<u>Continuum vs. Continua Mathematica</u>

Prolegómenos para una aproximación trascendental
a la incompatibilidad entre la caracterización matemática
del continuo y su concepción metafísica

Jesús Salcedo Sotoca

Trabajo de Fin de Máster dirigido por

Concepción Martínez Vidal
Universidade de Santiago de Compostela

Máster en Lógica y Filosofía de la Ciencia
Universidad de Salamanca
2014

Nullam rem e nihilo gigni.
Lucrecio – *De rerum Natura* (Liber Primus, 150)

There are more things in Heaven and Earth, Horatio,
Than are dreamt of in your Philosophy.

Shakespeare – *The Tragedy of Hamlet, Prince of Denmark* (Acto I, escena 5)

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Euler

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

Las nociones del continuo o la continuidad han estado presentes en muchos de los grandes problemas de la historia del conocimiento. Aunque no siempre sea de una manera explícita ni mucho menos uniforme puede detectarse su presencia con los más variopintos ropajes: la diagonal del cuadrado, la afinación tonal armonizable entre octavas, el χωρισμός platónico, el éter y los campos, la dualidad onda-corpúsculo, el *horror uacui*, la glándula pineal, Pascal en el Puy de Dôme, Aquiles persiguiendo a la tortuga de Zenón y viceversa con la de Carroll, la herejía atomista de Demócrito, la interpretación de Copenhague, etc. Ello no es casual, sin duda se debe a que se trata de uno de los pocos temas donde coinciden de una manera casi nodal problemas fundamentales insoslayables de la matemática, la física y la filosofía.

Efectivamente, en estos ejemplos se puede atisbar lo que ha sido una tensión permanente entre lo continuo y lo discreto; la unidad y la multiplicidad, lo extenso y sus particiones, la geometría y la aritmética. Quizá no sea del todo impertinente, como se verá a lo largo de estos prolegómenos, caracterizar este asunto como un problema epistemológico localizado en la difícil, acaso imposible, síntesis entre las "intuiciones inmediatas"[1] de lo extenso y temporal, y su posible aprehensión (μαθεσις) y comunicación en las razones de un lenguaje y un cálculo.

De los múltiples horizontes teóricos implicados en el asunto, son el matemático y el filosófico donde éste se muestra con más nitidez; el primero, en la tensión entre la geometría sintética y la aritmética con la solución algebraica analítica en el cálculo infinitesimal, por su parte, la perspectiva filosófica tiene diversos alcances resumibles en la dualidad metafísica y epistemológica: si la naturaleza de la realidad es continua o discreta lo que derivaría en los problemas epistémicos entre el análisis y la síntesis.

Haremos un recorrido peripatético a la inversa[2]; comenzando por una caracterización categórica de las diferentes nociones de lo continuo y lo discreto y sus paradójicas definiciones; seguidamente se tratarán la perspectivas matemáticas en sus vertientes geométrica, aritmética y las diferentes soluciones analíticas que han posibilitado su armonización, señalando algunos de los problemas y objeciones lógicas que plantean los fundamentos de tales soluciones; sólo de pasada, puesto que no es tema principal del trabajo, se hará una reseña al alcance del tema del continuo y la medida en las dos ramas principales de la física contemporánea, las relativistas y las cuánticas, que a su vez servirán de entrada a la consideración filosófica del problema. Será en esta última parte donde se apuntará una "solución" inspirada, nada veladamente, en la propuesta trascendental kantiana.

Finalmente, subrayando la intención del trabajo como prolegómenos, intentaremos identificar las debilidades de nuestra propuesta así como las posibles vías de investigación posteriores para superarlas, no evitando caer, a modo de epílogo, en una deriva de alcance moral.

---

[1] Valgan las comillas para evitar la diatriba estéril de si son posibles las intuiciones inmediatas o si, por el contrario, toda intuición es inmediata por definición. Veremos que gran parte de los problemas sobre el concepto del continuo surgen de las nociones de lo que es intuición o intuible, muchas veces confundido con lo sensible.

[2] Empezando por la perspectiva matemática (filosofía *tercera*), luego un breve apunte físico (filosofía *segunda*) y acabando con la discusión metafísica (filosofía *primera*), (cf. *Met.* A, claro).

2. ACOTACIONES PREVIAS

2.1. Una noción paradójica

Ya desde su misma definición lo continuo y lo discreto, en sus múltiples formas de ser referidos como continuidad, unidad, multiplicidad, separación, indivisibilidad, etc., muestran una engañosa reciprocidad. Así, de la definición de uno en contraposición con el otro podemos caer en un círculo, si no vicioso, tal vez paradójico. Entendiendo[3] como sustantivo, "continuo" apuntaría a una unidad de partes indiferenciadas; mientras que como adjetivo, apela a la falta de interrupción, de frontera o de limitación alguna. Por su parte, "discreto" sólo lo encontramos como adjetivo, recíprocamente a "continuo" sería lo diferenciado, lo limitado. Por otro lado, el sustantivo "continuidad"[4], como cualidad del continuo, parece tener un sentido atributivo, es decir, se afirma o se reconoce la continuidad en un ente, magnitud, o conjunto de entes que son partes de una unidad. Así se habla de "continuidad" en muchos contextos cotidianos en los que, mediante una norma, ley, justificación, de cualquier naturaleza, sobre todo discursiva, se reconoce una unidad, como un todo bajo el criterio demarcado, el cual, con la eliminación de una parte (una palabra, unos fotogramas, un argumento), pierde el conjunto su cualidad unitaria.

Tal uso de la continuidad, parece incompatible con la cualidad propia de lo continuo, la indiferenciación; en este caso, sería más correcto reconocer la atribución de continuidad como un recurso por analogía. Así, por analogía a lo que se entiende cotidianamente por continuo, como indiferenciado, compacto, denso, etc., atribuimos continuidad como reconocimiento justificativo de una unidad coherente, sin saltos, sin vacíos, bajo el criterio que sea. Esta falta de "huecos" nos revelaría como "continua" una entidad donde las partes perderían su "discreción" en "la norma" que los sanciona en su indiferencia[5]. Esta concepción, como cotidiana, o mejor, consuetudinaria que es conlleva la contradicción en su propio uso. Por ejemplo, se habla de "la continuidad de las actuaciones en tal proceso judicial" entendiendo que ello convierte el proceso en un todo, una unidad, continua en cuanto no hay "huecos" entre las "actuaciones", que son discretas, que privarían de su completo sentido unitario al proceso; de faltar alguna actuación, el proceso no sería uno, más aún, no habría proceso distinguible. Así, la continuidad, en realidad, no se atribuye a las partes unidas sino a la existencia del enlace (discursivo, técnico, imaginativo, etc.) entre ellas. Sin embargo, nadie pensaría que un hombre deja de serlo porque le falte alguna de sus partes; Valle-Inclán sin su brazo no pierde su unidad sustantiva[6].

---

[3] "continuo: 1.adj. Que dura, obra, se hace o se extiende *sin interrupción* / 5.m. Todo compuesto de partes unidas entre sí"; "discreto: 3.adj. Separado, distinto"; "continuidad: 1.f. Unión natural que tienen entre sí las partes del continuo" – D.R.A.E.

[4] "Continuity connotes unity; discreteness, plurality." – J.L. Bell (2010)

[5] "Lo continuo (συνεξης) es una subdivisión de lo contiguo (...) Y así como lo continuo llega a ser uno, así también un todo será uno, por ejemplo mediante enclavado, el encolado, el ensamblaje o la unión orgánica." – Arístóteles (*Phys*. 227a10-15, 2007). Es decir tal "enclavado" o "encolado" será la *norma* que justifica la atribución de continuidad al todo.

[6] El reproche sofístico a Parménides surge de ahí. Qué atributos son los que caracterizan una entidad y cuáles son los prescindibles. El hombre tiene pelo negro, pero hay hombres rubios, luego "el hombre" no tiene pelo; el hombre es bípedo, pero hay hombres sin piernas, luego "el hombre" no tiene piernas, etc. Así, el ser de "el hombre" no está en ningún sitio, el hombre no existe, sólo los hombres. Análoga es la visión aristótelica (*Met.*) sobre las formas y arquetipos académicos, el conocido argumento del Tercer Hombre, donde entre la participación en la forma de la humanidad y la entidad primera, el hombre individual, habría un tercer hombre como forma que recopile la humanidad, en sí, con el conjunto de entes que participan de ella. Así *in infinitum*.

Con el paso a la especulación científica y filosófica, indiferenciadas hasta hace unos pocos siglos, se termina de constituir la definición de continuo como aquello divisible sin límite[7]. Cuando se pretende que las palabras aprehendan (μαθειν) la Realidad (Φυσις) hasta agotarla, se comprueba cómo la Realidad en su mutabilidad es inasequible al lenguaje y las razones. Entonces, la unidad de su ser, el Ser-Uno (´ην και παν), continuo por ser uno indiferenciado (ἄπειρον), deberá contener en sí las infinitas particiones y particiones de particiones, hechas por el lenguaje, hasta la insondabilidad. Sin entrar en la recursividad "transfinita" que supondría abarcar la realidad con un lenguaje que se da en la misma realidad, el cual debería ser recogido también en otro lenguaje que lo incluyera y así in infinitum.

Esta inasequibilidad de la realidad al lenguaje, a los argumentos, a la matematización, sólo se salvaría con el punto geométrico, es decir con el límite de lo indivisible (ατομος), extremo discreto sin dimensiones, sin partes, es decir, indiferenciado y así... "continuo" (!) en su propia unidad. Así se pone fin a la "infinita" divisibilidad del continuo en el átomo, con la consiguiente aporía de encontrar la "norma" que justifique el "enlace", la "reconstrucción", la continuidad perdida.

2.1.1. Continuo real y continuidad ideal

De la caracterización anterior se puede extraer la conclusión de que el continuo de la realidad sólo se nos hace patente cuando se comprueba la imposibilidad de reconstruirlo, de justificar su continuidad, a partir de sus partes "cortadas" lingüísticamente, es decir, comunicativamente. De ahí que la noción que acabe siendo rigurosa de un continuo siempre posea esa analogía con el continuo *supuesto* de la realidad, en sus dos facetas infinitamente divisibles: el espacio y el tiempo.

Pero no hay que olvidar que tal consideración del espacio y el tiempo como "manifestaciones" de la continuidad de la realidad no es más que un presupuesto metafísico. De hecho, ni siquiera la continuidad, la plenitud de la realidad, da un única noción de tiempo que represente una única forma de continuo, como se verá en el apartado metafísico (5), los dos sistemas lógicos de la antigüedad, la dialéctica de los estoicos y la silogística aristotélica, configuran metafísicas diferentes con semánticas diferentes basadas en diferentes concepciones del tiempo.

En el apartado matemático (3) se apunta a cómo la difícil aritmetización de la geometría encuentra su punto nodal en la reconstrucción del continuo geométrico, como trasunto del continuo de la realidad estática, la espacial; como un mero cálculo, de suyo discreto. Más aún, como se verá, la justificación de gran parte de las críticas a los diferentes "continuos" matemáticos partirán de las asunciones metafísicas y los problemas semánticos ya referidos.

En estos contextos de metafísica matemática[8] se aprecia la visión de la continuidad del mundo, del espacio y del tiempo, como una continuidad ideal donde se niega cualidad ontológica absoluta, en sí, al espacio y al tiempo mismos, insertos en una absoluta plenitud, sin embargo, monadológica[9], de todo lo real. En tal situación aporética de una plenitud-monadológica-continua, Leibniz sanciona la continuidad justificada por un principio metafísico con más tintes teológicos que lógicos, el principio de

[7] Entiéndase tal oración como recurso narrativo, no como contenido histórico o filológico.

[8] La de Leibniz, claro.

[9] "Y como todo está ligado debido a la plenitud del mundo (...) cada mónada es como un espejo viviente o dotado de acción interna, representativo del Universo." – Leibniz (*Principios de la naturaleza y de la gracia fundados en la razón*, 2003)

razón suficiente[10], sin el cual, es inevitable en caer en "saltos", en "hiatos" en la trama de la realidad del mundo.

2.1.2. Continuidad "trascendental"

Dejar el continuo real como la manifestación de una continuidad ideal, o, viceversa, reconocer la continuidad de cualquier fenómeno o entidad, aunque sea formal, como "isomorfa" al continuo real, o viceversa. En cualquier caso, parece no ser asequible una cosa y la otra, es decir, los continuos matemáticos y el continuo real (aunque sea ideal) parecen ser no ya heterogéneos, sino incompatibles si no quieren correr el riesgo de perder su propia naturaleza; la del cálculo y la prueba matemática, o la de la densidad e insondabilidad de la Realidad bruta.

Como se intentará mostrar (que no demostrar) en el epígrafe metafísico (5), esta circularidad sólo se salva en un ámbito de discurso diferente, que será el ámbito de una reflexión trascendental. Bien entendida como el campo filosófico abierto por Kant, pero, sin ser una apología kantiana. Desde el giro "copernicano" de la filosofía que inauguró el Profesor regiomontano, toda metafísica seria sólo puede ser una epistemología que en terminología kantiana no es otra cosa que Lógica Trascendental, aunque en este ámbito, de la filosofía crítica, el mismo Kant no es siempre del todo kantiano[11].

Ello pasa por asumir lo inasequible y además equívoco de preguntarse si la realidad "en sí" es continua, desde el momento que la propia noción de continuo no es única ni su justificación singular. En este sentido, cobra relevancia lo aludido, de pasada, en el breve epígrafe físico (4), donde la investigación científica sobre la naturaleza infinitamente pequeña y la infinitamente grande nos aboca a poner en serias dudas nuestras concepciones de lo que es en realidad continuo o si lo que entendemos por continuidad tiene algo o nada que ver con la realidad.

[10] "[...] nunca existe cosa alguna a la que no se le pueda (al menos para quien sea omnisciente) asignar una razón suficiente de por qué existe y de por qué es más bien así que de otro modo" – Leibniz (*La profesión de fe del filósofo*, 2003). Principio evidentemente teológico que permitiría al Ser Omnisciente establecer una fórmula que sea satisfecha por un elemento de cada una de las infinitas partes disjuntas de un conjunto infinito. Según el humor que se profese, el Axioma de Elección, es una versión sofisticada del *deus ex-machina*.

[11] "Kant no fue del todo consecuente con su punto de vista transcendental, y dejó operar en su pensamiento la concepción precrítica de la conciencia, la substancializada en Descartes y desmoronada en Hume. Dicho de una manera general: *Kant no repensó toda su filosofía desde el nuevo punto de vista que él inauguraba*. Temas paradigmáticos en este sentido son, por ejemplo, la afección en lo teórico y la inmortalidad en lo práctico." – Rivera de Rosales (1993)

3. EL POLIMORFO CONTINUO MATEMÁTICO

3.1. De rectas y números

Sería arriesgado asegurar que el problema del continuo haya sido el móvil explícito de la práctica matemática, pura o aplicada, o de los esfuerzos de justificación de su propia base fundamental[12]. Sin embargo, sí que es posible detectar la presencia de este problema en diferentes aspectos clave del desarrollo de la disciplina, así como en sus contrapartidas lógicas, especialmente en los dos últimos siglos.

Se puede caracterizar de un modo dialéctico: el problema filosófico que subyace a los intentos de una síntesis definitiva entre la Geometría y la Aritmética es la armonización entre el acceso a lo indiferenciado de una realidad sensible, cambiante, y la imposibilidad de comunicarla si no es mediante un corte lingüístico, transmisible, discreto[13], estático, el cual, posteriormente, hace irreconstruible la continuidad misma de la realidad que pretendía fundar. El problema matemático, como se verá en el epígrafe metafísico (5), no es más que la manifestación de esta dificultad. No es casual que hayan sido las diferentes posturas filosóficas, o quizá los prejuicios metafísicos de los propios matemáticos, las que están en el origen tanto de la creación de los más ingeniosos y sólidos accesos al continuo desde la aritmética, como de las críticas más incisivas y las más audaces alternativas teóricas.

Este epígrafe "matemático", sin vocación cronológica ni exhaustiva, va orientado a exponer cómo tal pluralidad de soluciones y perspectivas sirven para justificar el título del trabajo. Parece más correcto hablar de "continuos" matemáticos que de una sola noción "clara y distinta" del continuo matemático (Feferman, 2008).

3.1.1. *Non disputemus sed calculemus*

Los problemas geométricos clásicos de la Antigüedad encierran la dificultad de la noción de medida como análoga a la cuantificación de objetos. Efectivamente, la diagonal del cuadrado, la duplicación del cubo, la trisección del ángulo, la cuadratura del círculo, son problemas insolubles con los instrumentos de resolución geométrica, es decir, gráfica, con "regla y compás"[14].

Es en la identificación de un segmento con una razón aritmética, entendida como la cantidad de veces que se puede repetir (contar) una magnitud que actúa como unidad, donde encuentra que la diagonal del cuadrado muestra la inaprehensibilidad aritmética de la extensión geométrica. La inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado con sus lados quiere decir que no es posible usar la misma razón para medir la una y los otros. Parece razonable, entonces, pensar que hacer más pequeña la magnitud que sirva de unidad de medida permitiría contar con un número exacto de veces tanto el lado del cuadrado como la diagonal. Pero sucede que ningún segmento que actúe como unidad de medida puede contar con un número exacto de veces ambas magnitudes a la vez, por muy pequeño que llegue a ha-

[12] "Bridging the gap between the domains of discreteness and of continuity, or between artithmetic and geometry, is a central, presumably even *the* central, problem of the foundations of mathematics." Fraenkel, Bar-Hillel y Levy (*Foundations of Set Theory*, 1973) – Ehrlich (2005).

[13] Es decir, la misma naturaleza de un cálculo: inherentemente discreta, transmisible y lingüística. Una piedra (*calculus*), una cuenta, contar (*computare*), calcular (*calculare*): dar razón de algo. Se cuentan ovejitas y se cuenta un cuento. No es un fenómeno latino: "*tell*: Old English *tellan*: to reckon, compute, number. (...) German *zählen*: to count, *erzählen*: to recount, narrate. Klein also compares Hebrew *saphar*: he counted; *sipper*: he told." – Harper (*Online Etymology Dictionary*, 2014)

[14] Frase hecha, más bien, el estilo perpendicular al suelo, el gnomon, como verdadero "transportador" de triángulos semejantes, tradicionalmente identificados con Tales de Mileto.

cerse. Tal número no puede ser la razón de dos medidas enteras realizadas a partir de la misma unidad, nunca se llegará desde un extremo de la diagonal al otro. Hay un abismo que se acorta sin parar y que es insalvable.

Dicho con otras palabras, el irracional es el número que pretende actuar como razón entre magnitudes, pero no el propio segmento geométrico. La diagonal es patente y tiene perfecto encaje geométrico con los lados del cuadrado[15], lo que no tiene es encaje aritmético.

De todas formas, no parece descabellado pensar que la magnitud más pequeña imaginable pudiera servir de unidad de medida geométrica. Pero si la divisibilidad del continuo geométrico halla su final en el punto adimensional, ello no nos servirá para usarlos de unidad de medida porque:

a) no podremos contarlos[16] ya que no podemos distinguirlos[17],
b) no podremos juntarlos de nuevo ya que tendríamos que atribuirles un orden y para eso necesitamos distinguirlos,
c) son infinitos en cualquier segmento y la unión de objetos sin magnitud no tiene magnitud alguna.

Este problema de reconstrucción del continuo geométrico de la sensibilidad espacial mediante "razones" discretas parece sentenciar la aporía de que una vez perdido el continuo absoluto, que sería el de la realidad (del espacio y el tiempo), es imposible su recuperación mediante una síntesis de elementos discretos distinguibles y comunicables.

3.1.2. *Géométries à la mode*

En la primera intención de la geometría estaba la de la aprehensión de la realidad espacial con un objetivo principalmente instrumental, sobre todo arquitectónico, agrimensor y astronómico[18]. En esto no se diferencian los griegos de otros pueblos de la Antigüedad, especialmente los egipcios[19]. Pero sólo cabe en la mente de un griego la demostración geométrica, desde unos postulados y definiciones, hasta la total justificación de la "reconstrucción" del espacio. Ello es inherente al temperamento de los antiguos griegos[20], heredado por Occidente, donde el Mundo, la Realidad (Φυσις), es un teatro de operaciones, un Αγῴν, es decir, un campo de batalla. El proscenio aporta el trasfondo (continuo) donde se desarrollan los acontecimientos cuya trama siempre entra en conflicto con la razón hasta alcanzar un

[15] En las numerosas demostraciones gráficas del teorema de Pitágoras. Valga la de Euclides (Libro I, prop. 47, 2007) como la más famosa. Los chinos, como era de esperar, también hicieron las suyas.

[16] "No debemos presuponer la posibilidad de enumeración, que sería *petitio principii*" – Russell (§183, 1983)

[17] "Un punto geométrico, considerado por sí mismo, no puede distinguirse en ningún modo de cualquier otro" – Frege (§13, 1980)

[18] Para la navegación, de hecho ésta depende de la medición de triángulos para la latitud y de la exacta medición del tiempo para la longitud. Curiosa síntesis instrumental de geometría y aritmética.

[19] "Así, la geometría egipcia consistía principalmente en métodos prácticos para medir y separar de nuevo los terrenos después de cada inundación del Nilo. La geometría científica no fue desarrollada por los egipcios, sino por los griegos." – Copleston (2004)

[20] Prisioneros del corte olímpico de una vez y para siempre. El límite instantáneo que define un "dentro" y un "fuera", un "sí" y un "no", el Ser y el No-Ser. Pasar de ingenuos recolectores inmanentes a despiadados dominadores trascendentes, de ser uno con la Tierra a aspirar a los Trasmundos y el *Τοπος Ουρανος*. El *Λόγος* pasa de ser un surco arado en la tierra a una *solución de continuidad*.

nudo sólo salvable por el dios (que surge de un artefacto mecánico). Sólo el dios puede reconstruir el continuo perdido por la fragmentación impuesta al Ser por la palabra de los soberbios humanos[21].

Esta metáfora ilustra el hecho que subyace a los Elementos de Euclides; se da por supuesto un trasfondo, un substrato, un continuo donde se desarrollan las rotaciones, las traslaciones, las prolongaciones, etc.[22], propios de la geometría sintética. La manifestación de tal continuidad, de tal posibilidad de ser recorrido el espacio, vendría marcada por la propiedad arquimediana. Si en el postulado de las paralelas encontramos la separación entre las geometrías euclidianas y no euclidianas, en la caracterización axiomática de Hilbert se sostiene que toda la geometría euclidiana puede desarrollarse sin el axioma arquimediano, caracterizado como "axioma de continuidad". En realidad, la axiomática hilbertiana construye una geometría no arquimediana apoyándose en la continuidad estructural de los grupos algebraicos (apartado 3.1.4) con dominios de números algebraicos racionales o reales.

El paso de la geometría sintética a la analítica es el salto de la demostración gráfica al formalismo composicional algebraico. En la geometría analítica se caracteriza el trasfondo continuo tácito de la geometría sintética por un sistema de coordenadas cuya aritmetización pasa por la identificación numérica de un segmento unitario y la expresión algebraica de distancia basada en el teorema de Pitágoras[23]. Los objetos geométricos (puntos, rectas, planos) pasarán a ser expresiones de composiciones entre varias magnitudes, permitiendo el desarrollo de un cálculo. Pero de nuevo aparecerán los viejos problemas cuando expresiones algebraicas encuentren o no solución dependiendo de qué partición se haya hecho de los ejes cartesianos.

Las múltiples expresiones geométricas de la propiedad[24] arquimediana: sintética[25], analítica[26] o axiomática[27], así como su versión topológica-conjuntista[28], apuntan a la completa transitabilidad de una totalidad infinitamente divisible de un modo finitista. Es decir, un punto en una recta será alcanzable desde otro punto con la unión sucesiva de un número finito de segmentos o, en un sistema numérico, dados cualquier par de números, a y b, no negativos, tales que $a < b$, siempre será posible añadir a a sí mismo tal que $a + a + a + ... + a > b$.

---

[21] "Nur noch ein Gott kann uns retten". El testamento de Heidegger podría haberlo firmado el mismo Unamuno.

[22] "1. Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera. 2. Y prolongar continuamente una recta finita en línea recta" – Euclides (Libro I, 2007). No hay que confundir estos dos primeros postulados con la propiedad arquimediana la cual, evidentemente, los supone. Lo que es importante es que, a su vez, estos postulados presuponen la continuidad del plano o del espacio.

[23] Sean los puntos A=(x_1, y_1) y B=(x_2, y_2), en un espacio bidimensional, la distancia entre A y B será d(AB)=$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Esto mismo sirve para atribuir una magnitud numérica al segmento $\overline{AB}$ si A,B $\in \mathbb{R}$. Por otro lado, no hay que olvidar que se pueden definir más tipos de distancias, por ejemplo las rectangulares.

[24] "The term *axiom* is ambiguous, meaning either *defining condition* on a type of structure, in which case nothing is being asserted, or meaning *basic or initial assumption*, as an assertion that can be true or false, rationally credible to some degree or not, and so forth" – Hellman (2005)

[25] "Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a otra" – Euclides (Libro V, 2007)

[26] "Sea x un elemento de $\mathbb{Q}$ con x>0. Entonces, para cualquier y de $\mathbb{Q}$ existe algún n de $\mathbb{N}$ tal que $nx > y$." – Spivak (2003).

[27] "Let A_1 be any point upon a straight line between the arbitrarily chosen points A and B. Take the points A_2, A_3, A_4, ... so that A_1 lies between A and A_2, A_2 between A_1 and A_3, A_3 between A_2 and A_4, etc. More over, let the segments AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4... be equal to one another. Then, among this series of points, there always exists a certain point A_n such that B lies between A and A_n." – Hilbert (1902).

[28] Simplemente, que $\mathbb{Z}^+$ no tiene ninguna cota superior en $\mathbb{R}$, (Munkres, 2007).

La posibilidad de ser recorrido de forma finita apunta necesariamente a una caracterización discreta de un continuo sustantivo[29], pero esta vez, se aborda desde un marco lógico-deductivo en el cual los objetos son caracterizados únicamente por las relaciones que cumplen, que satisfacen. Surgirá entonces el problema de justificar la extensión de la validez de tales reglas o propiedades a todos los objetos (números) que deben cumplirla: tal es el problema de la inducción.

Todo ello culmina con su expresión algebraica en la estructura de grupo (aditivo o multiplicativo) y sus sucesivas ampliaciones hasta la constitución de un cuerpo completo. Los teoremas fundamentales de la Aritmética[30], del Álgebra[31] y del Cálculo[32], en su versión sin infinitésimos[33], señalan la justificación de tales completitudes, pero sólo en el ámbito de la matemática ordinaria. En el ámbito de la metamatemática aparecen las dificultades de fundamentación que son inherentes a unos lenguajes expresables en una simbolización discreta y finita, que deben caracterizar entidades infinitas, no-numerables, no diferenciables, etc.

Para acabar con este apartado geométrico, hay que apuntar dos consideraciones finales: una sobre las geometrías euclidianas no arquimedianas de Hilbert y otra sobre el común malentendido de la supuesta fundamentación kantiana de los juicios sintéticos *apriori* en la geometría euclidiana. De la última se trata en el apartado metafísico de este trabajo (5), la primera se da cuenta a continuación. Por otra parte, la breve referencia que se hará a la geometría elemental de Tarski (3.2.2) servirá como acceso discursivo a las consideraciones semánticas y metamatemáticas que dan pie al desarrollo del análisis no estándar.

3.1.3. *Amicus Ἀρχιμήδης*[34] *sed magis amica Continuitas*

En su caracterización axiomática de la geometría euclidiana, David Hilbert establece veinte axiomas clasificados en cinco grupos: de conexión, de orden, de paralelas (axioma de Euclides), de congruencia y, por último, de continuidad (axioma de Arquímedes). Está en la intención explicita del trabajo la justificación de la independencia recíproca de cada grupo de axiomas así como la producción de un cuerpo teórico derivado de tales axiomas que caracterice de una manera lógica la geometría. Es importante señalar, además, el hecho de que no se definen las entidades previamente a su implantación teórica, sino que se verán caracterizadas por sus mutuas relaciones expresadas en los teoremas.

---

[29] "The choice of the axioms and the investigation of their relations to one another is a problem [...] tantamount to the logical analysis of our intuition of space" – Hilbert (1902)

[30] $\forall x,y\ \exists a,b \in \mathbb{Z}$ tales que $y = |ax + b|$. En realidad supone la propiedad arquimediana, eventualmente $y < ax + a$, además a y b son primos entre sí (Bujalance *et al.*, 2005).

[31] Todo polinomio de coeficiente complejo tiene solución en el cuerpo de los números complejos, $\mathbb{C}$. Por ejemplo, $x^2 + 1 = 0$ tendrá solución, $x = i$ (Delgado, Muñoz, 2010). Debe señalarse de nuevo la analogía para la superación de las "discontinuidades" o mejor, insatisfacciones, el recurso a una nueva dimensión composible, armonizable, con la anterior, en este caso el eje imaginario ortogonal e isomorfo al eje real. Dicho de otro modo, un número entero en un par (x, y) de naturales; un número racional, un par de enteros (p, q) y un número complejo un par de números reales (r, s). Qué sea un númeo real es algo más complicado.

[32] En el que se establece la relación de reciprocidad entre la Diferenciación de una función continua y la Suma (la integración) de las infinitas áreas bajo la curva de tal función. El segundo Teorema Fundamental del Cálculo o Regla de Barrow será el que permita la exactitud de los cálculos dado un intervalo.

[33] "El origen matemático del estructuralismo ha de buscarse más bien en el cálculo diferencial, y más concretamente en la interpretación que de él hicieron Weierstrass y Russell, una interpretación estática y ordinal, que libera definitivamente al cálculo de toda referencia a lo infinitamente pequeño y que lo integra en una pura lógica de relaciones" – Deleuze (2002)

[34] Aunque Arquímedes atribuya a Eudoxo su método de exhaución (Ehrlich, 2005).

Es pertinente en el ámbito del presente estudio observar que Hilbert defiende (§12) que es posible la construcción de la geometría euclidiana sin el axioma de Arquímedes. Se llaman "euclidianas" a las geometrías que satisfacen el axioma de las paralelas. Tal axioma convierte en plana la geometría al permitir que sólo una recta paralela pueda pasar por un punto exterior a otra recta dada en el mismo plano. Ello supone el ámbito común del plano (análogo al continuo tácito de la geometría sintética) que contenga tal paralela y sentencia el corte de cualesquiera otras infinitas rectas que contengan ese punto en el mismo plano.

Por otro lado, el axioma de Arquímedes tal y cómo está expresado, arrastra varias asunciones de otras partes del mismo cuerpo axiomático que debería ser independiente:

a) que entre dos puntos arbitrarios, A y B, de una recta existe un número ilimitado de puntos (Teorema 3, §4), consecuencia de los axiomas de orden y conexión,
b) que sea cual sea, de tal recta, elegido el punto arbitrario A_1 se constituirá en punto intermedio entre A y A_2 siempre que podamos encontrar tal punto A_2 (algo que nos permite el teorema antes referido). Además, hay que establecer, como sí hace Hilbert, una convención de "igualdad de segmentos" que se funda (!) en los axiomas de congruencia o en los de orden o conexión (§8).

Dicho de otro modo, el axioma que pretende caracterizar, "reconstruir", "fotografiar" (si se permite el exceso) el continuo de la recta, lo supone. Un axioma fundado en una noción fundada a su vez en otros axiomas y teoremas (la igualdad o extensibilidad de segmentos). ¿Resulta la eliminabilidad del axioma de Arquímedes de la geometría euclidiana su caracterización como teorema y no como axioma[35]?

En realidad no es un problema grave, Hilbert justifica (§12) su geometría no arquimediana apoyándose en la anterior justificación (§9) de la consistencia de los axiomas mediante el desarrollo analítico de un dominio (Ω) de números algebraicos obtenidos de la aplicación finitaria de las operaciones aritméticas así como una operación de un orden superior, $\sqrt{1+\omega^2}$ (donde ω representa el rango de valores de tales operaciones y $\omega \in \Omega$), que constituye la introducción analítica de una métrica, la distancia pitagórica[36]. Después establece el desarrollo de ecuaciones polinómicas cuya satisfacción está garantizada por la naturaleza del propio dominio Ω. La diferencia entre la geometría arquimediana y la no arquimediana, así justificadas, radica en que los números del tal dominio sean reales o racionales. En este ámbito son los grupos de axiomas de orden y de congruencia los justificadores de una continuidad que posibilite tal geometría.

3.2. De números[37] y conjuntos

Las paradojas de Zenón de Elea no tienen una lectura que pretenda negar el cambio o el movimiento; la lectura importante, y verdaderamente eleática, es mostrar la imposibilidad de llegar al ser desde el no-ser, por un lado; y, por otro, frente a los atomistas, la imposibilidad de justificar este movimiento por medio de la mera adición de razones. Razones geométricas que se hunden en una inconmensurabilidad recíproca que no es más que la discontinuidad entre las posibles razones aritméticas. Parafra-

[35] "[...] the Hilbertian continuum is not conceived of independently but only within the framework of plane (and spatial) geometry as a whole." Feferman (2008).

[36] "Pythagoras' theorem for right-angled triangles is valid in non-Archimedean geometry" – Sidorov (2014)

[37] "Haremos bien en no sobreestimar en general hasta qué punto la aritmética es afín a la geometría" – Frege (§13, 1980).

seando la clásica frase; la diatriba entre salvar a Parménides o las apariencias (φαινομενα) se resolvería en la necesidad de hacer una aproximación discreta a un fenómeno tomado como continuo que permitiera su aprehensión (μαθεσις) y, consecuentemente, su inequívoca intersubjetividad.

Es el problema del cambio desde el cual Newton y Leibniz desarrollaron el cálculo infinitesimal, cada uno desde una perspectiva diferente. Si el primero se ocupaba de la tasa de variación finita de la variable con respecto al tiempo (la *fluxión*), el último consideraba el recorrido de los valores de la variable en cuestión a través de cambios infinitesimales (Ehrlich, 2005). Como se verá en el apartado metafísico (5), son las consideraciones metafísicas del espacio y el tiempo de cada uno de ellos las que subyacen a tales diferencias.

Ninguna de las dos opciones, ni el cálculo de fluxiones newtoniano ni los infinitésimos de Leibniz, está en la construcción formal del actual análisis estándar que tiene sus fundamentos en el ámbito de la teoría de conjuntos y las sucesiones numéricas.

Tradicionalmente se ha identificado la elegancia matemática con una economía expositiva que fuera capaz de generar los más abundantes desarrollos y aplicaciones. En este contexto, no resultará sorprendente ver que el cimiento de todo el análisis matemático estándar puede resumirse en un único teorema: existe un cuerpo[38] ordenado y completo (Spivak, 2003). Siguiendo esta *uirtus oeconomica* se pueden resumir, y en una sola frase, tanto la pregunta a la que respondería el teorema señalado como el fundamento de todas las críticas y desarrollos alternativos posteriores: ¿cómo es posible que el continuo de una estructura algebraica, el conjunto de los números reales, sea el mismo que el geométrico y, más aún, el intuitivo?

La última es una pregunta que encierra, entre otras, dos cuestiones claves cuyas respuestas sustentan la solución estándar, respuestas que tienen una larga tradición de críticas e insatisfacciones, cuando no frustraciones, no en vano se trata de preguntas filosóficas[39]: ¿qué es la continuidad[40]? y ¿qué es un conjunto? Del alcance filosófico de la respuesta se tratará en el apartado metafísico (5), de las soluciones matemáticas se trata a continuación.

3.2.1. El evanescente número real[41]

La propuesta conjuntista de Cantor y Dedekind va en contra de la misma concepción euclidiana donde la noción de segmento no es identificable con la de conjunto de puntos (Feferman, 2008, p.9), de tal

[38] Hasta ahora no hemos entrado en pormenorizar las definiciones de las estructuras algebraicas que se han ido nombrando, como cuerpo, grupo, etc. Asumimos que el mero hecho de haber llegado a este punto del estudio nos asegura un lector con un mínimo de humor y de familiaridad con un tema que puede encontrarse en cualquier manual moderno de álgebra elemental. Pero, que por nosotros no quede: todo cuerpo es un anillo conmutativo con unidad o sea, un grupo aditivo abeliano y, si se excluye el elemento "0", un grupo multiplicativo abeliano. Grupos son las estructuras donde se han definido unas operaciones internas que cumplen las propiedades asociativa, conmutativa (abeliano), distributiva, la existencia de elementos neutros y, según qué operación se trate, la existencia de elementos neutros e inversos. Para acabar, la progresiva adición de propiedades o restricciones como la relación de orden, o funciones como el sucesor, etc. irán definiendo las conocidas estructuras de los números naturales, enteros, racionales, etc.

[39] Y "en el mar de la Filosofía en ningún sitio se hace pie" – Strawson (1997)

[40] "Encontraremos posible dar una definición general de la continuidad en la que no se acuda a la masa inanalizada de prejuicios que Kant llama *intuición*" – Russell (§249, 1983)

[41] "[...] el comportamiento de los números reales respecto a la suma y a la multiplicación es crucial; *lo que los números reales puedan ser en realidad carece totalmente de importancia*." – Spivak (2003, p. 800), nuestra la cursiva.

manera que la continuidad ya no será justificada de una manera "intuitiva" o patente sino que vendrá caracterizada por las propiedades de la estructura numérica del conjunto de los números reales, ℝ[42].

La continuidad cantoriana de ℝ se basa en dos propiedades: la densidad de los números racionales (ℚ)[43] y la convergencia[44] de todas las sucesiones de Cauchy[45] en ℚ. Todas las sucesiones convergentes en un cuerpo ordenado son de Cauchy, pero no se da la recíproca[46], precisamente esta restricción que hace convergentes a todas las sucesiones de Cauchy convierte un cuerpo ordenado en uno completo. La convergencia de una sucesión de Cauchy en un cuerpo ordenado permite que cuanto más se avance en los términos de la sucesión menor será la distancia que los separe hasta, eventualmente, coincidir en el límite. De esta manera se hace posible toda medida geométrica haciendo que ésta sea la unión, eventualmente infinita, de segmentos de dimensión racional cada vez más pequeños hasta el límite.

En esta circunstancia, cada límite se puede considerar como el representante de una clase de equivalencia de todas las sucesiones de Cauchy que lo tengan como tal, cada una de las colecciones disjuntas de sucesiones equivalentes es un número real[47].

Con otras palabras, un número real es un conjunto α de números racionales ordenado, no vacío y no coincidente con ℚ, tales que $\nexists \max \alpha$ (Spivak, 2003). Tal sería la perspectiva de Dedekind, quien encuentra un método para distinguir cada número real mediante una cortadura a partir de un punto, en el conjunto ordenado de estos, el cual marca una división donde el número real es el conjunto (infinito) de los racionales menores que él. Aunque no lo mencione de una manera explícita, Dedekind identifica los puntos con números, lo que no gusta a Frege, al asumir un conjunto ordenado de racionales que están antes de la cortadura.

El cuerpo ordenado y completo de los números reales[48] así definido conservaría las propiedades de los racionales, especialmente la arquimediana, además de la existencia de la mínima cota superior para cualquier subconjunto acotado, el conocido Axioma del Supremo.

El desarrollo conjuntista pronto presentó problemas, sobre todo en la propia definición[49] y localización de un conjunto, es decir, qué se entiende por conjunto y cómo saber de qué conjunto se habla. Se tie-

[42] "[...] the problem is to indicate a precise characteristic of continuity that can serve as the basis for valid deductions" – Dedekind (1901)

[43] Dados a y b racionales, tales que $a < b$, existe c tal que $a < c < b$.

[44] Formalmente, una sucesión infinita de números racionales ($s_n : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$), o de elementos de un cuerpo ordenado, es convergente, o tiene límite a ($\lim s_n = a$), si para cualquier $\varepsilon > 0$ (de ℚ) existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $|s_n - a| < \varepsilon$ para todo $n \geqslant n_0$. Formalismo análogo al conocido "ε - δ" de Weierstrass para los límites de funciones reales, sólo es necesaria la ε al ser números naturales los miembros del dominio si la sucesión es tomada como una función.

[45] Formalmente, (a_n) es una sucesión de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo m, n $\in \mathbb{N}$, si $m,n > n_0$, entonces $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

[46] Por ejemplo, $a_n = \frac{m_n}{2^n}$, siendo, para cada $n \in \mathbb{N}$, m_n el mayor número natural cuyo cuadrado es menor o igual que 2^{2n+1} (Fernández Novoa, 1992). O el clásico ejemplo, no tan "sofisticado", es la sucesión $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, que no tiene límite en ℚ ya que, como se sabe, se trata del número *e*.

[47] Evidentemente, esta posibilidad supone el Axioma de Elección; "existe un elemento maximal de cada clase de equivalencia de las sucesiones de Cauchy en ℚ".

[48] En análisis estándar añadir "de los números reales" a "cuerpo ordenado completo" sería reiterativo, los axiomas de los números reales caracterizan hasta la isomorfia a todos los cuerpos ordenados completos. Es decir, ℝ no es subconjunto propio de ningún conjunto.

[49] "By an *aggregate* (Menge) we are to understand any collection into a whole M of definite and separate objects m of our intuition or our thought. These objects are called *elements* of M." – Cantor (1955, ∬1).

nen dos posibilidades, ambas problemáticas; por extensión y por intensión. Por extensión tenemos que poner nombres[50] a los elementos, y por intensión definir y localizar propiedades. La última es generadora de paradojas y la primera sólo es asequible en conjuntos finitos y de pocos elementos, con conjuntos infinitos se repite la dificultad anterior para localizar a los propios elementos o clasificarlos en subconjuntos. Más aún cuando además de infinitos no son numerables o se trata de subconjuntos propios infinitos de conjuntos a su vez infinitos. La matemática contemporánea resuelve esto con la configuración axiomática de la teoría de conjuntos de Zermelo y Fraenkel a la que se suele añadir el axioma de elección (ZFC) que en sí mismo es también generador de paradojas geométricas[51].

En cualquier caso, parecía que se pagaba un precio demasiado alto por abandonar el "sinsentido" de una magnitud sin magnitud; se abandonaba el infinitésimo a cambio de abrazar el infinito, más concretamente la asunción de totalidades infinitas de cardinalidad no numerable. La prueba de la inducción transfinita que convierte en incompleto cualquier sistema de números naturales en primer orden: se tienen que postular teoremas metamatemáticos que certifiquen la satisfacibilidad, los cuales no serán demostrables en el nuevo sistema ampliado, así *in infinitum*.

Si bien la caracterización estándar del continuo[52], con su fundamento en la axiomática ZFC, es la universalmente aceptada por la práctica matemática contemporánea, las objeciones a algunos de sus pilares han corrido paralelas, desde el principio, a su propio desarrollo. Las más serias oposiciones (Ehrlich, 2005) han surgido de posturas de la investigación lógica y la metamatemática, con sus nada desdeñables asunciones metafísicas; especialmente la matemática y la lógica intuicionistas, así como desde posturas matemáticas estructuralistas muy relacionadas con los problemas del impredicativismo, ya presente desde el mismo nacimiento del programa logicista. Por otro lado, sin un ánimo tan crítico como los anteriores, los desarrollos algebraicos y el estudio de los lenguajes de primer orden con sus limitaciones (compacidad, completud) para la caracterización axiomática de estructuras numéricas dio pie a la creación de teorías analíticas no estándar que conservan la eficacia del cálculo estándar y que, a pesar de no imponerse en la práctica científica, sí han tenido una gran productividad teórica en toda la semántica formal contemporánea.

Las perspectivas intuicionista, estructuralista y predicativista sobre el continuo, las que mayor carga filosófica conllevan, son expuestas en (3.3). Del análisis no estándar trata el siguiente epígrafe.

3.2.2. *Analyses à la mode*

Si el programa geométrico axiomático de Hilbert construía geometrías euclidianas no arquimedianas apoyándose en un dominio, Ω, de números algebraicos racionales[53] donde se definía, además de las operaciones aritméticas, una métrica (basada en la distancia pitagórica), la perspectiva de la geometría

[50] "... el *espinosísimo* asunto del principio de individuación, o sea, la discriminación de las diferencias sólo por el número." – Leibniz (*La profesión de fe del filósofo*, 2003)

[51] Más bien topológicas; la conocida paradoja de Banach-Tarski que nos dejaría "fabricar" dos soles a partir del sol, los cuales, además, serían idénticos a éste.

[52] "Los filósofos sostienen generalmente que los números son esencialmente discretos, mientras que las magnitudes son esencialmente continuas. Veremos que no es así [...] La continuidad se aplica a las series (y sólamente a ellas) siempre que sean tales que exista un término entre dos cualesquiera dados" – Russell (§184, 1980)

[53] Si Ω es de números reales, la geometría resultante sería arquimediana.

elemental de Tarski[54] no es finitamente axiomatizable en primer orden puesto que el axioma de continuidad sólo puede expresarse en un lenguaje de segundo orden.

Efectivamente, Tarski propone una construcción axiomática en primer orden con variables elementales sobre un conjunto fijo, identificando los elementos del conjunto con puntos y éste con el espacio. Además de las conectivas usuales, los cuantificadores y la identidad, se introducen dos functores:

- **β**, triádico, expresando "estar entre" (*betweenness*): β(xyz) se lee "y está entre x y z",
- **δ**, cuatriádico, expresando congruencia entre "segmentos": δ(xyzu) se leería en notación contemporánea d(x,y) = d(z,u); la distancia entre x e y es la misma que entre z y u.

El sistema (ε_2) consiste en doce axiomas expresados en primer orden más los infinitos axiomas de continuidad expresados esquemáticamente. En tal contexto, el *teorema de representación* establece que todos los modelos de ε_2 son isomorfos con $\mathbb{R}\mathrm{x}\mathbb{R}$ del espacio cartesiano sobre el cuerpo de los números reales. Sin embargo, a pesar de reconocer la teoría ε_2 como completa (Teorema 2), decidible (T3) y, evidentemente, no finitamente axiomatizable (T4), se reconoce que esta versión de la geometría elemental no es la más asequible y se propone una ampliación, ε'_2, con algún fragmento de la teoría de conjuntos: variables sobre conjuntos arbitrarios y finitos de puntos, así como el símbolo de pertenencia $\in$, entre puntos y conjuntos *finitos* de puntos. Los axiomas son los mismos que para ε_2, sólo que ahora el conjunto de axiomas de continuidad puede ser expresado como único[55].

Como cabe esperar[56], la ganancia en expresividad conlleva la pérdida de cualquier caracterización simple de modelos de ε'_2; existen cuerpos de números reales para los cuales $\mathbb{R}\mathrm{x}\mathbb{R}$[57] no es un modelo de ε'_2, dicho de otro modo ε'_2 puede tener modelos con la cardinalidad del continuo y, por otro lado modelos numerables, de tal manera que puede ser completa y tener modelos no isomorfos, es decir no es categórica.

La exposición semántica de la geometría de Tarski es un buen ejemplo para ilustrar el substrato teórico, de carácter semántico, del análisis no estándar: el problema de la cardinalidad. Precisamente el hecho de la existencia de modelos numerables y modelos con cardinalidad del continuo para una misma teoría axiomática (en este caso de geometría elemental), de tal manera que dentro del mismo sistema habrá expresiones satisfacibles para cuyos modelos no exista isomorfismo alguno hacia otros modelos de la misma cardinalidad. Esto hace que, en primer orden no sea posible caracterizar hasta la isomorfia cualquier sistema de números naturales (con los axiomas de Peano).

Dicho de una manera más concreta (Manzano, 1989): dado un lenguaje L de cardinalidad ρ, para cada sistema $\mathcal{A}$ de cardinalidad α transfinita existe algún sistema $\mathcal{B}$ de una cardinalidad superior del cual el primer sistema es un subsistema elemental. Tal es el Teorema *Upward* de Löwenheim-Skolem-

---

[54] "[...] we regard as elementary that part of Euclidean geometry which can be formulated and established without the help of any set-theoretical devices." – Tarski (1958).

[55] "$\forall XY\{\exists z\forall xy[(x\in X\wedge y\in Y)\rightarrow\beta(zxy)]\rightarrow\exists u\forall xy[(x\in X\wedge y\in Y)\rightarrow\beta(xuy)]\}$" – Tarski (1958). Se ha cambiado la notación original de los cuantificadores.

[56] "[...] si en un sistema formal consistente A (...) una sentencia significativa φ es deducible con la ayuda de los axiomas transfinitos, lo único que se sigue de la consistencia de A es que no-φ no es deducible dentro del sistema formal A. Sin embargo, sigue siendo concebible que uno pudiera percatarse de la verdad de no-φ mediante ciertas consideraciones (intuicionistas) (!) sobre su contenido, que no fuesen formalmente representables en A." – Gödel (1931a, 2006). Nuestra la (!), evidentemente, no hay que olvidar que Gödel era un platónico.

[57] "$\mathfrak{C}_2(\mathfrak{R})$", como lo expresa Tarski (1958).

Tarski[58], del que puede extraerse la consecuencia (Skolem, 1922) de que existen modelos no estándar de la aritmética de Peano, es decir ampliaciones del sistema $\mathbb{N}$ de números naturales. En tal contexto, Abraham Robinson realiza su extensión del cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ al de los hiperreales $^*\mathbb{R}$, basada en el teorema de compacidad de primer orden[59] y mediada por un "principio de transferencia" que permite la satisfacción de las mismas fórmulas de primer orden en ambos sistemas.

En la versión del análisis construida por Robinson se recuperan no tanto los mismos infinitésimos monádicos de Leibniz (Ehrlich, 2005), sino más bien los propios números reales se aproximan de una manera infinitesimal a los valores de la diferenciación y la integración de funciones continuas. La continuidad en $^*\mathbb{R}$ se conserva desde $\mathbb{R}$ porque se puede expresar en primer orden. Para ello se define en $^*\mathbb{R}$ una relación de orden estricto ($<^*$) que permite que haya números hiperreales que son estrictamente mayores que cualquier número real, tales son los números infinitos. Al ser estricto, el orden hiperreal no permite que el cero pertenezca al conjunto de infinitos, de modo que todo elemento infinito tendrá inverso, y de esta manera quedan definidos dos subconjuntos de $^*\mathbb{R}$ de números infinitos e infinitésimos.

Para definir las funciones continuas se define una relación $\approx$ de "infinita proximidad", tal que $r \approx s$ (reales) si $|r - s| \in o$. Siendo "o" el conjunto de infinitésimos. Entonces, la función $f: D\subset\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ estándar, f es continua en un punto estándar $x_0\in D$ si cuando $x\in D$ cumple que $x\approx x_0$, entonces $f(x)\approx f(x_0)$. Se dice que la función es continua si lo es en todos sus puntos.

A pesar de las "ventajas" defendidas por los cultivadores del análisis no estándar, tales como la sencillez de algunas demostraciones, la conservación de la potencia de cálculo estándar y alguna otra más rebuscada[60], es cierto que los resultados obtenidos con métodos analíticos no estándar pueden ser igualmente afrontados a un coste parecido con las técnicas estándar, lo cual hace pensar en un poco probable intercambio de papeles[61].

Pareja a la construcción de Robinson de los hiperreales está la propuesta de Conway y Ehrlich (Ehrlich 2005, 2012) de los llamados números *surreales* (No)[62] como un cuerpo ordenado capaz de caracterizar categóricamente la línea del continuo hiperreal, construyendo un cuerpo hiperreal que sea la unión de cadenas elementales de sistemas de hiperreales saturados[63] hasta ω_α con α bajo el dominio de la extensión de la clase On de todos los ordinales. Evidentemente, al hablar de tal clase de todos los ordinales,

---

[58] De hecho, Tarski lo menciona en una nota del artículo sobre la geometría elemental (1958).

[59] Es una consecuencia restrictiva de la completud del cálculo de Primer Orden, dado un conjunto de fórmulas (Γ) de un lenguaje de primer orden: $\Gamma\vDash\varphi \Rightarrow \Gamma\vdash\varphi$ (Gödel, 1929); si Γ es consistente tiene un modelo numerable (Henkin, 1947) y Γ tiene un modelo si y sólo si cada subconjunto finito de Γ lo tiene. (Manzano, 1989)

[60] La demostración afirmativa del quinto problema de Hilbert; si todo grupo topológico localmente euclídeo es un grupo de Lie, fue desarrollada de una manera no estándar por J. Hirschfeld en 1990, que era mucho más accesible que la estándar llevada a cabo por Montgomery, Zippin y Gleason en 1952 y Kaplanski en 1964 (Ivorra, 2010). O "[...] la prueba de la existencia de subespacios invariantes para operadores compactos" – Gödel (1973, 2006)

[61] También cuenta con ilustres defensores: "[...] hay buenas razones para creer que el análisis no estándar, en una versión o en otra, será el análisis del futuro." – Gödel (1973, 2006).

[62] Mantendremos los paréntesis en las referencias al conjunto No de los surreales para evitar confusiones.

[63] Según el axioma de saturación débil (Hrbacek), dado un subconjunto estándar que es modelo finito de una propiedad estándar simultáneamente a un elemento estándar, existe una propiedad de la cual será modelo simultáneamente el subconjunto estándar y un elemento no estándar. "Guided by the principle that whatever can be consistently imagined exists" – Hrbacek (1979).

la teoría subyacente ya no será ZFC sino NBG[64] con el axioma global de elección. (No) está construido como un árbol binario con una estructura jerárquica basada en la relación "ser más simple que", tal relación es un orden lexicográfico de pares (x,y) tales que x es más simple que y siempre que x preceda a y en el árbol binario. En cualquier caso, Ehrich (2012) defiende que (No) es un continuo aritmético absoluto "módulo NBG" análogamente al continuo de $\mathbb{R}$ "módulo el axioma arquimediano".

3.3. *Amicus Leibnitius...*

Con todo, el análisis no estándar no es el único contexto donde se intenta recuperar la continuidad "à la Leibniz" frente a infinitas divisibilidades y reconstrucciones "puntiformes" (Feferman, 2008). Las objeciones de la matemática y la lógica intuicionistas son propuestas radicales cuya aplicación atenuada configura el *Smooth Infinitesimal Analysis*, SIA, (Bell, J.L., 2010), también conocido como Geometría Diferencial Sintética, SDG, (Lawvere, 1967). Esta postura pretende defender una primigenia concepción del continuo y la continuidad insoslayable de una manera conjuntista con profundas consecuencias lógicas y matemáticas.

Por otro lado, el hecho de que las extensiones de hiperreales o surreales tengan como propio el mismo conjunto de números reales dedekiniano, con el número real como conjunto no acotado de números racionales, hace que no se resuelvan las objeciones predicativistas y estructuralistas con largo alcance lógico y mayor alcance filosófico aún.

Tales vertientes críticas sobre la visión de Cantor y Dedekind; la del intuicionismo y la del predicativismo, pareja a la del estructuralismo, se tratan en los siguientes epígrafes que cierran el apartado "matemático" de estos prolegómenos.

3.3.1. *Tertium non datur... non datur*

Es común que las introducciones de la lógica intuicionista comiencen por los contrastes con otras lógicas, pero siempre mediados por el horizonte de la prueba o la construcción matemática. Suele oponerse el intuicionismo a los puntos de vista logicista, finitista o platónico-realista.

Frente al programa logicista, el intuicionista de Brouwer sostiene que la lógica es una parte de las matemáticas, no el fundamento de ellas. Frente al finitista, donde se puede incluir el formalismo constructivo de Hilbert, se permiten las construcciones recursivas de alcance infinito. Finalmente, frente al realismo platónico, el intuicionismo defiende una postura de aromas kantianos, donde los objetos matemáticos serían realidades, pero ideales.

Estas divergencias comparten el hecho clave del estatuto ontológico de los llamados objetos matemáticos; su aprehensibilidad, su enunciabilidad y sobre todo las afirmaciones de existencia. Efectivamente, los problemas de justificación de un objeto matemático o la extensibilidad de una propiedad en ámbitos numéricos transfinitos llevan a los intuicionistas a denunciar que la matemática clásica realiza afirmaciones que no puede sostener debido a que asume principios lógicos como el tercero excluso (*Tertium non datur*) y la inducción transfinita[65], así como pruebas indirectas donde se asume que cada problema matemático correctamente definido debe tener solución (Hilbert, 1902).

---

[64] La teoría axiomática de conjuntos desarrollada por von Neumann, Bernays y Gödel es una extensión de ZFC con clases como noción anterior a conjunto.

[65] Sólo se reconoce un cardinal transfinito, $\aleph_0$.

La propia fundación de la matemática y la lógica intuicionistas surge de seguir el sentido leibniziano de continuo como fundamental, que será el que deba ser caracterizado matemáticamente y justificado lógicamente. El programa matemático de Brouwer es una teoría constructivista finitista donde también se funda el continuo en sucesiones convergentes, sólo que la caracterización de una secuencia infinita mediante una proposición no decidible[66] siempre será posible y en tal caso aparecerán objetos no completamente determinados. En esa circunstancia, algunas propiedades aritméticas de los números reales no se cumplen[67] y, lo que es más importante, no se cumple el principio del tercero excluso.

No es gratuita la pretensión de suprimir el principio del tercero excluso: está basada en la asunción metafísica de la continuidad de todo lo real, el tránsito del no-ser al ser de una manera continua y dinámica donde no tendrá sentido preguntarse por si algo es o no es[68] *hic et nunc* sino que siempre se está *in fieri*. Este apego ontológico de Brouwer será eliminado por la versión intuicionista de Heyting quien apunta más bien contra la asunción de la matemática clásica de una teoría referencialista de la verdad en un intento de soslayar toda metafísica.

El principal inconveniente de este programa es que elimina toda posibilidad de prueba indirecta, la demostración de que $\neg\varphi$ es falso[69] ya no implicaría la verdad de φ, amenazando la aritmética de Peano. Aunque el hecho de que la aritmética de Heyting no sea demasiado diferente a la de Peano[70], por un lado, y que, por otro, sintácticamente, la lógica intuicionista sea un subsistema propio de la lógica clásica (Gödel, 1933e[71], 2006), han hecho que el programa intuicionista sea visto como una suerte de *frivolité*[72] donde los esfuerzos de construcción de pruebas no den frutos suficientemente valiosos para un viaje tan caro.

En cualquier caso, esta defensa a ultranza de la indivisibilidad topológica como propiedad fuerte en defensa del continuo sí ha permitido desarrollos interesantes fuera del intuicionismo como la conexión de la lógica intuicionista con la lógica epistémica[73] o la lógica modal (S4)[74], la recuperación de una semántica que es pareja a la Teoría de las Categorías y Topoi que defiende Bell (1986), o los retículos de modelos de Kripke; donde las transformaciones (*arrows*) entre estructuras en la primera, y la rela-

---

[66] Secuencias de "libre elección" (*free choice sequences*), como trasuntos intuicionistas de las sucesiones de Cauchy que pretenden evitar la visión conjuntista mediante una inducción que la "extienda" (*spread*) gradualmente, (Ehrlich, 2005).

[67] P.ej. la tricotomía; $\forall x \in \mathbb{R}$ sólo se da una de las tres opciones: $x \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^-$ ó $x=0$. Lógicamente, supone el tercero excluso; expresada con la relación de orden parcial $\leqslant$; $\forall x\ (x \in \mathbb{R}) \leftrightarrow (x \leqslant 0) \vee \neg(x \leqslant 0)$.

[68] "Entre realidad y negación hay una cadena continua de realidades y de posibles percepciones más pequeñas" – Kant (1978).

[69] La negación $\neg$ clásica, su contrapartida intuicionista es –, "es absurdo que".

[70] "[...] la prohibición intuicionista de negar sentencias universales para formar sentencias existenciales pierde su eficacia al permitir que le predicado de absurdo sea aplicado a sentencias universales, lo que formalmente conduce a exactamente las mismas sentencias admitidas en la matemática clásica." – Gödel (1933e, 2006).

[71] En realidad el viaje tiene dos sentidos, en la traducción de la negación clásica por "es absurdo que" intuicionista, el cálculo conectivo de Heyting aparece como susbsistema propio del cálculo conectivo clásico, pero, señala Gödel (1933e, 2006), con otras traducciones se puede dar la situación inversa, aunque no lo demuestra en el artículo referido.

[72] Bishop, hablando sobre las secuencias de libre elección: "This makes mathematics so bizarre it becomes unpalatable to mathematicians, and foredooms the whole of Brouwer's program" (Ehrlich, 2005).

[73] El sistema axiomático Σ con la noción Bp, "p es demostrable", y tres axiomas: (i) $Bp \rightarrow p$; (ii) $Bp \rightarrow (B(p \rightarrow q) \rightarrow Bq)$; y (iii) $Bp \rightarrow BBp$, (Gödel, 1933f, 2006).

[74] "El sistema Σ es equivalente al sistema de implicación estricta de Lewis, si Bp se traduce por $\Box p$ y el sistema de Lewis se complementa con el siguiente axioma de Becker: $\Box p \prec \Box\Box p$." – Gödel (1933f, 2006).

ción de “accesibilidad” entre nodos tomados como “situaciones epistémicas”[75] de validez, de la última, han permitido un reconocimiento de la variabilidad entre estructuras locales (y en sí mismas)[76] que pueden tener aplicaciones en la configuración de bases de conocimiento dinámicas y autogeneradas. Esto último es una de las plazas irrenunciables para la viabilidad y posible desarrollo de inteligencia artificial.

Pero el desarrollo más relevante que surge del intuicionismo es la geometría diferencial sintética (Lawvere, 1967) también conocida como el análisis[77] infinitesimal suave (*Smooth Infinitesimal Analysis – SIA*) (Bell, J.L. , 2010) que es importante porque tiene un alcance físico partiendo de la noción original de los infinitésimos como “magnitudes infinitesimales” de Leibniz.

En el ánimo de SIA está mantener la propiedad fuerte de continuidad, la “inseparabilidad” (*unsplitability*)[78]. Los infinitésimos se conciben como microsegmentos con localización y dirección, pero sin magnitud, a medio camino entre el punto y la recta euclidianos, ello bajo una aritmética intuicionista. La continuidad no se explica en términos de lo discreto, sobre todo al no contar con el tercero excluso[79], con lo cual no se recurre a la noción de límite.

En tal contexto, la igualdad en $\mathbb{R}$ es indecidible, algo que, además de la referida negación de la tricotomía, otorga a los continuos la propiedad de la “indescomponibilidad” que impide que un espacio S pueda reconstruirse como la mera unión de sus partes, como ocurre en conjuntos discretos[80], ya que no se cuenta con el axioma de elección.

La repercusión en la física del SIA es la posibilidad del tratamiento local constante de magnitudes dinámicas, las funciones son infinitamente diferenciables, y las curvas son localmente rectas en el dominio del infinitésimo[81].

---

[75] “We intend the nodes [...] to represent points in time (or “evidential situations”), at which we may have various pieces of information.” – Kripke (1965). Kripke establece una meticulosa construcción semántica finitista y temporal, con valores de “verificado” y “no verificado todavía”, hasta que, eventualmente, se “verifique que sí o que no”. Además, ofrece una representación operativa por árboles semánticos, por tablas semánticas y, por si fuera poco, demuestra un teorema de consistencia del cálculo de predicados de Heyting. No contento con ello, además, incluye interpretaciones de modelos intuicionistas de la noción de “forzado” (*forcing*) utilizada por Cohen en su conocida prueba de la Hipótesis del Continuo. Todo ello en treinta y siete páginas.

[76] Otra consecuencia de Löwenheim-Skolem-Tarski, esta vez del *Downward*.

[77] “El intuicionismo sólo parece dar lugar a restricciones genuinas en el análisis y la teoría de conjuntos, y esas restricciones no son resultado de negar el *tertium non datur*, sino más bien de la prohibición de conceptos impredicativos.” – Gödel (1933f, 2006).

[78] Si hacemos “inseparables” las magnitudes continuas, sólo quedan dos opciones: o se hacen infinitas, o mejor, ilimitadas, o bien se convierten en magnitudes discretas.

[79] Aunque sí funciona con determinadas restricciones, p.ej. en algunas sentencias cerradas arbitrarias. Lo que se niega en el SIA es el alcance absoluto del *tertium non datur*.

[80] Y en la topología usual de $\mathbb{R}$. La unión de cualquier colección de conjuntos abiertos es un conjunto abierto, luego $\mathbb{R}$ es abierto; pero, también, la unión de cualquier colección finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, luego $\mathbb{R}$ es cerrado.

[81] “La ley de la continuidad [...] en virtud de la cual la ley de los objetos en reposo es como un caso especial de los que están en movimiento, la ley de los iguales como un caso especial de la ley de los desiguales, la ley de las curvas un caso especial de la ley de las rectas.” – Leibniz (*Principios metafísicos de la matemática*, 2003)

3.3.2. *Mind the gap*

La propuesta conjuntista de los números reales de Dedekind, Cantor y Weierstrass encuentra una crítica paralela a la intuicionista en el llamado predicativismo. A medio camino entre las posturas formalistas finitistas de Hilbert y el intuicionismo de Brouwer, la crítica predicativista se sustenta en la cuestionable legitimidad del salto entre las extensiones y los predicados que se supone determinan la propiedad bajo la cual caen los objetos de la extensión referida.

Partiendo del axioma de separación de Zermelo, según el cual es posible definir un conjunto a partir de otro dado en el cual se distinguen los elementos que satisfacen una propiedad definida (Feferman, 2000), se generan dos cuestiones, una semántica y otra ontológica: qué entenderemos por propiedad definida, lo que nos lleva a la cuestión metafísica de si por el hecho de definir una propiedad razonable han de existir objetos que la satisfagan y, por último, la de que podamos localizarlos. Esta última sería una deriva epistemológica inseparable, de suyo, de las anteriores.

El problema apuntado resulta trivial en conjuntos finitos; es en el ámbito de los conjuntos infinitos donde se aprecia su verdadero alcance. Con un conjunto finito sería posible definir cualquier subconjunto propio de un modo extensivo, dando nombres a los elementos, esto es por mera numeración finita. Ello no es posible con extensiones infinitas de modo que la única manera de definir tales extensiones es por intensión[82], mediante una proposición que pretenda identificar una propiedad común satisfecha por todos los elementos, eventualmente infinitos, de subconjunto definido. Y es precisamente cuanto entramos en los pagos de la intensión donde aparecen las conocidas paradojas semánticas.

En este contexto sitúa Weyl su propuesta relativa al problema, para él no resuelto, de la reconstrucción matemática del continuo intuitivo, identificado éste desde la muy discutible perspectiva del fluir del tiempo[83] y el movimiento. Se trataría de abarcar la noción de una totalidad infinita de partes discretas, que conduce indefectiblemente al problema del recorrido inductivo de una propiedad por todos sus elementos[84]. Lo que subyace es el problema de la iteración que es una noción prematemática cuya formalización está unida a la propia naturaleza de los números enteros; con otras palabras, la mera distinción por la posición en la serie.

El recorrido constructivo desde los números naturales a los enteros y los racionales encuentra un salto, una sima, acaso insuperable, en el número real que, como conjunto de números racionales, supondría una estratificación de cuatro dimensiones de números naturales. Esto no sería un problema a no ser porque el último estrato apunta a una colección infinita, no acotada, de números racionales, lo cual haría indefinibles, o mejor no-recorribles, inductivamente los números reales, como se aprecia en la paradoja de Richard[85].

---

[82] "No one can describe an infinite set other than by indicating properties which are caracteristic of the elements of the set. [...] indicating a rule, i.e., a relation, which connects the corresponding objects with one another." – Weyl (1918)

[83] "[...] let us stick to time as the most fundamental cotinuum" – Weyl (1918). Como veremos en el apartado metafísico, pensar en el tiempo como el continuo por antonomasia, además de una postura paradójica es inconsistente.

[84] "The notion that an infinite set is a *gathering* brought together by infinitely many individual arbitrary acts of selection, assembled and then surveyed as a whole by consciousness, is nonsensical: *inexhaustibility* is essential to the infinite." Weyl (1918).

[85] Dada la secuencia, eventualmente infinita y exhaustiva, de los números reales definibles, quedaría definido por diagonalización otro número real que no estaría recogido en la secuencia de todos los reales definibles. (Feferman, 2000).

Las soluciones de Bertrand Russell, bien sea en solitario o junto a Alfred N. Whitehead, a las paradojas lógico-matemáticas o semántico-epistemológicas, según la clasificación de Ramsey (Manzano, 2005), dieron pie a las diversas teorías de tipos, posteriormente clarificadas y ampliadas por la teoría simple de tipos de Alonzo Church[86], a partir del cual, la teoría de Russell y Whitehead se conocería como "teoría ramificada de tipos". Las inquietudes de Russell frente a las oraciones autorreferenciales que provocan las paradojas semánticas, p.ej. la del mentiroso, se resuelven con el desarrollo jerárquico de los diferentes órdenes de predicación y de cuantificación. Mediante las restricciones del alcance de la cuantificación de una variable que defina una clase en la que no se encuentre la propia variable ligada, se van generando diferentes estratos de predicación que evitarían caer en el circulo vicioso impredicativo.

Especial relevancia, en el contexto del continuo, cobra la conocida impredicatividad del crucial axioma del Supremo: la existencia de una mínima cota superior en cualquier conjunto acotado de números reales.

Si un número real es un conjunto de números racionales que cumple una propiedad definida de números racionales (cuantificación universal sobre sus elementos), entonces un conjunto acotado de números reales cumplirá una propiedad, A, de propiedades de números racionales. La mínima cota superior de tal conjunto de reales es ella misma el conjunto de aquellos números racionales que posee una cierta propiedad P_A, o sea, la propiedad de "hay una propiedad de la clase A" que pertenece al número x. Pero que una propiedad tal definida como "existe una propiedad" es claramente sin significado porque el concepto "propiedad de los números racionales" no está determinada extensionalmente[87].

Esta impredicatividad "domesticada" con la teoría ramificada de tipos conduce a una sucesión de órdenes diferentes sobre lo que debería ser un único conjunto o clase de números, los reales. De tal manera que para defender un fundamento lógico sólido para los números que fundan la continuidad, se paga el precio de una "discontinuidad" de órdenes y jerarquías. La solución mediante el axioma de reducibilidad que propone Russell provocará todavía más insatisfacciones.

Como su propio nombre indica, el axioma "reduce" los órdenes de predicación mediante la existencia de un predicado de primer orden equivalente para cada predicado de cualquier otro orden. Con todo, Church (1976) ve exagerado el peligro de que el axioma de reducibilidad reinstaure las paradojas que la propia teoría ramificada de tipos pretendía eliminar. Para ello hace un experimento tomando el ejemplo de la paradoja de Grelling[88] e intentando reproducirla con los r-tipos "reducidos". Church llama, muy certeramente, "empírico" al hecho de que no se pueda reproducir la paradoja. Si bien no es una defensa concluyente del axioma de reducibilidad, podría tomarse como un indulto, cuanto menos, temporal.

---

[86] La teoría simple de tipos de Church (1940) está orientada a presentar un lenguaje y un cálculo mediante la incorporación parcial del cálculo λ de conversión. Posteriormente, Henkin (1950) probaría la completud de la teoría partiendo del formalismo "elegante" de Church.

[87] "[...] if we, along with Dedekind, conceive of a real number as a (specially constituted) set of rational numbers, then we realize that the concept *real number* is not extensionally determinate." – Weyl (1918)

[88] De Grelling y Nelson; en tal paradoja, la circularidad semántica apunta a dos conceptos: término autológico y término heterológico. Serán términos autológicos aquellos en los que el propio término caiga bajo el concepto al que refiere la propia palabra. Por cierto que "palabra" sería el ejemplo por antonomasia de término autológico, aunque la paradoja definida por Grelling trata de adjetivos y las propiedades que expresan. Así, "esdrújula" sería autológica y "monosilábico" sería heterológica. La paradoja surge al ver que el propio adjetivo "heterológico" sería autológico si y sólo si es heterológico.

En efecto, en la traslación del problema semántico a la discusión fundamental matemática, el "impredicativismo" de las proposiciones que definen objetos matemáticos y sus propiedades es el principal abismo al que se enfrenta el programa logicista comenzado por Frege y seguido por Russell y Whitehead. Al pretender resolver las paradojas conjuntistas y semánticas, las teorías de tipos provocan la inoperatividad de los sistemas numéricos que pretenden fundar.

La estratificación generada en el cuerpo de los números reales por los tipos ramificados que pretenden dar fundamento lógico a las definiciones axiomáticas que lo caracterizan, en especial el axioma del supremo, provocan el paradójico resultado de hacer discontinuos "por definición" los conceptos que justifican su misma continuidad. Es comprensible que a algunos les sonase a broma fácil[89] la salida del axioma de reducibilidad; en este contexto, la defensa moderada y razonable de Church aparece casi como una heroica y agónica apología.

Es difícil no caer en un cierto desasosiego al observar la salida que Poincaré y Weyl toman. Es en la caracterización de los números naturales y la inducción donde se paran y deciden establecer la aritmética de Peano como el mínimo irreducible e insoslayable. Antes de ver el alcance de tal propuesta, vaya en descargo de Weyl el hecho de que esta solución tampoco le proporcionó un estado de ataraxia, precisamente[90].

Weyl pretende dar una sólida fundamentación al análisis de los números reales de manera que se pueda proceder constructivamente desde los naturales a los reales sin caer en el "salto" semántico de la impredicatividad. La aritmética de Weyl se basa en cuatro pilares (Feferman, 2000) con un formalismo de segundo orden: los axiomas de Peano, las ecuaciones definidas, el axioma de inducción y el axioma de comprehensión aritmética.

El axioma de inducción de Weyl: $\forall X[0 \in X \wedge \forall x(x \in X \rightarrow x' \in X) \rightarrow \forall x(x \in X)]$, con x' como "siguiente de x", está expresado de una forma conjuntista y, como señala Feferman (2000), en su versión como esquema axiomático $\varphi(0) \wedge \forall x[\varphi(x) \rightarrow \varphi(x')] \rightarrow \forall x \varphi(x)$, para cada φ, permite la inducción sobre cualquier propiedad formulada dentro del sistema, pudiendo φ contener variables ligadas de conjuntos. Por su parte el axioma de comprehensión aritmética: $\exists X \forall x[x \in X \leftrightarrow \varphi(x)]$, para cada sentencia aritmética $\varphi(x)$ que no incluya a X como variable. Ambos axiomas sentencian la existencia de extensiones (eventualmente vacías) para propiedades y la justificación de la satisfacción de una propiedad por toda la extensión de elementos en el ámbito irreductible de la iteración de números naturales.

Por su parte, el problema de la existencia del supremo es tratado en el sistema de Weyl abandonando la referencia a conjuntos acotados de números reales por sucesiones (*sequences*) de números reales tomados como cortaduras de Dedekind, donde cada elemento racional de cada número real perteneciente a la sucesión estará numerado. La mínima cota superior de la sucesión será la unión de todos los miembros racionales de sus términos reales, ahora distinguibles por su biyección con los números naturales. En este ámbito, la existencia de la mínima cota superior para conjuntos de números reales supone la de las sucesiones, para la recíproca es necesario el axioma de elección (Feferman, 2000).

Sin entrar a considerar exhaustivamente el sistema de Weyl, parece un precio alto para un predicativista, ni que decir para un logicista, terminar aceptando la existencia de las funciones de elección en con-

[89] "Devious" para Quine, o "artificial e inmanejable" para Weyl. (Feferman, 2000)

[90] "It cannot be denied, however, that in advancing to higher and more general theories, the inapplicability of the simple laws of classical logic eventually results in an almost *unbearable awkwardness*" (Weyl, 1949, en Feferman, 2000).

juntos infinitos, la existencia de conjuntos definidos por comprehensión, la inducción aritmética, etc. En definitiva, la aceptación a regañadientes por parte de Poincaré y Weyl de la aritmética de Peano como núcleo irreductible e insoslayable tiene un alcance lógico y filosófico[91] que nos devuelve, curiosamente al programa de Frege[92].

Ya sea ascendiendo por el propio programa logicista hasta la misma justificación fregeana del número como "objeto lógico" que permita saturar funciones sobre extensiones conceptuales; ya sea atendiendo al problema de la definición y expresión de los entes (objetos) y relaciones matemáticas en lenguajes formales operativos (expresivos, completos, decidibles, etc., por pedir...) que conducen a las paradojas semánticas con las correspondientes diatribas entre realistas, intuicionistas, predicativistas, etc., cuando pretendemos abandonar la mera investigación y la mera práctica "ingenua" matemática, que tan buenos resultados han dado para las ciencias naturales y sociales, para ir más allá, a los terrenos de las justificaciones y las fundamentaciones últimas dejamos de hacer pie[93].

Frege, a pesar de sus deslices, lo vio claro; el discurrir mental es conceptual[94] y las relaciones entre conceptos sólo operan fundando su validez en los objetos que caigan bajo su alcance. En definitiva, la razón comunicativa humana es intencional (con c), en el sentido de Brentano y Husserl, bien sea orientada a fines en su versión práctica o bien a objetos en su facultad teórica. Dicho más corto, la justificación de la mera posibilidad de nuestro conocimiento pasa ineludiblemente por la constitución de una objetividad[95] alcanzable en la acción común: comunicable – contable, computable. No es incompatible esta visión con la propuesta Hilbertiana o lo que comentaba Spivak[96]; por mucho que lo que cuente no sea la propia naturaleza del objeto matemático – sean rectas o jarras de cerveza – sino el entramado de sus interrelaciones, en cualquier caso estaremos hablando de objetos, estaremos intentando comunicar objetos[97], la diferencia será de matiz ontológico, más o menos platónico. El ente se revela en la trama, acaso inagotable, de relaciones en la que está inserto y el papel que en ella juega. El mismo Heidegger podría estar de acuerdo con ello.

Pero Frege comete el exceso de pretender recoger la objetividad lógica en el concepto como función saturable, defendiendo que la noción de concepto es más abarcante que la unidad sintética de apercep-

---

[91] "There cannot be an internal foundation, purely formal and mathematical, of Mathematics: the incompleteness theorems are not accidents, they underline the gap between the metamathematical principles of proof (...) and the rigourous practice of mathematical constructions." – Longo (1999)

[92] "[...] la aritmética ha sido el punto de partida del curso de pensamiento que me ha conducido a mi conceptografía. A esta ciencia, por tanto, pensé aplicarla primero, tratando de analizar más sus conceptos y de fundamentar más a fondo sus teoremas." – Frege (1972).

[93] Cf. nota 39. De los pocos aforismos que merecen reiterarse.

[94] "Esta explicación se deberá tener siempre en mente si se quiere entender correctamente la naturaleza de mi lenguaje de fórmulas. También de aquí resultó el nombre: "conceptografía". Puesto que me he limitado a expresar, por primera vez, relaciones independientes de las *propiedades* específicas de las cosas, pude también emplear la expresión "lenguaje de fórmulas para el pensamiento puro"." – Frege (1972), nuestra la cursiva.

[95] " [...] ya no es una cuestión de qué sea subjetivamente posible sino de qué esté objetivamente definido" – Frege (§ 80, 1980)

[96] Cf. nota 41.

[97] "Quien no admita una referencia no podrá afirmar ni negar de ella un predicado" – Frege (*Sobre sentido y referencia*, 2002)

ción kantiana[98] y ahí es donde Frege da un salto ilegítimo desde el plano lógico discursivo al trascendental. Porque la noción de "concepto" necesita de la noción de objeto[99], como aquello definible, localizable, abarcable y sobre todo transmisible – por los menos enunciable – como mínimo en un signo, discreto, aunque sea a modo de deíctico. En el plano lógico de Frege no se necesita nada parecido a una subjetividad ni una justificación del acceso empírico a un mundo externo.

Quizá no sea tan fácil librarse de Kant después de todo.

[98] "The concept has a power of collecting together far superior to the unifying power of synthetic apperception. By means of the latter it would not be possible to join the inhabitants of Germany together into a whole; but we can certainly bring them all under the concept "inhabitant of Germany" and number them" – Frege (§48, 1980)

[99] "[...] la pregunta es entonces a qué llamamos aquí objeto. Considero que es imposible una definición académica (...), por su simplicidad no permite descomposición lógica. (...) objeto es todo lo que no es función, la expresión de lo cual, por tanto, no lleva consigo un lugar vacío. [...] Los recorridos de las funciones son objetos, mientras que las funciones mismas no lo son", lo cual no impide que: "Así como las funciones son fundamentalmente distintas de los objetos, así también aquellas funciones cuyos argumentos son y deben ser funciones son fundamentalmente distintas de las funciones cuyos argumentos son objetos y no pueden ser otra cosa. A estas últimas las llamo funciones de primer orden; a las otras las llamo funciones de segundo orden." – Frege (*Función y Concepto,* 2002). Intenta escaparse Frege aquí de cierta circularidad, la distinción entre el primer y el segundo orden no está en la función sino en el argumento, en segundo orden las funciones son tratadas como objetos. Ahí está el origen de muchos problemas cuando la acción de cuantificar (hacer cuentas), puramente discreta, sobre extensiones, se hace sobre funciones en el papel de argumento (objeto) de otras funciones. Algo que matemáticamente no es problema supone una carga de profundidad en el programa logicista.

4. EL DISCRETO CONTINUO FÍSICO

Es difícil exagerar la importancia de la invención del cálculo infinitesimal desde y para la física. Curiosamente, la versión actual difiere de la concepción original de Leibniz y Newton. Como se ha visto, el análisis estándar de funciones toma como substrato los números reales, con una interpretación "puntiforme" del continuo, cuando la noción básica de Leibniz era la del infinitésimo como una magnitud nilpotente o nilcuadrática que, a pesar de ello, es mayor que cero.

Gracias al cálculo infinitesimal, por fin la Física, es decir, la Filosofía Natural, alcanza el mandato aristotélico para tal ciencia que no es otro que dar cuenta del movimiento, del cambio[100]. Los dos caminos para la invención del cálculo seguidos por Newton y Leibniz revelan sus opuestas concepciones del tiempo y el espacio. Para Newton (Sklar, 1992) sólo los movimientos no inerciales son capaces de generar fuerzas patentes y, por tanto, movimiento acelerado. Dado que existen movimientos acelerados absolutamente, independientemente de qué medida del tiempo se tome[101], debería haber un espacio en sí y un tiempo en sí, absolutos, como trasfondo último independiente de las relaciones temporales y espaciales entre objetos. Leibniz toma la postura recíproca, no existen ni el espacio ni el tiempo en sí, sino un entramado de todas las relaciones entre cuerpos y eventos. En estas perspectivas subyace la misma concepción del continuo absoluto de la realidad: por un lado, la aproximación a la continuidad del trasfondo absoluto espacio temporal newtoniano en un fluir continuo, como una referencia inercial última; y, por su parte, Leibniz parte de su principio filosófico del "*Natura saltus non fecit*"[102] donde la aprehensión matemática consistirá en localizar las infinitesimales "etapas" de las relaciones espaciales y temporales. Al hilo de esto último hay que hacer dos apreciaciones.

Ni Newton ni Leibniz (Ehrlich, 2005) otorgan realidad ontológica al infinitésimo ni al infinito, sino que se consideran ficciones instrumentales, de hecho los propios infinitésimos no son congruentes unos con otros[103]. Pero lo más relevante es el tinte estoico de la postura de Leibniz en la consideración relacional de la trama de acontecimientos *sub-specie aeternitatis* donde, como se verá (5), subyace una consideración del tiempo del instante (αιῴν) en el que la continuidad pasa a ser una justificación entre acontecimientos. Con todo, es en la física contemporánea donde se ha puesto cuestión, de una manera radical, la consideración metafísica tradicional del continuo real, absoluto, ligado al tiempo y al movimiento.

---

[100] "Puesto que la naturaleza es un principio del movimiento y del cambio, y nuestro estudio versa sobre la naturaleza, no podemos dejar de investigar qué es el movimiento; porque si ignorásemos lo que es, necesariamente ignoraríamos también lo que es la naturaleza." – Aristóteles (*Phys*. 200b10, 2007)

[101] "El movimiento acelerado en línea recta puede ser representado como uniforme (no acelerado) si se elige una medida de tiempo suficientemente peculiar, que haga que la velocidad parezca uniforme acelerando o ralentizando la medición del tiempo de acuerdo a la velocidad cambiante de los objetos." – Sklar (1992)

[102] "[...] la *ley de la continuidad*, proclamada por mi antes que nadie, en virtud de la cual la ley de los objetos en reposo es como un caso especial de la ley de los que están en movimiento, la ley de los iguales como un caso especial de la ley de los desiguales, la ley de las curvas un caso especial de la ley de las rectas" – Leibniz (*Principios metafísicos de la matemática*, 2003)

[103] Valga como ejemplo de la concepción instrumental del infinitésimo el cálculo de la función derivada de $f(x) = x^2$: $d[f(x)]/dx = \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{x^2 + 2xdx + d^2x - x^2}{dx} = \frac{(2x+dx)dx}{dx} = 2x + dx = 2x$ donde se considera el infinitésimo $dx > 0$ hasta el último paso donde se toma por cero.

4.1. ¿Qué medimos?

Las dos ramas de la física contemporánea tienen su particular visión del continuo como substrato de la naturaleza y la justificación de la continuidad en ella misma, no de una manera artificial. No hay que olvidar que la continuidad, como postulado metafísico, en sus diferentes facetas; causalidad, acción-reacción, acción a distancia, etc., ha estado en la base de diferentes concepciones teóricas sobre la naturaleza de la realidad, desde el éter a las teorías de campos con alcance infinito, pasando por la naturaleza ondulatoria de la luz o la plenitud atomista cartesiana. Con todo, el desarrollo de las teorías relativistas y cuánticas han generado serias dudas sobre la concepción realista del continuo y, con ello, han arrastrado el posible, y tranquilizador, cierre causal del mundo físico.

Desde la teoría restringida de la relatividad se acaba con la posibilidad de encontrar un punto de referencia absoluto en la categorización temporal de eventos. De hecho, el límite de la velocidad de la luz en el vacío parece implicar una desconexión intransitable entre acontecimientos además de convertir la magnitud espacio-tiempo en algo "flexible" según la velocidad del sistema de referencia que se tome. Pero mayor alcance tienen las consecuencias de la teoría gravitacional relativista donde los campos gravitatorios pasan a ser deformaciones en el entramado (*fabric* – tejido) espaciotemporal en el cual aparecen discontinuidades, singularidades, en la geometría del espaciotiempo que han dado pie a las más diversas elucubraciones sobre "agujeros de gusano", universos paralelos, etc., que ponen en cuestión el *non datur saltus* de Leibniz. Ahora bien, una ventaja con la que no contaban los "medidores" de diagonales griegos es la de encontrar una magnitud constante que sirve de patrón para las distancias cósmicas, la velocidad de la luz en el vacío, curiosa constante absoluta en la visión relativista.

Pero, sin duda, donde mejor se muestra el problema del continuo y la continuidad es en la visión cuántica de la física del último siglo. El principio de indeterminación de Heisenberg[104], los audaces experimentos de Planck[105], el experimento de Stern-Gerlach[106], el gato de Schrödinger[107], etc., ponen en serias dificultades las atribuciones de continuidad ya no físicas o metafísicas, sino incluso la propia

---

[104] La imposible síntesis instantánea de velocidad y posición.

[105] El experimento de la radiación del cuerpo negro, donde se observa una onda electromagnética estacionaria, es decir, el intercambio de energía entre la materia y una radiación electromagnética no es continua sino discreta.

[106] Tras modificar el espín de un haz de electrones a través de un dispositivo que genera un campo magnético uniforme en todos los ejes menos uno (*up-down*), todos los electrones en el haz resultante tendrán un momento de espín *up* o *down*. Filtrando los últimos, se genera un haz de electrones con un único espín, *up*. Este haz se hace pasar por un nuevo dispositivo análogo pero que cambia el eje de espín entrante ortogonalmente, *left-right*; los dos haces resultantes tendrán entonces momentos de espín *left* o *right*, los cuales, *una vez contabilizados* por un instrumento de detección, al ser "mezclados" de nuevo y pasar otra vez por el dispositivo *up-down* darán dos haces, *up* o *down*, respectivamente. Sin embargo, si tras el segundo dispositivo (*left-right*) no se coloca instrumento alguno de detección del espín y tras pasar por éste se vuelven a integrar un solo haz para pasar por el dispositivo *up-down*, el haz "recordará" su estado "puro-*up*" al 100%(!). Se define entonces un estado diferente al de "mezcla" tras la medición del espín *left-right*, cuando no hay medición alguna, el rayo resultante es, entonces, el producto de una "superposición" de partículas *left* y partículas *right*, el cual contiene información diferente al estado de "mezcla". La consecuencia grave supone que se produce una discontinuidad en el intento de determinar el estado inicial de un sistema ya que la misma medición hace irreproducible el propio sistema original.

[107] El conocido experimento *mental* de Erwing Schrödinger donde la naturaleza cuántica de la función de onda en estado "superpuesto" (cf. la nota anterior) hace que el estado atómico del que depende el dispositivo que puede asesinar al gato no se determine hasta que sea medido, es decir observado. La función de onda (estadística) "colapsa" desde su estado de superposición en un valor en el momento de la observación. Pero antes, dentro de su caja, el gato estará en un estado superpuesto "vivo-muerto", al 50%. Reiterar la cursiva en "experimento *mental*", ningún gato sufrió superposición alguna entre la vida y la muerte en el avance de la física cuántica. A parte de la broma, con esto último queremos señalar que tal experimento *sólo* podría ser mental por su propia naturaleza cuántica, lo cual no por común no deja de ser algo irónico en una ciencia natural.

lógica[108], para intentar explicar el paradójico mundo de lo infinitamente pequeño. La caracterización del *quantum* de energía, y los diferentes números cuánticos, no posibilitan de una manera satisfactoria la solución de la medida. Ya que si bien sí son magnitudes mínimas constantes, los fenómenos cuánticos no son empíricamente mensurables, su misma naturaleza cuántica hace que la misma acción de medir cierre toda posible descripción de una causalidad anterior, eventualmente reversible, de tal modo que no es posible ver de dónde venía el fenómeno porque, en un exceso del lenguaje, la propia medición lo ha creado[109].

[108] J. Von Neumann y G. Birkhoff desarrollaron una "lógica cuántica" con resultados no muy satisfactorios. El principal reproche surgía, como suele pasar en tantas "lógicas alternativas", de que el sistema suponía la propia lógica clásica que pretendía refundar con el objeto de poder generar teorías aptas para los fenómenos cuánticos (Sklar, 1992)

[109] Pero, cuidado, ειρονεια: "Puede señalarse que la existencia de números cuánticos discretos [...] aparece, en definitiva, a partir de la compacidad de un espacio [...] Resulta irónico que, en ausencia de tal compacidad, el formalismo general de la mecánica cuántica no habría proporcionado el sorprendente carácter de *discreto* que dio origen a la teoría ¡y a partir del cual surgió originalmente el nombre mismo de cuántica!" – Penrose (§22.13, 2006)

5. EL ESCURRIDIZO CONTINUO METAFÍSICO[110]

A lo largo de los epígrafes anteriores han venido difiriéndose al presente apartado varias cuestiones que han ido surgiendo a lo largo de los epígrafes "matemático" y "físico". Se trata de cuestiones de carácter precientífico o prematemático, las cuales están en la misma base de los desarrollos posteriores a los que determinan de un modo radical. Especialmente en lo relativo al tema del continuo, y con alcance sobre las cuestiones de fundamentación matemática que se han visto, destacan reiteradamente alusiones a la unidad, multiplicidad, recursión, orden, individuación, predicación, identidad, conexión, recorrido, simultaneidad, intuición, tiempo y espacio. Todas ellas cuestiones que, si bien han encontrado desarrollos teóricos en diferentes disciplinas, son todas en su íntima naturaleza filosóficamente problemáticas[111].

Efectivamente, la inducción, la naturaleza del número, el axioma de comprehensión, el infinito, el límite, el axioma de elección, el de separación, etc., encierran todos ellos las cuestiones apuntadas que van más allá de su propio ámbito matemático y que merecen ser tratadas en un nivel de discurso metafísico, por muy *démodé* que pueda resultar el término[112]. Especialmente relevantes para el problema del continuo resultarán las nociones puramente metafísicas que se han utilizado en el intento de lograr un acceso isomorfo entre el pretendido continuo real y el continuo de las matemáticas. Surgen entonces dos cuestiones, ya referidas en el primer epígrafe: cómo es – cuál es – el supuesto continuo de la realidad y si es posible aprehenderlo de una manera matemática, por un lado; y por otro, si las plurales concepciones matemáticas del continuo, aparte sus propias dificultades de fundamento, tienen como horizonte metafísico una única y homogénea visión de lo que es continuo – además de si tales visiones metafísicas están justificadas – y más aún si en su misma configuración del continuo no asumen la misma continuidad que pretenden fundar[113].

Según se ha visto, la apelación a un continuo real, intuitivo, que sería el dado en la realidad cotidiana, sin entrar en tematizaciones y críticas sobre este darse, ha estado en la base de la crítica a los diferentes desarrollos con vocación identificadora entre geometría y aritmética. Así, la infinita divisibilidad de una magnitud, la adimensionalidad del punto geométrico, la justificación entre las prolongaciones, conexiones y proyecciones de la geometría sintética, la "inseparabilidad" de un continuo, etc., son opuestas analógicamente al tiempo considerado como la intuición del fluir continuo de la realidad, incluido en ello el propio pensamiento[114].

En los siguientes apartados se verá cómo tal apelación al tiempo como el continuo fundamental por antonomasia es paradójica e inconsistente metafísicamente, pero más aún, se apuntará al injustificado

[110] "Ciertamente, los continuos intuitivo y matemático no coinciden, hay un profundo abismo entre ellos." – Weyl (1918)

[111] "The general ideas of order, succession, collection, relation, rule and operation are premathematical; some implicit understanding of them is necessary to the understanding of mathematics." – Feferman (2008). He aquí una deriva platónica atenuada, más que razonable, del estructuralismo conceptual que defiende Feferman (cf. el diálogo *Menón*, evidentemente).

[112] "[...]un miedo a la *metafísica* que se ha convertido en enfermedad de la filosofía empírica actual" – Einstein (2009)

[113] Un buen ejemplo se ve en el epígrafe (3.1.3) donde la configuración del continuo y la continuidad que desarrolla Hilbert da por supuesta varias nociones como –conexión, orden, congruencia, secuencialidad, etc. – que, en un sentido prematemático, la dan por supuesta implícitamente.

[114] "Pero sin cambio no hay tiempo; pues cuando no cambiamos en nuestro pensamiento o no advertimos que estamos cambiando, no nos parece que el tiempo haya transcurrido." – Aristóteles (*Phys*. 218b20-25, 2007)

salto de fundamentar por analogía un concepto o propiedad formal como la continuidad matemática en conceptos basados en intuiciones fenoménicas como la extensión o el tiempo.

Por último, dibujaremos un "giro kantiano" – a veces, en contra del mismo Kant, claro – para señalar que es un error el fundar el continuo intuitivo – el pretendidamente real – en el tiempo y el movimiento, sino que es más bien a la inversa; tales conceptos son consecuencia, "manifestación" de un continuo o una continuidad que, evidentemente, si no se quiere caer en el mismo problema que se pretende evitar, se situará ya no en un plano fenoménico, ni matemático, sino trascendental.

Pero no debe acabar ahí la cosa, en los pagos de una perspectiva trascendental conviene ser cuidadoso con las definiciones y las restricciones. Defenderemos, siquiera aludiéndolo – por algo estamos en unos prolegómenos – que es la facultad de atribuir continuidad la que subyace al concepto de síntesis en el que se apoyarían las formas del entendimiento que justifican la configuración de una objetividad comunicable y, más aún, la que está en la base justificativa en los viajes dialécticos entre la unidad y la multiplicidad, el mundo y el lenguaje, etc. Y precisamente esa circunstancia hace inasequible el continuo intuitivo temporal en su pretendida reconstrucción desde la aritmética ya que aquél pretende fundarse en la realidad en sí y el último no puede desligarse de sus propias restricciones discretas, conjuntistas, axiomáticas, etc. que permitan un cálculo o un acceso a la demostración.

Con otras palabras, todos los continuos matemáticos, intuitivos o cotidianos, suponen tal "facultad" o "propiedad" trascendental (quizá fuera más correcto llamarla "metatrascendental" por acentuar su exterioridad formal) de *otorgar continuidad*, como justificadora primigenia constituyente en el más íntimo y primer acceso constitutivo al mundo, empezando por las propias sensaciones. De modo que todas las definiciones o caracterizaciones de un continuo o la continuidad en el plano lingüístico, fenoménico, formal, etc. asumen implícitamente la trascendental que se sitúa como primera justificadora epistémica, pero, cuidado, no necesariamente intersubjetiva.

Evidentemente, la verdadera "facultad" o "propiedad" o idealidad trascendental kantiana que lleva de suyo la manifestación de la continuidad a la que nos referimos es la Unidad Sintética de Apercepción Trascendental (USAT). Quizá la diferencia a investigar resida en que la USAT kantiana es el reducto último de la subjetividad trascendental desde la cual se abarca la constitución y la relación del sujeto empírico y el mundo objetivo.

5.1. Lógica y tiempo

<u>5.1.1. De la entidad y el acontecimiento</u>

Jan Lukasiewic (1980) halla el núcleo de la diferencia entre la lógica aristotélica y la de los estoicos en las versiones que ambas escuelas dan a la ley de identidad, de tal manera que en la expresión[115] "*a pertenece a todo a*" se encuentra el fundamento para una lógica de términos en el caso peripatético; mientras que en la expresión "*si p entonces q*" encuentran los estoicos el fundamento de una lógica de proposiciones. De esta manera, en la interioridad argumentativa de los aristotélicos se establece la estructura "*Sujeto es Predicado*" dando pie a las diferentes separaciones, conversiones y reubicaciones de los términos así como a las diferentes consideraciones del verbo "ser" en valor copulativo o predi-

[115] Lukasiewic (1980) reconoce que Aristóteles no hace mención expresa de tal ley, la cual se intuye en algún comentario del peripatético Alejandro de Afrodisia.

cativo (atributivo), así como el problema de la consideración categórica de las entidades (primarias y específicas o genéricas). Por su parte, la exterioridad discursiva de los estoicos trata de encontrar compatibilidades entre proposiciones según su valor semántico.

Ya en la etimología de los términos se puede atisbar la diferencia de ambas perspectivas:

- Συλλογιστικός; donde la unión (συν-) de argumentos o razones (λόγοι), llama a las dos vías del conocimiento peripatético, la síntesis y el análisis. Dicho de otro modo, la recopilación inductiva y la demostración deductiva.
- Διαλεκτικός; donde se discurre (δια-) a través de los caminos (literalidad de λόγος) que conectan los significados (λεκτόν) como "vehículo" incorpóreo entre la realidad la proposición (αξιωμα).

Aun arriesgada, resulta atractiva la metáfora según la cual se podría decir que la silogística aristotélica establece una cartografía regional del Ser mientras que la dialéctica de los estoicos funciona como una trama de caminos y encrucijadas[116] que conectan acontecimientos. Los peripatéticos se hunden en las profundidades de la realidad donde ubicarán el verdadero ser primero, la *entidad individual* (ουσια), en su correspondiente "región" (especie, género; tiempo, etc.) así como establecerán las relaciones entre las diferentes regiones y fronteras. Ello se realizará con la identificación del término sustantivo con el término predicativo[117], pudiendo ocuparse estos términos con cada "estrato" del Ser, según las reglas que permita la lógica, de manera que se pueda tener un acceso científico a la realidad (φυσις). Pero las reglas de la lógica, que están orientadas a regular la forma y relaciones de los juicios, no contienen la ciencia sobre la realidad, pero sí el modo de localizar la verdad[118] y lo que sea legítimo extraer de unas y otras. Por su parte, la primacía ontológica del estoicismo reside en el acontecimiento, si los peripatéticos *ubican profundidades* los estoicos *componen superficies*[119].

En la primera consideración semántica del sistema aristotélico se hace referencia al tiempo[120], pues está en la base de la significación de los términos. Además de otorgar la primacía sintáctica a la predicación, donde se juega la posibilidad de la definición y el universal. En este ámbito, la consideración del tiempo como una de las categorías del Ser también se ajusta a la metáfora señalada del sistema peripatético como una cartografía de regiones, fronteras y profundidades. El tiempo no se escapa a tal cartografía[121] categórica en presente, pasado y futuro, si bien Aristóteles señalará lo aporético de la

[116] "Según Crisipo [...] también el perro participa de la dialéctica, pues utiliza el quinto de los varios silogismos indemostrables, cuando al llegar a una encrucijada de tres *caminos*, tras haber seguido la pista por dos caminos que no transitó la presa, de inmediato se dirige decididamente al tercer camino sin detenerse a husmear" – Sexto Empírico (1996). Dejando de lado la ironía con la que Sexto continúa su exposición, es interesnate la referencia a las encrucijadas, los caminos y los perros.

[117] "*Sustancia*, en una palabra, es un error metafísico debido a la transferencia a la estructura del mundo de la estructura de frases compuesta de un sujeto y un predicado" – Russell (2009)

[118] "[...] pero el juicio verdadero no es en modo alguno causa de que se dé el hecho, mientras que el hecho parece de alguna manera la causa de que el juicio sea verdadero: en efecto, por darse o no darse el hecho es por lo que el juicio se llama verdadero o falso" – Aristóteles (*Categoriae* – 14b15-20, 2007). Tarski *avant la lettre*: "We should like to do justice to the intuitions which adhere to the *classical Aristotelian conception of truth*." – Tarski (1944)

[119] "(los estoicos distinguen) radicalmente, y nadie lo había hecho antes que ellos, dos planos de ser: por una parte, el ser profundo y real, la fuerza; y por otra, el plano de los hechos, que se juegan en la superficie del ser y que constituyen una multiplicidad sin fin de seres incorporales" (*La théorie dés incorporels dan láncient stoicisme* – E. Bréhier) – Deleuze (2005)

[120] "Verbo es lo que cosignifica (προσσεμαινον) tiempo [...] y es signo de lo que se dice acerca de otro." – Aristóteles (*De Int*. 16b6, 2007)

[121] "Ahora bien, el antes y el después son, ante todo, atributos de un lugar, y en virtud de su posición relativa." – Aristóteles (*Phys*. 219a10-15, 2007)

condición del tiempo sólo accesible desde la línea divisoria del futuro y pasado que es un presente invisible[122]. Así, la verdad de un enunciado será *ut nunc*, siempre temporal, análoga al tránsito entre la potencia al acto por el "mapa" temporal del antes al después.

Por su parte, Crisipo de Soli, desde la Stoa, hace un llamamiento a la compatibilidad de las circunstancias externas frente a la linealidad del tiempo peripatético, lo cual se traduce en la elección de la disyunción exclusiva que señala el estatuto "monadológico" del acontecimiento significado en las proposiciones, de ahí su semántica bivalente[123]. La semántica estoica es una epistemología integradora de la trama temporal del Aión (αιῴν), el tiempo instantáneo, el tiempo del indicativo, o mejor del infinitivo[124]; la trama del *Fatum* frente al Chronos (χρονος) peripatético o, mejor dicho, platónico – más aún – homérico[125].

5.1.2. *Non datur saltus... non datur?*

Según lo anterior, se puede observar que de ambas caracterizaciones del tiempo surgen dos semánticas y dos "cálculos", si se permite el anacronismo, sobre la transmisión de la verdad. El tiempo cronológico de pasado, presente y futuro está en la base de la semántica aristotélica, pues es el conductor y testigo de la necesidad y la universalidad, imprescindibles para la demostración científica, objeto explícito de la silogística, cuyo "cálculo" se manifiesta en las diferentes figuras (*modus*) a las que tantas vueltas dio la escolástica medieval. Por su parte, el tiempo del estoicismo es el del acontecimiento absoluto[126], sin extensión temporal lineal; el tiempo no es más que la manifestación de compatibilidades en la trama del Fatum, trama densa e inagotable. Los indemostrables[127] estoicos son las reglas que permitirían el acceso a la trama de la realidad, la justificación de la conexión entre un acontecimiento y otro, es decir, entre la verdad de una proposición y la de otra[128].

[122] "Pero, aunque el tiempo es divisible, algunas de sus partes ya han sido, otras están por venir, y ninguna es. El ahora no es una parte, pues una parte es la medida del todo, y el todo tiene que estar compuesto de partes, pero no parece que el tiempo esté compuesto de ahoras" – Aristóteles (*Phys.* 218a5-10, 2007)

[123] "Tenebitur igitur id, quod a Chrysippo defenditur, omnem enuntiationem aut ueram aut falsam esse; ratio ipsa coget et *ex aeternitate* quaedam esse uera, et ea non esse nexa causis aeternis et a fati necessitate esse libera." – Cicerón (*De fato*, 38). Es la razón del hombre sabio, excelente (σπουδαιος), que puede captar la verdad *sub specie aeternitatis*.

[124] "El tiempo único de los cuerpos y los estados de cosas es el presente." – Deleuze (2005a)

[125] "Y apiádate de este desdichado de mí aún en sus cabales,/ del infeliz a quien el padre Crónida en el umbral de la vejez/ *consumirá* con un sino cruel después de ver muchas desgracias" (*Ilíada*, Canto XXII, 59-61). Nuestra la cursiva. En la dualidad entre Chronos y Aión se manifiesta la dialéctica, no resuelta desde los griegos clásicos hasta el Helenismo, entre la sabiduría y la ciencia: Σοφια frente a Επιστήμη. Para el estoicismo el acceso a la Verdad es privativo del hombre sabio, excelente, mientras que, como es sabido, en la Academia se defiende que el Lógos no es privativo de una persona, sólo es alcanzable en el ejercicio dialéctico entre amigos (cf. *Banquete* y *Sofista*). En cualquier caso estas consideraciones desbordan con mucho el tema del trabajo, pero no por ello es menos pertinente señalar cómo el tiempo crónico permite definiciones y ubicaciones únicas mientras que la trama de la necesidad (αναγκη) del Fatum es insondable.

[126] "Lo que tiene realidad física no es ni el punto en el espacio ni el instante del tiempo en que algo ocurre sino únicamente el acontecimiento mismo." – Einstein (1993)

[127] Se atribuye a Crisipo (Mates, 1985) la redacción de los cinco esquemas inferenciales llamados "*indemostrables*" que funcionan a modo de axiomas en la dialéctica de los estoicos, al ser reducibles todos los demás a alguna de sus formas. Estos cinco esquemas señalan algunas claves del cálculo lógico proposicional (*avant la lêttre*), tales como: la transmisibilidad de la verdad del antecedente (esquema I); la transmisibilidad de la falsedad del consecuente (II); la no contradicción y el *tertium non datur* (III); la disyunción exclusiva (IV y V); la regla de inferencia de la alternativa o silogismo disyuntivo (V).

[128] "La dialéctica es precisamente esta ciencia de los acontecimientos incorporales tal como se expresan en las proposiciones, y de los vínculos de acontecimientos tal y como se expresan en las relaciones entre proposiciones." – Deleuze (2005a)

Esto último es lo que nos sirve para el siguiente aspecto, que pasa por resaltar lo reconocible de la postura del estoicismo en la metafísica de Leibniz. La estructura monadológica que se revela en la epistemología del estoicismo es análoga a la postura metafísica del filósofo leipsiense sobre la negación de la naturaleza *en sí* del espacio y el tiempo, según se indicó en el anterior epígrafe físico (4). Si el tiempo cronológico necesita de su contraparte espacial en la caracterización del cambio instantáneo, y viceversa; el tiempo de los estoicos ahorra la dimensión geométrica o geográfica, puesto que la localización en tal espacio es única en la trama de acontecimientos. Más aún, ahorra incluso la dimensión temporal, puesto que la localización del acontecimiento vendrá determinada, infinitamente, insondablemente por la trama completa y compacta de las compatibilidades, accesibilidades y conexiones legítimas de la propia realidad. Tal circunstancia, evidentemente, supone la imposibilidad de matematizar formalmente el fenómeno del cambio, pero hay que recordar que en el estoicismo la Dialéctica es una teoría del conocimiento y la Física es una Política. Para hacer ciencia de la Física, hace falta su matematización, y ello pasa por la aritmetización del tiempo.

La revolución de Galileo en la aprehensión matemática del movimiento local supone (probablemente sin pretenderlo) la composición de las dimensiones de la lógica aristotélica pero, esta vez, de un modo cuantitativo y no cualitativo: el producto cartesiano. Donde los aristotélicos justifican el cambio cualitativo de la sustancia en la composición de sus diferentes predicados con el tiempo; Galileo compondrá la medida cuantitativa de la dimensión temporal con la medida de la composición de las dimensiones espaciales, el cambio siempre será local[129]. La justificación del movimiento continuo supone la continuidad de todas las dimensiones en juego, las espaciales y la temporal, pero aquí ninguna de las dos toma primacía como continuo fundamental, por ello sólo puede ser local el movimiento que se matematiza, puesto que si no hay cambio espacial no será distinguible medida alguna del tiempo.

La consecuencia importante de tal método es que puede escalarse en las composiciones, de tal manera que si puede enfrentarse el cambio espacial contra la medida del tiempo cronológico; este producto puede a su vez volver a enfrentarse contra la medida del tiempo cronológico para encontrar la tasa de cambio del propio cambio local, que sería la aceleración. Pero, entonces, el problema numérico vuelve a hacerse patente, puesto que habrá que componer el tiempo con una magnitud compuesta por tiempo [(espacio/tiempo)/tiempo]; es decir, reaparece el problema de la medida de las diagonales de los cuadrados de los griegos. Se necesita una unidad mínima para medir tal variación que en los sucesivos productos composicionales no les afecte (nilcuadrática, más aún, nilpotente) y sin embargo tenga entidad suficiente en las infinitas sumas de sus valores, en la integración[130]. Tal es el infinitésimo de Leibniz.

Pero, conviene recordar que tal constructo es formal, las medidas, las composiciones, las sumas son desarrollos matemáticos, pero, por su parte la realidad es patente. Y hay principios metafísicos como la plenitud de la realidad[131], que obligan a que se tomen por continuo el tiempo[132]. Es decir, la conti-

[129] De nuevo, ειρονεια: curiosa manera de apoyarse en la lógica deductiva aristotélica para, entre Descartes y Galileo, desmoronar la física del Filósofo.

[130] "Hay dos clases de repetición continua, una sucesiva, como el tiempo y el movimiento; otra simultánea, o sea, que consta de partes consistentes, como el espacio y el cuerpo." – Leibniz (*Examen de la física de Descartes,* 2003)

[131] "En la naturaleza todo es lleno y en todas partes hay sustancias simples que están efectivamente separadas unas de otras por acciones propias que cambian continuamente sus relaciones (*rapports*)." – Leibniz (*Principios de la naturaleza de la gracia fundados en la razón*, 2003).

[132] "Si el espacio tiene después de todo una existencia real no es necesario que sea continuo; muchas de sus propiedades seguirían igual incluso si fuera discontinuo. Y si supiéramos con certeza que el espacio fuese discontinuo, nada evitaría que

nuidad del espacio y del tiempo es derivada, "recibida", para justificar metafísicamente su instrumentalidad física, numérica.

La trama temporal de la realidad no excluye la linealidad cronológica, pero habrá infinitos recorridos lineales, compatibles o no unos con otros. En tal contexto tienen sentido los retículos compuestos de mundos posibles que justifiquen su accesibilidad por la composicionalidad, sancionada por las reglas de la dialéctica, en este caso, la lógica, entre sus premisas, sus proposiciones, las que se "se da el caso que"[133]. En este punto, en la lógica de los estoicos, para no caer en la arbitrariedad, entraría en juego la parte semántica sobre el acceso a la verdad eterna de cada proposición, es decir, existen caminos legítimos y caminos no legítimos; con otras palabras, la continuidad temporal es una atribución justificativa de la propia interconectividad y densidad insondable de la trama de la realidad. Valga lo análogo para la extensión corpórea, de ahí la naturaleza relacional (mejor que relativa), no en sí, del espacio y el tiempo de Leibniz[134].

Identificar la continuidad con el cambio gradual parece una *contradictio in termini*, supone la misma paradoja de la reconstrucción aritmética de la recta geométrica a partir de sus puntos ordenados. Pero Leibniz toma por ideal la naturaleza relacional del espacio y el tiempo, algo que Kant no admitirá.

5.2. *Inimicus Kantius...*

Resulta atractivo, quizá algo provocador, caracterizar la historia del pensamiento filosófico occidental entre los intentos de mantener a Aristóteles durante veintitrés siglos y los intentos de refutar a Kant en los dos últimos. En ambos casos la superabundancia generada en tales intentos no les otorga más razón al Filósofo estagirita ni al Profesor regiomontano, y toda la validez que se les pueda restar a las soluciones aristotélicas no impide reconocer la persistente pertinencia de los planteamientos de los problemas kantianos.

5.2.1 Geometría vs. Cronometría

Según se ha visto, las consideraciones ontológicas del espacio y el tiempo de Newton y Leibniz tienen una justificación más de operatividad que de realidad; operatividad científica en el primero y "operatividad" teológica en el último. Newton necesita que espacio y tiempo sean entidades absolutas reales, no ancladas a materialidades para poder justificar su dinámica en movimientos no inerciales y más aún, necesita de la continuidad de ambos en la infinita extensión de la fuerza de la gravedad en el espacio, tanto es así, que Newton "salva" el *plenum* metafísico apuntándose a la solución del éter supralunar. Leibniz por su parte abandona toda referencia externa, toda realidad fenoménica ya que de tomarla en cuenta su monadología se convertiría en simple plenitud atomística cartesiana. Así intelectua-

nosotros, si lo deseáramos, rellenásemos sus huecos, en el pensamiento, y así hacerlo continuo; este relleno consistiría en la creación de nuevos puntos individuales." – Dedekind (1901). Este párrafo parece ir en contra de la Estética Transcendental, pero es una oposición sólo superficial, a nada que rasquemos en su sentido, parecerá más bien una adhesión a la epistemología kantiana.

[133] "Ciertamente, también aquí se puede, si se quiere, distinguir entre sujeto y predicado, pero el sujeto encierra el contenido completo, y el predicado sólo tiene el propósito de poner a éste como juicio. Un *lenguaje así, tendría únicamente un predicado para todos los juicios, a saber, "es un hecho"*." – Frege (1972). Como vemos, Frege abandona la estructura Sujeto-Predicado como recurso operativo, siempre puede parafrasearse tal estructura como un contenido judicativo.

[134] "[...] al desarrollar la noción de extensión advertí que es relativa a algo que debe extenderse y significa la difusión, o sea, la repetición de cierta naturaleza" (*Examen de la física de Descartes*). Y también; "El espacio es el orden de coexistir, esto es, el orden de existir los entes simultáneos" (*Principios metafísicos de la matemática*) – Leibniz (2003)

liza espacio y tiempo para justificar una ley de conexión entre sus substancias, una justificación que, como hemos visto, ya no es metafísica sino mística[135].

Kant, en su refutación del idealismo psicológico, se opone a la solución de Leibniz puesto que éste no toma en cuenta la sensibilidad como vía de acceso a lo fenoménico, estableciendo la única posibilidad de la intuición intelectual de la realidad, con pie a todos los excesos de la razón cuando se desboca en su faceta especulativa sin los límites dados por la experiencia posible.

Espacio y tiempo, como formas ideales[136] de la sensibilidad, externa en el primero e interna en el último, son las condiciones a las que se tiene que someter toda experiencia posible para que la razón pueda otorgar estatuto objetivo al fenómeno[137]. En esta configuración de la ordenación de la sensibilidad encuentra su camino hacia la comprensión conceptual de lo dado en la intuición sensible en los tres momentos de síntesis: de aprehensión en la intuición, de reproducción en la imaginación y de reconocimiento en el concepto. Todos estos momentos pueden ser caracterizados como condiciones *de iure* de la continuidad en el sentido que le atribuimos antes; es decir, la condición que justifica una unidad indiferenciada. Evidentemente, en el ámbito kantiano, es algo pre-discursivo, la "justificación" es trascendental como la manera en que se desenvuelve *a priori* el mecanismo del conocimiento[138]. Pero no puede acabar ahí, existe un momento de síntesis no sólo anterior sino, ahí su importancia, abarcante de los otros, la conocida unidad sintética de apercepción, versión trascendental de la subjetividad[139]. Evidentemente el sujeto pensante podrá tener la naturaleza que se quiera, pero no podrá dejar de ser uno.

Es un tópico pensar que, dado que Kant contaba sólo con la física newtoniana y la geometría euclidiana, toda la construcción kantiana estaba fundada en la noción empírica del espacio y el tiempo. Así, se tomaron los diferentes avances de la física con las geometrías no euclidianas como refutaciones "científicas" de la estética trascendental y de ahí de todo el sistema[140]. Estos intentos de "empirizar" (Racionero, 1981) a Kant pierden de vista que el sentido de la estética trascendental sólo puede partir desde la unidad sintética de apercepción, donde queda claro que la síntesis, previa a la noción de concepto

[135] "[...] toda la naturaleza del cuerpo no consiste sólo en la extensión, (...) sino que es preciso necesariamente reconocer ahí algo que tiene relación con las almas y que se llama, en general, forma sustancial, aunque nada cambie en los fenómenos, como tampoco cambian las almas de los animales si es que las poseen." – Leibniz (*Discurso de metafísica I*, 2003)

[136] "Afirmamos, pues, la realidad empírica del espacio (con respecto a toda experiencia externa posible), pero sostenemos, a la vez, la *idealidad trascendental* del mismo, es decir, afirmamos que no existe si prescindimos de la condición de posibilidad de toda experiencia y lo consideramos como algo subyacente a las cosas en sí mismas"- Kant (B44, 1978).

[137] "El tiempo únicamente posee validez objetiva en relación con los fenómenos, por ser éstos cosas que nosotros consideramos como objetos de nuestros sentidos" (B51) y "El tiempo ha de ser, pues, considerado como real, no en cuanto objeto, sino en cuanto modo de representarme a mi mismo como objeto." (B54) – Kant (1978)

[138] "[...] nuestro pensamiento de la relación conocimiento-objeto conlleva en sí cierta necesidad (...) nuestros conocimientos no se producen al azar o arbitrariamente, sino que se hallan determinados de una cierta forma, ya que, al tener esos conocimientos que referirse a un objeto, han de concordar necesariamente entre sí con respecto a éste último, es decir, han de poseer la unidad que constituye el concepto de un objeto" – Kant (A104-5, 1978)

[139] "No pueden darse en nosotros conocimientos, como tampoco vinculación ni unidad entre los mismos, sin una unidad de conciencia que preceda a todos los datos de las intuiciones." – Kant (A107, 1978)

[140] Valga como refutación de la "refutación" el ejercicio de Poincaré geometrizando euclidianamente la relatividad especial demostrando que tampoco la de Lobatchevski podía ser considerada la geometría de la realidad, (Sklar, 1992). Evidentemente, no supone una adhesión a Kant, sino la inquitante conclusión de que la geometría de la realidad es algo convencional.

o juicio, originaria es pre-discursiva y no puede partir de los objetos mismos, sino como espontaneidad (reflexión) del propio entendimiento[141].

Sin embargo, no es este el lugar para realizar una revisión hermenéutica de la Estética Trascendental, pero en lo pertinente a lo defendido en estos prolegómenos; que no se funda el continuo real o metafísico en el tiempo, sino que la continuidad de éste es un concepto derivado de la función sintética primigenia de la que parte la noción de continuidad como atributo justificador de una construcción unitaria. Más aún, la infinita divisibilidad de la línea temporal no es más que una consecuencia de esto mismo, de tal manera que es una uniformización, una ordenación posterior que permite la distinción y ubicación de las intuiciones del sentido interno y, de ahí el resto de las síntesis[142], hasta la conceptualización de un objeto[143], que será el "producto final" (valga el exceso retórico) de la razón, listo ya para ser transmitido, comunicado, para "hacer comunidad" y permitir el verdadero uso práctico de la razón teórica que no es otro que la tarea moral.

5.2.2 El escándalo de la Filosofía

La determinación del tiempo como el continuo por antonomasia, como el espejo en el que deben mirarse todos los continuos matemáticos pretendidamente construidos a partir de la aritmética, discreta, posibilitadora de los cálculos y las demostraciones debe, pues, ser abandonada. Es más, está también en la misma raíz del "problema" (valgan las comillas) de la aritmetización del continuo geométrico.

La pretendida "intuición" del tiempo-continuo no es más que una versión objetivada como unidad a la que se le "reconoce", se le atribuye, una infinita divisibilidad. Siendo esto importante, resulta casi trivial (que no lo es) al lado del hecho clave que supone atribuir a tal noción un orden estricto entre sus partes, ahora puntos. En la dualidad dada por su unidad infinitamente divisible más el orden lineal entre las partes, infinitamente pequeñas, inasequibles, encontramos la noción "metafísica" del continuo, algo que no puede ser más que un postulado el cual, como hemos visto, no es el único posible. Algo análogo o más bien, derivado, puede afirmarse en lo relativo al continuo extensivo del espacio[144]. Se toman, así, lo que no son más que geometrías y cronometrías por el espacio y el tiempo.

Pero aún hay más, en la objetivación comunicativa de lo que se entiende como la medida del cambio intuido en los fenómenos se cae, como se indicó en el apartado (2.1), en la irreproducibilidad desde la

---

[141] "[...] el enlace no se halla en los objetos ni puede ser tomado de ellos mediante percepciones (...). Al contrario, ese enlace es obra exclusiva del entendimiento, que no es, a su vez, más que la facultad de enlazar a priori y de reducir la diversidad de las representaciones dadas a la unidad de la apercepción." – Kant (B134, 1978)

[142] "Hay pues, una relación y una conexión, o más bien un ***tránsito*** de la realidad a la negación que convierten cada realidad en representable como un *quantum*." – Kant (B183, 1978)

[143] "[...] teniendo en cuenta que todo número debe tener como base una unidad, el fenómeno constituye, como unidad, un *quantum* y, en cuanto tal, es siempre un **continuo**"(!) – Kant (B212, 1978). Nuestra la negrita; momento excelente para recordar lo dicho en el último párrafo del apartado 2.1 de estos prolegómenos.

[144] "La división infinita es sólo una característica del fenómeno como *quantum continuum*, y es inseparable de la ocupación de espacio, ya que es precisamente en tal ocupación donde reside el fundamento de su infinita divisibilidad" (B555). Nuestro el subrayado, valga lo señalado en la nota anterior. Pero no hay que dejar de en esta frase se puede entrever una de las devilidades "antikantianas" de Kant. En efecto, que se declare "inseparable del espacio" al fenómeno es discutible desde un punto de vista trascendental, ahora no ya kantiano, donde queda por pensarse y revisar el asunto de la afección. Así, la configuración fenoménica de la música o los aromas o sabores parecen resistirse a la caracterización espacial, tal vez no a la consideración temporal, en el sentido de la distinción de la sucesión en el "sentido interno" kantiano, lo cual establecería una sima para su objetivación. Evidentemente, entramos en los pagos de la Fenomenología, vía que no acomenten estos Prolegómenos, pero no por ello menos pertinente su estudio. Para ser justos, Kant encuentra salida, sólo parcial, en el "a priori subjetivo" del juicio estético en la Crítica del Juicio, pero no resuelve la objetivación teórica desde la afección sensorial.

inaprehensible caracterización del todo unitario perdido. Todavía dicho mucho mejor: la segunda antinomia de la Dialéctica Trascendental kantiana[145].

En la propia infinitud productiva del lenguaje que permitiría configurar una realidad intersubjetiva, la comunidad de sistemas epistémicos[146], se encuentra la semilla que hace irreconstruible, inasequible e inagotable la realidad. Es más, esta es la misma semilla del escepticismo y del solipsismo. Es decir, la objetivación configurada a partir de la atribución trascendental de continuidad no tiene por qué ser, necesariamente, intersubjetiva. No es contradictorio esto con la refutación del idealismo material (dogmático o problemático) de Kant, que ni el sentido interno ni la síntesis de aprehensión puedan darse sin una exterioridad real; esto no está reñido con la configuración de objetos no comunicables, o compartibles: delirios o fantasmas, ni siquiera lingüísticos, tales son los casos del místico y del alma del bruto[147].

[145] Cuya solución: "[...] no puede afirmarse que un todo que sea divisible al infinito conste de un número infinito de partes, [...] no está contenida en ella [en la intuición del todo] la división completa" - Kant (B523-4, 1978)

[146] Cf. Boghossian (2000).

[147] "[...] sigue siendo un escándalo de la filosofía y del entendimiento humano en general el tener que aceptar sólo por fe la existencia de las cosas exteriores a nosotros." – Kant (BXL, nota k, 1978). Evidentemente, de ello no se sigue que haya que aceptar la existencia de las "cosas exteriores" de los otros. Sólo cuando pretendemos llegar a ellos y compartir un mundo. Tal paso es, además de epistémico, un asunto moral; en ámbito de una voluntad libre (de haberla) que tampoco tiene cabida en estos prolegómenos, pero de indudable pertinencia.

6. CONCLUSIÓN

Como debe poder extraerse de estos prolegómenos, la aritmetización del continuo geométrico hace tiempo que no es un problema matemático. La configuración del análisis estándar, iniciada por Cauchy, Cantor y Dedekind, y completada por Weierstrass y Riemann, entre otros[148], tiene perfecto encaje operativo en toda la investigación y aplicación matemática relativa a funciones continuas, geometría diferencial, cálculo de variedades (física); o la probabilidad continua, optimización, intervalos de convexidad (microeconomía). El punto clave, el elemento sustancial en todo ello es el número real. Entidad esquiva y paradójica en su fundamento, pero perfectamente asida y delimitada en su comportamiento. Poco importa que no se pueda construir un segmento de longitud π[149] cuando podemos manejarlo con soltura en todas (o casi todas) sus apariciones y, más aún, sabemos localizarlo así, completo, acabado, en sitios donde permanece disfrazado, por ejemplo en los números complejos. Poco probable parece que el análisis no estándar acabe perdiendo el "no". Pero aún hay más, como las principales objeciones se han hecho desde presupuestos metafísicos, no se ha conseguido lo que hubiese sido algo definitivo: que se hubiese encontrado alguna fisura, alguna contradicción, alguna inconsistencia, *en la propia práctica matemática* que fuese consecuencia inequívoca de tales problemas de fundamentación semántica o metafísica. Si los hay, no parece que los matemáticos y los científicos que usan las matemáticas cotidianamente los hayan tomado en serio.

Si el continuo dejó de ser un problema matemático, no tiene tan fácil solución en las perspectivas física y metafísica. La naturaleza cuántica de la transferencia de energía, la superposición, la velocidad de la luz en el vacío y el radio de Swarzschild[150], etc., parecen señalar discontinuidades en la realidad que ponen en seria duda la naturaleza del tiempo como referente continuo en la línea del cierre causal del mundo. Es más, la cosmología, desde Hubble, apunta a algo tan herético para un griego, sobre todo helenista, como un "principio" del tiempo en el Big Bang; apelativo con pretensiones peyorativas en un principio que ha terminado siendo un concepto cosmológico. Evidentemente, no es que no tenga respuesta la pregunta de qué hubo antes de la Gran Explosión, sino que no se trata de una pregunta en absoluto para el modelo cosmológico expansionista. El que haya eventos temporales, o mejor espacio-temporales, reales pero inalcanzables, inconectables, en lo grande; e irreproducibles e inobservables en lo pequeño, pone en muy serias dificultades, de momento, la continuidad ontológica. Pero no es el caso para la ideal y mucho menos la trascendental, dada en la síntesis imaginativa originaria.

No está de más, en el momento de apuntar las carencias del presente trabajo, afirmar una vez más su condición de meros prolegómenos para una cabal comprensión de lo que suponen las nociones de continuo o continuidad, desde sus usos más cotidianos hasta los rigores formales y científicos. Evidentemente, debemos reconocer aspectos por los que se ha pasado más rápidamente que otros; por ejemplo las construcciones de números hiperreales y surreales, las axiomáticas de ZFC y NBG, así como la exposición crítica de los verdaderos alcances operativos de todas las versiones analíticas referidas. Sólo ello puede llevarse, perfectamente, varios volúmenes.

---

[148] Como figuras más destacadas. Evidentemente, se pueden añadir, a parte de Newton y Leibniz, claro; Barrow, Taylor, MacLaurin, L'Hôpital, Lagrange, Bolzano, etc.

[149] Con el que cuadraríamos el círculo.

[150] El supuesto teórico del alcance del horizonte de sucesos, lugar teórico a partir del cual hay una desconexión que hace inaccesible la información interior a un observador exterior, de un agujero negro. Parece haber una relación entre el tamaño de un agujero negro simétrico y estático y su horizonte de sucesos dado por el radio señalado por Karl Swarzschild (Sklar 1992).

Con todo la debilidad más palpable, y no sólo por la brevedad de este trabajo, está en la necesaria integración de los conceptos de continuo o continuidad en la perspectiva sintética kantiana. Es decir, la dilucidación de qué puesto lógico (trascendental, claro) ocuparían, ya si como meras cualidades derivadas de la propia apercepción sintética o como algo localizable anteriormente, de ahí que pensemos pertinente preguntarnos por su consideración categórica "meta" trascendental; es decir, al igual que las categorías kantianas, como conceptos puros del entendimiento, es decir, trascendentales, sólo son legítimamente aplicables de una manera empírica; la consideración "meta" trascendental de la continuidad sería la "categoría" sólo aplicable y fundamentadora del campo trascendental posterior. Una manera de llevar a cabo esto pasaría por el recorrido, bajo tal perspectiva, de todas las categorías, donde pudiésemos establecer la anterioridad de tal continuidad en ellas. Ello independientemente de todas las posibles críticas, muchas muy pertinentes, al programa kantiano: otra vía que no toca este estudio.

Por último, más bien, por acabar, puesto que seguramente las debilidades de este estudio son innúmeras, es inevitable señalar la consideración de la fenomenología iniciada por Husserl, aunque también desde las perspectivas de Fink y Merleau-Ponty, sobre todo en el plano no "psicologizante" del pensamiento, las sensaciones o las intuiciones[151].

[151] "La cuestión no es decómo se forma la experiencia, ingenua o científica, sino de qué contenido ha de tener para ser una experiencia objetivamente válida. La cuestión es cuáles son los elementos y las leyes ideales que fundan esta validez objetiva del conocimiento real (y más en general, de todo conocimiento) y cómo debe entenderse propiamente esta función" – Husserl (2006)

7. EPÍLOGO

Nuestra especie camina por un fino hilo que no es más que la manifestación de su propia tragedia. Accedemos a la transparencia de la realidad – incluidos nosotros mismos – mediante el lenguaje, de una vez y para siempre. Esto es así porque sólo así llegamos a los otros, porque nadie tiene un lenguaje individual y porque jamás ermitaño alguno configuró una moral; incluso Zaratustra tuvo que bajar de la montaña para "buscar al *Übermench*". Pero desde ese mismo instante instauramos un abismo insalvable: el abismo de la Nada. La Nada que permite la diferenciación de lo que es, cada ente, con la negación infinita de lo que no es, todo lo demás. Esa nada, ese vacío, gracias al cual pudimos hablar, pero que no nos permite abarcar ni siquiera nuestro propio ser por completo.

Desde entonces nos aferramos a la continuidad con desesperación. Desde el primer momento de la vida, nuestra memoria es nuestro primer y último tesoro. Flaco reducto de nuestra alma, adulterado y desnaturalizado por los propios vaivenes de la vida. Buscamos con angustia los antecedentes, las causas suficientes, tanto o más que las necesarias; porque sólo en la continuidad de las razones, sin vacíos, ni saltos, podemos sentirnos tranquilos para conjurar la incertidumbre y las sorpresas; y así poder crear la ilusión de una identidad, un mundo y una voluntad.

Somos la materia de un discurso, de nuestro propio discurso, y nuestra vida no es más que la colección de razones que damos, sobre todo a nosotros mismos, para justificarnos. Todo nuestro esfuerzo vital consiste en "rellenar" los vacíos donde tales razones se interrumpen, por contradicción, debilidad o tozudez, en una síntesis mínimamente consistente que nos permita imaginar un feliz sentido[152] a nuestra vida y poder continuar caminando por un hilo inexistente.

[152] "Viuere, Gallio frater, omnes beate uolunt, sed ad peruidendum quid sit quod beatam uitam efficiat, caligant" – Séneca (*De uita beata*)

BIBLIOGRAFÍA

Álvares, A. (2005). El problema del continuo antes de Cohen (1873-1963) en *Aportaciones Matemáticas. Memorias* 35. UNAM.

Aristóteles (2007a). *Metafísica*, ed. Tomás Calvo Martínez. Madrid: Ed. Gredos.

Aristóteles (2007b). *Física*, ed. Guillermo R. de Echandía. Madrid: Ed. Gredos.

Aristóteles (2007c). *Tratados de Lógica*, ed. Miguel Candel Sanmartín. Madrid: Ed. Gredos.

Bell, E. T. (1992). *The Development of Mathematics.* McGraw-Hill (New York, 1945, 2nd. Ed). New York: Reed. Dover Publications.

Bell, J.L. (2010). Continuity and Infinitesimals. *The Standford Encyclopedia of Philosophy* (Fall, edition) Edward N. Zalta (ed.), URL=<http://plato.stanford.edu/archives/fall2010/entries/continuity/>.

Bell, J.L. (2000). Herman Weyl on intuition and the Continuum. *Philosophia Mathematica* 8.

Bell, J.L. (1986). From absolute to local mathematics. *Syntese* 69.

Boghossian, P. (2000). Knowledge of Logic. New Essays on the A Priori. Boghossian, P. y Peacocke, C. (eds.). Oxford University Press 2000.

Bujalance, E., Bujalance, J. A., Costa A., Martínez, E. (2005). *Elementos de Matemática Discreta*. Madrid: Ed. Sanz y Torres.

Buser, P. & Costa, A. (2010). *Curso de Geometría Básica*. Madrid: Ed. Sanz y Torres.

Cantor, G. (1955). *Contributions to the founding of the Theory of the Transfinite Numbers*. Trad. Philip E. B. Jourdain. New York: Dover Publications Inc.

Church, A. (1940). A formulation of the simple theory of types. *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 5, No. 2, June, pp. 56-88.

Church, A. (1976). Comparison of Russell's resolution of the semantical antinomies with that of Tarski. *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 41, No. 4 (December).

Cicerón, M.T. *De Fato*. – The Latin Library – www.thelatinlibrary.com

Coplestone, F. (2004). – *Historia de la Filosofía*. Vol. 1. Barcelona: Ariel.

Dedekind, R. (1901). *Essays on the Theory of Numbers.* Trad. Wooster Woodruff Beman. Chicago: The Open Court Publishing Company.

Delgado, M. & Muñoz, M.J. (2010). *Lenguaje matemático, conjuntos y números.* Madrid: Ed. Sanz y Torres.

Deleuze, G. (2005a). *Lógica del sentido*. Madrid: Paidós.

Deleuze, G. (2005b). *La isla desierta*, Valencia: Ed. Pre-textos.

Ehrlich, P.(2005). Continuity. *Encyclopedia of Philosophy* (2nd ed.). Donald M. Borchard, ed. Macmillan Reference, Vol. 2, pp. 489-518.

Ehrlich, P. (2012). The absolute arithmetic continuum and the unification of all numbers great and small. *The Bulletin of Symbolic Logic*, Vol. 18, No. 1, pp.1-45. (March).

Engel, P. (1991). *The norm of Truth*. New York: Harvester-Wheatsheaf.

Einstein, A. (2009). *Mi visión del mundo*. Barcelona: Círculo de Lectores.

Einstein, A. (1993). *El significado de la relatividad*. Barcelona: Planeta Agostini.

Euclides (2007). *Elementos*. Trad. Mª. Luisa Puertas Castaños. Madrid: Gredos.

Feferman, S. (2008). *Conceptions of the Continuum*. Conferencia impartida en el Workshop on Philosophical Reflections on Set Theory. Barcelona.

Feferman, S. (2005). Predicativity. *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. S. Shapiro (ed.) Oxford University Press.

Feferman, S. (2000). The significance of Hermann Weyl's *Das Kontinuum*. *Proof Theory. History and Philosophical Significance.* Hendricks, V. F., Pedersen, S.A., Jørgensen, K. F. (eds.) – Synthese Library, Vol. 292, pp. 179-194. Springer.

Fernández Novoa, J.(1992). *Análisis Matemático I*. Madrid: U.N.E.D.

Field, H. “Mathematical undecidables, Metaphysical Realism and Equivalent Descriptions” – *Volume on Hilary Putnam – Library of Living Philosophers* New York University (http://as.nyu.edu/docs/IO/1158)

Frege, G. (1980). *The foundations of Arithmetic*. A Logico-mathematical Enquiry into the Concept of number, trad. J. L. Austin. Northwestern University Press. Evaston.

Frege, G. (2002) *Estudios sobre semántica*. Trad. Ulises Moulines. Biblioteca de Filosofía. Barcelona: Ed. Folio.

Frege, G. (1972). *Conceptografía.* Trad. Hugo Padilla. Universidad Nacional Autónoma de México (D.F.).

Gödel, K. (2006) *Obras completas.* Ed. Jesús Mosterín. Madrid: Alianza Editorial.

Goodman, N. (1976). *Los lenguajes del arte*. Madrid: Seix Barral.

Harper, D. (2014). Online Etymology Dictionary, (http://www.etymonline.com/index.php?term=tell).

Hellman, G. (2005). Structuralism. *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic.* S. Shapiro (ed.). Oxford University Press.

Hrabacek, K. (1979). Nonstandard Set Theory. *The American Mathematical Monthly.* Vol. 86, No. 8, pp. 659-677 (October).

Hilbert, D.(1950). *Foundations of Geometry* (1902). Trad. E. J. Townsend. La Salle, Illinois: The Open Court Publishing Company.

Horsten, L.(2007). Philosophy of Mathematics. The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Stanford (Spring).

Husserl, E. (2006). *Investigaciones Lógicas*. Manuel G. Morente y José Gaos (eds.). Revista de Occidente (1929). Reedición, Madrid: Alianza Editorial.

Husserl, E. (1949) *Ideas relativas a una fenomenoloía pura y una filosofía fenomenológica*. José Gaos (trad.) 1910. México DF: Fondo de Cultura Económica.

Ivorra, C. (2010). *Análisis no estándar*. Ed. Carlos Ivorra. http://www.uv.es/ivorra/Libros/Libros.htm

Kant, I. (1979). *Crítica de la Razón Pura*. Trad. Pedro Ribas. Madrid: Alfaguara.

Kneale, W. & M. (1962). *The development of Logic*. Claredon. Oxford University Press.

Kripke, S. (1965). Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I. *Formal Systems and Recursive Functions*, J. Crossley & M.A.E. Dummett (eds.). Amsterdam.

Leibniz, G.W. (2003). *Escritos Filosóficos.* Ed. Ezequiel de Olaso. Madrid: A. Machado Libros.

Longo, G. (1999). The mathematical continuum: from intuition to logic. *Naturalizing Phenomenology*. J. Petitot et al.,(eds.). Stanford: Stanford University Press.

Lukasiewicz, J.(1980). Contribución a la historia de la lógica de proposiciones. *Lecturas de Lógica I*. Luis Vega (ed.). Madrid: U.N.E.D.

Maddy, P. (2014). A second Philosophy of Arithmetic. *The Review of Symbolic Logic*, Vol.7, No. 2, pp. 222-249 (June).

Manzano, M. (1989). *Teoría de modelos*. Madrid: Alianza Universidad Textos.

Manzano, M. (2005). *Extensions of First Order Logic*. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge: Cambridge Universty Press.

Mates, B. (1985). *Lógica de los estoicos*. Madrid: Ed. Tecnos.

Munkres, J. R.(2007). *Topología.* Pearson Educación. Madrid: Prentice-Hall.

Peirce, C. S. (1867). Upon Logical Comprehension and Extension. Paper 34, November 13th 1867. *The Peirce Edition Project* – URL= <http://www.cspeirce.com/menu/library/bycsp/bycsp.htm>.

Penrose, R. (2006). *El camino a la realidad*. Barcelona: Círculo de Lectores.

Platón (1987). *Parménides*. Guillermo R. de Echandía (trad.). Madrid: Libro de Bolsillo, Alianza Editorial.

Posy, C. (2005). Intuitionism and Philosophy. *The Oxford Handbook fo Philosophy of Mathematics and Logic*. S. Shapiro (ed.). Oxford: Oxford University Press.

Prawitz, D. (2005). Logical Consequence From a Constructivist Point of View. *The Oxford Handbook fo Philosophy of Mathematics and Logic*. S. Shapiro (ed.). Oxford University Press.

Quine, W.V.O. (2006). *Desde un punto de vista lógico*. Barcelona: Paidós.

Quine, W.V.O. (2001). *Palabra y Objeto*. Barcelona: Herder.

Racionero, Q.(1981). Pensamiento y realidad. El planteamiento del problema del espacio y el tiempo en Kant. *Anales del Seminario de Historia de la Filosofía,* Vol. 2, Universidad Complutense de Madrid.

Rivera de Rosales, J.(1993). *El punto de partida de la metafísica transcendental. Un estudio crítico de la obra kantiana.* Madrid: Ed. U.N.E.D.

Russell, B. (1983). *Los principios de la matemática*. Madrid: Espasa Calpe.

Russell, B. (1908). Mathematical Logic as based on the Theory of Types. *American Journal of Mathematics,* Vol. 30, No. 3, pp. 222-262, (Jul.).

Russell, B. (2009). *Historia de la Filosofía*. Madrid: RBA.

Schopenhauer, A.(2009). *De la cuádruple raíz del principio de razón suficiente*. Biblioteca de Grandes Pensadores. Madrid: Ed. Gredos.

Sexto Empírico (1996). *Hipotiposis pirrónicas*. Rafael Sartorio Maulini (ed.). Madrid: Akal.

Shapiro, S. (2005). Logical Consequence, Proof Theory, and Model Theory. *The Oxford Handbook fo Philosophy of Mathematics and Logic*. S. Shapiro (ed.). Oxford University Press.

Shlapentokh, A. (2011). Defining Integers. *The Bulletin of Symbolic Logic*, Vol. 17, No. 2, pp. 230-251 (June).

Sidorov, L. A. (2014). Non-Archimedean Geometry. *Encyclopedia of Mathematics.* URL: <http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Non-Archimedean_geometry& oldid=16505>

Sklar, L. (1992). *Philosophy of Physics*. Dimensions of Philosophy Series. New York: Oxford University Press.

Spivak, M. (2003). *Calculus.* Madrid: Ed. Reverte.

Strawson, P.(1997). *Análisis y metafísica: Una introducción a la filosofía.* Barcelona: Ed. Paidós Ibérica.

Tarski, A. (1944). The semantic conception of truth: and the Foundations of Semantics. *Philosophy and Phenomenological Research*. Vol. 4, No. 3, pp. 341-376 (March).

Tarski, A. (1958). What is Elementary Geometry? *International Symposium on the Axiomatic Method*. University of California, Berkeley. Leon Henkin, Patrick Suppes & Alfred Tarski (eds.)

Weyl, H. (1994). *The Continuum. A critical examination on the foundation of Analysis* (1918). Stephen Pollard y Thomas Bole (trad.). New York: Dover Publications Inc.

Wigner, E.(1960). The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the natural sciences. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 13, No. I (Feb.).

Zalta, E.N.(2008). Frege's Logic, Theorem, and Foundations for Arithmetic. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Stanford (Fall).

Recursos en la Web, aparte los indicados para algunos autores

Diccionario de la Lengua Española de la R.A.E., (DRAE) 22ª Edición, en http://www.rae.es/recursos/diccionarios/drae

Wikipedia, La Enciplopedia Libre, en http://es.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Portada