetización' deja de lado algunas propuestas que compartían rasgos cruciales con la Weierstrassiana, a su vez hace borrosas las diferencias entre esta última y algunas otras.

[261] Dedekind escribió: "Bei dem Begriffe der Annäherung einer veränderlichen Grösse an einen festen Grenzwerth und namentlich bei dem Beweise des Satzesm dass jede Grösse, welche beständig, aber nicht über alle Grenzen wächst, sich gewiss einem Grenzwerth nähern muss, nahm ich meine Zuflucht zu geometrischen Evidenzen".

Dicho lo anterior, es verdad que la 'aritmetización' del análisis conllevó un desapego de los fundamentos geométricos cuyo paso crucial durante el siglo XIX fue, justamente, el abandono de tal noción de cantidad y la adopción de un dominio puramente matemático de objetos, a saber, los números. Un dominio, ha de ser recalcado, que se requería que fuera continuo pero estático. Desde esta perspectiva, el conjunto de los números reales no sólo era infinito en el sentido de que carecía de un último elemento, como por ejemplo el conjunto de los números naturales, sino también era infinito en tanto sus elementos dados de facto podían medir cualquier cantidad dada y, por ende, ser identificados con cualquiera cantidad ordinaria. De esta manera, la noción central de 'cantidad variable' fue eventualmente reemplazada por las variables sintácticas (esto es, caracteres que representan números) y funciones de una variable real (esto es, funciones en el marco del dominio real), mientras que el dominio real fue concebido estáticamente y caracterizado como totalmente ordenado, denso y continuo.

Empero, todo ello sólo fue logrado a través de un largo proceso cuya estricta periodización simplemente no puede ser establecida.[262] Como denunció Dedekind, en la década de 1870 aún existían en el análisis real –moderno– algunos remanentes de ideas ajenas a este, mismas que se pueden encontrar, por ejemplo, en los trabajos de Weierstrass y Cantor: durante dicha década, ambos autores aún empleaban la denominación "cantidades numéricas" (*Zahlengrössen*) para referirse a los números racionales e irracionales dentro de una concepción abstracta sumamente moderna (cf. Cantor, 1872/1932: 97; Weierstrass, 1878/1988: 7, 8 y 40), pese a que dicha denominación evocaba una comprensión previa de la matemática, en tanto ciencia de cantidades discretas y continuas, aún presente a mediados del siglo XIX (cf. Hoffmann, 1864: 144; Ferreirós, 2007: 42). Así, el trabajo del propio Weierstrass, el matemático que históricamente ha sido considerado como el máximo exponente de la propuesta que hoy día comúnmente se identifica con la 'aritmetización del análisis', es evidencia de aquel proceso.

Sobre todo, para los fines de esta tesis, en cierto sentido los primeros trabajos matemáticos de Bolzano a su vez son muestra de dicho proceso, si bien de una manera diferente a como lo es la obra de Weierstrass. Esto significa que, pese a que a partir de c. 1900 en adelante, aquella obra de Bolzano (en particular su *Prueba puramente analítica*) ha sido interpretada como un

[262] Sin embargo, se pueden hacer intentos por establecer una cierta periodización, como se hace, por ejemplo, en (Ferreirós, 2016: 216ss.).

antecedente aislado y ampliamente ignorado de ese proyecto aritmetizador y de nociones y procedimientos Weierstrassianos, tal lectura es incorrecta. Por el contrario, lo que parece mostrar una lectura cuidadosa de esos trabajos de Bolzano es la transición germánica hacia una noción premoderna de número, esto es, una transición hacia el escenario matemático germánico que, sin anticipar aquel proyecto y aquellas nociones y procedimientos posteriores, les antecedió. De ese modo, mientras que indudablemente todas esas propuestas comparten rasgos comunes, esto no se debe a que Bolzano estuviera en la línea de las posteriores sino, en cambio, a que Weierstrass y otros desarrollaron sus propuestas sobre la tierra trabajada por Bolzano y otros matemáticos. Lo cual no es meramente una cuestión de distinguir entre lo que ocurrió antes y después: los primeros trabajos matemáticos de Bolzano fueron pre-Weierstrassianos y no proto-Weierstrassianos, puesto que aún tenían características de nociones (de cantidad y número) y prácticas matemáticas sumamente distintas de la propuesta de Weierstrass y posteriores.

Aún más, aquellos trabajos de Bolzano representan una especie de confluencia de dos ideas medulares que moldearon las matemáticas germánicas durante la segunda mitad del siglo XVIII y comienzos del siglo XIX: estrictamente hablando, el cero y los infinitesimales no podían ser considerados cantidades y los números sólo eran los enteros –positivos–. Bolzano fue muy claro respecto a esto en su trabajo de 1816 sobre el teorema del binomio: se refirió al "[concepto] auto-contradictorio de cantidades infinitamente pequeñas"; escribió que era "posible dividir por cualquier cantidad finita (esto es, actual), pero nunca por cero (esto es, nada)"; y habló sobre un exponente n que podía denotar un "número entero, [y] también una cantidad racional, irracional o negativa" (cf. Bolzano, 1816: XI y 2). O, como escribió en *Las paradojas del infinito* (*Paradoxien des Unendlichen*), publicado póstumamente en 1851: "[Si] la multitud de todos los números es infinita (el conjunto de los llamados naturales o enteros) [...], entonces también es infinita la multitud de las cantidades [...]. [Puesto que] no sólo todos los números son también cantidades, sino que [también] [...] denotan cantidades las fracciones [...] y las denominadas expresiones irracionales" (Bolzano, 1851: 20-21).[263]

[263] Bolzano escribió: "die Menge aller Zahlen (der sogenannten natürlichen oder ganzen [...]) unendlich sei. [...] Ist die Menge der Zahlen (nämlich der sogenannten ganzen Zahlen) unendlich: so ist um so gewisser die Menge der Größen (nach der § 6 und Wissenschaftslehre § 87 vorkommenden Erklärung) eine unendliche. Denn jener Erklärung zufolge sind nicht nur alle Zahlen zugleich auch Größen, sondern es gibt noch weit mehr Größen als Zahlen, weil auch die Brüche $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$, ingleichen die sogenannten irrationalen Ausdrücke $\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \ldots, \pi, e, \ldots$, Größen bezeichnen".

Ciertamente, la postura de Bolzano en *Las paradojas del infinito* no era exactamente la misma que aquella en sus trabajos de 1804-1817 pero, a su vez, una y otra no eran exactamente la misma que la de sus predecesores matemáticos germánicos. Como se muestra y explica en el segundo capítulo de este trabajo, a lo largo de la segunda mitad del siglo XVIII a los matemáticos germánicos se les enseñaron las matemáticas en un contexto post-Wolffiano. En otras palabras, tales matemáticos crecieron en un contexto en el cual, si bien en general la filosofía y el método matemático de Wolff no sufrió profundas modificaciones, algunas nociones y prácticas matemáticas fueron cada vez más diferentes de aquellas que, si no siempre, al menos en algún momento defendió Wolff. Así, mientras que en la *Académie Royale des Sciences et Belles Lettres* de Berlin no sólo el francés fue establecido como el idioma oficial, sino que además ahí se concibieron y publicaron (en sus *Histoire* y *Mémoires*) trabajos de Euler, Johann III Bernoulli, Lambert, Lagrange y otros matemáticos 'extranjeros', en gran parte de los territorios germánicos se rechazaban nociones y prácticas centrales de estos matemáticos.

Precisamente, dada la relevancia de las universidades de Göttingen y Halle en la conformación de las matemáticas germánicas de la segunda mitad del siglo XVIII, no así de la Academia de Preußen, la de Paris y la de San Petersburgo, el segundo capítulo se enfocó en los trabajos de Kästner, Karsten y Segner. Tres autores para quienes, en primer lugar, los números eran agregados de unidades y, como consecuencia, los números por excelencia eran los enteros –positivos–, a partir de los cuales se podían formar los racionales, mientras que los llamados irracionales, como claramente lo señaló Segner, nunca podrían ser –aritméticamente– expresados con precisión, siendo además el cero un signo y no un número. La reticencia para considerar a los números negativos en el entramado aritmético, así como la ausencia habitual del término 'números naturales' (cuya positividad sólo emergía al considerar a los números negativos) en los trabajos de los matemáticos germánicos de la época, estaban una y otra enraizadas en una concepción eminentemente geométrica y cinética de las matemáticas.

Evidencia de lo anterior es el hecho de que, mientras que en la entrada 'número' en la *Cyclopædia* inglesa y en la *Encyclopédie* francesa se indicaba que los números enteros –positivos– o "simplemente números" "también eran conocidos como números naturales

(Chambers, 1728: 641; Diderot, 1765: 202),[264] en cambio en la entrada "*Zahl*" en el *Mathematisches Wörterbuch* de Klügel esa denominación alternativa no era usada (Klügel *et al*., 1831: 1053ss.). Esto es relevante no sólo debido a la fecha, sino también debido a que la división de "toda la ciencia de los números" en aritmética y teoría de números da cuenta de un cambio que tuvo lugar durante esos años (*id*.: 1057; cf. Legendre, 1798; Gauss, 1801), mientras que la noción de 'número' muestra la prevalecencia de conflictos en torno a ella. Como consecuencia, así como en su libro sobre los fundamentos de la aritmética Klügel sólo introdujo los irracionales y los negativos para decir que a) la cantidad de los primeros sólo se podía representar con exactitud en la geometría y b) los miembros (números) de la progresión aritmética, de ser leídos al revés, conducirían a miembros "negados" (Klügel, 1792: 31 y 50-51), lo mismo se puede encontrar en su diccionario (Klügel, 1805: 104ss. y 949).

En segundo lugar, para Kästner, Karsten, Segner y muchos otros matemáticos germánicos de la segunda mitad del siglo XVIII, 'cantidad' era aquello capaz de incremento y disminución, como –en cierta medida– lo era para Wolff, y como consecuencia, así como el cero no era una cantidad, tampoco lo eran las cantidades que los diferenciales e infinitesimales asociaban a ceros. En última instancia, uno podía considerar matemáticamente la variabilidad de una cantidad pero no adscribirle a ella un valor numérico –finito–. Como de alguna manera lo resumió Segner cuando explicó la variabilidad que conducía de una cantidad positiva a una negativa y viceversa, había "infinitamente muchos tipos de cantidades, [...] como por ejemplo las posesiones y deudas; lo recibido y lo gastado; la gravedad y la fuerza dirigida hacia arriba; el flujo del agua en un recipiente y el del agua emanando de este; y muchas otros más" (Segner, 1758: 5).[265] Una variabilidad, se ha de enfatizar, que en aquellos tiempos los matemáticos germánicos interpretaban sobre todo en términos geométricos; de ahí que la ley de continuidad fuera introducida en el entramado geométrico.

Aunado a la reticencia hacia dichos nuevos desarrollos extranjeros, sin embargo, vale la pena notar dos aspectos cruciales de las prácticas matemáticas germánicas de la época, a saber, su

[264] Louis de Jaucourt (D. J.) escribió: "Les nombres entiers, appelés aussi nombres naturels ou simplement nombres, sont ceux que l'on regarde comme des tous, sans supposer qu'ils soient parties d'autres nombres".
[265] Segner escribió: "Caeterum infinita sunt quantitatum genera, quarum altera refertur ad alteram, quemadmodum progressus refertur ad regressum, ascensus ad descensum, vel motus quicunque versus aliquam partem, ad motum versus partem oppositam. Tales sunt, possessiones, debita; accepta, expensa; gravitas, vis sursum directa; aqua in vas influens, aqua effluens, & aliae plurimae, quarum quaedam in sequentibus clare exponentur".

uso de las cantidades irracionales y de las cantidades infinitamente grandes. Por una parte, pese a las diferencias entre sus propuestas, Kästner, Karsten y Segner, como muchos otros, concebían a los números irracionales como aquellos que no podían ser expresados apropiadamente mediante unidades enteras o partes alícuotas de la unidad. Debido a ello, en sentido estricto los irracionales no eran números, puesto que ellos estaban más próximos a las magnitudes geométricas, si bien se referían a ellos como 'números'. Por otra parte, para muchos matemáticos germánicos, como Karsten insistentemente defendió, las cantidades infinitamente grandes no eran problemáticas y, por ende, uno estaba autorizado a emplearlas en matemáticas como $= \infty$.

En cambio, en sus primeros trabajos matemáticos, Bolzano: a) era reticente por igual a las cantidades infinitamente pequeñas y a las infinitamente grandes (cf. Bolzano, 1810: 30); b) consideraba que el concepto de irracionalidad de una cantidad aún debía de ser desarrollado con claridad (cf. Bolzano, 1816: 143-144), a pesar de lo cual él se refería a "cantidades irracionales", aunque no a "números irracionales";[266] y c) si bien él no se refirió a los "comúnmente llamados" números naturales, como lo hiciera años más tarde en *Las paradojas*, hacia 1817 él sí usaba esta expresión (*natürlichen Zahlen*) (cf. Bolzano, 1816: 41, 43, 85 y 96). Lo que significa que mientras la práctica y la terminología matemática de Bolzano muestran un paso adelante con respecto a la noción básica de números naturales, de cierta manera sus nociones generales de cantidad y número estaban trazadas más rigurosamente pero a la vez más modernamente que las de sus predecesores. La asunción de números enteros positivos como la multiplicidad más natural de números conllevaba que también existía la –no tan natural– multiplicidad de números negativos, a los cuales él usualmente se refería en términos de cantidades con valores numerados por enteros negativos (es decir, cantidades a las que se les podían asignar valores numéricos). Pero, al mismo tiempo, semejante noción de 'números' implicaba que estos eran menos que las cantidades, entre las cuales estaban las enteras positivas, pero también las racionales, negativas e irracionales; conceptos, estos dos últimos, que desde su perspectiva aún necesitaban ser desarrollados con claridad.

[266] Como se explicó en el último capítulo de esta tesis, si bien es cierto que Bolzano se refirió en alguna ocasión en sus trabajos de 1804-1817 a "*irrationalen Zahl*" (cf. Bolzano, 1816: 137), parece apropiado interpretar dicha referencia a "números enteros, racionales e incluso irracionales" (§73) más bien en la línea de lo que escribió al inicio de ese trabajo, a saber, "un número entero, [y] también una cantidad racional, irracional o negativa" (Bolzano, 1816: 2), dado que en su solución al problema presentado en el §73 él volvió a referirse a "cantidades irracionales" (*irrationaler Grössen* e *Irrationalgrösse*).

Aún más, hacia 1817 Bolzano era reticente respecto al concepto de una cantidad infinita, lo que incluía a las cantidades infinitamente grandes y pequeñas. Como escribió en 1810, aún estaba por ser decidido si ambos conceptos podrían ser considerados, no como cantidades, sino como expresiones simbólicas (esto es, en términos actuales, como herramientas), como lo eran, por ejemplo, $\sqrt{-1}$ (1810) o π, e y otras (1851).[267] Así, mientras que las cantidades enteras negativas y racionales podían ser expresadas numéricamente, las irracionales y las infinitamente pequeñas o grandes no podían ser expresadas numérica-finitamente, esto es, como enfatizó en sus trabajos de 1816-1817, las cantidades infinitas no podían ser estrictamente determinadas: por ejemplo, a) mientras que la magnitud de una línea recta infinita no podía ser determinada y, por ende, ésta era una "línea indeterminada" (1804), la magnitud de una línea recta entre dos puntos a y b podía ser determinada y, por lo tanto, él podía referirse a ésta como una "línea determinable" (1817A); y b) escribió que una función $\frac{a}{b-x}$ "no tiene un valor determinado cuando $x = b$, sino que se torna lo que se denomina infinitamente grande (1817B), pero se refirió a una multitud infinita determinada de funciones $fx, \bar{f}x, \bar{\bar{f}}x, \ldots$ que variaba para x conforme a la ley de continuidad (1817A). Sus definiciones de una función continua y de las cantidades ω, que se asemejan mucho a la definición moderna de una función continua de una variable real y a la ε Weierstrassiana, y que por ende constituyen dos de los pilares que tradicionalmente han sustentado mucha de la modernidad atribuida a su *Prueba puramente analítica*, han de ser interpretados dentro de aquel entramado y no dentro de entramados posteriores (cf. C.2.2).

Lo que Bolzano hizo en sus trabajos matemáticos de 1816-1817 parece, por lo tanto, consistente con su concepción de las matemáticas y sus nociones de cantidad y número. Él definió la matemática como la ciencia sobre las leyes o formas generales a las que las cosas habían de ajustarse en su existencia, ya que las disciplinas matemáticas no sólo eran puramente científicas sino también útiles para necesidades del día a día. Para estudiar matemáticamente las cosas (esto es, objetos del pensamiento o empíricos), sin embargo, las cantidades aún jugaban un rol crucial en su sistema, como también lo hacían sus modos de composición o formas. Esta parece ser la razón por la que la teoría combinatoria resultaba tan atractiva para él, al grado de que él la consideraba una parte medular de la matemática. Todavía más, si uno toma en cuenta que al

[267] Vale la pena recalcar que la concepción de algunos de los que hoy día se consideran números como "expresiones simbólicas" no era enteramente extraña en la época: como se dijo antes, tanto Bolzano como Cauchy y Jandera, por ejemplo, consideraban a los números imaginarios como expresiones simbólicas (cf. Bolzano, 1810: 30; Cauchy, 1821: iij-iv y 173ss.; Jandera, 1830: XXIX).

programa de Hindenburg subyacía el objetivo de trabajar matemáticamente en términos finitos, la teoría combinatoria germánica de principios del siglo XIX encajaba perfectamente con los objetivos de Bolzano: las cantidades variaban pero para estudiar analíticamente su variación uno no podía recurrir a nociones y argumentos geométricos o cinéticos, puesto que estos eran ajenos al análisis y de hecho pertenecían a partes de la matemática subordinadas al análisis, así como uno no podía basarse en cantidades infinitas en acto, es decir, en cantidades no determinadas, sino, en cualquier caso, en multitudes infinitas.

Así, cuando en el prefacio a su trabajo de 1816 Bolzano explicó el concepto de cantidades ω, él dijo que no había nada objetable en dicho concepto y añadió que la existencia de tales cantidades en el espacio y tiempo era inapelable; una observación que no encaja con la concepción sintáctica de 'variables' en el entramado analítico posterior y que, de hecho, implica la asunción del espacio y del tiempo en tanto continuos, algo que matemáticos posteriores habrían de considerar un axioma (cf. Cantor, 1872; Dedekind 1872). Para él, las cantidades variables ω no eran números (esto es, no eran las ε Weierstrassianas), pero tampoco eran cantidades que tendían a 0 de una manera estrictamente dinámica (esto es, no eran los infinitesimales de Cauchy, implícitamente dinámicos, ni las cantidades "continuamente decrecientes" de Carnot, explícitamente dinámicas).

En otras palabras, para Bolzano las cantidades ω eran cantidades variables que no debían ser asumidas *siendo* más pequeñas que cualquier cantidad posible concebible, como lo demandaba una concepción de las cantidades estrictamente dinámica, sino que debían ser asumidas como cantidades *capaces de ser* más pequeñas que cualquier cantidad dada. De ahí su distinción entre cantidades variables "variables" y "constantes" (cf. Bolzano, 1817B: 30-31), así como su tan criticado procedimiento para probar su criterio de [convergencia], en la cual él: a) primero descartó probar que la cantidad X (en la cual [convergía] una secuencia de cantidades) podía ser asumida como variable, una hipótesis que daba por obviamente verdadera puesto que de ese modo siempre podía ser asumida tan cerca como se quisiera al término de la secuencia con el cual se suponía que era comparada; y, segundo, b) afirmó que la hipótesis de X como una cantidad constante tampoco era imposible y probó entonces que la secuencia se aproximaba a dicha cantidad, misma que podía ser determinada con la precisión que se quisiera.

No se trata simplemente, por ende, de que hacia 1817 Bolzano denominara ‘cantidades’ a aquellas que más tarde se llamarían ‘números reales’. Para él, debe quedar claro, las cantidades irracionales no eran números y, de hecho, la irracionalidad de una cantidad era un concepto que aún necesitaba ser clarificado. Como consecuencia, así como él trabajó con segmentos finitos de series infinitas (es decir, con segmentos determinados), en última instancia también trabajó con cantidades irracionales –indeterminadas– mediante fracciones determinadas (cf. Bolzano, 1816: 23, 76 y 137-138; Bolzano, 1817B: 38). Incluso, su definición de cantidades ω podría ser interpretada como una suerte de intento por tratar de modo finito la variabilidad potencialmente infinita hacia 0 de aquellas cantidades.

Así, pese a que algunas de sus prácticas matemáticas no sólo diferían sobremanera de las de sus antecesores y contemporáneos matemáticos germánicos, sino que de hecho se asemejaban a prácticas modernas, las ideas subyacentes a aquellas prácticas de Bolzano revelan lo diferentes que estrictamente hablando eran respecto a prácticas posteriores. Porque, mientras que en su entramado analítico a) él introdujo la noción de una “multitud de infinitos elementos”, un objeto de estudio matemático en tanto que estaba determinado por una ley o un número finito de leyes, y, sobre todo, b) él asumió que las cantidades estaban determinadas por la ley de continuidad, c) él no dio el paso a considerar una cantidad como una multitud actual de infinitos elementos. De haberlo hecho, él habría considerado cantidades infinitas actuales como objetos de estudio analítico y las cantidades irracionales no habrían sido problemáticas. Aún más, incluso de haberlo hecho, todavía se hubiera requerido un paso más para que las cantidades ω de Bolzano fueran ε de Weierstrass, a saber, considerar algunos ‘números’ como multitudes de infinitos elementos. No obstante, lo uno y lo otro habrían contravenido no sólo su idea de un procedimiento matemático correcto, sino también sus nociones de cantidad y número.

Mientras que Weierstrass en 1865 enunció lo que hoy día se conoce como el teorema de Bolzano-Weierstrass en términos de un punto en –o en la frontera de– una parte limitada de un plano (cf. Weierstrass, 1865/66: 16[B]) y, posteriormente, en su formulación de ese teorema identificó “una cantidad variable ilimitada, que [formaba] un dominio simple” con su representación geométrica de una línea recta (Weierstrass, 1886: 60),[268] ellos no habrían sido

[268] Como antes se dijo, tanto Cantor como Dedekind enfatizaron su derecho a hacer tal cosa en sus respectivos trabajos de 1872 (cf. Cantor, 1872/1932: 97; Dedekind, 1872: 18-19).

procedimientos válidos para Bolzano, al menos de acuerdo a su propuesta matemática inicial. De hecho, uno de los pocos lugares en su trabajo de 1816 y en su *Prueba puramente analítica* en el cual él usó el término "punto" en tanto identificado con, diría la lectura tradicional, el valor de una cantidad real Weierstrassiana,[269] fue en el prefacio a ese último trabajo: uno de los tipos de pruebas más comunes del teorema del valor intermedio, dijo, dependía de una verdad geométrica, a saber, "que toda línea continua de curvatura simple cuyas ordenadas eran primero positivas [y] luego negativas (o viceversa), necesariamente deben intersectar la línea abscisa en algún punto que yace entre aquellas ordenadas" (Bolzano, 1817B: 6).[270] Desde la perspectiva de Bolzano, este era un procedimiento matemático inválido debido a la subordinación de la geometría al análisis. No obstante, ultimadamente esto también pone de manifiesto cuán diferentes eran las nociones y prácticas matemáticas de Bolzano de las nociones y prácticas matemáticas Weierstrassianas y aritmetizadoras posteriores.

Por último, pero no por ello menos importante, en la transición del enfoque cinético del siglo XVIII (en el cual las cantidades prevalecían) al punto de vista estático que caracterizaría al análisis 'aritmetizado' (por ejemplo, el de Weierstrass, Dedekind, Cantor y otros), uno de los puntos cruciales fue la *comprensión de que una caracterización conceptual clara de la continuidad* del dominio de los números reales era necesaria. El éxito en aritmetizar la continuidad de este dominio se convirtió en un elemento clave de dicho proyecto, quizás incluso su clímax, como lo expresó el título del libro de Dedekind de 1872, *Continuidad y números irracionales*. Por el contrario, era característico de las propuestas pre-Weierstrassianas, entre ellas la propuesta inicial de Bolzano, no contemplar aún dicho proyecto y al parecer no tener una noción clara de una "teoría del continuo" (esto es, topológica), ni una propuesta sobre cómo abordar los elementos de la topología (cf. Ferreirós, 2007: 137ss.), pese a las ideas pre-conjuntistas y pre-topológicas de Bolzano. Una diferencia que, precisamente, subraya la distancia entre la propuesta de Bolzano en 1817 y, por ejemplo, la de Cantor (quien usó puntos límite y conjuntos derivados) y la de Dedekind (quien empleó su principio de continuidad de cortaduras) en 1872.

[269] Otro lugar en esos trabajos en el que tal identificación puede ser encontrada es en el §13 de su *Prueba puramente analítica*, cuando ejemplificó su denominado teorema por medio de una hipérbola rectangular (cf. Bolzano, 1817B: 49-50).
[270] Bolzano escribió: "Eine jede continuirlicheLinie von einfacher Krümmung, deren Ordinaten erst positiv, dann negativ sind (oder umgekehrt), die Abscissenlinie nothwendig irgendwo in einem Puncte, der zwischen jenen Ordinaten liegt, durch schneiden müsse".

Y, sin embargo, una vez más, al mismo tiempo Bolzano se revela como un autor pre-Weierstrassiano importante y como una figura pionera, considerando, por ejemplo, el método de partición de intervalos que usó en su *Prueba puramente analítica* y que fue altamente valorado por Weierstrass. Una vez que se tornó claro el problema de caracterizar la continuidad de $\mathbb{R}$, como no lo estaba en los primeros trabajos de Bolzano, aquel método pudo ser transformado en el denominado principio de Bolzano-Weierstrass,[271] conforme al cual una secuencia infinita de intervalos cerrados anidados siempre tiene una intersección no vacía (es decir, al menos un punto pertenece a todo intervalo). Como paulatinamente se volvió más claro, aquel principio permitía una caracterización satisfactoria de la continuidad del sistema de los números reales, alternativa a la propiedad de cortadura propuesta por Dedekind en 1872. De esa manera, por ejemplo, en 1884 Cantor enfatizó la importancia de ese principio "verdaderamente antiguo" que, dijo, "difícilmente podía ser reemplazado por uno esencialmente diferente" (Cantor, 1884/1932: 212).[272] Para entonces, sin embargo, el contexto matemático germánico era ya muy diferente al de la *Prueba puramente analítica* de Bolzano, obra que a la postre sería tan ampliamente reconocida como Bolzano quería que lo fueran sus primeros trabajos (cf. Bolzano, 1817B: 27), si bien muchas veces interpretada de una manera que, conforme a esta tesis, parece ajena a lo que él mismo proponía.

[271] Esta expresión, usada en (Ferreirós, 2007: 139-141), es bastante común en la terminología matemática, si bien estrictamente hablando es anacrónica.

[272] Cantor escribió: "Ich bemerke, dass die hier angewandte Beweismethode, welche wohl schwerlich durch eine wesentlich andere ersetzt werden kann, ihrem Kerne nach sehr alt ist; in neuerer Zeit findet man sie unter anderem in gewissen zahlentheoretischen Untersuchungen bei Lagrange, Legendre und Dirichlet, in Cauchy's *Cours d'analyse* (Note troisième) und in einigen Abhandlungen von Weierstrass und Bolzano; es scheint mir daher nicht richtig, sie vorzugsweise oder aussechliesslich auf Bolzano zurückzuführen, wie solches in neuerer Zeit beliebt worden ist".

Annex A

Year	Author	Reference
1817	Bolzano	"there is a certain quantity U, which is the greatest of those for which it can be true that all smaller x possess property M." (Bolzano, 1817B: 41)
1865	Weierstrass	"If, in a bounded part of the plane, there are infinitely many points with a given property, then there is at least one point (inside that part or on its boundary) such that in every neighborhood of this point there are infinitely many points having the given property." (translation in (Moore, 2008: 222))
1870	Cantor	"Herr Kronecker befindet sich übrigens ebenfalls im Widerspruch mit dem Weierstrass-Bolzanoschen Satze von der unteren und oberen Gränze; es wird mich dies aber nicht aufhalten, meinen Beweis zu veröffentlichen, da ich diesen Satz nicht nur für richtig sondern für das Fundament der wichtigeren mathematischen Wahrheiten halte." (Meschkowski and Nilson, 1991: 24)
	Schwarz	"der von Herrn Weierstraß in seinen Vorlesungen verfochtenen Meinung, daß man ohne die Schlußweise, welche von Herrn W. auf Bolzanoschen Principien weiter ausgebildet ist bei vielen Untersuchungen nicht zum Ziel gelangen könne." (Meschkowski, 1967: 228)
1872	Cantor	"Unter einem „Grenzpunkt einer Punktmenge *P*" verstehe ich einen Punkt der Geraden von solcher Lage, daß in jeder Umgebung desselben *unendlich* viele Punkte aus *P* sich befinden, wobei es vorkommen kann, daß er außerdem selbst zu der Menge gehört. Unter „Umgebung eines Punktes" sei aber hier ein jedes Intervall verstanden, welches den Punkt *in seinem Innern* hat. Darnach ist es leicht zu beweisen, daß eine aus einer unendlichen Anzahl von Punkten bestehende [„beschränkte"] Punktmenge

		stets zum wenigsten *einen* Grenzpunkt hat." (Cantor, 1872/1932: 98)
	Schwarz	"mit Hülfe einer von *Bolzano* ersonnenen und von Herrn *Weierstrass* weiter entwickelten Schlussweise." (Schwarz, 1872: 221, fn.)
1876	Weierstrass	"Existiren nämlich für irgend eine eindeutige Function im Innern eines begrenzten Bereichs unendlich viele ausserwesentliche singuläre Stellen, so giebt es im Innern oder an der Grenze des Bereichs wenigstens eine stelle, welche sich dadurch auszeichnet, dass in jeder Umgebung derselben von ihr verschiedene singuläre Stellen vorhanden sind, und die deshalb nothwendig eine wesentliche singuläre Stelle für die Function ist." (Weierstrass, 1876/1895: 80)
1878	Dini	"*qualunque sia il gruppo di punti G che si considera, purchè contenga un numero infinito di punti, esisterà sempre almeno un punto-limite che potrà essere o nò uno dei punti punti del gruppo*." (Dini, 1878: 16)
1880	Pincherle	"Teorema. Se in una varietà ad una dimensione si hanno infiniti posti soddisfacenti ad una definizione comune si troverà in quella varietà per lo meno un posto avente la proprietà che in qualunque suo intorno, per piccolo che si voglia prendere, esisteranno sempre infiniti posti soddisfacenti a quella definizione. [...] Il teorema del no. precedente si può generalizzare estendendolo ad una varietà di *n* dimensioni." (Pincherle, 1880: 60, 64)
1881	Stolz	"Hr. H. Schwarz bezeichnet ihn als den Urheber einer von Hrn. Weierstrass weiter entwickelten Schlussweise [...]. Die Grösse *U* heisst nach Weierstrass die *obere Grenze* aller Werthe von *x*, denen die Eigenschaft *M* zukommt." (Stolz, 1881: 55 & 58)
1898	Schoenflies	"Für eine aus unbegrenzt vielen Punkten bestehende Menge *P* giebt es nach einem Satz von Bolzano-K. Weierstrass mindestens eine Häufungsstelle (Grenzpunkt, Verdichtungspunkt)."

		(Schoenflies, 1898: 185)
1914	Hausdorff	"(Satz von Bolzano-Weierstrass). Jede beschränke unendliche Menge reeller Zahlen ["eines euklidischen Raumes"] hat mindestens einen Häufungspunkt." (Hausdorff, 1914: 258, 329)
1968	Boyer	"This theorem [Bolzano-Weierstrass theorem] was proved by Bolzano and apparently was known also to Cauchy, but it was the work of Weierstrass that made it familiar to mathematicians." (Boyer, 1968: 605)
1996	Ewald	"This lemma (the greatest lower bound principle) is the first published version of the Bolzano-Weierstrass theorem." (Ewald, 1999: 226)
2004	Russ	"the main result in RB (an early form of Bolzano– Weierstrass theorem)." (Russ, 2004: 146; cf. Russ, 1980: 157)

Annex B

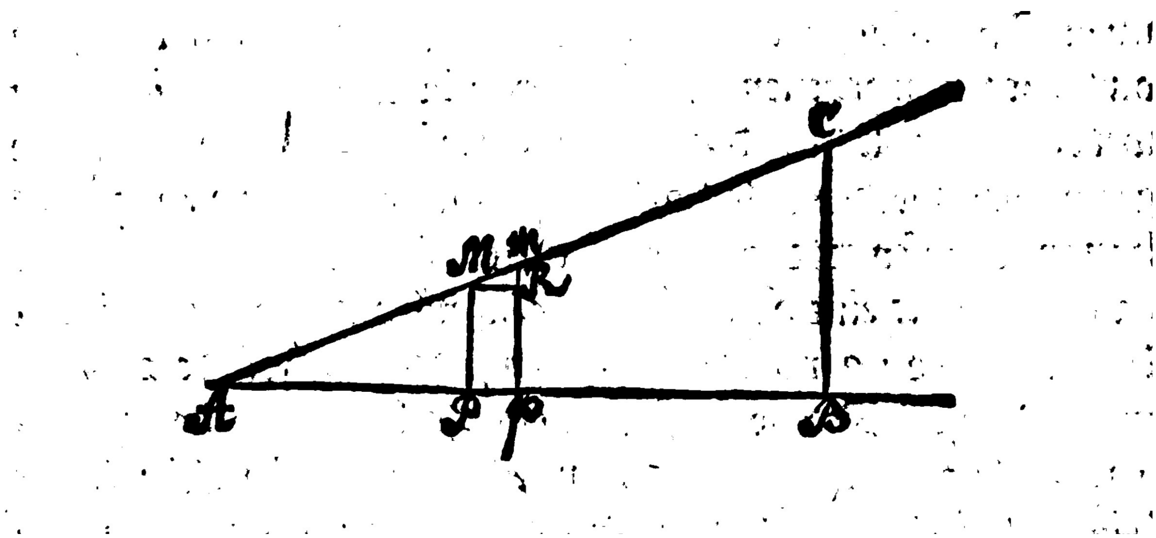
Year	Author	Reference
1900	David Hilbert	"The most suggestive and notable achievements of the last century in this field are, as it seems to me, the arithmetical formulation of the concept of the continuum in the works of Cauchy, Bolzano and Cantor, and the discovery of non-euclidean geometry." (Hilbert, 1902: 445)
1926	Felix Klein	"Bolzano is one of the fathers of the current 'arithmetization' of our science." (Klein, 1926: 56)
1956	Gottfried Martin	"Man kann den Unterschied zwischen Kant und Bolzano dahin charakterisieren, dass für Kant Kant die Axiomatisierung, und dass für Bolzano die Arithmetisierung das eigentliche Ziel gewesen ist. Man wird Felix Klein recht geben müssen, wenn er sagt: 'Bolzano est einer der Väter der eigentlichen 'Arithmetisierung' unserer Wissenschaft'." (Martin, 1956: 103)
1968	Carl B. Boyer	"for the rapid expansion of the theory of functions had been accompanied by the rigorous arithmetization of the subject from Bolzano to Weierstrass." (Boyer, 1968: 643)
1981	Hans Niels Jahnke and Michael Otte	"Within the tendency to arithmetize mathematics, Bolzano has made an important contribution in his works concerning the quantity concept and function theory. [...] A particularly striking example is his [1817] proof of the intermediate value problem, as well as his realization that this is actually a theorem requiring proof. The necessity of proving this theorem becomes evident only from the point of vantage offered by the program of arithmetizing mathematics." (Jahnke and Otte, 1981: 87)
1986	Pierre Dugac	"Bien que ce mémoire fût pratiquement ignoré des mathématiciens, avant la redécouverte de Bolzano, il constitue le premier pas décisif vers ce qu'on appellera plus tard

		l'arithmétisation de l'analyse." (Dugac, 1986: 242)
1991	Alberto Coffa	"As a result of Bolzano's [1817] proof, the central notions of the calculus were on their way to being 'arithmetized.' The arithmetization –or 'rigorization'– of the calculus would be completed in later years by Cauchy, Weierstrass, Cantor and Dedekind." (Coffa, 1991: 28)
1997	Michel Bourdeau	"Non content d'être ainsi un des pionniers de l'arithmétisation de l'analyse, Bolzano figure également sur l'arbre généalogique de chacune des deux écoles philosophiques qui ont dominé le vingtième siècle." (Bourdeau, 1997: 56)
2000	Paul Rusnock	"For Bolzano would not only sketch the general contours of the emerging new mathematics of the nineteenth century, but also carry the work out in considerable detail. His work in the foundations of real analysis attained results which still stand as models of rigor and sound method." (Ruscnock, 2000: 18)[273]
2006	Eckehart Köhler	"[If] Frege-Russell Logicism is rejected because of doubts about Type Theory (a variety of set theory), then the Bolzano-Weierstrass arithmetization of analysis should also be rejected for the same doubts." (Köhler, 2006: 93)
2008	Michael Detlefsen	"In the early years of the 19th century, Bolzano also articulated such an idea and applied it to the reformation of mathematics generally, and particularly to analysis. It comprised, indeed, a prime motive of his early attempts to 'arithmetize' analysis." (Detlefsen, 2008: 182)
2010	Jan Sebestik	"Two of the first Bolzano's publications have permanent interest: the *Rein analytischer Beweis* (1817) which inaugurates the arithmetization of analysis, and the *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik* (1810). While the first one was noticed by Weierstrass, the second one, going against the spirit of the dominant Kantian and postkantian

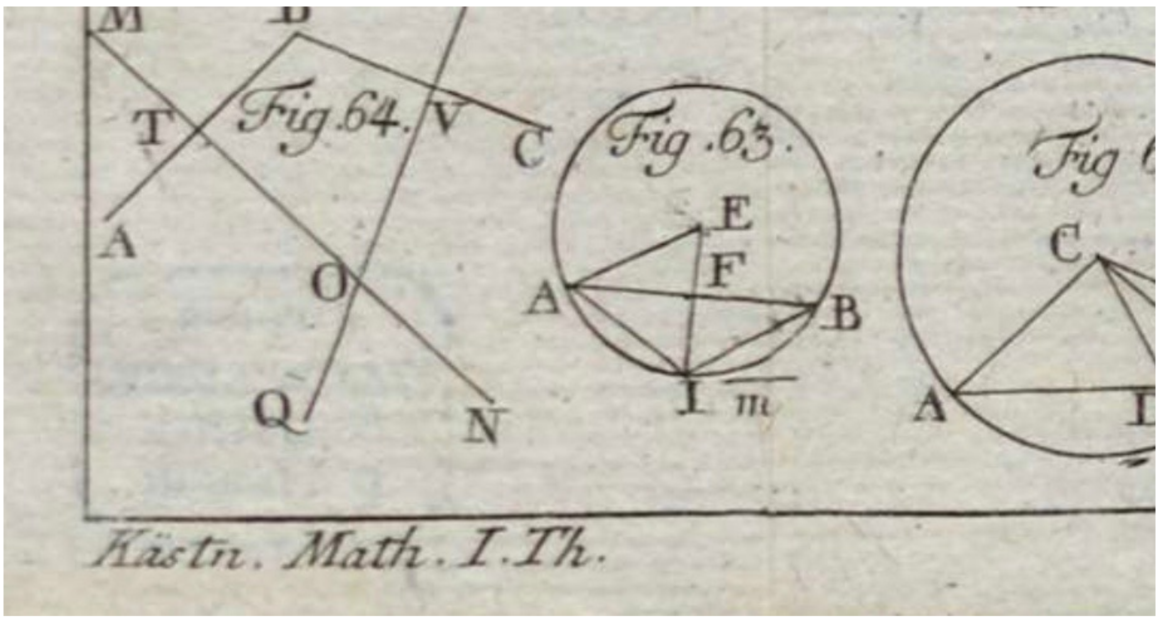
[273] Nevertheless, it must be said that, as for Rusnock's second assertion, he could have in mind Bolzano's later works when talking about "his work in the foundations of real analysis" (cf. Rusnock, 2000: 14).

		philosophy, was completely neglected.” (Sebestik, 2010)
2012	Bedürftig & Murawski	“Wir unterstreichen, dass Bolzano in allen seinen Arbeiten in der Analysis als Fürsprecher der so genannten ‘Arithmetisierung’ der Analysis auftrat.” (Bedürftig and Murawski, 2000: 66)
2016	Erich Reck	“Most directly, Dedekind’s essay was tied to the arithmetization of analysis in the nineteenth century –pursued by Cauchy, Bolzano, Weierstrass, and others– which in turn was a reaction to tensions within the differential and integral calculus, introduced earlier by Newton, Leibniz, and their followers.” (Reck, 2016)
2016	Michael N. Vrahatis	“Its first proofs [“Bolzano’s theorem], given independently by Bolzano in 1817 and Cauchy in 1821, were crucial in the procedure of arithmetization of analysis (which was a research program in the foundations of mathematics during the second half of the 19th century).” (Vrahatis, 2016: 41)

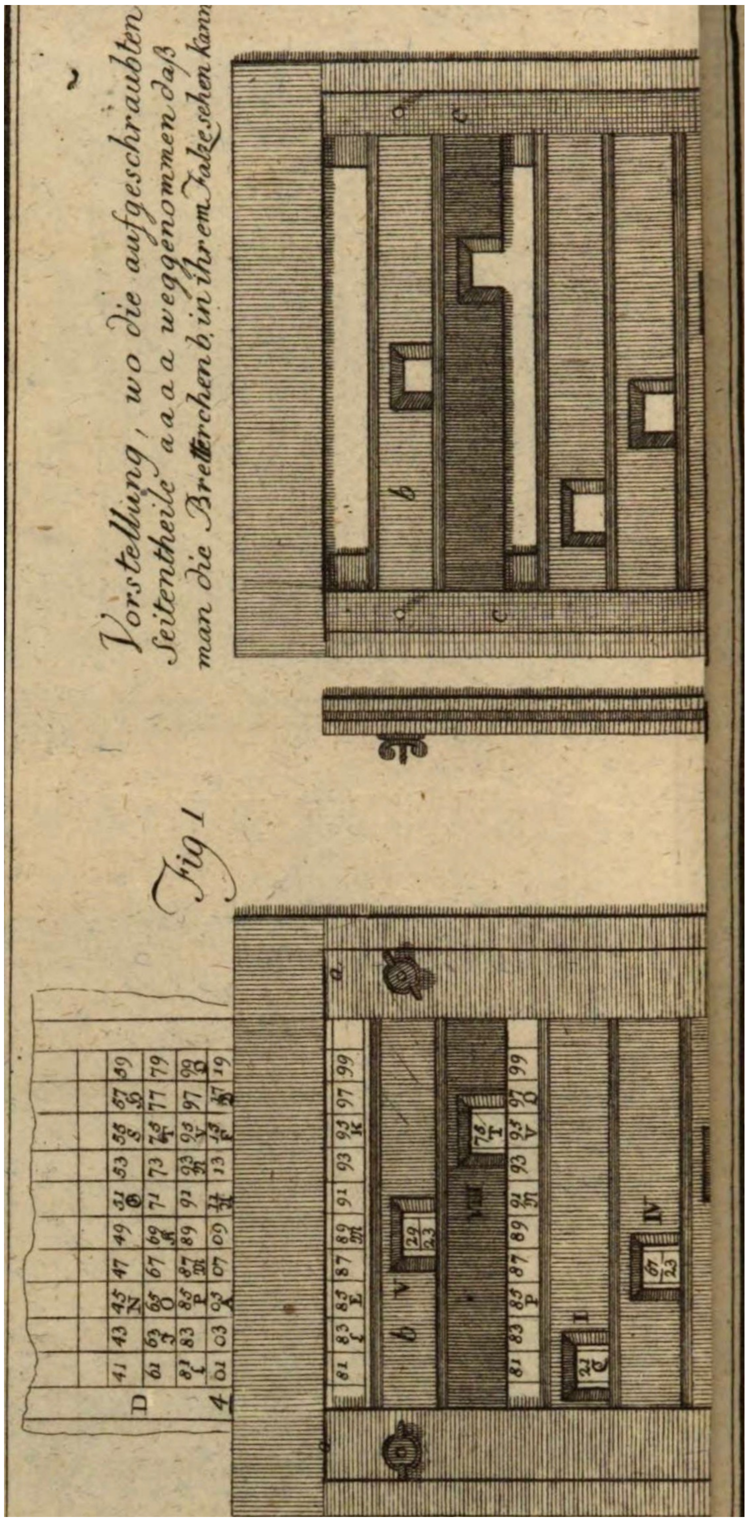
Annex C



Annex D



Annex E


Vorstellung, wo die aufgeschraubten
Seitentheile a a a a weggenommen daß
man die Brettchen b in ihrem Falzen sehen kann
Fig 1

Bibliography

Adamson, John William (1919). *A short history of education*, Cambridge University Press, Cambridge.

Aepinus, Franz Ulrich Theodor (1747). *Commentatio Mathematica de Augmento Sortis per Anatocismum*, Johann Jakob Adler, Rostock.

--------------------- (1752). *Demonstrationes Primariarum Quarundam Aequationibus Algebraicis Competentium Proprietatum*, Litteris Adlerianis, Rostock.

--------------------- (1754). *Commentatio de Notione Quantitatis Negativae*, Adler, Rostock.

--------------------- (1755). *Commentatio de Integratione, et Separatione Variabilium, in Aequationibus differentialibus, duas Variabiles Continentibus*, Johan Jakob Adler, Rostock.

Agnew, Hugh LeCaine (2004). *The Czechs and the Lands of the Bohemian Crown*, Hoover Institution Press, USA.

[Anonymous] (1808). "Mathematik", *Neue Leipziger Literaturzeitung*, Dritter Band, Julius, St. LXXXI, Leipzig, pp. 1288-1294.

Aristotle (1998). *Física*, Gredos, Spain.

--------------------- (2003). *Metafísica*, Gredos, Spain.

Armour, Ian D. (2012). *A History of Eastern Europe 1740–1918. Empires, Nations and Modernisation*, 2nd ed., Bloomsbury Academic, Great Britain.

Åselius, Gunnar (2012). "Sweden and the Pomeranian War", in Mark H. Danley and Patrick J. Speelman (Eds.), *The Seven Years' War. Global Views*, Brill, Leiden, pp. 135-163.

Ash, Mitchell (2006). "Bachelor of What, Master of Whom? The Humboldt Myth and Historical Transformations of Higher Education in German-Speaking Europe and the US", *European Journal of Education*, Vol. 41, Blackwell Publishing, pp. 245-267.

Van Atten, Mark (2012). "Kant and Real Numbers", in Dybjer, Lindström, Palmgren and Sundholm (Eds.), *Epistemology versus Ontology*, Springer, Dordrecht, pp. 203-213.

Bartels, Johann Martin Christian (1822). *Disquisitiones quatuor ad Theoriam Functionum Analyticarum pertinentes*, J. C. Schünmann, Dorpat.

Basso, Paola (2016). "Darjes, Joachim Georg (1717-91)", in Heiner F. Klemme and Manfred Kuehn (Eds.), *The Bloomsbury Dictionary of Eighteenth-Century German Philosophers*, Bloomsbury Academic, UK, pp. 160-163.

Baumgart, Peter (1990). "Joseph II. und Maria Theresia (1765-1790)", in Anton Schindling and Walter Ziegler (Eds.), *Die Kaiser der Neuzeit 1519-1918. Heiliges Römisches Reich, Österreich, Deutschland*, C. H. Beck, Germany, pp. 249-276.

Bedürftig, Thomas & Murawski, Roman (2012). *Philosophie der Mathematik*, De Gruyter, Germany.

Beller, Steven (2006). *A Concise History of Austria*, Cambridge University Press, UK.

Belna, Jean-Pierre (2000). *Cantor*, Les Belles Lettres, Paris.

Bendavid, Lazarus (1794). "Abraham Gotthelf Kästner an Lazarus Bendavid: Göttingen, 26.04.1794", available at: http://www.jewish-archives.org/content/titleinfo/20679

Van Benthem, Johan (1991). *The Logic of Time. A Model-Theoretic Investigation into the Varieties of Temporal Ontology and Temporal Discourse*, 2nd ed., Springer-Science and Business Media, Dordrecht.

Berg, Jan (1962). *Bolzano's Logic*, Almquist and Wiksell, Stockholm.

Bloch, Ethan D. (2011). *The Real Numbers and Real Analysis*, Springer, USA.

Blok, Johan (2016). *Bolzano's Early Quest for A Priori Synthetic Principles. Mereological Aspects of the Analytic-Synthetic Distinction in Kant and the Early Bolzano*, Ph.D. thesis, Drukkerij Haveka BV, Netherlands.

Boehm, Andreas (1762). *Logica in usum Auditorii sui Ordine Scientifico*, Henrich Ludwig Broenner, Frankfurt am Main.

Böhme, Ernst. *History of the University – an overview*, available at: https://www.uni-goettingen.de/en/history-of-the-university-%E2%80%93-an-overview/90607.html

Bolzano, Bernard (1804). *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie*, Karl Barth, Prague.

--------------------- (1810). *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik Erste Lieferung*, Caspar Widtmann, Prague.

--------------------- (1816). *Der binomische Lehrsatz, und als Folgerung aus ihm der polynomische, und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrößen dienen, genauer als bisher erwiesen*, C.W. Enders, Prague.

--------------------- (1817A). *Die drey Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung, ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahmen des Archimedes, und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst: zugleich als Probe einer gänzlichen Umstaltung der Raumwissenschaft, allen Mathematikern zur Prüfung vorgelegt*, Paul Gotthelf Kummer, Leipzig.

--------------------- (1817B). *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegensetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Gottliebe Haase, Prague.

--------------------- (1836). *Lebensbeschreibung des Dr. B. Bolzano: Mit einigen seiner ungedruckten Aufsätze und dem Bildnisse des Verfassers eingeleitet und erläutert von dem Herausgeber*, J. E. v. Seidel, Suzbach.

--------------------- (1851). *Paradoxien des Unendlichen*, Franz Přihonský (Ed.), C. H. Reclam, Leipzig.

Bos, Henk J. M. (2001). *Redefining Geometrical Exactness. Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*, Springer, New York.

Bottazini, Umberto (1986). *The Higher Calculus. A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*, Springer, USA.

Bourbaki, Nicolas (2007). *Éléments de Mathématique. Topologie Générale*, Chapitres 1 à 4, Springer, réimpression inchangée de l'édition originale de 1971, Heidelberg.

Bourdeau, Michel (1997). "D'un a priori à l'autre", in Christiane Chauviré (Ed.), *Aspects de la Philosophie en Autriche*, *Austriaca*, 44, Publications de l'Université de Rouen, pp. 53-68.

Boyer, Carl B. (1968). *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, USA.

Bradley, Robert E. and Sandifer, C. Edward (2000). *Cauchy's* Cours d'analyse. *An Annotated Translation*, Springer.

Brandes, Heinrich Wilhelm (1820). *Der polynomische Lehrsatz und leichte Anwendungen desselben zum ersten Unterricht für Anfänger dargestellt*. *Vorbereitungen zur höheren Analysis*, Johann Ambrosius Barth, Leipzig.

--------------------- (1836). "Mathematik", in Johann Samuel Traugott Gehler (Ed.), *Physikalisches Wörterbuch*, VI Band, Zweite Abtheilung, Ma., E. B. Schwickert, Leipzig, pp. 1473-1485.

Brosius, Dieter (1997). "Münchhausen, Gerlach A. Freiherr von", *Neue Deutsche Biographie*, 18, p. 523-524. [https://www.deutsche-biographie.de/gnd118735020.html#ndbcontent]

Vom Bruch, Rüdiger (2000). "Die Gründung der Berliner Universität", in Rainer C. Schwinges (Ed.), *Humboldt International. Der Export des deutschen Universitätsmodells im 19. und 20. Jahrhundert*, Schwabe & Co., Basel, pp. 53-73.
Bruhns, Christian (1876). "Brandes, Heinrich Wilhelm", *Allgemeine Deutsche Biographie*, 3, pp. 242-243. [https://www.deutsche-biographie.de/ppn100055427.html]
Bryce, James (1901). *The Holy Roman Empire*, Macmillan and Co., London.
Bullynck, Marteen (2006). "Aspects of 18th Century Mathematical Socialisation. The Case of C.F. Gauss - Materials on the Genesis of the Disquisitiones Arithmeticae, Part I", available at: https://www.yumpu.com/en/document/view/7783477/aspects-of-18th-century-mathematical-socialisation-kuttakaorg
--------------------- (2013). "Stages Towards a German Mathematical Journal (1750-1800)", *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, Vol. 63, Issue 170-171, pp. 237-251.
Burkhardt, Johannes (2012). "Religious War or Imperial War? Views of the Seven Years' War from Germany and Rome", in Mark H. Danley and Patrick J. Speelman (Eds.), *The Seven Years' War. Global Views*, Brill, Leiden, pp. 107-133.
Busse, Friedrich Gottlieb (1798). *Formulae linearum Subtangentium ac Subnormalium Tangentium ac Normalium*, Siegfried Lebrecht Crusius, Leipzig.
Bynum, W. F. (1994). *Science and the Practice of Medicine in the Nineteenth Century*, Cambridge University Press, USA.
Cajori, Florian (1913). "History of the Exponential and Logarithmic Concepts", *The American Mathematical Monthly*, Vol. 20, No. 4, Mathematical Association of America, pp. 107-117.
--------------------- (1923). "Grafting of the Theory of Limits on the Calculus of Leibniz", *The American Mathematical Monthly*, Vol. 30, No. 5, pp. 223-234.
--------------------- (1993). *A History of Mathematical Notations*, 1st ed. 1928-29, Dover, New York.
Cantor, Georg (1872/1932). "Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen", in Ernst Zermelo (Ed.), *Georg Cantor Gesammenlte Abhandlungen. Mathematischen und Philosophischen Inhlats mit Erläuternden Anmerkungen Sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor-Dedekind*, Julius Springer, Berlin, pp. 92-102.
--------------------- (1884/1932). "Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten", in Ernst Zermelo (Ed.), *Georg Cantor Gesammenlte Abhandlungen. Mathematischen und Philosophischen Inhlats mit Erläuternden Anmerkungen Sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor-Dedekind*, Julius Springer, Berlin, pp. 139-246.
Cantor, Moritz (1882). "Kästner, Abraham Gotthelf", *Allgemeine Deutsche Biographie*, 15, pp. 439-451. [https://www.deutsche-biographie.de/pnd118714570.html#adbcontent]
--------------------- (1887). "Pfaff, Friedrich", *Allgemeine Deutsche Biographie*, 25, pp. 592-593. [https://www.deutsche-biographie.de/pnd116140348.html#adbcontent]
--------------------- (1894). "Thibaut, Bernhard Friedrich", *Allgemeine Deutsche Biographie*, 37, pp. 745-746. [https://www.deutsche-biographie.de/sfz82474.html]
--------------------- (1900). "Zimmermann, Christian Gottlieb", *Allgemeine Deutsche Biographie*, 45, p. 251. [https://www.deutsche-biographie.de/sfz86672.html]
--------------------- (1904). *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, Achtzehntes Heft, B. G. Teubner, Leipzig.
Cantù, Paola (2014). "Bolzano Versus Kant: Mathematics as a Scientia Universalis", in Anne Reboul (Ed.), *Mind, Values, and Metaphysics. Philosophical Essays in Honor of Kevin Mulligan*, Vol. 1, Springer, Switzerland, pp. 295-316.

Carnot, Lazare (1797/1813). *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal*, 2nd ed., Paris.

Cauchy, Augustin-Louis (1821). *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*, 1er Partie. Analyse Algébrique, Debure frères, Paris.

Chambers, Ephraim (1728). *Cyclopædia: or, An Universal Dictionary of Arts and Sciences*, Vol. 2, James and John Knapton *et al*., London.

Clark, William (2006). *Academic Charisma and the Origins of the Research University*, University of Chicago Press, USA.

Clewis, Robert R. (Ed.) (2015). *Reading Kant's Lectures*, De Gruyter, Germany.

Coffa, Alberto J. (1991). *The Semantic Tradition from Kant to Carnap. To the Vienna Station*, Cambridge University Press, Cambridge.

Darjes, Joachim Georg (1742). *Introductio in Artem Inveniendi seu Logicam Theoretico-Practicam*, Christ. Francisci Buchii, Jena.

--------------------- (1743). *Elementa metaphysices*, Tom. 1, Christian Heinrich Cuno, Jena.

--------------------- (1744). *Elementa metaphysices*, Tom. 2, Christian Heinrich Cuno, Jena.

--------------------- (1747). *Erste Gründe der gesamten Mathematik, darinnen die Haupt-Theile so wohl der Theoretischen als auch Praktischen Mathematik*, Christian Heinrich Cuno, Jena.

--------------------- (1755). *Via ad Veritatem Commoda Auditoribus Methodo Demonstrata*, Io. Guilielmi Hartungii, Jena.

Dauben, Joseph Warren (1990). *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinit*e, Princeton University Press, USA.

De Madariaga, Isabel (1979). "The Foundation of the Russian Educational System by Catherine II", *The Slavonic and East European Review*, 57, No. 3, pp. 369-95.

--------------------- (1998). *Politics and Culture in Eighteenth-Century Russia*, Routledge, USA.

Dedekind, Richard (1882). *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig.

--------------------- (1888). *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig.

Detlefsen, Michael (2008). "Purity as an Ideal of Proof", in Paolo Mancosu (Ed.), *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford University Press, USA, pp. 179-197.

Dhombres, Jean (1995). "Une conception architecturale des mathématiques: la séparation des variables chez Pfaff," in Patricia Radelet-de Grave and Edoardo Benvenuto (Eds.), *Entre Mécanique et Architecture*, Birkhäuser, Basel, pp. 179-203.

Diderot, Denis (Ed.) (1865). *Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers, par une Société de Gens de Lettres*, Tome Onzieme N-Pari, Samuel Faulche & Compagnie, Neufchastel.

--------------------- (2013). *Plan d'une université pour le gouvernement de Russie ou d'une éducation publique dans toutes les sciences*, available at: http://obvil.paris-sorbonne.fr/corpus/critique/diderot_plan-universite/

Dijksterhuis, Fokko Jan (2005). *Lenses and Waves. Christiaan Huygens and the Mathematical Science of Optics in the Seventeenth Century*, Kluwer Academic Publishers, USA.

Dini, Ulisse (1878). *Fondamenti per la teorica della funzioni di variabili reali*, T. Nistri e C., Pisa.

Dugac, Pierre (1986). "Fondaments de l'Analyse", in Jean Diedunné (Ed.), *Abrégé d'histoire des mathématiques, 1700-1900*, Hermann, Paris, pp. 237-291.

Edwards, C. H. (1979). *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag, USA.

Eisenmann, Gottfried (Ed.) (1831). *Franz von Spaun's politisches Testament. Ein Beitrag zur Geschichte der Pressfreiheit im allgemeinen und in besonderer Hinsicht auf Bayern. Mit* *des verstorbenen Kustos Docen Vorbericht und Bemerkungen herausgegeben*, Joh. Jac. Palm und Ernst Enke, Erlangen.

Eulenburg, Franz (1904). “Die Frequenz der deutschen Universitäten von ihrer Gründung bis zur Gegenwart”, *Der Abhandlungen der philologisch-historischen Klasse der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften*, XXIV Bandes, No. II, B. G. Teubner, Leipzig.

Euler, Leonhard (1748). *Introductio in analysin infinitorum*, Tomus Primus, Marcum-Michaelem Bousquet & Socios, Lausanne.

--------------------- (1755). *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in Analysi Finitorum ac Doctrina Serierim*, Academiae Imperialis Scientiarum, St. Petersburg.

--------------------- (1767). “De usu functionum discontinuarum in Analysi”, *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, Tom. XI for 1765, Academiae Scientiarum, Petropoli, pp. 3-27.

--------------------- (1775). “Demonstratio theorematis neutoniani de evolutione potestatum binomii pro casibus, quibus exponentes non sunt numeri integri”, *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, Tom XIX for 1774, Academiae Scientiarum, Petropoli, pp. 103-111.

Evans, R. J. W. (2006). *Austria, Hungary, and the Habsburgs. Essays on Central Europe, c.1683-1867*, Oxford University Press, Great Britain.

Ewald, William (Ed.) (1999). *From Kant to Hilbert*, Vol. I. Oxford University Press, Oxford.

Ewerbeck, Christian Gottfried (1789). *De Similitudine inter Methesin Puram atque Philosophiam Logicam obvia*, Specimen Primum, Da. Ludov. Wedel, Gdański.

Fedotova, Olga and Chigisheva, Oksana (2010). “Restructuring the Governance and Management Structures of Higher Education in Russia”, in David Johnson (Ed.), *Politics, Modernisation and Educational Reform in Russia: from past to present*, Oxford Studies in Comparative Education, Symposium Books, UK.

Fellmann, Emil A. (Ed.) (1983). *Leonhard Euler 1707–1783. Beiträge zu Leben und Werk*, Birkhäuser, Basel.

Ferraro, Giovanni (2000). “Functions, Functional Relations, and the Laws of Continuity in Euler”, *Historia Mathematica*, 27, Academic Press, pp. 107-132.

Ferreirós, José (2007). *Labyrinth of Thought. A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*, 2nd ed., Birkhäuser, Germany.

--------------------- (2016). *Mathematical Knowledge and the Interplay of Practices*, Princeton University Press, USA.

Flett, T. M. (1980). *Differential Analysis. Differentiation, differential equations and differential inequalities*, Cambridge University Press, UK.

Folta, Jaroslav (1981). “Life and scientific endeavour of Bernard Bolzano”, in Vojtěch Jarník (Ed.), *Bolzano and the Foundations of Mathematical Analysis*, Society of Czechoslovak Mathematicians and Physicists, Praha, pp. 11-31.

Forbes, Eric G. (1974). “The Foundation of the First Göttingen Observatory: A Study in Politics and Personalities”, *Journal for the History of Astronomy*, Vol. 5, pp. 22-29.

Freudenthal, Hans (1971). “Did Cauchy Plagiarize Bolzano?”, *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 7, No. 5, Springer, pp. 375-392.

Fulbrook, Mary (2004). *A concise history of Germany*, 2nd ed., Cambridge University Press, New York.

Gauss, Carl Friedrich (1801). *Disquisitiones Arithmeticae*, Gerhard Fleischer, Leipzig.

Gnant, Cristoph (2015). “The University of Vienna in the Eighteenth century. Distance from church, appropriation by the state, expansion”, in Julia Rüdiger & Dieter Schweizer (Eds.), *Sites of Knowledge. The University of Vienna and its buildings. A History 1365-2015*, Böhlau Verlag, Vienna, pp. 87-97.

Grabiner, Judith V. (1981). *The origins of Cauchy’s rigorous calculus*, MIT Press, Cambridge.

Grattan-Guinness, Ivor (1970). “Bolzano, Cauchy and the ‘New Analysis’ of the Early Nineteenth Century”, *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 6, No. 5, pp. 372-400.

Gray, Jeremy (2015). *The Real and the Complex: A History of Analysis in the 19th Century*, Springer, Switzerland.

Günther (1882). “Karsten, Wenceslaus Johann Gustav”, *Allgemeine Deutsche Biographie*, 15, pp. 430-431. [https://www.deutsche-biographie.de/sfz40052.html]

Hakfoort, Casper (1995). *Optics in the Age of Euler. Conceptions of the Nature of Light, 1700-1795*, Cambridge University Press, UK.

Hamberger, Georg Erhard (1726). *Dissertationem Chimicam Penetrationem Salis Alcali in Interstitia Salis Acidi per Experimenta Demonstrantem*, Jena.

--------------------- (1735). *Elementa Physices, Methodo Mathematica in usum Auditorii Conscripta*, Jena.

--------------------- (1749). *Dissertatio de Respirationis Mechanismo et usu Genuino*, Jena.

Hammerstein, Notker (1996). “Relations with authority”, in Walter Rüegg (Ed.), *A History of the University in Europe. Universities in Early Modern Europe (1550-1800)*, Vol. II, Cambridge University Press, UK.

Hankel, Hermann (1867). *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen. I. Teil. Theorie der complexen Zahlensysteme*, Leopold Voss, Leipzig.

Harding, Richard (2012). “The War in the West Indies”, in Mark H. Danley and Patrick J. Speelman (Eds.), *The Seven Years’ War. Global Views*, Brill, Leiden, pp. 293-323.

Hausdorff, Felix (1914). *Grundzüge der Mengenlehre*, Verlag von Veit & Comp., Leipzig.

Hausen, Christian August (1734). *Elementa Matheseos*, Pars Prima, Leipzig.

Heilbron, J. L. (1990). “The Measure of Enlightenment”, in Tore Frängsmyr, J. L. Heilbron and Robin E. Rider (Eds.), *The Quantifying Spirit in the 18th Century*, University of California Press, USA, pp. 207-242.

Heiner F. Klemme and Manfred Kuehn (2016). *The Bloomsbury Dictionary of Eighteenth-Century German Philosophers*, Bloomsbury, London.

Hilbert, David (1902). “Mathematical Problems”, *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 8, No. 10, pp. 437-479.

Hindenburg, Carl Friedrich (1776). *Beschreibung einer ganzneuen Art, nach einem bekannten Gesetze forgehende Zahlen, durch Abzählen oder Abmessen bequem und sicher zu finden*, Siegfried Lebrecht Crusius, Leipzig.

--------------------- (1781). *Novi Systematis Permutationum Combinationum ac Variationum Primae Lineae et Logisticae Serierum Formulis Analytico-Combinatoriis per Tabulas Exhibendae*, S. L. Crusium, Leipzig.

--------------------- (1796A). “Vorbericht”, in Hindenburg *et al.*, *Der polynomische Lehrsatz das wichtigste Theorem der ganzen Analysis*, Gerhard Fleischer dem Jüngern, Leipzig.

--------------------- (1796B). “Die Combinationslehre ist eine selbständige Grundwissenschaft; ihre Verbindung mit der Analysis ist die engste und natürlichste; die unmittelbarste Anwendung derselben zeigt sich bey dem allgemeinen Produkten- und Potenzenprobleme der Reihen; Vergleichung des von Hrn. Tetens bey diesen Problemen angebrachten

Substitutionsverfahren mit der Hindenburgischen Combinationsmethode; Nothwendigkeit einer in die Analysis einzuführenden allgemeinen, grösstentheils combinatorischen, Charakteristik", in Hindenburg *et al.*, *Der polynomische Lehrsatz das wichtigste Theorem der ganzen Analysis*, Gerhard Fleischer dem Jüngern, Leipzig, pp. 153-304.

--------------------- (1798). "Vergleichung der Lagrangischen und combinatorischen Reversionsformeln für Reihen; auf Veranlassung einer Stelle in der so eben recensirten Schrift", in Hindenburg (Herausgeber), *Archiv der reinen und angewandten Mathematik*, Zweyter Band, Schäferischen Buchhandlung, Leipzig, pp. 359-376.

--------------------- (1800). "Zusatz des Herausgebers", *Archiv der reinen und angewandten Mathematik*, Leipzig, pp. 343-348.

Hindenburg, Carl Friedrich *et al*. (1796). *Der polynomische Lehrsatz das wichtigste Theorem der ganzen Analysis*, Gerhard Fleischer dem Jüngern, Leipzig.

Hoffmann, Ludwig (1864). *Mathematisches Wörterbuch*, IV Band K-P, Wiegandt und Hempel, Berlin.

Holborn, Hajo (1982). *A History of Modern Germany: 1648-1840*, Vol. I, Princeton University Press, USA.

Home, R. W. (1979). "Introduction", in *Aepinus's Essay on the Theory of Electricity and Magnetism*, Princeton University Press, USA.

--------------------- (2005). "Aepinus", in J. L. Heilbron (Ed.), *The Oxford Guide to the History of Physics and Astronomy*, Oxford University Press, USA.

Hosking, Geoffrey (2001). *Russia and the Russians: A history*, 2nd ed., Harvard University Press, USA.

Howard, Thomas Albert (2006). *Protestant Theology and the Making of the Modern German University*, Oxford University Press, Great Britain.

Huth, Gottfried (1789). *Anfangsgründe der angewandten Mathematik*, Hemmerde and Schwetschke, Halle.

Jahnke, Carsten. "Die Christian-Albrechts-Universität zu Kiel Von der Landesschule zum internationalen Forschungszentrum", electronic reference available at: https://www.uni-kiel.de/ueberblick/entwicklung.shtml

Jahnke, Hans Niels (1992). "A Structuralist View of Lagrange's Algebraic Analysis and the German Combinatorial School", in Javier Echeverria, Andoni Ibarra and Thomas Mormann (Eds.), *The Space of Mathematics. Philosophical, Epistemological, and Historical Explorations*, Walter de Gruyter, Germany, pp. 280-295.

--------------------- (1993). "Algebraic Analysis in Germany, 1780-1840: Some Mathematical and Philosophical Issues", *Historia Mathematica*, 20, Academic Press, pp. 265-284.

Jahnke, Hans Niels & Otte, Michael (1981). "On 'Science as a Language'", in H. N. Jahnke and M. Otte (Eds.), *Epistemological and Social Problems of the Sciences in the Early Nineteenth Century*, Reidel Publishing, Holland, pp. 75-89.

Jewell, Helen M. (1998). *Education in Early Modern England*, Macmillan Press, Great Britain.

Jungnickel, Christa and McCormmach, Russell (1990). *Intellectual Mastery of Nature: Theoretical Physics from Ohm to Einstein. The Torch of Mathematics 1800-1870*, Vol. 1. University of Chicago Press, Chicago.

Kafka, Franz (2009). *The Castle*, Anthea Bell (Trad.), Oxford University Press, USA.

Kant, Immanuel (1781). *Critik der reinen Vernunft*, Johann Friedrich Hartknoch, Riga.

--------------------- (1783). *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik die als Wissenschaft wird auftreten können*, Johann Friedrich Hartknoch, Riga.

Karsten, Wenceslau Johann Gustav (1755). *Dissertatio Mathematica Inquirens in Notionem Algebrae, eiusque Differentiam ab Arithmetica*, Litteris Adlerianis, Rostock.

--------------------- (1756). *Matheseos Universalis in usus Auditorum*, officina Koppiana, Rostock.

--------------------- (1758). *Beyträge zur Aufnahme der Theoretischen Mathematik*, Erste Stük Anton Ferdinand Röse, Rostock.

--------------------- (1760). *Mathesis Theoretica Ementaris atque Sublimior*, Anton Ferdinand Röse, Rostock et Greifswald.

--------------------- (1767). *Lehrbegrif der gesamten Mathematik*, Erste Theil, Anton Ferdinand Röse, Greifswald.

--------------------- (1768A). *Abhandlungen der Churfürstlich-baierischen Akademie der Wissenschaften*, Fünfter Band, Churfürstlich-akademischen Buchhandlung, München.

--------------------- (1768B). *Lehrbegrif der gesamten Mathematik*, Zweyte Theil, Anton Ferdinand Röse, Greifswald.

--------------------- (1769A). *Lehrbegrif der gesamten Mathematik*, Dritte Theil, Anton Ferdinand Röse, Greifswald.

--------------------- (1769B). *Lehrbegrif der gesamten Mathematik*, Vierte Theil, Anton Ferdinand Röse, Greifswald.

--------------------- (1780 I). *Anfangsgründe der Mathematischen Wissenschaften*. *Die Rechenkunst, Geometrie und ebene Trigonometrie*, Erster Band, Anton Ferdinand Röse, Greifswald.

--------------------- (1780 II). *Anfangsgründe der Mathematischen Wissenschaften. Die Statischen und Mechanischen Wissenschaften*, Zweyter Band, Anton Ferdinand Röse, Greifswald.

--------------------- (1781). *Auszug aus den Anfangsgründen und dem Lehrbegriffe der Mathematischen Wissenschaften*, Anton Ferdinand Röse, Greifswald.

--------------------- (1786). *Mathematische Abhandlungen*, Rengerschen Buchhandlung, Halle im Magdeburgschen.

Kästner, Abraham Gotthelf (1739). *Theoria Radicum in Aequationibus*, Breitkopf, Leipzig.

--------------------- (1743). *Aequationum Speciosarum Resolutio Newtoniana per Series*, Breitkopf, Leipzig.

--------------------- (1745A). *Demonstratio Theorematis Binomialis*, Breitkopf, Leipzig.

--------------------- (1745B). *Demonstratio Theorematis Harrioti*, Breitkopf, Leipzig.

--------------------- (1758). *Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspectiv*, Witwe Vandenhoeck, Göttingen.

--------------------- (1759A). *Anfangsgründe der Angewandten Mathematik*, Wittwe Vandenhoeck, Göttingen.

--------------------- (1759B). *Versuch einer Analytischen Abhandlung von den Regelschnitten*, Victorinus Bossigel, Göttingen.

--------------------- (1760). *Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen*, Wittwe Vandenhoeck, Göttingen.

--------------------- (1761). *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen*, Wittwe Vandenhoeck, Göttingen.

--------------------- (1764). *Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspectiv*, 2nd ed., Witwe Vandenhoeck, Göttingen.

--------------------- (1766). *Anfangsgründe der höhern Machanik*, Wittwe Vandenhoeck, Göttingen.

--------------------- (1767). *Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen*, 2nd ed., Wittwe Vandenhoeck, Göttingen.

--------------------- (1770). *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen*, 2nd ed., Wittwe Vandenhoeck, Göttingen.

--------------------- (1771). "Io. Bernoullii Hydraulica contra Dom. D'Alembert Objectiones", *Novi Commentarii Societatis Regiae Scientarum Regiae Scientiarum Gottingensis*, Tom. I, 1769-1770, Johann Christian Dieterich, Göttingen and Gotha, pp. 45-89.

--------------------- (1783). *Anfangsgründe der Arithmetik, Algebra, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, und Prespectiv*, Johann Thomas Edlen von Trattnern, Wien.

--------------------- (1786 I). *Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspectiv*, 4th ed., Wittwe Vandenhoeck, Göttingen.

--------------------- (1786 II). *Fortsetzung der Rechenkunst in Anwendungen auf macherley Geschäffte*, Wittwe Vandenhoeck, Göttingen.

--------------------- (1790). *Geometrische Abhandlungen, Erste Sammlung, Anwendungen der ebenen Geometrie und Trigonometrie*, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen.

--------------------- (1791). *Geometrische Abhandlungen, Zweyte Sammlung, Anwendungen der Geometrie und Trigonometrie*, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen.

--------------------- (1792). *Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, und Perspectiv*, 5th ed., Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen.

--------------------- (1794). *Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen*, 3rd ed., Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen.

--------------------- (1796). *Geschichte der Mathematik seit der Wiederherstellung der Wissenschaften bis an das Ende des achtzehnten Jahrhunderts*, Erster Band, Johann Georg Rosenbusch, Göttingen.

--------------------- (1798). "Leipzig", *Göttingische Anzeigen von gelehrten Sachen*, 202 Stück, 20 December, Göttingen, pp. 2013-2014.

--------------------- (1799). *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen*, 3rd ed., Vandenhoeck and Ruprecht.

--------------------- (1800). *Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspectiv*, 6th ed., Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen.

Kerr, John (1910). *Scottish Education: School and University From Early Times to 1908*, Cambridge University Press, UK.

Kitcher, Philip (1984). *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, USA.

Klein, Felix (1896). "The arithmetizing of mathematics", *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 2, No. 8, pp. 241-249.

--------------------- (1926). *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Julius Springer, Berlin.

Kleinert, Andreas (2002). "Johann Andreas (von) Segner (1704-1777)", *Reports in Didactics and history of Mathematics*, 19, pp. 15-20.

Klemme, Heiner F. and Kuehn, Manfred (Eds.) (2016). *The Bloomsbury Dictionary of Eighteenth-Century German Philosophers*, Bloomsbury, Great Britain.

Kline, Morris (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Vol. 3, Oxford University Press, Oxford.

Klügel, Georg Simon (1763). *Conatuum Praecipuorum Theoriam Parallelarum Demonstrandi Recensio*, F. A. Rosenbusch, Göttingen.

--------------------- (1767). *De ratione quam inter se habent in Demonstrationibus Mathematicis Methodus Synthetica et Analytica*, Viduae Schnorriae, Helmstedt.

-------------------- (1792). *Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie, nebst ihrer Anwendung auf praktische Rechnungen, das Feldmessen und die Markscheidekunst*, 2nd ed., Friedrich Nicolai, Berlin and Stettin.

-------------------- (1794). *De Mathesi Prima vel Universali seu Metaphysice Mathematica*, Typis Franckianis, Halle.

-------------------- (1795A). "Über die Lehre von den entgegengesetzten Grössen", *Archiv der reinen und angewandten Mathematik*, Carl Friedrich Hindenburg (Herausgegeber), Erster Band, Schäferischen Buchhandlung, Leipzig, pp. 309-319.

-------------------- (1795B). "Über die Lehre von entgegengesetzten Grössen; Fortsetzung", *Archiv der reinen und angewandten Mathematik*, Carl Friedrich Hindenburg (Herausgegeber), Erster Band, Schäferischen Buchhandlung, Leipzig, pp. 470-481.

-------------------- (1796). "Bemerkungen über den Polynomischen Lehrsatz", in Hindenburg *et al*., *Der polynomische Lehrsatz das wichtigste Theorem der ganzen Analysis*, Gerhard Fleischer dem Jüngern, Leipzig, pp. 48-90.

-------------------- (1798). *Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie, nebst ihrer Anwendung auf praktische Rechnungen, das Feldmessen und die Markscheidekunst*, Friedrich Nicolai, Berlin and Stettin.

-------------------- (1800). "Aus einem Schreiben des Herrn Professor Klügel an den Herausgeber", *Archiv der reinen und angewandten Mathematik*, Leipzig, pp. 340-342.

-------------------- (1803). *Mathematisches Wörterbuch oder Erklärung der Begriff, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik*, 1st ed., Erster Theil von A bis D, Schwickertschen Verlage, Leipzig.

-------------------- (1805). *Mathematisches Wörterbuch oder Erklärung der Begriff, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik*, 1st ed., Zweyter Theil von E bis I, Schwickertschen Verlage, Leipzig.

-------------------- (1808). *Mathematisches Wörterbuch oder Erklärung der Begriff, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik*, 1st ed., Dritter Theil von K bis P, Schwickertschen Verlage, Leipzig.

Klügel, Georg Simon, Mollweide, Karl Brandan and Grunert, Johann August (1831). *Mathematisches Wörterbuch oder Erklärung der Begriff, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik*, Fünfter Theil von T bis Z, Schwickertschen Verlage, Leipzig.

"Københavns Universitet Indtil 1849", available at: http://danmarkshistorien.dk/leksikon-og-kilder/vis/materiale/koebenhavns-universitet-indtil-1849/

Köhler, Eckehart (2006). "Ramsey and the Vienna Circle on Logicism", in Maria Carla Galavotti (Ed.), *Cambridge and Vienna: Frank P. Ramsey and the Vienna Circle*, Springer, Netherlands, pp. 91-122.

Königlich-Preußisches General-Land-Schul-Reglement, wie solches in allen Landen Seiner Königlichen Majestät von Preussen durchgehends zu beobachten, Berlin, 1763.

Königlich-Preußisches General-Land-Schul-Reglement für die Römisch-Catholischen in Städten und Dörfern des Souverainen Herzogthums Schlesien und der Grafschaft Glaß, Potsdam, 1765.

Kronecker, Leopold (1887). "Ueber den Zahlbegriff", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band 101, Georg Reimer, Berlin, pp. 337-355.

Krueger, Rita (2009). *Czech, German & Noble. Status and National Identity in Habsburg Bohemia*, Oxford University Press, USA.

Kruse, Otto (2006). “The Origins of Writing in the Disciplines. Traditions of Seminar Writing And the Humboldtian Ideal of the Research University”, *Written Communication*, Vol. 23, No. 3, Sage Publications, pp. 331-352.

Lacroix, Sylvestre François (1804). *Élémens d’Algèbre a l’usage de l’École Centrale des Quatre-Nations*, 5th ed., Courcier, Paris.

Lagrange, Joseph-Louis (1797). *Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d’infiniment petits ou d’evanouissans, de limites ou de fluxions, et réduits a l’analyse algébrique des quantités finies*, Imprimerie de la République, Prairial an V, Paris.

--------------------- (1799). “Discours sur l’objet de la théorie des fonctions analytiques”, *Journal de l’École Polytechnique*, Tome II, Sixième cahier, Imprimerie de la République, Thermidor an VII, pp. 232–235.

--------------------- (1801). *Sur le calcul des fonctions*, Séances des Écoles Normales, Leçons, Tome Dixième, Imprimerie du Cercle Social, Paris.

--------------------- (1882). “Lagrange a d’Alembert. A Berlin, ce 16 décembre 1771”, in *Oeuvres de Lagrange*, Tom. 13, soins de M. J. A. Serret, Gauthier-Villars, Paris, pp. 221-224.

Von Langsdorf, Karl Christian (1777). *Fortsetzung der Erläuterungen über die Kästnerische Analysis endlicher Grössen*, erste Fortsetzung, C. F. Schwan, Churfürstl., Mannheim.

--------------------- (1778). *Erläuterungen über die Kästnerische Analysis des Unendlichen*, Krieferischen Buchhandlung, Giessen.

--------------------- (1802). *Anfangsgründe der reinen Elementar- und höheren Mathematik*, Johann Jakob Palm, Erlangen.

--------------------- (1807). *Principia Calculi Differentialis ex Fundamentis nouis iisque Solidioribus deducta*, Mohr and Zimmer, Heidelberg.

Lapointe, Sandra (2011). *Bolzano’s Theoretical Philosophy*, Palgrave Macmillan, UK.

Lapointe, Sandra and Armstrong, Chloe (2014). “Bolzano, Kant, and Leibniz”, in Sandra Lapointe and Clinton Tolley (Eds.), *New Anti-Kant*, Palgrave Macmillan, UK, pp. 272-290.

Lapointe, Sandra and Tolley, Clinton (Eds.) (2014). *New Anti-Kant*, Palgrave Macmillan, UK.

Laugwitz, Detlef (1987). “Infinitely Small Quantities in Cauchy’s Textbooks”, *Historia Mathematica*, Vol. 14, Issue 3, Academic Press, pp. 258-274.

--------------------- (1989). “Definite Values of Infinite Sums: Aspects of the Foundations of Infinitesimal Analysis around 1820”, *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 39, No. 3, Springer, pp. 195-245.

Legendre, Adrien Marie (1798). *Essai sur la Théorie des Nombres*, Duprat, Paris.

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1856). *Leibnizens mathematische Schriften*, Band 3, Zweite Abtheilung, C. I. Gerhardt (Ed.), Halle.

Levy, Miriam J. (1988). *Governance & Grievance: Habsburg Policy and Italian Tyrol in the Eighteenth Century*, Purdue University Press, USA.

Lichtenberg, Georg Christoph (1994 I). *Schriften und Briefe*, Erster Band, Sudelbücher I, Carl Hanser, München.

--------------------- (1994 II). *Schriften und Briefe*, Zweiter Band, Sudelbücher II, Materialhefte, Tagebücher, Carl Hanser, München.

Lindemann, Mary (1999). *Medicine and Society in Early Modern Europe*, Cambridge University Press, UK.

Luh, Jürgen (2012). “Frederick the Great and the First ‘World’ War”, in Mark H. Danley and Patrick J. Speelman (Eds.), *The Seven Years’ War. Global Views*, Brill, Leiden, pp. 1-21.

Lumiste, Ülo (1997). "Martin Bartels as Researcher: His Contribution to Analytical Methods in Geometry", *Historia Mathematica*, 24, pp. 46-65.

Lützen, Jesper (2003). "The Foundation of Analysis in the 19th Century", in Hans Niels Jahnke (Ed.), *A History of Analysis*, History of Mathematics, Vol. 24, American Mathematical Society and London Mathematical Society, USA, pp. 155-196.

Martin, Gottfried (1956). *Klassische Ontologie der Zahl*, Kölner Universitäts-Verlag, Köln.

Mayer, Johann Tobias (1818). *Vollständiger Lehrbegriff der höhern Analysis*, Zweyter Theil, Die Integralrechnung, Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen.

McCleary, Rachel M. (Ed.) (2011). *The Oxford handbook of the economics of religion*, Oxford University Press, New York.

Melton, James Van Horn (2002). *Absolutism and the eighteenth-century origins of compulsory schooling in Prussia and Austria*, Cambridge University Press, Cambridge.

--------------------- (2006). "The Theresian School Reform of 1774", in James B. Collins & Karen L. Taylor (Eds.), *Early Modern Europe: Issues and Interpretations*, Blackwell Publishing, India, pp. 55-68.

Méray, Charles (1869). "Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données", *Revue des Sociétés Savantes des Départements*, Sci. Mat. Phys. Nat. (2) 4, pp. 280-289.

Meschkowski, Herbert (1967). *Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors*, Springer, Braunschweig.

Meschkowski, Herbert and Nilson, Winfried (Eds.) (1991). *Georg Cantor. Briefe*, Springer-Verlag.

Metternich, Matthias (1783). *Gründliche Anweisung zur Rechenkunst für Anfänger in öffentlichen Schulen*, Mainz and Frankfurt.

--------------------- (1789). *Anfangsgründe der Geometrie und Trigonometrie zum Gebrauche für Anfänger bei dem Unterrichte*, Mainz.

--------------------- (1808). *Gründliche Rechenkunst in Dezimalbrüchen und andern Zahlen zum vorzüglichen Gebrauche bei den neuen Masen und Gewichten*, in Kommission bei F. Kupferberg, Mainz.

--------------------- (1811). *Anfangsgründe der Algebra von S. F. Lacroix*, Florian Kupferberg, Mainz.

--------------------- (1818). *Die reine und angewandte Zahlenlehre für Lehrer und Lernende*, Gelehrten Buchhandlung, Coblenz und Hadamar.

Michelsen, Johann Andreas Christian (1786). *Briefe über die ersten Anfangsgründe der Buchstabenrechnung und Algebra*, Hallischen Waysenhauses, Berlin.

--------------------- (1789). *Anleitung zur Buchstabenrechnung und Algebra auch für diejenigen welche der Gelegenheit zum mündlichen Unterrichte beraubt selbige durch eigenen Fleiss erlernen wollen*, Erster Theil, Siegismund Friedrich Hesse und Compagnie, Berlin.

--------------------- (1790 I). *Beyträge zur Beförderung des Studiums der Mathematik, insbesondere für Schullehrer und Praktiker*, Erster Stück, Verlage der Königl. Preuss. Akadem, Berlin.

--------------------- (1790 II). *Beyträge zur Beförderung des Studiums der Mathematik, insbesondere für Schullehrer und Praktiker*, Zweytes Stück, Verlage der Königl. Preuss. Akadem, Berlin.

Moore, Gregory H. (2000). "Historians and Philosophers of Logic: Are They Compatible? The Bolzano-Weierstrass Theorem as a Case Study", *History and Philosophy of Logic*, 20, Taylor & Francis, pp. 169-180.

--------------------- (2008). "The emergence of open sets, closed sets, and limit points in analysis and topology", *Historia Mathematica*, 35, Elsevier, pp. 220-241.

Mueller, Detlef K. (1981). “Possibilities and Limits of the Prussian School Reform at the Beginning of the 19th Century”, in H. N. Jahnke and M. Otte (Eds.), *Epistemological and Social Problems of the Sciences in the Early Nineteenth Century*, Reidel Publishing, Holland, pp. 183-206.

Mueller, Hans-Eberhard (1974). *Bureaucracy and Education: Civil Service Reforms in Prussia and England as Strategies of Monopolization*, Ph.D. thesis, University of California, Berkeley.

Müller, Conrad H. (1904). “Studien zur Geschichte der Mathematik insbesondere des Mathematischen unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert”, in *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften mit einschluss ihrer Anwendungen*, B. G. Teubner, Leipzig, pp. 51-143.

Newton, Isaac (1707). *Arithmetica universalis sive de compositione et resolutione arithmetica liber*, Tooke, Cantabriga.

Nipperdey, Thomas (1983). *Deutsche Geschichte 1800–1866: Bürgerwelt und starker Staat*, C. H. Beck, Munich.

Paletschek, Sylvia (2001). “Verbreitete sich ein ‘Humbold’sches Modell’ an den deutschen Universitäten im 19. Jahrhundert?”, in Rainer C. Schwinges (Ed.), *Humboldt International. Der Export des deutschen Universitätsmodells im 19. und 20. Jahrhundert*, Schwabe & Co., Basel, pp. 75-104.

Paskvić, Ivan (1799). *Opuscula Statio-Mechanica. Principiis Analyseos Finitorum Superstructa*, Vol. I, Libraria Weidmanniana, Leipzig.

--------------------- (1812). *Anfangsgründe der gesammten theoretischen Mathematik*, Erster Band, Schaumburg and Compagnie, Wien.

--------------------- (1813). *Anfangsgründe der gesammten theoretischen Mathematik*, Zweiter Band, Schaumburg and Compagnie, Wien.

Paulsen, Friedrich (1906). *The German Universities and University Study*, translated by Frank Thilly and William W. Elwang, Charles Scribner’s Sons, New York.

Pfaff, Johann Friedrich (1788). *Programma inaugurale in quo peculiarem Differentialia Investigandi Rationem ex Theoria Functionum deducit*, Johann Heinrich Kühnlin, Helmstedt.

--------------------- (1796). “Sätze über Potenzen und Produkte gewisser Reihen” and “Bemerkungen über eine besondere Art von Gleichungen, nebst Beyspielen von ihrer Auflösung”, in Carl Friedrich Hindenburg (Ed.), *Der polynomische Lehrsatz das wichtigste Theorem der ganzen Analysis nebst einigen verwandten und andern Sätzen*, Gerhard Fleischer dem Jüngern, Leipzig, pp. 123-143 and pp. 144-152.

--------------------- (1797). *Disquisitiones Analyticae maxime ad Calculum Integralem et Doctrinam Serierum pertinentes*, Vol. I, C. G. Fleckeisen, Helmstedt.

Pincherle, Salvatore (Comp.) (1880). *Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principi del prof. C. Weierstrass*, Benedetto Pellerano Editore, Napoli.

Poincare, Henri (1902). “Du role de l’Intuition et de Ia Logique en Mathématiques”, in *Compte Rendu du Deuxieme Congres International des Mathematiciens*, Paris, pp. 115-130.

Příhonský, František (1850). *Neuer Anti-Kant oder Prüfung der Kritik der reinen Vernunft nach den in Bolzano’s Wissenschaftslehre niedergelegten Begriffen*, A. Weller, Bautzen.

Raupach, Johann Friedrich (1815). *Die Elemente der Algebra und Analysis, nebst ihrer Anwendung auf die Geometrie*, Wilhelm Gottlieb Korn, Breslau.

Reck, Erich (2016). “Dedekind’s Contributions to the Foundations of Mathematics”, in Edward N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Winter 2016 Edition, available at: https://plato.stanford.edu/entries/dedekind-foundations/]

Remer, Julius August (1800). *Lehrbuch der algemeinen Geschichte für Akademien und Gymnasien*, Hemmerde and Schwetschke, Halle.

Riasanovsky, Nicholas Valentine (2000). *A History of Russia*, 6th ed., Oxford University Press, Great Britain.

Rüegg, Walter (1996). *A History of the University in Europe. Universities in Early Modern Europe (1550-1800)*, Vol. II, Cambridge University Press, UK.

--------------------- (2004). *A History of the University in Europe. Universities in the Nineteenth and Early Twentieth Centuries (1800-1945)*, Vol. III, Cambridge University Press, UK.

Rusnock, Paul (2000). *Bolzano’s Philosophy and the Emergence of Modern Mathematics*, Rodopi, Amsterdam.

Rusnock, Paul and Kerr-Lawson, Angus (2005). “Bolzano and uniform continuity”, *Historia Mathematica*, Vol. 32, Issue 3, Elsevier, pp. 303-311.

Russ, Steve (1980). “A translation of Bolzano’s paper on the intermediate value theorem”, *Historia Mathematica*, 7, Academic Press, pp. 156-185.

--------------------- (1996). “Bernard Bolzano (1781-1848)”, in William Ewald (Ed.), *From Kant to Hilbert*, Vol. I. Oxford University Press, Oxford, pp. 168-292.

--------------------- (2004). *The Mathematical Works of Bernard Bolzano*, Oxford University Press, USA.

S., A. (1893). “Spaun, Franz Anton Ritter von”, *Allgemeine Deutsche Biographie*, 35, pp. 69-70 [https://www.deutsche-biographie.de/gnd119473623.html#adbcontent]

Scherffer, Karl (1770). *Institutionum analyticarum, Pars Prima, sive Analysis Quantitatum Finitarum conscripta in usum Tironum*, Johann Thomas Edlen von Trattnern, Wien.

--------------------- (1771). *Institutionum Analyticarum, Pars Secunda, de Calculo Infinitesimali, Liber Primus, de Calculo Differentiali conscriptus in usum Tironum*, Johann Thomas Edlen von Trattnern, Wien.

--------------------- (1772). *Institutionum Analyticarum, Pars Secunda, de Calculo Infinitesimali, Liber Secundus, de Calculo Integrali conscriptus in usum Tironum*, Johann Thomas Edlen von Trattnern, Vindobona [Wien].

Schoenflies, Arthur Moritz (1898). “Mengenlehre”, in W. F. Meyer (Ed.), *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, Band I: Algebra und Zahlentheorie, 1. Teil: A. Grundlagen, 5, Teubner, Leipzig, pp. 184-207.

Schubring, Gert (2005). *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17–19th Century France and Germany*, Springer, USA.

Schulze, Hagen (1999). “The Prussian Reformers and their Impact on German History”, *Proceedings of the British Academy*, 1000, The British Academy, pp. 61-77.

Schumann, Matt (2012). “The End of the Seven Years’ War in Germany”, in Mark H. Danley and Patrick J. Speelman (Eds.), *The Seven Years’ War. Global Views*, Brill, Leiden, pp. 487-518.

Schultz, Johann (1788). *Versuch einer genauen Theorie des Unendlichen, Erster Theil. Vom Unendlichgrossen, und der Messkunst desselben*, Gottlieb Lebrecht Hartung, Königsberg and Leipzig.

--------------------- (1790). *Anfangsgründe der reinen Mathesis*, Gottlieb Lebrecht Hartung, Königsberg.

Schwarz, Hermann (1872). “Zur Integration der partiellen differentialgleichung”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Vol. 74, pp. 218-253.

--------------------- (1890). “Beweis eines für die Theorie der trigonometrischen Reihen in Betracht kommenden Hülfssatzes”, in *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Zweiter Band, Julius Springer, Berlin.

Scott, H. M. (1990). “Reform in the Habsburg Monarchy, 1740-90”, in H. M. Scott (Ed.), *Enlightened Absolutism. Reform and Reformers in Later Eighteenth-Century Europe*, Palgrave Macmillan, England, pp. 145-187.

Sebestik, Jan (2010). “The significance of Bolzano’s Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik”, abstract for the *International Conference Philosophy and Mathematics in the Work of Bernard Bolzano* that took place in Prague on April 15-18, 2010, available at: https://studylib.net/doc/12930570/titles-and-abstracts-for-pmb10-ken-archer--usa-

--------------------- (2014). “Bolzano’s Lehrjahre”, in Anne Reboul (Ed.), *Mind, Values, and Metaphysics. Philosophical Essays in Honor of Kevin Mulligan*, Vol. 1, Springer, Switzerland, pp. 289-293.

Segner, János András (1740). *Specimen Logicae Universaliter Demonstratae*, viduae Croekerianae, Jena.

--------------------- (1747). *Deutliche und vollständige Vorlesungen über die Rechenkunst und Geometrie*, Johann Heinrich Meyer, Lemgo.

--------------------- (1756). *Cursus Mathematici, Pars I. Elementa Arithmeticae, Geometriae et Calculi Geometrici*, officina Rengeriana, Halle im Magdeburgischen.

--------------------- (1758). *Cursus Mathematici, Pars II. Elementa Analyseos Finitorum*, officina Rengeriana, Halle im Magdeburgischen.

--------------------- (1767). *Deutliche und vollständige Vorlesungen über die Rechenkunst und Geometrie*, 2nd ed., Johann Heinrich Meyer, Lemgo.

--------------------- (1761). *Cursus Mathematici, Pars III. Elementorum Analyseos Infinitorum*, Pars I, officina Rengeriana, Halle im Magdeburgischen.

--------------------- (1768). *Cursus Mathematici, Pars V. Elementorum Calculi Integralis*, Pars I, officina Rengeriana, Halle im Magdeburgischen.

--------------------- (1773). *Anfangsgründe der Arithmetic, Geometrie und der Geometrischen Berechnungenaus dem Lateinischen übersetzt*, 2nd ed., officina Rengeriana, Halle im Magdeburgischen.

Seltman, Muriel and Goulding, Robert (Eds.) (2007). *Thomas Harriot's Artis Analyticae Praxis*, Springer, New York.

Sinaceur, Hourya (1973). “Cauchy et Bolzano”, *Revue d’histoire des sciences*, Vol. 26, No. 2, pp. 97-112, available at: http://www.persee.fr/doc/rhs_0151-4105_1973_num_26_2_3315

Šolcová, Alena (2010). “Mathematics and Logic: the View from Prague 1800”, *Philosophy and Mathematics in the Work of Bernard Bolzano* (meeting), available at: http://studylib.net/doc/12930593/mathematics-and-logic--the-view-from-prague-1800

Speelman, Patrick J. (2012). “Conclusion: Father of the Modern Age”, in Mark H. Danley and Patrick J. Speelman (Eds.), *The Seven Years’ War. Global Views*, Brill, Leiden, pp. 519-536.

Stahl, Conrad Diedrich Martin (1880). *Grundriss der Combinationslehre nebst Anwendung derselben auf die Analysis*, Christian Ernst Gabler, Jena und Leipzig.

Steele, Donald A. (1950). “Historical Introduction”, in *Paradoxes of the Infinite*, Donald A. Steele (Ed.), Routledge & Kegan Paul, London.

Stedall, Jacqueline (2008). *Mathematics Emerging. A Sourcebook 1540-1900*, Oxford University Press, USA.

Stillwell, John (2010A). *Mathematics and Its History*, Springer, USA.

--------------------- (2010B). *Roads to Infinity. The Mathematics of Truth and Proof*, A K Peters, USA.

Stolz, Otto (1881). "B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung", *Mathematische Annalen*, Vol. 18, pp. 255-279.

Struik, Dirk J. (1981). "Mathematics in the Early Part of the Nineteenth Century", in Herbert Mehrtens, Henk Bos and Ivo Schneider (Eds.), *Social History of Nineteenth Century Mathematics*, Springer Science, New York, pp. 6-20.

Tamul, Sirje. "Facts about the History of the University of Tartu", available at: http://www.ut.ee/en/university/general/history

Taylor, A. J. P. (1948). *The Habsburg Monarchy 1809-1918. A History of the Austrian Empire and Austria-Hungary*, Hamish Hamilton, London.

Thibaut, Bernhard Friedrich (1797). *Dissertatio Historiam Controversiae circa Numerorum Negativorum et Impossibilium Logarithmos sistens*, Johann Christian Dieterich, Göttingen.

--------------------- (1805). "St. Petersburg", *Göttingische gelehrte anzeigen*, 17 Stück, 31 Januar, Heinrich Dieterich, Göttingen, pp. 167-168.

--------------------- (1809A). *Grundriss der allgemeinen Arithmetik oder Analysis zum Gebrauch bei academischen Vorlesungen entworfen*, Heinrich Dieterich, Göttingen.

--------------------- (1809B). *Grundriss der reinen Mathematik zum Gebrauch bey academischen Vorlesungen abgefasst*, Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen.

Thomas, Peter D. G. (2002). *George III: King and politicians, 1760-1770*, Manchester University Press, UK.

Turner, Steven (1971). "The Growth of Professorial Research in Prussia, 1818 to 1848-Causes and Context", *Historical Studies in the Physical Sciences*, Vol. 3, 1971, pp. 137–182.

--------------------- (1981). "The Prussian professoriate and the research imperative, 1790-1840", in H. N. Jahnke and M. Otte (Eds.), *Epistemological and Social Problems of the Sciences in the Early Nineteenth Century*, Reidel Publishing, Holland, pp. 109-121.

--------------------- (1982). "Justus Liebig versus Prussian Chemistry: Reflections on Early Institute-Building in Germany", *Historical Studies in the Physical Sciences*, Vol. 13, No. 1, pp. 129–162.

Uschmann, Georg (1966). "Hamberger, Georg Erhard", *Neue Deutsche Biographie*, 7, pp. 579-580. [https://www.deutsche-biographie.de/gnd116422157.html#ndbcontent]

Vrahatis, Michael N. (2016). "Generalization of the Bolzano theorem for simplices", *Topology and its Applications*, 202, Elsevier, pp. 40-46.

Vydra, Stanislaus (1783). *Elementa Calculi Differentialis, et Integralis*, Johann Ferdinand von Schönfeld, Praha and Wien.

--------------------- (1795). *Sätze aus der Mechanik, die den Herren Höhern der angewandten Mathematik vorzutragen pflegt*, Tiskárna normální skoly, Prague.

Wehler, Hans-Ulrich (1987). *Deutsche Gesellschaftsgeschichte 1700-1815*, Vol. 1, Beck, Munich.

Weierstrass, Karl (1861). *Differential Rechnung*, notes taken by H. Schwarz at Berlin in the summer semester of 1861, available at: http://www.digi-hub.de/viewer/image/BV042513990/2/

--------------------- (1865/66). *Prinzipien der Theorie der analytischen Functionen*, notes taken by Moritz Pasch at Berlin, available at: http://digisam.ub.uni-giessen.de/diglit/nl-pasch-bd-19

--------------------- (1868/1986). "Einführung in die Theorie der analytischen Functionen", notes taken by Wilhem Killing in 1868, in R. Remmert (Ed.), *Schriftenreihe des Mathematischen Instituts der Universität Münster*, Serie 2, Heft 38.

--------------------- (1874). *Einleitung in die Theorien der analytischen Functionen*, notes taken by G. Hettner at Berlin in the summer semester of 1874, available at: https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=uiuc.565673;view=1up;seq=5

--------------------- (1876/1895). "Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen", in *Mathematische Werke*, Zweiter Band, Abh. II, Mayer & Müller, Berlin, pp. 77-124.

--------------------- (1878/1988). "Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen", notes taken by Adolf Hurwitz at Berlin in 1878, in Peter Ullrich (Ed.), *Dokumente zur Geschichte der Mathematik*, Band 4, Springer Fachmedien Wiesbaden, Braunschweig.

--------------------- (1886/1988). "Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre. Vorlesung, gehalten während des Sommersemesters 1886", in R. Siegmund-Schultze (Ed.), *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre*, Teubner, Leipzig, pp. 19-177.

Whaley, Joachim (2012 I). *Germany and the Holy Roman Empire, 1493-1648 Maximilian I to the Peace of Westphalia*, Oxford University Press, Oxford.

--------------------- (2012 II). *Germany and the Holy Roman Empire, 1648-1806 The Peace of Westphalia to the Dissolution of the Reich*, Oxford University Press, Oxford.

Wilfing, Alexander (2015). "The Early Kant Reception In Austria. From Joseph II to Francis II", in Violetta L. Waibel (Ed.), *Detours: Approaches to Immanuel Kant in Vienna, in Austria, and in Eastern Europe*, Vienna University Press, Germany.

Winkler, Heinrich August (2000). *Der lange Weg nach Westen*, 2 Vols., C. H. Beck, München.

Wolff, Christian (1710). *Der Anfangs-Gründe Aller Mathematischen Wissenschafften*, Erster Theil, Johann Gottfried Renger, Halle im Magdeburgischen.

--------------------- (1713). *Elementa Matheseos Universæ*, 1, Renger, Halle im Magdeburgischen.

--------------------- (1716). *Mathematisches Lexicon*, Gleditschens seel. Sohn, Leipzig.

--------------------- (1717). *Der Anfangs-Gründe Aller Mathematischen Wissenschaften*, Erster Theil, Rengerischen Buchhandl, Halle im Magdeburgischen.

--------------------- (1742). *Elementa Matheseos Universae*, 1, Renger, Halle im Magdeburgischen.

--------------------- (1747). *Vollständiges Mathematisches Lexicon*, Erster Theil, Gleditschens, Leipzig.

--------------------- (1750). *Der Anfangs-Gründe aller Mathematischen Wissenschaften*, Editio Novissima, Tomus 1, Halle im Magdeburgischen.

Wright, William E. (1966). *Serf, Seigneur, and Sovereign*, University of Minnesota Press, USA.

Zermelo, Ernst (Ed.) (1932). *Georg Cantor Gesammenlte Abhandlungen. Mathematischen und Philosophischen Inhlats mit Erläuterndem Anmerkungen Sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor-Dedekind*, Julius Springer, Berlin.

Zimmermann, Christian Gottlieb (1805). *Entwickelung analytischer Grundsätze für den ersten Unterricht in der Mathematik besonders für diejenigen, welche sich ohne mündliche Anweisung darüber belehren wollen*, Heinrich Frölich, Berlin.

Zimmermann, Paul (1889). "Remer, Julius August", *Allgemeine Deutsche Biographie*, 28, p. 198. [https://www.deutsche-biographie.de/gnd116436123.html#adbcontent]