

Memoria de Ejecución del Proyecto

**AYUDAS DE LA UNIVERSIDAD DE SALAMANCA A
PROYECTOS DE INNOVACIÓN Y MEJORA DOCENTE
CURSO 2015/2016**

Título del proyecto:

**Elaboración de recursos digitales en la asignatura
Electromagnetismo I**

Código del proyecto: ID2015/0058

Coordinador del proyecto:

Ana García Flores

Facultad de Ciencias
UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

ÍNDICE

I.- Relación de los miembros de la Universidad de Salamanca participantes en el proyecto	3
II.- Introducción	3
III.- Metodología y Cumplimiento de objetivos	4
IV.- Memoria económica	5
V.-Anexo I.- Facturas y especificaciones	5
VI.-Anexo II.- Ejemplo de uno de los temas entregados al alumno	6
VII.-Anexo III.- Comentarios de los alumnos	29

I. Relación de los miembros de la Universidad de Salamanca participantes en el proyecto

Ana García Flores

Victor Javier Raposo Funcia

José Ignacio Íñiguez de la Torre Bayo

Marcelino Zazo Rodríguez

II. Introducción y objetivo

El presente documento presenta la Memoria de Ejecución del Proyecto titulado “Elaboración de recursos digitales en la asignatura Electromagnetismo I” concedido por la Universidad de Salamanca en el contexto del “Programa de mejora de la calidad” en la convocatoria de Ayudas a Proyectos de Innovación y Mejora Docente del curso 2015/2016.

El programa de la asignatura Electromagnetismo I, impartida durante el primer cuatrimestre de 2º de Físicas, ha tratado hasta el momento de incorporar sugerencias al alumno que le permitan desarrollar de una forma eficaz su proceso de aprendizaje. En esta línea se han preparado ejercicios prácticos, problemas, experiencias elementales, lecturas recomendadas, consulta de páginas “web” de contenido didáctico... La experiencia ha mostrado que el estudiante con estas ayudas ha desarrollado destrezas en la resolución de problemas descuidando el aprendizaje de las correspondientes teorías de los fenómenos electromagnéticos.

Son varios los libros que se le proponen al alumno como bibliografía básica, cruciales para la buena marcha de la asignatura. Pero la práctica es bien distinta. El alumno se limita a tomar apuntes durante las clases, que en la gran mayoría de los casos contienen grandes erratas y son incompletos. La labor posterior que debe realizar todo buen estudiante pasa por completar sus notas tomadas en clase con la bibliografía ofertada. Y esta situación sabemos que la llevan a cabo un número muy restringido de estudiantes.

Por tanto, el objetivo de este proyecto de innovación es reforzar este punto débil en el proceso educativo del estudiante mediante la elaboración de guías y material didáctico (apuntes, presentaciones,...) a disposición de los estudiantes, bien directamente

o bien con acceso a páginas “web” dedicadas a este fin. De esta manera no debemos preocuparnos de la toma de unos malos apuntes puesto que los tendrán a su disposición. Las clases podrán ser más dinámicas centrándonos más en las explicaciones y haciendo más hincapié en aquellos aspectos que lo requieran. Lo cual nos llevará a un proceso de retroalimentación mejorando el material facilitado al estudiante con las aportaciones que ellos mismos hagan durante el desarrollo de las clases.

III. Metodología y cumplimiento de objetivos

El objetivo de este proyecto de innovación docente es la preparación de apuntes que sigan en detalle todas las explicaciones que el profesor ha realizado durante las horas de teoría en la asignatura de Electromagnetismo I. Pese a que al alumno se le proporciona una bibliografía, durante el transcurso de las clases el profesor explica los conceptos siguiendo uno u otro libro de la bibliografía propuesta según los apartados que se traten en cada momento.

Estos apuntes recopilan por tanto lo explicado durante las clases y hacen hincapié en los siguientes aspectos: Objetivos de las explicaciones dadas, desarrollos matemáticos completos, aspectos físicos subyacentes bajo los desarrollos, conclusiones obtenidas, ... Todo ello especificando en detalle las páginas de los libros a los que pueden recurrir para cada uno de los apartados y sugiriendo otras fuentes en donde puedan profundizar con más detalle lo explicado.

El proceso se retroalimenta con las dudas surgidas durante las clases impartidas. Los comentarios hechos por los alumnos y las dificultades que han presentado, han servido para hacer más énfasis en los puntos que en una primera aproximación no han quedado suficientemente claros.

Los apuntes están accesibles al alumno a través de la plataforma virtual <https://moodle2.usal.es/course/view.php?id=3659>. Se han puesto a su disposición una vez que se ha impartido cada uno de los temas y que se han puesto en común las dudas surgidas. Cada uno de los temas ha sido revisado por todos los profesores integrantes en el proyecto con el fin de minimizar las posibles erratas cometidas, completar los aspectos que no hayan quedado claros o eliminar los excesos de información.

Los temas elaborados han sido

1. LEYES BÁSICAS. Introducción. Ley de Coulomb. Campo eléctrico. Ley de Gauss. Potencial eléctrico. Condiciones de contorno.
2. DESARROLLO MULTIPOLAR. Dipolo eléctrico. Expresiones multipolares.
3. CONDUCTORES EN EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO Conductor perfecto en equilibrio electrostático. Sistemas de conductores: coeficientes de potencial, y coeficientes de capacidad e influencia.
4. DIELECTRICOS. Tratamiento dipolar. Polarización. Vector desplazamiento eléctrico. Clasificación de dieléctricos. Condiciones de contorno. Campo en el interior de un dieléctrico.
5. ENERGÍA Y FUERZAS Distribución de cargas puntuales en el vacío. Distribuciones continuas de carga en el vacío. Energía en función del campo eléctrico. Sistema de conductores. Fuerzas electrostáticas sobre conductores. Energía en presencia de dieléctricos.
6. TEORÍA DEL POTENCIAL. Ecuaciones de Poisson y de Laplace. Condiciones de contorno. Unicidad de la solución: Condiciones de Dirichlet y de Neumann. Método de las imágenes. Separación de variables.

A modo de ejemplo se presenta uno de los temas entregados en el Anexo II.

También se presentan en el Anexo III los comentarios hechos por los alumnos en las encuestas de seguimiento del grado acerca de los apuntes facilitados.

IV.- Memoria económica

Financiación concedida: 0€

V.- Anexo I: Facturas y especificaciones.

No ha lugar por lo expuesto en el apartado anterior.

VI.-Anexo II.- Ejemplo de uno de los temas entregados al alumno

TEMA VI

TEORÍA DEL POTENCIAL

VI.1. Ecuaciones de Poisson y de Laplace

VI.2. Condiciones de contorno

VI.3. Unicidad de la solución: Condiciones de Dirichlet y
Neumann

VI.4. Método de las imágenes

VI.5. Separación de variables

VI.1. ECUACIONES DE POISSON Y DE LAPLACE

Hasta ahora, conocida una determinada distribución de carga, hemos obtenido el potencial o el campo por integración, y a partir de uno u otro se utiliza $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$. En este tema, vamos a abordar distintos métodos para conocer el potencial, ya que no siempre los problemas se enuncian de tal forma que resulte sencillo calcularlo por integración directa. Por ejemplo, podría darse la distribución de carga únicamente dentro de una región finita del espacio (siendo desconocida fuera de esta región) y los valores del potencial en las superficies limitantes de esta región. En estos casos debemos recurrir a las ecuaciones de Poisson y de Laplace. Ya las introdujimos en el Tema I para una distribución de cargas en el vacío. Veámoslas con más detalle y con un planteamiento general.

Dado que estamos en electrostática, supongamos que tenemos un campo eléctrico conservativo, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, y su correspondiente vector desplazamiento eléctrico, \vec{D} . Si consideramos un medio de comportamiento lineal, tendremos las ecuaciones:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_F \qquad \vec{D} = \epsilon \vec{E} \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

pudiendo ser $\epsilon = f(\vec{r})$ (no tiene por qué ser homogéneo).

Combinando estas ecuaciones obtenemos la “Ecuación de Poisson”:

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{\nabla}\varphi) = -\rho_F$$

De esta forma podemos relacionar las cargas con el potencial en función de las características del medio material, dando lugar así a la teoría del potencial.

Llegados a este punto podemos encontrarnos con dos tipos de problemas:

- Conocidos ϵ y φ , calcular las densidades de carga. Este es un problema sencillo que sólo implica derivación.
- Problema inverso, en el que nos piden calcular el potencial. Es un problema mucho más complejo debido al carácter integral, a las particularidades de medios no homogéneos, a no conocer la densidad de carga libre en todo el espacio sino tal vez sólo en una determinada región más unas ciertas condiciones de contorno, ...

Particularicemos para el caso de trabajar un medio homogéneo e isótropo como por ejemplo el vacío. En este caso la ecuación de Poisson se reduce a:

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Si además son conocidas todas las fuentes, la solución del potencial será la superposición del potencial creado por cada una de ellas:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

Efectivamente:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty} \rho(\vec{r}') \nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty} \rho(\vec{r}') (-4\pi\delta(|\vec{r} - \vec{r}'|)) dV \\ &= -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

A menudo estamos interesados en conocer el potencial no en todo el espacio sino en una determinada zona libre de fuentes. Obviamente las fuentes estarán en otras zonas del espacio ya que si no fuese así el potencial sería nulo. Si consideramos el medio L.I.H. llegamos a la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

Debido a la relativa simplicidad de esta ecuación, el énfasis está en resolverla. Esta ecuación aparece también en otros campos de la física, como la teoría gravitatoria, el magnetismo, la termodinámica, ... Analizaremos posteriormente distintos métodos para resolverla. Ahora la resolveremos en una dimensión, en donde $\varphi(\vec{r}) = \varphi(x)$ siendo x una variable cualquiera. En este caso:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0 \Rightarrow \varphi(x) = Ax + B$$

donde A y B son dos constantes que se obtienen en cada problema según sean sus condiciones de contorno, es decir, según sea el valor del potencial o de su derivada en la frontera de la región en la que deseamos conocer el potencial.

En una dimensión es muy sencillo observar las siguientes propiedades:

- $\varphi(x) = \frac{1}{2} [\varphi(x+a) + \varphi(x-a)]$
es decir, la ecuación de Laplace es un cálculo del promedio del potencial; asigna a un determinado punto el promedio de los valores del potencial de su alrededor.
- La ecuación de Laplace no tolera la existencia de mínimos o máximos globales en el volumen considerado. De existir estos, se deben colocar en la frontera. Este resultado es una consecuencia del punto anterior, ya que si un punto fuese máximo implicaría que sería mayor que el valor en ambos lados y no se podría obtener su valor como promedios.

Estas propiedades son también válidos en 2D y 3D.

VI.2. CONDICIONES DE CONTORNO

Si no conocemos todas las fuentes, veremos cómo es posible determinar el valor del potencial en una determinada zona del espacio si nos dan información adicional, como por ejemplo, en la superficie que limita la región en la que las fuentes sí son conocidas. Para poderlo demostrar vamos a hacer uso del Teorema de Green:

Sean φ y ψ dos funciones escalares que nos permiten calcular el campo vectorial $\vec{A} = \varphi \vec{\nabla} \psi$. Si aplicamos el teorema de la divergencia a este campo vectorial:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

y dado que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{\nabla} \psi) = \varphi \nabla^2 \psi + \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} \psi$ obtenemos la **1ª Identidad de Green**:

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi + \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} \psi) dV = \oint_S \varphi \vec{\nabla} \psi \cdot d\vec{S}$$

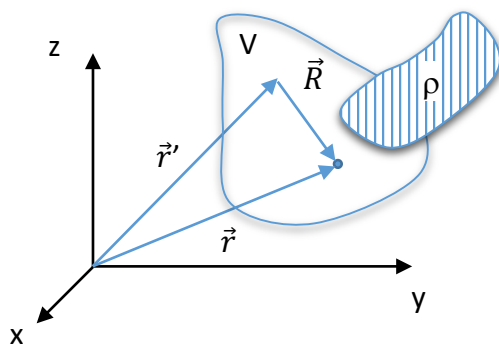
Intercambiando las funciones φ y ψ :

$$\int_V (\psi \nabla^2 \varphi + \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \varphi) dV = \oint_S \psi \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{S}$$

y restando obtenemos la **2ª Identidad de Green**:

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dV = \oint_S (\varphi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \varphi) \cdot d\vec{S}$$

Si usamos esta segunda identidad para determinar el potencial en una zona V en la que conozcamos todas las fuentes, tendremos:



- ρ : Densidad de carga de la cual conocemos su valor únicamente dentro del volumen V .

- \vec{r}' : Punto fuente dentro de V . Las integrales barren todo el espacio dentro de V y en todo ese espacio $\rho(\vec{r}')$ es conocido (puede ser cero o no).

- \vec{r} : Punto donde quiero conocer el potencial. Es un punto fijo dentro de V .

- Las funciones de las identidades de Green serán:

$$\varphi \equiv \varphi; \psi \equiv \frac{1}{R}$$

con $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$

La segunda identidad de Green queda:

$$\int_V \left(\varphi \nabla'^2 \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \nabla'^2 \varphi \right) dV = \oint_S \left(\varphi \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \vec{\nabla}' \varphi \right) \cdot d\vec{S}$$

donde, como vamos a integrar en todo punto de V , $\varphi = \varphi(\vec{r}')$ dentro de la integral, luego el operador nabla deriva las coordenadas primas, $\vec{\nabla}'$. siendo:

$$* \nabla'^2 \left(\frac{1}{R} \right) = -4\pi\delta(R)$$

* Aplicando la ecuación de Poisson general (sólo restrictiva a medios lineales):

$$\vec{\nabla}' \cdot (\varepsilon \vec{\nabla}' \varphi(\vec{r}')) = -\rho(\vec{r}') \Rightarrow \vec{\nabla}' \varepsilon \cdot \vec{\nabla}' \varphi + \varepsilon \nabla'^2 \varphi = -\rho$$

Luego:

$$\nabla'^2 \varphi = \frac{-\rho - \vec{\nabla}' \varepsilon \cdot \vec{\nabla}' \varphi}{\varepsilon}$$

$$* \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\vec{R}}{R^3} \quad . \quad \text{No aparece el signo}$$

– porque operamos sobre las coordenadas primas.

Sustituyendo en la segunda identidad de Green resulta:

$$\int_V \left[\varphi(-4\pi\delta(R)) + \frac{\rho + \vec{\nabla}' \varepsilon \cdot \vec{\nabla}' \varphi}{R\varepsilon} \right] dV = \oint_S \left(\varphi \frac{\vec{R}}{R^3} - \frac{\vec{\nabla}' \varphi}{R} \right) \cdot d\vec{S}$$

El primer sumando, como \vec{r}' recorre todo el volumen V , pasa por $\vec{r}' = \vec{r} \Rightarrow$

$$\int_V \varphi(\vec{r}')(-4\pi\delta(R)) dV = -4\pi\varphi(\vec{r})$$

De esta forma podemos obtener el valor del potencial en un punto del interior del recinto acotado:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho}{R\varepsilon} dV + \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\nabla}' \varepsilon \cdot \vec{\nabla}' \varphi}{R\varepsilon} dV + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS - \frac{1}{4\pi} \oint_S \varphi \frac{\vec{R} \cdot d\vec{S}}{R^3}$$

Si el medio es homogéneo, $\vec{\nabla}' \varepsilon = 0$ y ε es una constante que puede salir fuera de la integral, resultando en este caso:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho}{R} dV + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\vec{R} \cdot \vec{n}}{R^3} \right] dS$$

Esta expresión nos permite conocer el potencial en un punto del interior de una región acotada en función de:

– Las cargas encerradas en V .

- El valor del potencial y de su derivada normal en el contorno. Estas contribuciones pueden interpretarse como ciertas distribuciones de carga en S que representan el comportamiento de las cargas desconocidas que residen fuera del recinto. Estos valores reciben en nombre de “Condiciones de Cauchy”

Si $S \rightarrow \infty$ y φ cae al menos como $\frac{1}{r}$ la integral de superficie se hace nula y recuperamos:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\infty} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV$$

La expresión obtenida para el potencial requiere de excesivos datos. No todas las condiciones de Cauchy son necesarias para poder resolver el problema. Veámoslo con un ejemplo.

En la ecuación de Laplace en 1D obtuvimos que $\varphi(x) = Ax + B$. Si conocemos el valor del potencial en los extremos (por ejemplo, en $x=0$, $\varphi(x) = 0$, y en $x = 1$, $\varphi(x) = 1$), son condiciones suficientes para determinar el potencial:

$$\varphi(x = 0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\varphi(x = 1) = 1 \Rightarrow A = 1$$

por lo que la solución al problema sería:

$$\varphi(x) = x$$

No nos ha hecho falta dar información sobre $\partial\varphi/\partial n$ en los extremos. Es más, si las diésemos, es posible que el problema no estuviera bien planteado y no tuviese solución.

Luego nuestra siguiente pregunta ha de ser: ¿Cuántas de estas condiciones nos deben proporcionar en un problema para garantizar que la solución es única?

VI.3. UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN: CONDICIONES DE DIRICHLET Y NEUMANN

Supongamos que tenemos dos soluciones, φ_1 y φ_2 , distintas que verifican la ecuación de Poisson. Veamos qué condiciones debemos imponer para que ambas coincidan.

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{\nabla} \varphi_1) = -\rho_F$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{\nabla} \varphi_2) = -\rho_F$$

Definamos $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{\nabla} \varphi) = 0$, es decir, la función φ verifica la ecuación de Laplace.

Utilizando la primera identidad de Green:

$$\int_V (\psi \nabla^2 \varphi + \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \varphi) dV = \oint_S \psi \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{S}$$

y tomando $\varphi \equiv \varphi$ y $\psi = \epsilon \varphi$, obtenemos:

$$\int_V (\epsilon \varphi \nabla^2 \varphi + \vec{\nabla}(\epsilon \varphi) \cdot \vec{\nabla} \varphi) dV = \oint_S \epsilon \varphi \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{S}$$

Si tenemos en cuenta que:

$$\vec{\nabla}(\epsilon \varphi) = \varphi \vec{\nabla} \epsilon + \epsilon \vec{\nabla} \varphi$$

y que φ es solución de la ecuación de Laplace:

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{\nabla} \varphi) = 0 = \vec{\nabla} \epsilon \cdot \vec{\nabla} \varphi + \epsilon \nabla^2 \varphi$$

nos queda:

$$\int_V [\varphi(\epsilon \nabla^2 \varphi + \vec{\nabla} \epsilon \cdot \vec{\nabla} \varphi) + \epsilon (\vec{\nabla} \varphi)^2] dV = \oint_S \epsilon \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$$

y dado que la suma del primer paréntesis es nula (por verificar la ecuación de Laplace):

$$\int_V \epsilon (\vec{\nabla} \varphi)^2 dV = \oint_S \epsilon \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$$

Para que la solución sea única se necesita que $\varphi = 0$, y para ello hay distintas posibilidades:

- φ_1 y φ_2 tienen el mismo valor en S. En este caso $\varphi|_S = 0$ y por tanto:

$$\oint_S \epsilon \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = 0$$

Como $\int_V \epsilon (\vec{\nabla} \varphi)^2 dV$ es positivo, la única solución para que sea nulo es que $\vec{\nabla} \varphi = 0$. Lo cual nos lleva a que $\varphi_1 = \varphi_2 + \text{cte}$. Pero dado que en S $\varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow \text{cte} = 0 \Rightarrow$ el potencial es único.

Luego sólo dando el valor del potencial en la superficie S garantizamos que la solución es única. Esta condición de contorno se conoce como “Condición de Dirichlet”.

- Si la condición la imponemos sobre las derivadas parciales:

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right|_S = \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right|_S$$

igualmente obtenemos:

$$\oint_S \varepsilon \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = 0$$

y nuevamente $\vec{\nabla} \varphi = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 + \text{cte}$. Pero ahora no podemos imponer que la cte sea nula. En cualquier caso, garantizamos la unicidad de la solución en V salvo el valor de una constante que carece de importancia.

Imponiendo el valor de $\partial \varphi / \partial n$ en S garantizamos la unicidad de la solución. A esta condición de contorno se le conoce por “Condición de Neumann”. Esta condición sobre la derivada normal del potencial, no es más que una condición sobre la componente normal del campo.

- Nos pueden dar una mezcla de condiciones de Neumann y de Dirichlet, pero hay que tener cuidado porque se puede dar el caso de que sean incompatibles entre ellas, llegando a problemas que no tengan solución por estar mal planteados.

Si nos dan un problema bien planteado sabemos que su solución es única y podemos resolverlo. Para resolverlo podremos recurrir a distintos métodos. Veremos un par de ellos.

VI.4. MÉTODO DE LAS IMÁGENES

Tal y como acabamos de ver, para conocer el potencial en un determinado recinto necesitamos conocer la distribución de cargas en el recinto y ciertas condiciones sobre el potencial o su derivada normal en la superficie que limita el recinto.

Por otro lado, la ley de Coulomb nos permite obtener el potencial de una carga puntual y la solución verifica, por supuesto, la ecuación de Poisson. Por tanto, la suma de los potenciales individuales de un conjunto de cargas puntuales es solución de la ecuación de Poisson.

Este hecho constituye la base del método de las imágenes. El objetivo es encontrar un conjunto de cargas ficticias, denominadas cargas imagen, fuera del recinto donde queremos conocer el potencial, que, junto con las cargas conocidas que están dentro del recinto, satisfagan las condiciones de contorno impuestas en el problema. En virtud de la unicidad de la solución, el potencial creado en el volumen V por el conjunto de cargas reales más las cargas imágenes, será solución única del potencial. De esta manera, las

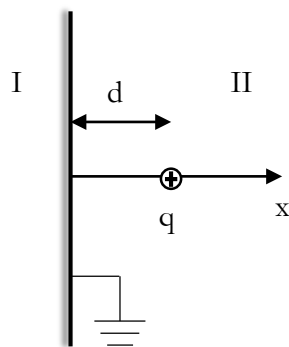
cargas imágenes (situadas fuera de V) simularán de alguna manera el comportamiento de otras cargas fuente o del material presente.

Este método quedará mejor ilustrado por medio de ejemplos específicos. Resaltar únicamente que:

- El inconveniente reside en saber cuáles son las cargas ficticias que debemos colocar fuera de V . La experiencia adquirida al resolver los problemas planteados hasta este momento nos ayudará.
- Las cargas ficticias, como su nombre indica, no existen de verdad. Tienen que estar fuera del recinto donde queremos calcular el potencial.
- El potencial así calculado sólo es válido en el recinto V , el recinto acotado del que conocemos sus cargas reales y libres y sus condiciones de frontera.

Veamos algunos ejemplos:

✓ *Carga puntual frente a un conductor plano, infinito y conectado a tierra*

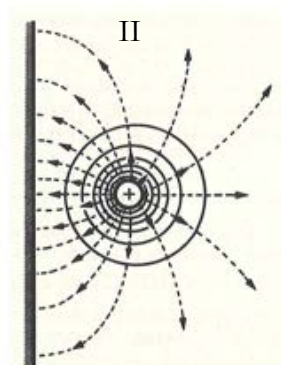


Para calcular el potencial existen dos zonas bien diferenciadas:

- I: Zona limitada por la semiesfera del infinito y una placa plana conductora infinita conectada a potencial nulo. En su interior no hay nada y en el contorno $\varphi = 0$. La única solución posible de la ecuación de Laplace es

$$\nabla^2\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \text{cte} = 0$$

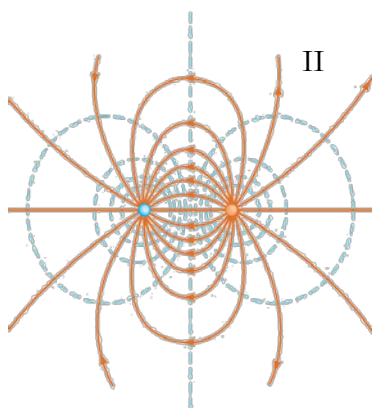
- II: En esta zona, el potencial no sólo es el creado por la carga q , sino también el creado por la carga inducida negativa sobre la superficie del conductor.



Pero dado que no conocemos el valor de esa carga inducida, nos preguntamos si puede existir alguna distribución de cargas que la sustituyan. Esas cargas deben estar situadas fuera de la zona II.

Si suponemos que $q > 0$, las líneas de fuerza salen de q y terminan perpendicularmente sobre el plano conductor.

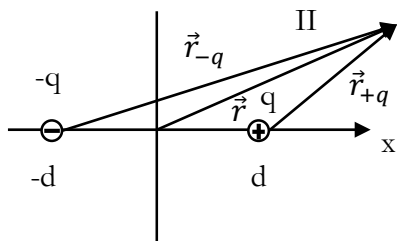
Recordamos problemas hechos anteriormente. Las líneas de fuerza tienen un aspecto muy parecido al de dos cargas puntuales, de igual módulo y signo contrario, situadas simétricamente respecto de la posición del plano conductor.



De esta forma, la solución para el potencial en la zona II ($x > 0$) es la superposición del potencial creado por dos cargas puntuales: La carga q situada a una distancia d del plano y la carga imagen $-q$ situada a una distancia $-d$:

$$\varphi(x, y, z)_{x>0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \right]$$

que, por ser suma de potenciales de cargas puntuales, verifica la ecuación de Laplace. Comprobemos también que verifica las condiciones de contorno:



$$\begin{aligned} \varphi(x=0, y, z)_{x>0} &= \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(-d)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{d^2 + y^2 + z^2}} \right] \end{aligned}$$

Por tanto, aplicando el teorema de unicidad de la solución, φ es solución y es único.

Conocido φ , podemos calcular el campo eléctrico como superposición del campo creado por las dos cargas puntuales:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{x-d}{((x-d)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{x+d}{((x+d)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \vec{u}_x + \right. \\ &+ \left(\frac{y}{((x-d)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{y}{((x+d)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \vec{u}_y + \\ &+ \left. \left(\frac{z}{((x-d)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{z}{((x+d)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \vec{u}_z \right] \end{aligned}$$

Y de las componentes del campo normales al plano, E_x , aplicando las condiciones de contorno, podremos obtener la densidad de carga del plano conductor:

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = E_{2x(x=0^+)} - E_{1x(x=0^-)} = E_{Ix(x=0)} - E_{Ix(x=0)} = E_{Ix(x=0)} - 0$$

$$\begin{aligned}\sigma &= \epsilon_0 E_{IIx(x=0)} = \frac{q}{4\pi} \left(\frac{-d}{((-d)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{d}{(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \\ &= -\frac{qd}{2\pi (d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

La carga total del plano será:

$$\begin{aligned}Q &= \int \sigma dS = -\frac{qd}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy dz}{(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{qd}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{2\pi r dr}{(d^2 + r^2)^{3/2}} = -\frac{qd}{2\pi} \frac{2\pi}{d} \\ &= -q\end{aligned}$$

donde hemos integrado anillos de radio r desde cero hasta infinito para sacar la carga total del plano.

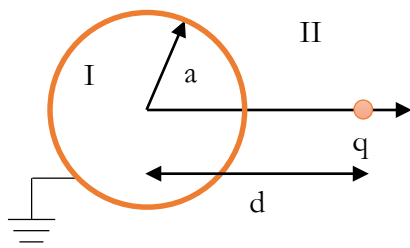
Obtenemos que la carga del plano coincide con el valor de la carga imagen. Lógico, puesto que todas las líneas de fuerza que pasan por el plano terminan en la carga imagen.

También podemos obtener la fuerza que experimenta la carga q debido a la carga del plano. Para calcularla, no debemos utilizar el campo anteriormente calculado, ya que es el campo total, creado por la carga del plano y por la carga q . Si lo usásemos estaríamos calculando también la autofuerza. Para obtener la fuerza podemos recurrir también a la carga imagen:

$$\vec{F}_q = q\vec{E}_Q(\vec{r}_q) = q\vec{E}_{-q}(\vec{r}_q) = q \frac{-q}{4\pi\epsilon_0(2d)^2} \vec{u}_x$$

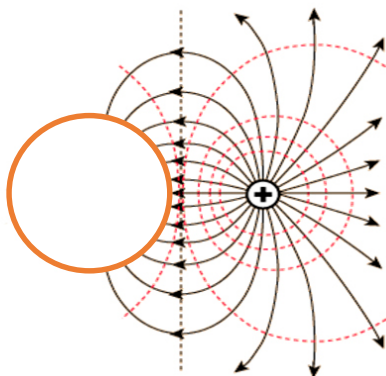
✓ Carga puntual frente a un esfera conductora conectada a tierra

Para calcular el potencial existen dos zonas bien diferenciadas:

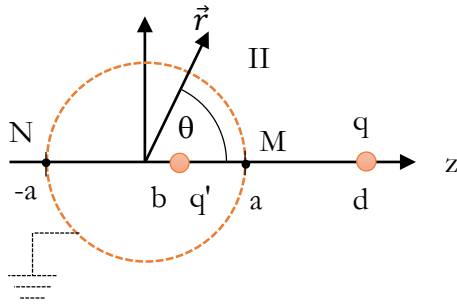


– I: Dentro de la esfera ($r \leq a$, tomando el origen de coordenadas en el centro). El único potencial posible es $\varphi = 0$.

– II: Fuera de la esfera ($r \geq a$). En esta zona, el potencial no sólo es el creado por la carga q , sino también el creado por la carga inducida sobre la superficie del conductor. Analizando las líneas de fuerza, la experiencia que tenemos sugiere simular el efecto de la esfera por una carga imagen puntual q' , situada a una distancia b del origen. Como las líneas de fuerza terminan en la esfera conductora, la carga q' ha de ser negativa.



Con el fin de determinar las dos incógnitas que tenemos, debemos aplicar condiciones de contorno. Escojamos los puntos más sencillos para determinarlas, M y N:



$$\varphi_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{d-a} + \frac{q'}{a-b} \right] = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{q}{d-a} = \frac{q'}{a-b} \Rightarrow q' = -q \frac{a-b}{d-a}$$

$$\varphi_N = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{d+a} + \frac{q'}{a+b} \right] = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{q}{d+a} = -q \frac{a-b}{d-a} \frac{1}{a+b}$$

Y operando despejamos los valores de q' y b :

$$q' = -q \frac{a}{d}; \quad b = \frac{a^2}{d}$$

Para un punto arbitrario, $\vec{r} \in II$, el potencial será:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{1/2}} + \frac{-q \frac{a}{d}}{\left(r^2 + \frac{a^4}{d^2} - 2r \frac{a^2}{d} \cos \theta \right)^{1/2}} \right]$$

Esta solución será única si verifica las condiciones de contorno (no sólo en los puntos M y N, sino en cualquier punto de la esfera conductora). Fácilmente se puede comprobar que, efectivamente,

$$\varphi(r=a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{1/2}} + \frac{-q \frac{a}{d}}{\left(a^2 + \frac{a^4}{d^2} - 2a \frac{a^2}{d} \cos \theta \right)^{1/2}} \right] = 0$$

Podríamos, igualmente, calcular el campo y a partir de las condiciones de las componentes normales del campo, las densidades de carga, y así llegar a:

$$\sigma = -\frac{q}{4\pi a} \left[\frac{d^2 - a^2}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}} \right]$$

que, integrándola en toda la superficie esférica, nos permite obtener la carga de la esfera conductora:

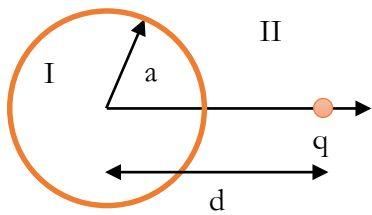
$$Q_{esfera} = -q \frac{a}{d}$$

La fuerza que la esfera ejercerá sobre la carga puntual será:

$$\vec{F}_q = q\vec{E}_Q(\vec{r}_q) = q\vec{E}_{q'}(\vec{r}_q) = \frac{-q^2 ad}{4\pi\epsilon_0(d^2 - a^2)^2} \vec{u}_z$$

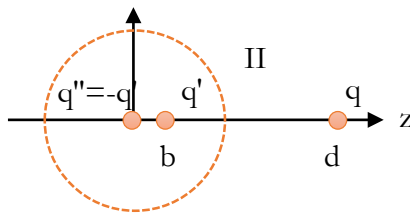
Podríamos también invertir el problema. Es decir, que la carga q se encontrase dentro de la esfera y para calcular el potencial en el interior, deberíamos colocar una carga imagen en el exterior de valor q' y a una distancia $b > a$.

✓ *Carga puntual frente a un esfera conductora aislada sin carga neta*



Ahora la esfera tendrá un potencial, que será el que le corresponda, no tiene porqué ser cero. Pero por ser conductora ha de ser constante en toda ella. Si el potencial fuese cero, como en el problema anterior, pondríamos una carga imagen q' a una distancia b :

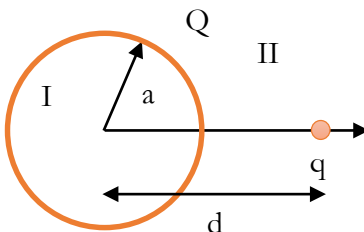
$$q' = -q \frac{a}{d}; \quad b = \frac{a^2}{d}$$



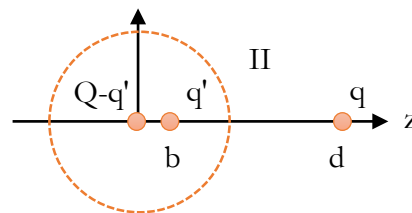
y la superficie conductora tendría una carga repartida por su superficie de valor total igual a q' . Pero ahora la carga neta de la esfera debe ser 0. Para ello nos basta situar otra carga imagen, q'' , de valor $-q'$ para que la esfera no tenga carga. Para que las condiciones de contorno se cumplan y la superficie esférica siga siendo una superficie equipotencial, esta nueva carga imagen $q'' = -q'$ debe estar situada en centro de la esfera.

✓ *Carga puntual frente a un esfera conductora aislada con carga Q*

Se repite el problema anterior, pero ahora la carga que debemos situar en el origen será Q

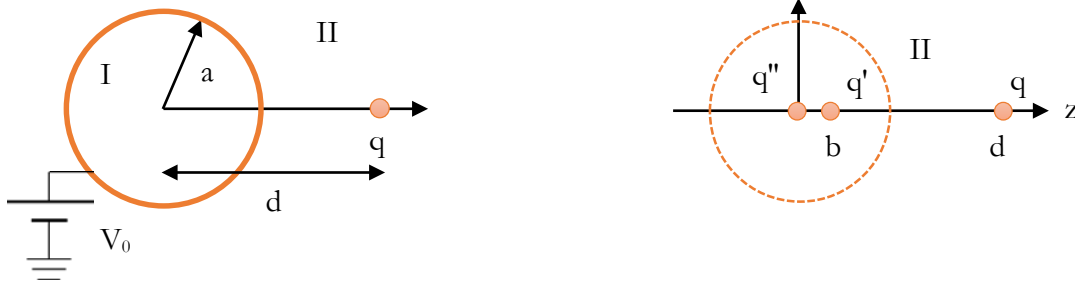


$$q'' = Q - q'$$

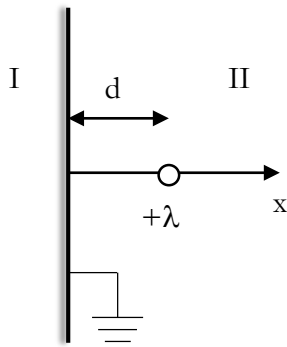


✓ *Carga puntual frente a un esfera conductora a potencial V_0*

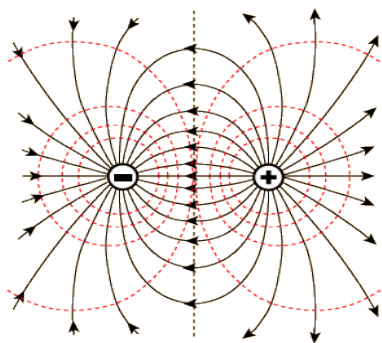
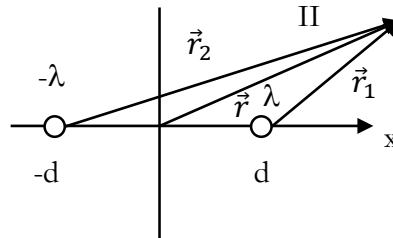
Colocando q' en b aseguro que el potencial de la esfera es 0. Situando otra carga q'' en el origen de valor $q'' = V_0 4\pi\epsilon_0 a$ subimos el potencial a V_0



✓ *Línea infinita frente a un conductor plano, infinito y conectado a tierra*



La técnica de las imágenes no sólo es válida para cargas puntuales. Imaginemos una línea infinita cargada uniformemente situada frente a un plano conductor infinito conectado a tierra. Debido a la similitud con el problema de una carga puntual, la carga imagen podemos adivinar que es otra línea de densidad $-\lambda$ situada en $-d$.

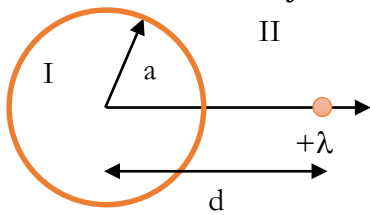


Las equipotenciales de este sistema son las que se observan en la figura. Es decir, un plano en el punto equidistante y el resto cilindros que no están centrados en las líneas.

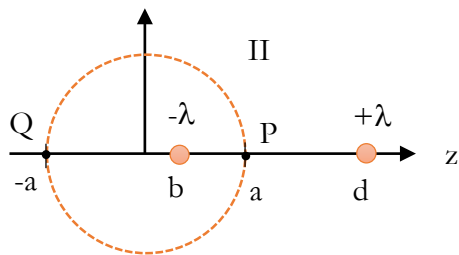
El potencial en la zona II es:

$$\varphi_{II} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

✓ Línea infinita frente a un cilindro conductor



En este caso y dado que las equipotenciales de dos líneas de igual densidad y signo contrario son cilindros, podemos simular el cilindro conductor por una línea infinita de densidad de carga $\lambda' = -\lambda$ situada a una distancia b del origen.



La esfera conductora puede estar conectada a cualquier potencial o puede estar aislada y tener la carga que sea. En cualquier caso, por ser conductora su potencial debe ser constante, y por ese motivo

$$\varphi_P = \varphi_Q \Rightarrow \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \text{Ln} \frac{a-b}{d-a} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \text{Ln} \frac{a+b}{d+a}$$

de donde deducimos fácilmente la distancia a la que debemos situar la línea imagen $-\lambda$:

$$b = \frac{a^2}{d}$$

VI.5. SEPARACIÓN DE VARIABLES

Utilizaremos este método en recintos libres de carga, lineales y homogéneos, en los que conocemos las condiciones de frontera para φ o para $\partial\varphi/\partial n$. En estos medios tendremos que resolver la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2\varphi = 0$$

Por definición, una ecuación diferencial en derivadas parciales es separable si admite una factorización de la forma:

$$\Phi(u_1, u_2, u_3) = U_1(u_1)U_2(u_2)U_3(u_3)$$

por lo que podemos escribir la ecuación diferencial original en término de tres ecuaciones diferenciales separadas para cada una de las variables, una para cada $U_i(u_i)$

En nuestro caso, la ecuación de Laplace es separable en once sistemas de coordenadas. Nosotros sólo veremos tres de ellos: coordenadas cartesianas, esféricas y cilíndricas.

SEPARACIÓN DE VARIABLES EN COORDENADAS CARTESIANAS

En coordenadas cartesianas:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\text{y } \varphi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

por lo que sustituyendo:

$$\nabla^2 \varphi = YZ \frac{d^2 X}{dx^2} + XZ \frac{d^2 Y}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

(Las derivadas parciales se convierten en totales ya que cada función sólo depende de una variable)

Dividiendo por el potencial:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

Cada sumando solo depende de una variable distinta. Para que la suma de los tres términos sea nula, cada sumando debe ser independiente de la variable, de modo que cada uno de ellos lo podemos igualar a una constante, que escogemos en cada caso de la siguiente forma:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = K_x^2; \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = K_y^2; \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = K_z^2$$

de modo que verifican: $K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = 0$

Para que esta ecuación se verifique, alguna constante ha de ser real y alguna imaginaria. Incluso alguna puede ser nula. Así, para la constante K_x , si:

$$K_x \text{ real: } K_x^2 > 0 \Rightarrow X(x) = A_x e^{K_x x} + B_x e^{-K_x x};$$

$$K_x \text{ imaginario: } K_x^2 < 0 \Rightarrow X(x) = A_x \sin K_x x + B_x \cos K_x x;$$

$$K_x^2 = 0 \Rightarrow X(x) = A_x x + B_x$$

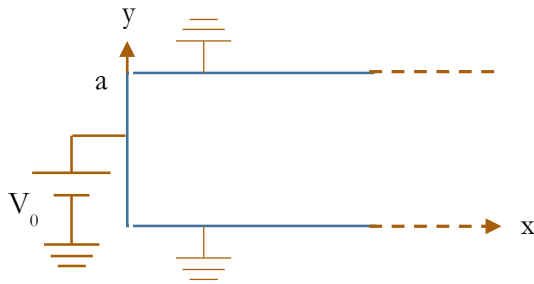
Igual para el resto de las constantes. El valor de K_x , K_y y K_z se determina a partir de las condiciones de contorno dadas, asegurándonos la unicidad de la solución.

Hay muchas opciones que verifican la solución y una combinación lineal de ellas también es solución. El potencial será por tanto:

$$\varphi(x, y, z) = \sum_i X_i(x)Y_i(y)Z_i(z)$$

Fijemos las ideas con un ejemplo:

Dos placas conductoras, conectadas a tierra y paralelas al plano XZ, están situadas en $y = 0$ y en $y = a$. En $x = 0$ cerramos las placas con otro plano conductor a potencial V_0 , según se ve en la figura.



Las condiciones de contorno de este problema son:

$$\varphi(x, y = 0) = 0; \quad \varphi(x, y = a) = 0$$

$$\varphi(x = 0, y) = V_0; \quad \varphi(x \rightarrow \infty, y) = 0$$

Por la simetría de traslación, el potencial no puede depender de z :

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x, y) = X(x)Y(y)$$

de modo que:

$$\frac{d^2X}{dx^2} = K_x^2 X; \quad \frac{d^2Y}{dy^2} = K_y^2 Y \quad \text{con} \quad K_x^2 + K_y^2 = 0$$

Una constante será real y la otra imaginaria. La real nos da como soluciones exponenciales y la imaginaria senos y cosenos. Para escoger correctamente debemos analizar el problema. Al variar y , partimos de $\varphi(x, y = 0) = 0$, por lo que irá aumentando hasta un cierto valor, para volver a disminuir y hacerse $\varphi(x, y = a) = 0$. Por el contrario, al variar x , partimos de $\varphi(x = 0, y) = V_0$ y a medida que x aumenta el potencial irá disminuyendo hasta desaparecer en el ∞ . Parece lógico, que la variación con y sea periódica y decreciente con x :

$$K_x^2 = K^2; \quad K_y^2 = -K^2$$

Las soluciones para cada variable serán:

$$X(x) = A_x e^{Kx} + B_x e^{-Kx}$$

$$Y(y) = A_y \sin Ky + B_y \cos Ky$$

y una solución al problema:

$$\varphi(x, y) = [A_x e^{Kx} + B_x e^{-Kx}][A_y \sin Ky + B_y \cos Ky]$$

Impongamos condiciones de contorno:

- $\varphi(x \rightarrow \infty, y) = 0 \Rightarrow A_x = 0$
- $\varphi(x, y = 0) = 0 \Rightarrow B_y = 0$
- $\varphi(x, y = a) = 0 \Rightarrow \sin Ka = 0 \Rightarrow Ka = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots)$

Llevando estas consideraciones a la solución:

$$\varphi(x, y) = C_n \exp\left(-\frac{n\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right)$$

con $C_n = B_x A_y$

La solución es válida para cualquier valor de n , luego la solución general será una combinación lineal de ellas:

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left(-\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

Para calcular C_n utilizaremos una condición de contorno que todavía nos falta:

- $\varphi(x = 0, y) = V_0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) = V_0$

y para poder despejar los coeficientes C_n multiplicaremos los dos términos por $\sin\left(\frac{n'\pi}{a}y\right)$ e integraremos entre 0 y a :

$$\int_0^a V_0 \sin\left(\frac{n'\pi}{a}y\right) dy = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{n'\pi}{a}y\right) dy$$

La integral:

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{n'\pi}{a}y\right) dy = \begin{cases} 0 & \text{si } n' \neq n \\ \frac{a}{2} & \text{si } n' = n \end{cases}$$

El sumatorio sólo es $\neq 0$ para $n' = n$. Así podemos despejar C_n :

$$C_n = \frac{2}{a} \int_0^a V_0 \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) dy = \frac{2V_0}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = \text{par} \\ \frac{4V_0}{n\pi} & \text{si } n = \text{impar} \end{cases}$$

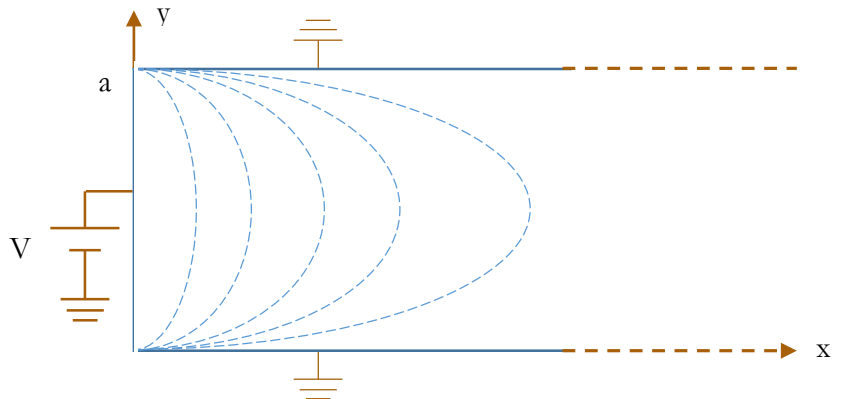
Luego basta hacer la suma a los $n = 2i + 1$ términos $\forall i \in [0, \infty)$

Finalmente obtenemos la solución a nuestro problema:

$$\varphi(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2i+1} \exp\left(-\frac{(2i+1)\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{(2i+1)\pi}{a}y\right)$$

La solución será tanto más exacta cuantos más términos sumemos.

Gráficamente, las superficies equipotenciales se pueden observar en la siguiente figura:



SEPARACIÓN DE VARIABLES EN COORDENADAS ESFÉRICAS

En coordenadas esféricas:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$\text{y } \varphi(r, \theta, \varphi) = R(r)\theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

por lo que sustituyendo:

$$\nabla^2 \varphi = \theta \Phi \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + R \Phi \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right) + R \theta \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

Multiplicando por $r^2 \sin^2 \theta$ y dividiendo por φ :

$$\frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = 0$$

La solución se puede encontrar de igual forma que hicimos antes con las coordenadas cartesianas. Sin embargo, dado que el primer sumando tiene dependencia con las variables r y θ los resultados son mucho más complicados.

Nos vamos a restringir a problemas con simetría de revolución alrededor de un eje que tomaremos como eje z . En este caso desaparece la dependencia con el ángulo φ :

$$\varphi(r, \theta, \varphi) = \varphi(r, \theta) = R(r)\theta(\theta)$$

y la ecuación a resolver es:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\theta}{d\theta} \right) = 0$$

Como cada sumando es función de una variable independiente diferente, cada una de ellas debe ser igual a la misma constante K . Tomemos $+K$ para la parte radial y $-K$ para la angular, que debe ser periódica.

Para R nos queda la ecuación:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - KR = 0$$

Si tomamos como solución $R = Ar^l$ y sustituimos obtenemos $[l(l+1) - K]R = 0$ y dado que $R \neq 0 \Rightarrow K = l(l+1)$.

Para θ tenemos:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\theta}{d\theta} \right) + l(l+1)\theta = 0$$

Las únicas soluciones posibles son para l entero y positivo, incluyendo el 0: $l = 0, 1, 2, \dots$. La solución de esta ecuación son los polinomios de Legendre:

$$\theta(\theta) = P_l(\cos \theta) \quad \text{con} \quad P_0(\cos \theta) = 1, P_1(\cos \theta) = \cos \theta, P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1), \dots$$

Volviendo a la parte radial:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - l(l+1)R = 0$$

y tomando como solución $R = A_n r^n$, sustituyendo obtenemos la ecuación $[l(l+1) - n(n+1)] = 0$. Esta ecuación tiene dos soluciones: $l = n$ y $l = -(n+1)$. Por lo que la solución de la parte radial será: $R(r) = A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}$

La solución general para el potencial será:

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta)$$

Podemos interpretar algún término:

$$n = 0 \Rightarrow \varphi(r, \theta) = A_0 + B_0 r^{-1}$$

siendo: $A_0 \equiv$ Origen de potencial.

$B_0 r^{-1} \equiv$ Potencial creado por una carga puntual situada en el origen de coordenadas.

$$n = 1 \Rightarrow \varphi(r, \theta) = A_1 r \cos \theta + B_1 r^{-2} \cos \theta$$

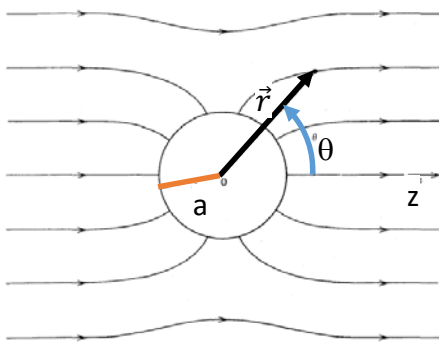
siendo: $A_1 r \cos \theta \equiv$ Potencial creado por un campo uniforme paralelo al eje z.

$$B_1 r^{-2} \cos \theta \equiv \text{Potencial creado por dipolo con } \vec{p} \parallel \vec{u}_z$$

y así sucesivamente iríamos obteniendo todas las contribuciones del desarrollo multipolar.

Veamos un ejemplo:

Calcular el potencial dentro y fuera de una esfera conductora descargada de radio a que se introduce en el seno de un campo eléctrico inicialmente uniforme y paralelo al eje z. Tomar origen de potencial en la esfera.



El problema tiene simetría de revolución alrededor del eje z. Las soluciones al potencial serán:

$$\text{Dentro: } \varphi(r, \theta) = 0$$

Fuera:

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta)$$

$$\varphi(r, \theta) = (A_0 + B_0 r^{-1}) + (A_1 r \cos \theta + B_1 r^{-2} \cos \theta) + \dots$$

Impongamos condiciones de contorno:

$$r \gg a \Rightarrow \vec{E} = E_0 \vec{u}_z \Rightarrow \varphi = -E_0 z + cte = -E_0 r \cos \theta + cte \Rightarrow A_1 = -E_0; A_{i>1} = 0$$

$$\text{Esfera descargada} \Rightarrow B_0 = 0$$

En $r = a \Rightarrow \varphi = cte \Rightarrow$ No puede haber dependencia con $\cos \theta$ o sus potencias
 \Rightarrow Los términos en $\cos \theta$ se deben ir anulando.

$$\varphi(r = a, \theta) = 0 = A_0 + (-E_0) a \cos \theta + B_1 a^{-2} \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta)$$

$$\Rightarrow B_n = 0 \quad n \geq 2$$

$$\Rightarrow B_1 = E_0 a^3$$

$$\Rightarrow A_0 = 0$$

De esta manera encontramos el potencial en todo punto del espacio:

$$\varphi(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta \quad \forall r \geq a$$

$$\varphi(r, \theta) = 0 \quad \forall r \leq a$$

SEPARACIÓN DE VARIABLES EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

En coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\text{y } \varphi(r, \varphi, z) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z)$$

por lo que sustituyendo y operando:

$$\frac{1}{rR} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

Para problemas con simetría traslacional, $\varphi(r, \varphi, z) = \varphi(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$

En este caso la ecuación a resolver es:

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = 0$$

cuya solución general es:

$$\varphi(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} [A_m r^m + B_m r^{-m}] [C_m \sin \varphi + D_m \cos \varphi]$$

Si además el problema tiene simetría de revolución, $\varphi(r, \varphi) = \varphi(r) = R(r)$

La ecuación a resolver es:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) = 0$$

cuya solución es: $\varphi(r) = ALnr + B$

En cada caso, las constantes se obtienen imponiendo las condiciones de contorno.

Bibliografía

VI.1. Ecuaciones de Poisson y de Laplace

Griffiths: Cap. 3: Pag. 110-115

Wangsness: Cap. 11: Pag. 217

Victoriano: Cap. 8: Pag. 296-297

VI.2. Condiciones de contorno

Griffiths: Cap. 3: Pag. 116-121

Wangsness: Cap. 11: Pag. 218-219

VI.3. Unicidad de la solución: Condiciones de Dirichlet y Neumann

Griffiths: Cap. 3: Pag. 116-121

Wangsness: Cap. 11: Pag. 218-219

Victoriano: Cap. 8: Pag. 300-304

VI.4. Método de las imágenes

Griffiths: Cap. 3: Pag. 121-127

Wangsness: Cap. 11: Pag. 219-237

Victoriano: Cap. 8: Pag. 305-318

VI.5. Separación de variables

Griffiths: Cap. 3: Pag. 127-144

Wangsness: Cap. 11: Pag. 237-247

Victoriano: Cap. 9: Pag. 325-342

VII.-Anexo III.- Comentarios de los alumnos

- ✓ ... La profesora muestra mucho interés porque nosotros aprendamos, y no sólo explica las clases en pizarra (y sin remitirse a simples diapositivas como es habitual) sino que además nos proporciona apuntes y ejercicios con las soluciones numéricas. ...
- ✓ Los apuntes proporcionados por la profesora son muy buenos, recomendables.
- ✓ Los apuntes facilitados por la profesora son muy buenos: muy completos y con dibujos que ayudan a comprender el contenido. ...
- ✓ La idea de subir los propios apuntes de la profesora ayuda en gran medida a tener una guía (más clara que los apuntes de clase que se tienen que tomar muchas veces deprisa y mal por necesidad de dar todo el temario), y me parece que debería seguir siendo así para otros años.