UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA

Departamento de Filosofía, Lógica y Estética

Máster de Estudios Avanzados en Filosofía

Trabajo de Fin de Máster

Postulados semánticos correspondientes para el axioma Modus Ponens, el axioma Modus Tollens y otras tesis semejantes en el contexto de la lógica relevante DW

Directores

Gemma Robles Vázquez

Francisco Salto Alemany

Autor

José Miguel Blanco Sánchez

Postulados semánticos correspondientes para el axioma Modus Ponens, el axioma Modus Tollens y otras tesis semejantes en el contexto de la lógica relevante DW

Directores

Gemma Robles Vázquez

Francisco Salto Alemany

Autor

José Miguel Blanco Sánchez

Resumen

En el artículo Cf.[**Robles, G. y Méndez, J. M.**, 2014a] se definen ciertos postulados semánticos como correspondientes a un número de tesis relacionadas con el Modus Ponens y el Modus Tollens, dada la lógica DW y la semántica para esta. El objetivo del presente trabajo es probar esta afirmación, es decir, procurar las pruebas para, tanto la validez de las tesis correspondientes, como del ajustamiento canónico de los postulados. Adicionalmente, en Cf.[**Robles, G.**, 2006] se desarrolla con pormenor y minuciosamente el sistema B+, y a fin de llevar a cabo el objetivo anterior se desarrollará de la misma manera, pormenorizada y minuciosa, los sistemas B y DW a partir del trabajo citado. Como complemento se ha incluido un breve contextualización y discusión de los conceptos esenciales sobre los que se apoya el trabajo y las lógicas desarrolladas como son las siguientes nociones: lógicas de la relevancia, la semántica relacional ternaria o las lógicas de la relevancia profunda. A modo de apéndice se ha incluido también una breve bibliografía comentada de las obras más importantes en relación con el trabajo.

Abstract

In the paper Cf.[**Robles, G. y Méndez, J. M.**, 2014a] it is claimed that certain semantical postulates are the corresponding ones to the axioms Modus Ponens, Modus Tollens and some theses related to them, given the logic DW and its semantics. The main aim of the present work is to prove this claim. In order to fulfill this aim we lean on Cf.[**Robles, G.**, 2006] where Routley and Meyer's basic positive logic B+ is thoroughly explained. We shall develop the logics B and DW with similar detail (B is a negation completion of B+, and DW an extension of B). A brief discussion of some essential concepts useful for the contextualization of the present work is included; for example, relevant logics, ternary relational semantics or deep relevant logics. Finally is also included a selected bibliography which is briefly commented.

Índice

1 Introducción

Dado el carácter técnico del trabajo se ha preferido buscar una forma expositiva lo más informativa posible. Por ello el trabajo se encuentra dividido en tres partes diferentes, a saber: Una parte de contextualización meramente teórica para exponer los conceptos fundamentales de las lógicas tratadas y otras dos partes que se corresponderían con el cuerpo del trabajo propiamente dicho, que se ocuparían, a su vez, la primera, de la formalización de las lógicas con las que más adelante se desarrollarán los postulados semánticos, elementos centrales del trabajo, en la tercera y última parte.

Parte I
Contextualización

2 Caracterización de las lógicas de la relevancia

Una de las cuestiones que siempre han resultado problemáticas en la lógica clásica, o más bien en su interpretación, es, precisamente, la de interpretar una noción tan básica como la del condicional. A pesar de tratarse de uno de los elementos más básicos de toda lógica, este, el condicional, sigue, a día de hoy, suponiendo un problema en lo que a su interpretación se refiere. Se pueden encontrar numerosos ejemplos de este problema como por ejemplo el que residiría en la obra de W. Quine.

Sin embargo, para el tema que nos ocupa, las lógicas de la relevancia, este tema vendría en un segundo término. El primer antecedente de las lógicas de la relevancia al que habríamos de remontarnos lo encontramos en 1932 en la obra de C. I. Lewis (Cf.[**Lewis, C. I. y Langford, C. H.**, 1959]). El trabajo de Lewis residía en la eliminación de las paradojas del condicional material, presentes desde siempre en la lógica clásica y un escollo a ser superado según Lewis. Este tipo de paradojas son condicionales tautológicos, es decir, siempre verdaderos, independientemente de cuales sean su antecedente y su consecuente. Paradojas del condicional material serían, entonces, condicionales con la siguiente forma:

$p \rightarrow .q \rightarrow p$

$\neg p \rightarrow .p \rightarrow q$

$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$

Este tipo de estructuras son las que impulsarían el esfuerzo de Lewis y producirían a su vez el desarrollo de la famosa cadena de sistemas S1-S5, las lógicas modales diseñadas por Lewis. En estos sistemas, Lewis pretendía eliminar este tipo de paradojas cambiando lo que se entiende por condicional, es decir, sustituyendo la noción de implicación por una distinta.

Pese a la buena voluntad y el inmenso trabajo de Lewis, sus sistemas de la implicación estricta produjeron a su vez un nuevo tipo de paradojas, las llamadas paradojas de la implicación estricta. Este tipo de paradojas, al igual que las anteriores, producen un argumento verdadero independientemente del valor de verdad que tengan antecedente y consecuente. Los ejemplos clásicos de paradojas de la implicación estricta serían:

$p \wedge \neg p \rightarrow \centerdot q$

$p \rightarrow \centerdot q \rightarrow q$

$p \rightarrow \centerdot q \vee \neg q$

Llegados a este punto, Lewis daría, al menos en parte, su trabajo por concluido, y es que, según él, la lógica siempre habría de contener algún tipo de paradoja de este determinado estilo, y es que, o bien no serían eliminables, o bien para eliminarlas sería necesario renunciar a algún principio básico de lo que entendemos por implicación. Sin embargo, a pesar de la resolución de Lewis de considerar la investigación sobre las paradojas del condicional como finalizada, esta no terminaría aquí, pero para entenderla en su totalidad hemos de volver de nuevo al planteamiento de Lewis y retomar un aspecto que habíamos dejado de lado.

Parte del trabajo original de Lewis no consistió sólo en analizar y descubrir las paradojas del condicional material, sino que, además de esto, su trabajo de desarrollo de la implicación estricta vino motivado al proponer interpretaciones de los condicionales clásicos. Es ampliamente conocido su ejemplo que dice como sigue: *"Si la luna es un queso de bola, entonces dos y dos son cuatro"*. Dentro de la lógica clásica este condicional, de forma $A \rightarrow B$, sería válido, ya que un condicional sólo será falso cuando el antecedente sea verdadero y el consecuente falso. Con ello, este condicional interpretado, siguiendo la definición habitual del condicional, sería verdadero, a pesar de su clara naturaleza paradójica y absurda. Este sería otro de los motivos que llevó a Lewis a desarrollar su implicación estricta, con las consecuencias que ya hemos visto antes. De este punto es precisamente de donde habríamos de partir para encontrar lo que a día de hoy se conocen como lógicas de la relevancia, y es que en el ejemplo de Lewis podemos encontrarnos con algo que daría pie a toda una nueva forma de pensar: antecedente y consecuente no son relevantes entre sí.

La idea de eliminar la desconexión entre antecedente y consecuente ya se encuentra en la implicación estricta de Lewis, pero su consecución total la conseguiría A. Anderson y N. Belnap al desarrollar su sistema relevante R y el sistema de la implicación E. Estos dos sistemas, los primeros sistemas relevantes de gran difusión[1], dieron pie al desarrollo de las lógicas de la relevancia que se verían impulsadas por el trabajo, entre otros, pero sobre todo, de R. Routley y R. Meyer.

Por ahora hemos visto cómo se llega a la creación de las lógicas de la relevancia, pero no qué son estas propiamente dichas, a pesar de que ya hemos dado algunas pinceladas de que características tienen. Una de las más importantes, sin dudad alguna, es que suponen la culminación del trabajo de Lewis, y es que, en toda lógica de la relevancia no aparecen las paradojas de la implicación[2]. Hasta ahora hemos desarrollado una idea intuitiva de lo que son las paradojas

[1]Para la primera axiomatización de un sistema relevante puede consultarse Cf.[**Dosen, K.**, 1992]

[2]Para un listado de los tipos de interpretaciones de las paradojas eliminadas se puede consultar Cf.[**Routley, R., Meyer, R. K., Plumwood,V. y Brady, R. T.**, 1982]

de la implicación, pero dado que en este momento las damos por eliminadas, parece correcto definir exactamente lo que estas son y qué se está eliminando exactamente en las lógicas de la relevancia. Así, decimos que, $A \to B$ es una paradoja de la implicación si A y B no tienen al menos una variable proposicional en común.

Sin embargo, el hecho de la ausencia de paradojas no es la única característica notable de las lógicas de la relevancia. Para observar sus características lo mejor que podemos hacer es exponer las características que Anderson y Belnap dieron a su sistema de la relevancia original, R. Este sistema posee una doble caracterización de la relevancia, una caracterización de tipo sintáctico, es decir, el uso de las premisas en las reglas de derivación de un cálculo de deducción natural, y una caracterización semántica basada en la definición de paradoja de la implicación que hemos apuntado antes. La caracterización sintáctica podríamos expresarla de la siguiente manera:

Caracterización Sintáctica: $A_1 \to (... \to (A_n \to B) ...)$ se considera como un teorema de la lógica de la relevancia si cada A_i $(1 \leq i \leq n)$ se usa en la prueba de B; i. e: en la prueba de B han de ser usadas todas las premisas de los condicionales anteriores.

Por otra parte la caracterización semántica podríamos expresarla como sigue:

Caracterización Semántica: Si $A \to B$ es un teorema de la lógica de la relevancia, entonces, A y B han de compartir, al menos, una variable proposicional; i. e: no se puede dar el caso de que en un teorema de la lógica de la relevancia antecedente y consecuente no tengan nada en común.

Esta caracterización que Anderson y Belnap llevaron a cabo de la lógica de la relevancia R supuso la base para la caracterización que más adelante se haría de todas las lógicas de la relevancia. Para el desarrollo de estas, la caracterización semántica se ha mantenido, pero se ha buscado una nueva forma de expresarla. Esta nueva forma es lo que se ha llamado como *Variable Sharing Property* o VSP de acuerdo a sus siglas. A falta de una traducción estandarizada al castellano podemos entender esto como la propiedad de compartir variables, aunque por esto mismo haremos referencia a ello por el nombre original. Esta propiedad vendría definida de manera muy similar a la caracterización semántica de R que diesen Anderson y Belnap.

Variable Sharing Property: Sea S una lógica definida sobre un lenguaje L. S tiene la VSP si en todos los teoremas de S de la forma $A \to B$, A y B tienen al menos una variable proposicional en común.

De esta manera, esta propiedad[3] provoca la desaparición de las paradojas de la implicación tal y como las hemos definido antes. Con todo, hemos dado el primer y más importante paso para la caracterización total de las lógicas de la relevancia: Hemos eliminado las paradojas de la implicación y hemos definido la VSP, elemento central de su caracterización. Después de esto nos faltarían al menos dos puntos, a saber, la ausencia de piezas sueltas y la paraconsistencia de las lógicas de la relevancia.

[3]Las pruebas de que las lógicas de la relevancia, empezando por R, tienen esta propiedad se pueden encontrar, de la manera más sistemática, en Cf.[**Robles, G. y Méndez, J. M.**, 2012], pero la primera prueba aparece en Cf.[**Belnap, N. D. Jr.**, 1960]

La ausencia de piezas sueltas consistiría, someramente, en la propiedad de que no aparezca nunca una variable proposicional de forma *solitaria*. La ausencia de piezas sueltas la podemos definir de la siguiente forma:

Ausencia de piezas sueltas: Si A es demostrable en R, es decir, es un teorema, que no tiene conjunciones como antecedente y no tiene disyunciones como consecuente, entonces todas las variables proposicionales que aparecen en A lo hacen al menos una vez como antecedente y una vez como consecuente.
Este concepto, tal y como se puede comprobar, sirve de importante refuerzo para la VSP que ha sido tratada más arriba, haciendo que las lógicas de la relevancia tengan a su vez un criterio de relevancia superior, lo que potencia aún más su faceta de eliminación de las paradojas de la implicación, ya que tal y como se puede observar, la propiedad de carecer de piezas sueltas provoca que no se pueda conseguir una interpretación de un condicional como la que hizo Lewis[4].

Para alguien versado en las lógicas de la relevancia sería fácil señalar ahora mismo un punto conflictivo, ya que hemos dicho que las lógicas de la relevancia tienen tanto la VSP como la ausencia de piezas sueltas, sin embargo, es fácil encontrar varios sistemas, aceptados como relevantes, que, o bien tienen la VSP y a su vez tienen piezas sueltas, es decir, carecen de la propiedad de la ausencia de piezas suelta, o por otro lado no tienen la VSP pero sí la propiedad de la ausencia de piezas sueltas. Sin embargo, esta omisión está realizada de manera totalmente consciente, ya que lo que se pretende es dar una visión general, dejando, por ello, a un lado las consideraciones sobre sistemas que quedan fuera del espectro más aceptado de lógicas de la relevancia[5].

El último punto que ha de tratarse para caracterizar de forma absoluta las lógicas de la relevancia es la paraconsistencia. Uno de los trabajos de Lewis tuvo que ver con la paradoja de la implicación que se produce con la regla *Ex Contradictione Quodlibet* o ECQ. Según esta regla, de una contradicción se seguiría cualquier afirmación; i. e: $A \wedge \neg A \vdash B$. Tal y como hemos definido las paradojas de la implicación antes, la regla ECQ daría, sin lugar a dudas, a, potencialmente, infinitas de ellas. La eliminación de esta regla produce lo que comúnmente se conoce bajo el nombre de lógicas paraconsistentes, y dado que se trata de una paradoja de la implicación, no existe en las lógicas de la relevancia, con lo cual podríamos, sin ningún problema, afirmar que toda lógica de la relevancia es a su vez paraconsistente, pero no al revés. Este tema fue de vital importancia tanto para Lewis, famosa es su prueba del funcionamiento de la regla ECQ, como para Anderson y Belnap, los cuales llevarían a cabo una revisión intensiva de los sistemas Π y Π' que incluían la llamada regla γ, equivalente al silogismo disyuntivo[6]. Pese a la importancia de estas cuestiones de

[4]Para la prueba de la ausencia de piezas sueltas puede consultarse Cf.[**Robles, G. y Méndez, J. M.**, 2012] dado su carácter sistemático, sin embargo, la primera prueba aparecería en Cf.[**Anderson, A. R. y Belnap, N. D. Jr.**, 1975]

[5]Las referencias a sistemas que no cumplen estas propiedades pueden encontrarse también en Cf.[**Robles, G. y Méndez, J. M.**, 2012], así como una visión del hecho que representa la falta de alguna de estas propiedades

[6]Es posible consultar la discusión acerca de la regla γ en Cf.[**Dunn, J. M. y Restall,**

paraconsistencia y la admisibilidad de determinadas reglas, hemos de terminar aquí, dado que la propia discusión merecería un apartado por si misma y, desde luego, bastante más extenso.

3 Conceptos esenciales de la semántica relacional ternaria

Ha sido mencionado con anterioridad que una de las más grandes influencias en las lógicas de la relevancia tras el trabajo de Anderson y Belnap proviene de los desarrollos de Routley y Meyer. Sin duda alguna, uno de sus avances que más fructífero ha podido resultar es lo que se conoce bajo el nombre de Semántica Relacional Ternaria[7]. Este tipo de semántica surge como la opción para tratar la lógica básica diseñada por los autores, así como todas sus extensiones, siendo posible llegar a emplearla en lógicas relevantes anteriores, como E o R citadas con anterioridad.

Esta semántica indubitablemente rememora la semántica desarrollada por S. Kripke, que es una de las llamadas semánticas relacionales. El trabajo de Kripke, anterior al de Routley y Meyer, tenía como intención dar cuenta de las lógicas modales, entre las cuales se encontrarían las que habrían surgido desde el trabajo de Lewis, es decir, la famosa cadena de sistemas S1-S5 que hemos citado antes. Para ello diseñó una semántica en la cual los conceptos de posibilidad y necesidad venían expresados en base a los llamados mundos posibles. La forma de entender estos dos conceptos, definidos como operadores lógicos, era la de relación entre distintos mundos en los que puede valorarse de modo diferente una o más fórmulas bien formadas. A esta idea subyace la concepción de Kripke de que aquello que sea necesario, inevitablemente, será verdad en todos los mundos posibles. Así, dentro de la semántica de Kripke, se define una relación de accesibilidad entre los distintos mundos. Esta relación se puede entender de dos formas: tomando un mundo como referencia o sin hacerlo. Para la primera opción, es decir, tomando siempre como referencia un mundo posible en particular, el llamado mundo actual, se compararían los demás, que son considerados como variaciones de este, con el mundo actual. Mientras que para la segunda opción no se establecería un mundo que sirviese como referencia fija.

La relación de accesibilidad definida por Kripke para su semántica es una relación binaria, es decir, se trata de la relación que se define en el conjunto de los mundos posibles cuya función es la de determinar que mundos están relacionados con cuales. Sin embargo, la relación que es definida por Routley y Meyer se trata de una relación ternaria, tal y como indica el propio nombre de la semántica. Esta relación, al igual que la de Kripke, puede o no tomar un mundo como referente, o bien trabajar sin una referencia constante. Si bien

G., 2002]

[7]Dado que la parte técnica posterior está basada en su totalidad en la semántica relacional ternaria prescindiremos aquí de explicar los rudimentos técnicos optando por una visión más expositiva, ya que estos pueden ser fácilmente comprendidos en el desarrollo que prosigue

el trabajo de Kripke parece tener un arraigo claro en ideas filosóficas, el de Routley y Meyer resulta más difícil de interpretar, dado que la propia relación ternaria, aunque de increíble potencial técnico, resulta más contraintuitiva. El propio trabajo original, que apareció en Cf.[**Routley, R. y Meyer, R. K**, 1973], proponía como interpretación para la relación ternaria $Rabc$ si y solo si c es accesible desde a y b; o dicho de otra manera, si y sólo si a y b son compatibles con c, o conversamente si y sólo si c es compatible con a y b.

Podemos a la vez dar una interpretación algo más técnica de la propia relación. Sea R la relación de accesibilidad y a, b y c tres mundos posibles cualesquiera. Si escribimos $Rabc$, estaríamos estableciendo una relación entre los mundos posibles a, b y c. A la hora de interpretar un condicional cualquiera, por ejemplo, $A \to B$, podríamos expresarnos de la siguiente manera:

$a \models A \to B$ y $b \models A \Rightarrow c \models B$

Con lo que aquí nos encontraríamos es que, si el condicional es verdadero en el mundo a, y este encuentra el antecedente dentro del mundo b, entonces, necesariamente, el consecuente ha de estar en el tercer mundo de la relación establecida c.

A la relación R habríamos de sumarle también un caso especial de la relación ternaria, la llamada relación de orden, representada por $\leq$, que indicaría que, si el primer miembro de la relación R pertenece a O, entonces el segundo miembro se encontraría dentro del tercero; i. e: Dada la relación $Rxab$ y $x \in O$, $a \leq b$, significaría que, entendidos como mundos posibles, el mundo posible a se encuentra dentro del mundo posible b, siendo O el conjunto de situaciones regulares en las que los teoremas son válidos[8].

Pese a todo, la semántica de Routley y Meyer no acabaría aquí, sino que encontraríamos un asunto a tratar adicional, y es lo que se conoce bajo el nombre de Operador Routley, habitualmente representado por la figura de un asterisco ($*$). Este operador sería la forma de tratar la negación de la Semántica Relacional Ternaria, y su inclusión se debería a la pretensión de usar la llamada negación de De Morgan, en vez de la negación estándar desarrollada por Boole y usada en los modelos de Kripke[9].

El Operador Routley es una función llamada de reversión[10], que dado un mundo posible a, entonces $a*$ sería la imagen reversa de a; i. e: $a*$ sería un mundo posible en el cual tendrían cabida todas aquellas fórmulas cuya negación no se encuentra en a. Supongamos entonces lo siguiente:
Sea a un mundo posible cualquiera y A una afirmación cualquiera. Entonces tendríamos:

$a \models A \Rightarrow a* \not\models \neg A$

O en el caso contrario:

$a \not\models A \Rightarrow a* \models \neg A$

[8]Siguiendo la definición que se hace en Cf.[**Routley, R., Meyer, R. K., Plumwood,V. y Brady, R. T.**, 1982]

[9]Es importante el hecho de que los modelos de Kripke que se desarrollan bajo características intuicionistas no tienen una negación Booleana

[10]Cf.[**Routley, R., Meyer, R. K., Plumwood,V. y Brady, R. T.**, 1982]

Dado este ejemplo, en el caso de que a fuese idéntico a $a*$; i. e: $a = a*$, entonces a sería consistente y completo en el sentido clásico, mientras que si se produce el hecho de que a es distinto de $a*$; i. e: $a \neq a*$, a podría ser inconsistente; i. e: $a \models A,\ a* \not\models A \Rightarrow a \not\leq a*$, incompleto; i. e: $a \not\models A,\ a* \models A \Rightarrow a \leq a*$, o ambas cosas a la vez.

4 Lógicas de la relevancia profunda

Dentro de las lógicas de la relevancia podemos encontrar algunos determinados subtipos de estas lógicas y, precisamente, el sistema en el que se desarrolla el trabajo, DW, pertenece a un subtipo particular conocido como lógicas de la relevancia profunda. Al igual que ocurría con la VSP, tampoco existe una traducción aceptada al castellano del término *depth relevance logics*, así que por ello la notación puede parecer poco precisa al usar indistintamente términos que pudiesen ser igual de válidos como lógicas de la relevancia profunda o lógicas relevantes de profundidad.

Este tipo de lógicas fueron desarrolladas en un primer momento por R. Brady, cuyo propósito principal era el de desarrollar unas determinadas lógicas de la relevancia en las cuales pudiesen basar lo que se conoce por el nombre de Teoría de conjuntos intuitiva no trivial[11], es decir, una teoría de conjuntos que pudiese contener paradojas sin que ello supusiese el colapso de la teoría, lo que implicaría que toda proposición sería demostrable en la teoría. Para cumplir su objetivo definiría una jerarquía de sistemas[12] que cumplirían con lo que se conoce bajo el nombre anglosajón de *depth relevance condition*, traducido al castellano por condición de la relevancia profunda, y que quedaría definido de la siguiente manera:

Condición de la relevancia profunda: Sea S una lógica proposicional con las siguientes conectivas: $\rightarrow, \wedge, \vee$ y $\neg$. S tendrá la condición de la relevancia profunda, o será una lógica profundamente relevante, si en todos sus teoremas de la forma $A \rightarrow B$ hay al menos una variable proposicional p, tal que la profundidad de p en A es la misma que la profundidad de p en B.

Con esta definición debemos explicar un concepto más para poder entender de manera total el concepto de las lógicas de la relevancia profunda: el concepto de profundidad de una subfórmula dentro de una fórmula. Para ello tendríamos las siguientes definiciones[13]:

(I): $d\,[A, A] = 0$
(II): si $d\,[\neg B, A] = n$ entonces $d\,[B, A] = n$
(III): si $d\,[B \wedge C, A] = n$ entonces $d\,[B, A] = d\,[C, A] = n$
(IV): si $d\,[B \rightarrow C, A] = n$ entonces $d\,[B, A] = d\,[C, A] = n + 1$

Donde d denota la profundidad de la subfórmula, el primer término dentro de los corchetes, dentro de la fórmula, el segundo término dentro de los corchetes.

[11] *Non-trivial naïve set theory*
[12] Cf.[**Brady, R. T.**, 1992]
[13] Brady define las reglas solo para las conectivas $\rightarrow$, $\wedge$ y $\neg$, pero resulta fácilmente extensible para la conectiva que deja fuera: $\vee$

Con esto quedarían perfectamente caracterizadas las lógicas de la relevancia profunda.

Es importante a su vez señalar que sistemas de gran importancia como lo son R, E o T fallan a la hora de cumplir con la condición de la relevancia de profundidad[14].

5 Aplicaciones

Desde el primer desarrollo de las lógicas de la relevancia estas han demostrado tener una capacidad muy elevada en cuanto a sus aplicaciones, sobre todo dentro del campo de la informática o la teoría de la información. Esto se puede ver fácilmente ya en los primeros trabajos del propio Belnap, destacando de entre ellos una aplicación directa hacia la forma en la que los ordenadores deberían trabajar[15]. Una propuesta más moderna es la implementada por E. Mares[16], centrada sobre todo en la teoría de la información.

Fuera de estas aplicaciones habituales en el campo de la lógica moderna también nos encontramos con aplicaciones mucho más clásicas, pertenecientes a la matemática, como son las mostradas por Z. Weber, cuyo empeño sirve para entender los cardinales transfinitos en la teoría de conjuntos paraconsistente[17], eso sin olvidar nunca el gran trabajo de Brady, ya citado antes, en su intento por fundamentar una teoría de conjuntos intuitiva no trivial[18].

Pese a todo, lo que más nos interesa en este momento es definir las aplicaciones de los postulados semánticos correspondientes definidos en este mismo trabajo, ya que estos son lo que nos ocupa de lleno y requieren de una justificación. El concepto de postulado semántico correspondiente fue dado por primera vez por Routley y Meyer en Cf.[**Routley, R., Meyer, R. K., Plumwood,V. y Brady, R. T.**, 1982, Cap. 4]. La utilidad de este concepto radica en que, dado el axioma correspondiente, la adición del postulado dentro del modelo correspondiente, avalaría la corrección y la completud respecto de dicho modelo. Así los postulados definidos por Routley y Meyer servirían para modelizar rápidamente lógicas a las que se le quisiesen añadir determinados axiomas.

En lo que a los postulados que se definen en el trabajo se refiere, habríamos de hacer una distinción entre los seis primeros, postulados simples, y los cuatro últimos, postulados disyuntivos[19]. Los primeros postulados, de una importancia menor en relación a los otros, ayudarían a definir lógicas con sólo una, alguna o todas las variantes de los axiomas Modus Ponens y/o Modus Tollens. Los segundos postulados, aquellos de carácter disyuntivo, sin embargo, tienen una capacidad mucho mayor, ya que servirían para construir lógicas muy fuertes

[14] Este fallo lo probó el propio Brady en la obra citada con anterioridad

[15] Cf.[**Belnap, N. D. Jr.**, 1977]

[16] Cf.[**Mares, E.**, 2004]

[17] Cf.[**Weber, Z.**, 2012]

[18] A este respecto la obra fundamental es, sin duda, Cf.[**Brady, R. T.**, 2006]

[19] La formulación de estos postulados queda relegada al epígrafe específico a ellos, ya que ahora mismo la intención es dar una exposición meramente informativa y al llegar a la parte correspondiente debería quedar clara la distinción técnica entre unos y otros postulados

carentes del axioma de contracción[20] y del axioma de Modus Ponens. Entre estas lógicas se encuentran todos los sistemas incluidos en $Ł3$, desarrollado por J. Łuckasiewicz, y otras lógicas trivaluadas.

A este respecto resulta de imperiosa actualidad el trabajo llevado a cabo por N. Tomova[21], en el cual, partiendo de las lógicas, también trivaluadas, de S. Kleene se puede ver una conexión directa con los intereses primigenios de las lógicas de la relevancia en cuanto que define la implicación natural que incluiría a su vez a un gran número de lógicas trivaluadas desde el ya citado $Ł3$ hasta los sistemas de Jaśkowski, incluyendo $J3$, si bien ha de tenerse en cuenta que los sistemas definidos por Tomova nunca serían relevantes. Esta implicación natural habría de cumplir tres condiciones:

(I): Se ha de respetar el Modus Ponens; i. e: Si $A \to B \in D$ y $A \in D$ entonces $B \in D$, donde A y B son fórmulas bien formadas y D el conjunto de los valores designados

(II): Dadas las tablas de verdad para las lógicas trivaluadas, donde sólo intervengan los valores clásicos, el resultado debería ser el mismo de las tablas de verdad clásicas

(III): Si el valor asignado a A es menor o igual que el valor asignado a B, entonces A implica a B; i. e: Si $A \leq B$ entonces $A \to B \in D$

De esta manera es muy fácil ver como la definición y el desarrollo de los postulados semánticos, no sólo es interesante, sino que además se trata de algo de una importancia actual y de gran calado.

[20] $A \to (A \to B) \to .A \to B$

[21] Cf.[**Tomova, N.**, 2012]

Parte II

Las lógicas B y DW

6 La lógica B

La lógica relevante B es la lógica básica para la semántica relacional ternaria formulada por Routley y Meyer en Cf.[**Routley, R., Meyer, R. K., Plumwood,V. y Brady, R. T.**, 1982]; se puede formular a partir de B+ a la que se le incorporan ciertos axiomas para la negación. Es importante señalar que a lo largo de todo el epígrafe se evitarán los subíndices correspondientes a los operadores de demostrabilidad y consecuencia semántica ($\vdash$ y $\models$ respectivamente). Adicionalmente, es importante explicar, que a fin de evitar introducir una gran cantidad de paréntesis, en la mayoría de casos, se colocará un punto al final del que sea el condicional principal. Previo a la formulación de B es importante dar una definición de determinados conceptos básicos que se usarán a lo largo de todo el trabajo.

Definición 0: El lenguaje proposicional consiste en un conjunto enumerable de variables proposicionales $p_0, p_1, ..., p_n, ...$ y las conectivas $\rightarrow$ (Condicional), $\wedge$ (Conjunción), $\vee$ (Disyunción) y $\neg$ (Negación). El bicondicional ($\longleftrightarrow$) y el conjunto de las fórmulas bien formadas (fbf), se definen de la manera habitual, representado este último por letras mayúsculas: $A, B, C....$ Adicionalmente, $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{F}$ representan el conjunto de las variables proposicionales y el conjunto de las fbf, respectivamente.

Con ello la formulación de B quedaría como sigue:

Axiomas:

A1. $A \rightarrow A$
A2. $(A \wedge B) \rightarrow A$
A3. $(A \wedge B) \rightarrow B$
A4. $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow \textbf{.} A \rightarrow (B \wedge C)$
A5. $A \rightarrow (A \vee B)$
A6. $B \rightarrow (A \vee B)$
A7. $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow \textbf{.} (A \vee B) \rightarrow C$
A8. $A \wedge (B \vee C) \rightarrow \textbf{.} (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
A9. $\neg\neg A \rightarrow A$

Reglas:

R1. $\vdash A, \vdash A \rightarrow B \Rightarrow \vdash B$
R2. $\vdash A, \vdash B, \Rightarrow \vdash A \wedge B$
R3. $\vdash A \rightarrow \neg B \Rightarrow \vdash B \rightarrow \neg A$

R4. $\vdash A \to B, \vdash C \to D \Rightarrow \vdash B \to C \to .A \to D$

R4 puede mantenerse como una sola regla o puede ser descompuesta en dos reglas distintas:

R5. $\vdash A \to B \Rightarrow \vdash B \to C \to .A \to C$
R6. $\vdash A \to B \Rightarrow \vdash C \to A \to .C \to B$

Donde R1 corresponde a la regla Modus Ponens, R2 a la regla de Adjunción, R3 a la regla de contraposición, R4 a la regla de Afijación, R5 a la regla de Sufijación y R6 a la regla de Prefijación.

6.1 Modelo-B

Definición 1: Un modelo-B es una estructura $< O, K, R, *, \models>$ donde (I) $O \subseteq K$, (II) $R \subseteq K^2$, (III) $*$ es una operación en K, y se cumplen las siguientes definiciones y postulados:
D1. $a \leq b =_{df} (\exists x \in O)\, Rxab$
D2. $R^2abcd =_{df} \exists x \in K\, (Rabx \,\&\, Rxcd)$
P1. $a \leq a$
P2. $a \leq b \,\&\, Rbcd \Rightarrow Racd$
P3. $a \leq b \Rightarrow b* \leq a*$
P4. $a \leq a**$
P5. $a** \leq a$
Por último, $\models$ es una relación de evaluación tal que para todo $a \in K$, toda $p_i \in \mathfrak{P}$ y A, $B \in \mathfrak{F}$ se cumplen las siguientes cláusulas:
C1. $a \leq b \,\&\, a \models p_i \Rightarrow b \models p_i$
C2. $a \models A \wedge B$ si y sólo si (syss) $a \models A$ y $a \models B$
C3. $a \models A \vee B$ syss $a \models A$ o $a \models B$
C4. $a \models A \to B$ syss para cualesquiera $b, c \in K$ se cumple que $Rabc \,\&\, b \models A \Rightarrow c \models B$ o en su versión contraposicional: $a \not\models A \to B$ syss hay $b, c \in K$ tales que $Rabc \,\&\, b \models A \,\&\, c \not\models B$
C5. $a \models \neg A$ syss $a* \not\models A$

6.2 Validez-B

Definición 2: A es válida en B($\models A$) syss $a \models A$ para todo $a \in O$ de todo modelo-B

6.3 Prueba de corrección de B

Para la prueba de corrección de B, debemos probar que los axiomas son válidos y que las reglas preservan la validez. Se tendrá en cuenta que en Cf.[**Robles, G.**, 2006, Cap. 2], se llevó a cabo la prueba de corrección de B+, con lo cual, aquí evitaremos desarrollar las pruebas correspondientes a los axiomas y reglas de B+, para centrarnos exclusivamente en la parte negativa, es decir, probaremos la validez de A9, y demostraremos que R3 preserva la validez. Previo a estas dos pruebas, llevaremos a cabo la prueba de 3 lemas auxiliares que demostrarán ser de gran utilidad:

Lema 1: Para cualesquiera $a, b \in K$ de todo modelo-B y fbf A, $a \leq b \,\&\, a \models A \Rightarrow b \models A$; en su formulación contraposicional: $a \leq b \,\&\, b \not\models A \Rightarrow a \not\models A$

Cabe señalar que este lema corresponde al hecho de extender C1 a todas la fbf.

Prueba:

La prueba se desarrollará como una inducción sobre la longitud de A

(I) para $n = 1$
A es variable proposicional, digamos, p_m, entonces $a \leq b \,\&\, a \models p_m \Rightarrow b \models p_m$ se sigue de C1

(II) para $n = k$
No es necesario probarlo, ya que está asumido por la hipótesis de inducción

(III) para $n = k + 1$
Si la longitud de A es $k + 1$, A puede ser: (a) $B \wedge C$ (b) $B \vee C$ (c) $B \rightarrow C$ (d) $\neg B$

(a) A es $B \wedge C$
Hay que probar que $a \leq b \,\&\, a \models B \wedge C \Rightarrow b \models B \wedge C$

1. $a \leq b$ y $a \models B \wedge C$	*Hipótesis*
2. $a \models B$ y $a \models C$	$C2, 1$
3. $b \models B$ y $b \models C$	*Hipótesis de inducción*, 2
4. $b \models B \wedge C$	$C2, 3$

(b) A es $B \vee C$
Hay que probar que $a \leq b \,\&\, a \models B \vee C \Rightarrow b \models B \vee C$

1. $a \leq b$ & $a \models B \vee C$	*Hipótesis*
2. $a \models B$ o $a \models C$	$C3, 1$
3. $b \models B$ o $b \models C$	*Hipótesis de inducción*, 2
4. $b \models B \vee C$	$C3, 3$

(c)A es $B \rightarrow C$
Hay que probar que $a \leq b \,\&\, a \models B \rightarrow C \Rightarrow b \models B \rightarrow C$

1. $a \leq b$ & $a \models B \rightarrow C$	*Hipótesis*

Hay que demostrar que $b \models B \rightarrow C$, lo que es equivalente a que para cualesquiera

$c, d \in K, Rbcd \,\&\, c \models B \Rightarrow d \models C$

2. $Rbcd$ & $c \Rightarrow c \models B$	$Hipótesis$
3. $Racd$	$P2, 1, 2$
4. $d \models C$	$C4, 1, 2, 3$

(d)A es $\neg B$
Hay que probar que $a \leq b \,\&\, a \models \neg B \Rightarrow b \models \neg B$

1. $a \leq b$ & $a \models \neg B$	$Hipótesis$
2. $b* \leq a*$	$P3, 1$
3. $a* \not\models B$	$C5, 1$

En virtud de la hipótesis de inducción sabemos que $a \leq b \,\&\, a \models A \Rightarrow b \models A$ si la longitud es k, entonces $a \leq b \,\&\, b \not\models A \Rightarrow a \not\models A$

4. $b* \not\models B$	$Hipótesis\, de\, inducción, 2, 3$
5. $b \models \neg B$	$C5, 4$

Así concluye la prueba del Lema 1 ■

Lema 2 (Lema de vinculación): Para cualesquiera $A, B \in \mathfrak{F}$, $\models A \to B$ syss para todo $a \in K$ de todo modelo-B, $a \models A \Rightarrow a \models B$

Prueba:

De derecha a izquierda:

1. $\models A \to B$	$Hipótesis$
2. Sea $a \in K$ de un modelo-B arbitrario y $a \models A$	$Hipótesis$
3. $Rxaa$ & $x \in O$	$P1, D1$
4. $x \models A \to B$	$Definición\, 2, 1, 3$
5. $a \models B$	$C4, 2, 3, 4$

De izquierda a derecha:

1. $a \models A \Rightarrow a \models B$ para todo $a \in K$ de todo modelo-B	$Hipótesis$
2. Sean $b \in O, c, d \in K$ de un modelo-B arbitrario y $Rbcd$ & $c \models A$	$Hipótesis$
3. $c \models B$	$1, 2$
4. $c \leq d$	$D1, 2$
5. $d \models B$	$Lema\, 1, 3, 4$

Así queda probado el lema de vinculación ■

Lema 3: Para cualquier modelo-B y $a \in K$:

(I)$a \models \neg A$ syss $a{*} \not\models A$
(II)$a{*} \models \neg A$ syss $a \not\models A$

Prueba:

(I):
Se trata de C5, con lo cual no se requerirá demostración

(II):
De derecha a izquierda:

1. $a{*} \models \neg A$	*Hipótesis*
2. $a{*}{*} \not\models A$	$C5, 1$
3. $a \leq a{*}{*}$	$P4$
4. $a \not\models A$	$Lema\, 1, 2, 3$

De izquierda a derecha:

1. $a \not\models A$	*Hipótesis*
2. $a{*}{*} \leq a$	$P5$
3. $a{*}{*} \not\models A$	$Lema\, 1, 1, 2$
4. $a{*} \models \neg A$	$C5, 3$

Así queda finalizada la prueba del Lema 3 ■

A partir de ahora, y en aras facilitar el trabajo y la lectura, se evitará nombrar el Lema 3 como tal, y en su lugar se utilizará la nomenclatura habitual de la cláusula de la negación, es decir, C5, ya que este lema es una extensión de la manera en que funciona la negación.
Probamos ahora que A9 es válido y que R3 preserva la validez.

A9 es válido:

Prueba:

Sea M un modelo-B arbitrario tal que $a \in K$

1. $a \models \neg\neg A$	*Hipótesis*
2. $a \leq a{*}{*}$	$P4$
3. $a{*}{*} \models \neg\neg A$	$Lema\, 1, 1, 2$
4. $a{*} \not\models \neg A$	$C5, 3$
5. $a \models A$	$C5, 4$

■

R3 preserva la validez:

Prueba:

Sea M un modelo-B arbitrario tal que $a \in O$, suponiendo $b, c \in K$

1. $\models A \to \neg B$	*Hipótesis*
2. $Rabc$ & $b \models B$	*Hipótesis*
3. $b* \not\models \neg B$	$C5, 2$
4. $b \leq c$	$D1, 2$
5. $c* \leq b*$	$P3, 4$
6. $b* \not\models A$	$Lema\, 2, 1, 3$
7. $c* \not\models A$	$Lema\, 1, 5, 6$
8. $c \models \neg A$	$C5, 7$

■

Así queda probada la corrección de B

6.4 Algunos ejemplos de la validez de teoremas y reglas de B

Una vez probada la corrección de B, procederemos a demostrar la validez de determinados teoremas y reglas de B, bien por el interés que pueda tener mostrar que dichas tesis pertenecen a B, bien porque dichos teoremas y reglas podrán ser de utilidad en algún momento posterior.

(I).$\models \neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
(II).$\models \neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
(III).$\models \neg(\neg A \vee \neg B) \leftrightarrow (A \wedge B)$
(IV).$\models \neg(\neg A \wedge \neg B) \leftrightarrow (A \vee B)$
(V).$\models A \to B \Rightarrow \models \neg B \to \neg A$
(VI).$\models \neg A \to B \Rightarrow \models \neg B \to A$
(VII).$\models \neg A \to \neg B \Rightarrow \models B \to A$
(VIII).$\models A \to \neg\neg A$
(IX).$\models (A \to B) \wedge (C \to D) \to . (A \wedge C) \to (B \wedge D)$
(X).$\models A \wedge (B \wedge C) \to . (A \wedge B) \wedge (A \wedge C)$
(XI):$\models (A \to B) \wedge (C \to D) \to . (A \vee C) \to (B \vee D)$
(XII).$\models (A \vee B) \wedge (C \wedge D) \to (A \wedge C) \vee (B \wedge D)$
(XIII): $\models (A \to B) \vee (C \to D) \to . (A \wedge C) \to (B \vee D)$

(I):
Sea M un modelo-B arbitrario tal que $a \in K$
De izquierda a derecha:

1. $a \models \neg(A \vee B)$	*Hipótesis*
2. $a* \not\models A \vee B$	$C5, 1$

3. $a* \nvDash A$ y $a* \nvDash B$ $C3, 2$
4. $a \models \neg A$ y $a \models \neg B$ $C5, 3$
5. $a \models \neg A \wedge \neg B$ $C2, 4$

De derecha a izquierda:

1. $a \models \neg A \wedge \neg B$ *Hipótesis*
2. $a \models \neg A$ y $a \models \neg B$ $C2, 1$
3. $a* \nvDash A$ y $a* \nvDash B$ $C5, 2$
4. $a* \nvDash A \vee B$ $C3, 3$
5. $a \models \neg (A \vee B)$ $C5, 4$

■

(II):
Sea M un modelo-B arbitrario tal que $a \in K$
De izquierda a derecha:

1. $a \models \neg (A \wedge B)$ *Hipótesis*
2. $a* \nvDash A \wedge B$ $C5, 1$
3. $a* \nvDash A$ o $a* \nvDash B$ $C2, 2$
4. $a \models \neg A$ o $a \models \neg B$ $C5, 3$
5. $a \models \neg A \vee \neg B$ $C3, 4$

De derecha a izquierda:

1. $a \models \neg A \vee \neg B$ *Hipótesis*
2. $a \models \neg A$ o $a \models \neg B$ $C3, 1$
3. $a* \nvDash A$ o $a* \nvDash B$ $C5, 2$
4. $a* \nvDash A \wedge B$ $C2, 3$
5. $a \models \neg (A \wedge B)$ $C5, 4$

■

(III):
Sea M un modelo-B arbitrario tal que $a \in K$
De izquierda a derecha:

1. $a \models \neg (\neg A \vee \neg B)$ *Hipótesis*
2. $a* \nvDash \neg A \vee \neg B$ $C5, 1$
3. $a* \nvDash \neg A$ y $a* \nvDash \neg B$ $C3, 2$
4. $a \models A$ y $a \models B$ $C5, 3$
5. $a \models A \wedge B$ $C2, 4$

De derecha a izquierda:

1. $a \models (A \wedge B)$ — *Hipótesis*
2. $a \models A$ y $a \models B$ — $C2, 1$
3. $a* \not\models \neg A$ y $a* \not\models \neg B$ — $C5, 2$
4. $a* \not\models \neg A \vee \neg B$ — $C3, 3$
5. $a \models \neg(\neg A \vee \neg B)$ — $C5, 4$

■

(IV):
Sea M un modelo-B arbitrario tal que $a \in K$
De izquierda a derecha:

1. $a \models \neg(\neg A \wedge \neg B)$ — *Hipótesis*
2. $a* \not\models \neg A \wedge \neg B$ — $C5, 1$
3. $a* \not\models \neg A$ o $a* \not\models \neg B$ — $C2, 2$
4. $a \models A$ o $a \models B$ — $C5, 3$
5. $a \models A \vee B$ — $C3, 4$

De derecha a izquierda:

1. $a \models A \vee B$ — *Hipótesis*
2. $a \models A$ o $a \models B$ — $C3, 1$
3. $a* \not\models \neg A$ o $a* \not\models \neg B$ — $C5, 2$
4. $a* \not\models \neg A \wedge \neg B$ — $C2, 3$
5. $a \models \neg(\neg A \wedge \neg B)$ — $C5, 4$

■

(V):
Sea M un modelo-B arbitrario tal que $a \in O$ y $b, c \in K$

1. $\models A \to B$ — *Hipótesis*
2. $Rabc$ & $b \models \neg B$ — *Hipótesis*
3. $b* \not\models B$ — $C5, 2$
4. $b \leq c$ — $D1, 2$
5. $c* \leq b*$ — $P3, 4$
6. $b* \not\models A$ — $Lema\, 2, 1, 3$
7. $c* \not\models A$ — $Lema\, 1, 5, 6$
8. $c \models \neg A$ — $C5, 7$

■

(VI):
Sea M un modelo-B arbitrario tal que $a \in O$ y $b, c \in K$

1. $\models \neg A \to B$ — *Hipótesis*

2. $Rabc$ & $b \models \neg B$ *Hipótesis*
3. $b* \not\models B$ $C5, 2$
4. $b \leq c$ $D1, 2$
5. $c* \leq b*$ $P3, 4$
6. $b* \not\models \neg A$ $Lema\, 2, 1, 3$
7. $c* \not\models \neg A$ $Lema\, 1, 5, 6$
8. $c \models A$ $C5, 7$

■

(VII):
Sea M un modelo-B arbitrario tal que $a \in O$ y $b, c \in K$

1. $\models \neg A \to \neg B$ *Hipótesis*
2. $Rabc$ & $b \models B$ *Hipótesis*
3. $b* \not\models \neg B$ $C5, 2$
4. $b \leq c$ $D1, 2$
5. $c* \leq b*$ $P3, 4$
6. $b* \not\models \neg A$ $Lema\, 2, 1, 3$
7. $c* \not\models \neg A$ $Lema\, 1, 5, 6$
8. $c \models A$ $C5, 7$

■

(VIII):
Sea M un modelo-B arbitrario tal que $a \in K$

1. $a \models A$ *Hipótesis*
2. $a \leq a**$ $P4$
3. $a** \models A$ $Lema\, 1, 1, 2$
4. $a* \not\models \neg A$ $C5, 3$
5. $a \models \neg\neg A$ $C5, 4$

■

(IX):
Sea M un modelo-B arbitrario tal que $a \in K$. Procedemos por reducción al absurdo

1. $a \models (A \to B) \wedge (C \to D)$ *Hipótesis*
2. $a \not\models (A \wedge C) \to (B \wedge D)$ *Hipótesis*

Hay $b, c \in K$ tales que:

3. $Rabc, b \models A \wedge C$ y $c \not\models B \wedge D$ *Hipótesis*
4. $a \models A \to B$ y $a \models C \to D$ $C2, 1$

5. $b \models A$ y $b \models C$ $\quad$ $C2, 3$
6. $c \models B$ y $c \models D$ $\quad$ $C4, 3, 4, 5$
7. $c \models B \wedge D$ $\quad$ $C2, 6$

Pero 3 y 7 se contradicen. ■

(X):
Sea M un modelo-B arbitrario tal que $a \in K$

1. $a \models A \wedge (B \wedge C)$ $\quad$ *Hipótesis*
2. $a \models A$ y $a \models B \wedge C$ $\quad$ $C2, 1$
3. $a \models B$ y $a \models C$ $\quad$ $C2, 2$
4. $a \models A \wedge B$ $\quad$ $C2, 2, 3$
5. $a \models A \wedge C$ $\quad$ $C2, 2, 3$
6. $a \models (A \wedge B) \wedge (A \wedge C)$ $\quad$ $C2, 4, 5$

■

(XI):
Sea M un modelo-B arbitrario tal que $a \in K$. Procedemos por reducción al absurdo

1. $a \models (A \to B) \wedge (C \to D)$ $\quad$ *Hipótesis*
2. $a \not\models (A \vee C) \to (B \vee D)$ $\quad$ *Hipótesis*
3. $a \models A \to B$ y $a \models C \to D$ $\quad$ $C2, 1$
4. $b \models A \vee C$ y $c \not\models B \vee D$ $\quad$ $C4, 2$
5. $c \not\models B$ y $c \not\models D$ $\quad$ $C3, 4$

Existen ahora dos casos distintos; 1er caso:

6. $b \models A$ $\quad$ $C3, 4$
7. $a \not\models A \to B$ $\quad$ $C4, 5, 6$

Pero 3 y 7 se contradicen; 2do caso:

8. $b \models C$ $\quad$ $C3, 4$
9. $a \not\models C \to D$ $\quad$ $C4, 5, 8$

Pero 3 y 8 se contradicen. ■

(XII):
Sea M un modelo-B arbitrario tal que $a \in K$

1. $a \models (A \vee B) \wedge (C \wedge D)$ $\quad$ *Hipótesis*
2. $a \models A \vee B$ y $a \models C \wedge D$ $\quad$ $C2, 1$
3. $a \models C$ y $a \models D$ $\quad$ $C2, 2$

Existen ahora dos casos distintos; 1er caso:

4. $a \models A$	$C3, 2$
5. $a \models A \wedge C$	$C2, 3, 4$
6. $a \models (A \wedge C) \vee (B \wedge D)$	$C3, 5$

2do caso:

7. $a \models B$	$C3, 2$
8. $a \models B \wedge D$	$C2, 3, 7$
9. $a \models (A \wedge C) \vee (B \wedge D)$	$C3, 8$

■

(XIII):
Sea M un modelo-B arbitrario tal que $a \in K$. Procedemos por reducción al absurdo

1. $a \models (A \to B) \vee (C \to D)$	*Hipótesis*
2. $a \not\models (A \wedge C) \to (B \vee D)$	*Hipótesis*
3. $b \models A \wedge C$ y $c \not\models B \vee D$	$C4, 2$
4. $b \models A$ y $b \models C$	$C2, 3$
5. $c \not\models B$ y $c \not\models D$	$C3, 3$

Existen dos posibles casos con, 1er caso:

6. $a \models A \to B$	$C3, 1$
7. $a \not\models A \to B$	$C4, 4, 5$

Pero 6 y 7 se contradicen; 2do caso:

8. $a \models C \to D$	$C3, 1$
9. $a \not\models C \to D$	$C4, 4, 5$

Pero 8 y 9 se contradicen. ■

6.5 Algunos ejemplos de pruebas sintácticas en B

A fin de dar una visión más completa de la lógica B, probaremos de manera sintáctica algunos teoremas y reglas que pueden, además de ser ilustrativos, resultar útiles en el desarrollo de las pruebas posteriores. Para este tipo de pruebas podemos usar todo B, es decir, podemos usar tanto sus axiomas como sus reglas.

(a) T1: $A \to \neg\neg A$
(b) Transitividad: $A \to B \;\&\; B \to C \Rightarrow A \to C$
(c) Rd1: $A \to B \Rightarrow \neg B \to \neg A$

(d) T2: $\neg(A \vee B) \longleftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
(e) Rd2: $\neg A \to B \Rightarrow \neg B \to A$
(f) Rd3: $\neg A \to \neg B \Rightarrow B \to A$
(g) T3: $\neg(A \wedge B) \longleftrightarrow \neg A \vee \neg B$
(h) T4: $A \wedge B \longleftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
(i) T5: $A \vee B \longleftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$

(a) T1: $A \to \neg\neg A$
Prueba:

1. $\neg A \to \neg A$	$A1$
2. $A \to \neg\neg A$	$R3, 1$

■

(b) Transitividad: $A \to B \;\&\; B \to C \Rightarrow A \to C$
Prueba:

1. $A \to B$	$Hipótesis$
2. $B \to C$	$Hipótesis$
3. $A \to B \to .A \to C$	$R6, 2$
4. $A \to C$	$R1, 1, 3$

■

(c) Rd1: $A \to B \Rightarrow \neg B \to \neg A$
Prueba:

1. $A \to B$	$Hipótesis$
2. $B \to \neg\neg B$	$T1$
3. $A \to \neg\neg B$	$Transitividad, 1, 2$
4. $\neg B \to \neg A$	$R3, 3$

■

(d) T2: $\neg(A \vee B) \longleftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
Prueba:
De izquierda a derecha

1. $A \to (A \vee B)$	$A5$
2. $B \to (A \vee B)$	$A6$
3. $\neg(A \vee B) \to \neg A$	$Rd1, 1$
4. $\neg(A \vee B) \to \neg B$	$Rd1, 2$
5. $\neg(A \vee B) \to .\neg A \wedge \neg B$	$A4, 3, 4$

De derecha a izquierda

1. $\neg A \wedge \neg B \rightarrow .\neg A$ — $A2$
2. $\neg A \wedge \neg B \rightarrow .\neg B$ — $A3$
3. $A \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$ — $R3, 1$
4. $B \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$ — $R3, 2$
5. $A \vee B \rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$ — $A7, 3, 4$
6. $\neg A \wedge \neg B \rightarrow .\neg(A \vee B)$ — $R3, 5$

■

(e) Rd2: $\neg A \rightarrow B \Rightarrow \neg B \rightarrow A$
Prueba:

1. $\neg A \rightarrow B$ — $Hipótesis$
2. $B \rightarrow \neg\neg B$ — $T1$
3. $\neg A \rightarrow \neg\neg B$ — $Transitividad, 1, 2$
4. $\neg B \rightarrow \neg\neg A$ — $R3, 3$
5. $\neg B \rightarrow A$ — $A9, 4$

■

(f) Rd3: $\neg A \rightarrow \neg B \Rightarrow B \rightarrow A$
Prueba:

1. $\neg A \rightarrow \neg B$ — $Hipótesis$
2. $\neg B \rightarrow \neg\neg\neg B$ — $T1$
3. $\neg A \rightarrow \neg\neg\neg B$ — $Transitividad, 1, 2$
4. $\neg A \rightarrow \neg B$ — $A9, 3$
5. $B \rightarrow \neg\neg A$ — $R3, 4$
6. $B \rightarrow A$ — $A9, 5$

■

(g) T3: $\neg(A \wedge B) \longleftrightarrow \neg A \vee \neg B$
Prueba:
De izquierda a derecha

1. $\neg A \rightarrow \neg A \vee \neg B$ — $A5$
2. $\neg B \rightarrow \neg A \vee \neg B$ — $A6$
3. $\neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow A$ — $Rd2, 1$
4. $\neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow B$ — $Rd2, 2$
5. $\neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow .A \wedge B$ — $A4, 3, 4$
6. $\neg(A \wedge B) \rightarrow .\neg A \vee \neg B$ — $Rd2, 5$

De derecha a izquierda

1. $A \wedge B \rightarrow .A$ — $A2$

2. $A \wedge B \rightarrow .B$ $\quad$ $A3$
3. $\neg A \rightarrow \neg (A \wedge B)$ $\quad$ $Rd1, 1$
4. $\neg B \rightarrow \neg (A \wedge B)$ $\quad$ $Rd1, 2$
5. $\neg A \vee \neg B \rightarrow \neg (A \wedge B)$ $\quad$ $A7, 3, 4$

■

(h) T4: $A \wedge B \longleftrightarrow \neg (\neg A \vee \neg B)$
Prueba:
De izquierda a derecha

1. $A \wedge B \rightarrow .A$ $\quad$ $A2$
2. $A \wedge B \rightarrow .B$ $\quad$ $A3$
3. $\neg A \rightarrow \neg (A \wedge B)$ $\quad$ $Rd1, 1$
4. $\neg B \rightarrow \neg (A \wedge B)$ $\quad$ $Rd1, 2$
5. $\neg A \vee \neg B \rightarrow \neg (A \wedge B)$ $\quad$ $A7, 3, 4$
6. $A \wedge B \rightarrow .\neg (\neg A \vee \neg B)$ $\quad$ $R3, 5$

De derecha a izquierda

1. $\neg A \rightarrow \neg A \vee \neg B$ $\quad$ $A5$
2. $\neg B \rightarrow \neg A \vee \neg B$ $\quad$ $A6$
3. $\neg (\neg A \vee \neg B) \rightarrow A$ $\quad$ $Rd2, 1$
4. $\neg (\neg A \vee \neg B) \rightarrow B$ $\quad$ $Rd2, 2$
5. $\neg (\neg A \vee \neg B) \rightarrow .A \wedge B$ $\quad$ $A4, 3, 4$

■

(i) T5: $A \vee B \longleftrightarrow \neg (\neg A \wedge \neg B)$
Prueba:
De izquierda a derecha

1. $\neg A \wedge \neg B \rightarrow .\neg A$ $\quad$ $A2$
2. $\neg A \wedge \neg B \rightarrow .\neg B$ $\quad$ $A3$
3. $A \rightarrow \neg (\neg A \wedge \neg B)$ $\quad$ $R3, 1$
4. $B \rightarrow \neg (\neg A \wedge \neg B)$ $\quad$ $R3, 2$
5. $A \vee B \rightarrow \neg (\neg A \wedge \neg B)$ $\quad$ $A7, 3, 4$

De derecha a izquierda

1. $A \rightarrow A \vee B$ $\quad$ $A5$
2. $B \rightarrow A \vee B$ $\quad$ $A6$
3. $\neg (A \vee B) \rightarrow \neg A$ $\quad$ $Rd1, 1$
4. $\neg (A \vee B) \rightarrow \neg B$ $\quad$ $Rd1, 2$
5. $\neg (A \vee B) \rightarrow .\neg A \wedge \neg B$ $\quad$ $A4, 3, 4$
6. $\neg (\neg A \wedge \neg B) \rightarrow .A \vee B$ $\quad$ $Rd2, 5$

■

6.6 Completud de B

La prueba de completud de B es una prueba del tipo de las que desarrolló Henkin en Cf.[**Henkin, L**, 1949]. Esta prueba queda dividida en dos partes: una primera en la que se definirá el modelo canónico y se demostrará que es un modelo, y una segunda en la que se demostrará que para cualquier A que no sea teorema, existe una teoría a, perteneciente a K^c, en la que A no es demostrable, i.e:$\nvdash A \Rightarrow\ a \in K^c$tal que $a \nvDash^c A$. Nótese que para esta sección, a lo largo de las pruebas se nombrarán las cláusulas, definiciones y postulados de la misma manera que se han nombrado antes, es decir, con la nomenclatura definida en la formulación de B, pero sin embargo, aquí estarán haciendo referencia a las definiciones del modelo canónico que damos inmediatamente.

6.6.1 Modelo canónico para B

Definición 3: El modelo canónico de B es una estructura del tipo $< O^c, K^c, R^c, *^c, \models^c >$, tal que:
(I): O^c es el conjunto de todas las teorías primas y normales
(II): K^c el conjunto de todas las teorías primas
(III): R^c se define como sigue: para cualesquiera $a, b, c \in K^c$, $R^c abc$ syss $A \rightarrow B \in a \,\&\, A \in b \;\Rightarrow\; B \in c$, o en su versión contraposicional, No-$R^c abc$ syss $A' \rightarrow B' \in a \,\&\, A' \in b \,\&\, B' \notin c$
(IV): $*^c$ es una operación en K^c para cada $a \in K^c$, donde $a*^c = \{A|\neg A \notin a\}$, es decir, $A \in a*^c$ syss $\neg A \notin a$. O en su versión contrapuesta, $\neg A \in a*^c$ syss $A \notin a$
(V): $\models^c$ una relación de evaluación tal que , para cualesquiera $a \in K^c$ y fbf A, $a \models^c A$ syss $A \in a$.

Definición 4: Una teoría es un conjunto de fbf cerrado por adjunción y B-implicación, es decir, a es teoría syss para cualesquiera fbf A, B
(I): $A \in a \,\&\, B \in a \Rightarrow A \wedge B \in a$
(II): $\vdash A \rightarrow B \,\&\, A \in a \Rightarrow B \in a$
Una teoría es normal syss para todo $\vdash A$, $A \in a$
Una teoría es prima syss para cualesquiera A y B, $A \vee B \in a \Rightarrow A \in a$ o $B \in a$

Una vez dadas estas definiciones podemos proceder a demostrar que el modelo canónico es un modelo. Para ello hemos de probar los siguientes puntos:

(I): Hay al menos una teoría normal y prima
(II): R^c es una relación ternaria definida en K^c
(III): Se cumplen los postulados
(IV): Se cumplen las cláusulas

Tanto (II) es obvio por la Definición 3 dada más arriba, con lo cual pasamos a la demostración de (I), (IV) y (V). Comenzamos probando (I).

(I):
Para esta prueba llevaremos a cabo la prueba de nuevos lemas

Lema 4: Sea M^c el modelo-B canónico. Para cualesquiera $a, b \in K^c$, $a \leq^c b$ syss $a \subseteq b$

Prueba:

De derecha a izquierda:

1. $a \leq^c b$	*Hipótesis*
2. $R^c xab$	$x \in O^c, D1, 1$
3. $A \in a$	*Hipótesis*
4. $A \to A \in x$	$A1,\ x \in O^c, 2$
5. $A \in b$	$C4, 2, 3, 4$

De izquierda a derecha:

Antes de llevar a cabo esta prueba hemos de probar otro lema auxiliar.

Lema 5: Sean a y b teorías y $c \in K^c$, tales que $R^T abc$. Entonces, existen $x, y \in K^c$ tales que $a \subseteq x$, $b \subseteq y$ y $R^T xbc$ y $R^T ayc$

Prueba:

El primer paso consiste en probar $a \subseteq x \,\&\, R^T xbc$. Para ello suponemos la hipótesis del teorema considerando el conjunto de teorías $Z = \{z \mid a \subseteq z \,\&\, R^T zbc\}$. Por el Lema de Zorn[22] hay un elemento maximal x en este conjunto tal que $a \subseteq x \,\&\, R^T xbc$, donde x es una teoría y nos faltaría por demostrar que es prima. Supongamos adicionalmente, por reducción al absurdo, que hay fbf B, C tales que $B \vee C \in x$, $B \notin x \& C \notin x$. Definimos el conjunto $[x, C] = \{E | \exists F\, [F \in x \,\&\, \vdash (B \wedge F) \to E]\}$, es decir $G \in [x, B]$ syss hay $\vdash B \wedge F \to G$, donde $F \in x$. Defínase el conjunto $[x, C]$ de manera similar. Antes de proceder a la prueba en sí, primero probaremos que los conjuntos definidos están cerrados por adjunción y B-implicación, así como demostraremos que están estrictamente contenidos en x.

(I): $[x, B]$ está cerrado por adjunción:

1. $E \in [x, B]$	*Hipótesis*
2. $F \in [x, B]$	*Hipótesis*
3. $\vdash (B \wedge G) \to E$	*Definicíon* $[x, B]$ *en* 1, *para* $G \in x$

[22]Cf.[**Zorn, M.**, 1935]

4. $\vdash (B \wedge G') \rightarrow F$	*Definicíon* $[x, B]$ *en* 2, *para* $G' \in x$
5. $\vdash [(B \wedge G) \wedge (B \wedge G')] \rightarrow (D \wedge E)$	(IX), 3, 4
6. $\vdash B \wedge (G \wedge G') \rightarrow (D \wedge E)$	(X), 6
7. $D \wedge E \in [x, B]$	*x es teoría*, 6

(II): $[x, B]$ está cerrado por B-implicación:

1. $\vdash E \rightarrow F$	*Hipótesis*
2. $E \in [x, B]$	*Hipótesis*
3. $\vdash (B \wedge G) \rightarrow E$	*Definición* $[x, B]$ *en* 2, *para* $G \in x$
4. $\vdash (B \wedge G) \rightarrow F$	*Transitividad*, 1, 3
5. $F \in [x, B]$	*Definición* $[x, B]$ *en* 4

Las pruebas para $[x, C]$ son similares y por ello se omiten.

(III):$[x, B] \supset x$

1. $E \in x$	*Hipótesis*
2. $B \notin x$	*Hipótesis*
3. $(B \wedge E) \rightarrow E$	*A*3, 1
4. $(B \wedge E) \rightarrow B$	*A*2
5. $E \in [x, B]$	*Definición* $[x, B]$ *en* 3
6. $B \in [x, B]$	*Definición* $[x, B]$ *en* 4
7. $[x, B] \supset x$	2, 5, 6

De nuevo, al ser similar la prueba para $[x, C]$, se omite.

Como la teoría maximal que incluye a a y tiene la relación R^T con b y c es x, i.e. $a \subseteq x$ & $R^T xbc$ se sigue:

1. $No - R^T [x, B]\, bc$ & $No - R^T [x, C]\, bc$	*x es maximal*, $R^T xbc$
2. $D \rightarrow E \in [x, B]$	*C*4, 1
3. $D \in b$	*C*4, 1
4. $E \notin c$	*C*4, 1
5. $D' \rightarrow E' \in [x, C]$	*C*4, 1
6. $D' \in b$	*C*4, 1
7. $E' \notin c$	*C*4, 1
8. $\vdash B \wedge F \rightarrow . D \rightarrow E$	*Definición de* $[x, B]$, *para* $F \in x$, 2
9. $\vdash C \wedge F' \rightarrow . D' \rightarrow E'$	*Definición de* $[x, C]$, *para* $F' \in x$, 5
10. $\vdash (B \wedge F) \vee (C \wedge F') \rightarrow . (D \rightarrow E) \vee (D' \rightarrow E')$	(XII), 8, 9
11. $\vdash (B \vee C) \wedge (F \wedge F') \rightarrow . (D \rightarrow E) \vee (D' \rightarrow E')$	(XII), 10
12. $(B \vee C) \wedge (F \wedge F') \in x$	*Definiciones anteriores*, *x está cerrado por Adjunción*, 11

13. $(D \to E) \vee (D' \to E') \in x$	$x\, está\, cerrado\, por\, B-implicación$
14. $\vdash (D \to E) \vee (D' \to E') \to \mathbf{.}\,(D \wedge D') \to (E \vee E')$	$(XIII)$
15. $D \wedge D' \to \mathbf{.}E \vee E' \in x$	$R1, 13, 14$
16. $D \wedge D' \in b$	$Definiciones\, anteriores,\, b\, está\, cerrado\, por\, Adjunción$
17. $E \vee E' \in c$	$C4,\ Hipótesis\, del\, Lema\, 5, 15, 16$
18. $E \in c$ o $E' \in c$	$C3, 17$

18 se contradice con 4 y 7, por lo tanto x es prima

Por último falta dar la prueba para $R^T ayc$. Si definimos $[y, B]$ y $[y, C]$ de manera similar a como hemos hecho antes con $[x, B]$ y $[x, C]$, podemos suponer válidas las pruebas que demuestran que están cerrados por adjunción, B-implicación y que $[y, B] \supset y$. De ello, y sabiendo que la teoría maximal que incluye a b y tiene la relación R^T con a y c es y, i.e. $b \subseteq y$ & $R^T ayc$, se sigue:

1. $No - R^T a\,[y, B]\,c \,\&\, No - R^T a\,[y, C]\,c$	$y\, es\, maximal,\ R^T ayc$
2. $D \to E \in a$	$C4, 1$
3. $D \in [y, B]$	$C4, 1$
4. $E \notin c$	$C4, 1$
5. $D' \to E' \in a$	$C4, 1$
6. $D' \in [y, C]$	$C4, 1$
7. $E' \notin c$	$C4, 1$
8. $\vdash B \wedge F \to \mathbf{.}D$	$Definición\, de\ [y, B]\,,\ para\, F \in y, 3$
9. $\vdash C \wedge F' \to \mathbf{.}D'$	$Definición\, de\ [y, C]\,,\ para\, F' \in y, 6$
10. $\vdash (B \wedge F) \vee (C \wedge F') \to \mathbf{.}D \vee D'$	$(XII)\,, 8, 9$
11. $\vdash (B \vee C) \wedge (F \wedge F') \to \mathbf{.}D \vee D'$	$(XII)\,, 10$
12. $(B \vee C) \wedge (F \wedge F') \in y$	$Definiciones\, anteriores,\ y\, está\, cerrado\, por\, Adjunción, 11$
13. $D \vee D' \in y$	$y\, está\, cerrado\, por\, B-implicación$
14. $D \in y$ o $D' \in y$	$C3, 13$

Suponemos que $D \in y$

15. $D \in y$	$Hipótesis$
16. $E \in c$	$C4, 2, 15$

Pero 4 y 16 se contradicen.

Ahora suponemos que $D' \in y$

17. $D' \in y$	$Hipótesis$

18. $E' \in c$ $C4, 5, 17$

Pero 6 y 18 se contradicen.

Así queda probado el Lema 5 ■

Retomamos ahora la prueba del Lema 4:

Suponiendo $a \subseteq b$ hay que demostrar $a \leq^c b$. Es decir, $R^c xab$, donde $x \in O^c$. Tenemos $R^T Baa$, pues a está cerrada por B-implicación y B, considerado como el conjunto de los teoremas de B, está cerrado por adjunción y B-implicación. Entonces por el Lema 5, hay $x \in K^c$ tal que $B \subseteq x$ & $R^T xaa$. Como $a \subseteq b$, $R^T xab$, y dado que x incluye a B, x tiene todos los teoremas de B, entonces $x \in O^c$.
■

Lema 6: Sea A una fbf y a una teoría tal que $A \notin a$, entonces hay una teoría prima x tal que $a \subseteq x$ & $A \notin x$

Prueba:

Sea a una teoría y A una fbf tal que $A \notin a$. Extendemos a a una teoría maximal x tal que $A \notin x$ utilizando el Lema de Zorn. Nos queda probar que es prima. Para ello operamos por reductio suponiendo que hay fbf B y C tales que $B \vee C \in x \,\&\, B \notin x \,\&\, C \notin x$. Definimos$[x, B]$ y$[x, C]$ de la misma manera que lo hemos hecho más arriba al principio de la prueba del Lema 5, y tomamos por válidas las pruebas que demuestran que $[x, B] \supset x$ y $[x, C] \supset x$, así como que están cerrados por adjunción y B-implicación, o sea, son teorías.

Procedemos a la prueba:

1. $[x, B]$ y $[x, C]$ están cerrados por adjunción y B-implicación, es decir, son teorías	*Hipótesis*
2. $[x, B] \supset x$ y $[x, C] \supset x$	*Hipótesis*
3. $A \in [x, B]$ & $A \in [x, C]$ ya que la teoría maximal sin A es x	*Hipótesis*
4. $\vdash B \wedge F \rightarrow .A$	$Definición\,de\ [x, B]\ , para\, F \in x, 3$
5. $\vdash C \wedge F' \rightarrow .A$	$Definición\,de\ [x, C]\ , para\, F' \in x, 3$
6. $\vdash (B \wedge F) \vee (C \wedge F') \rightarrow .A$	$(XI)\,, 4, 5$
7. $\vdash (B \vee C) \wedge (F \wedge F') \rightarrow .A$	$(XII)\,, 6$
8. $(B \vee C) \wedge (F \wedge F') \in x$	$Definiciones\, anteriores,\, x\, está\, cerrado\, por\, Adjunción, 7$
9. $A \in x$	$x\, está\, cerrado\, por\, B-implicación$

9 es imposible, por tanto x es prima, con lo cual queda probado el Lema 6 ■

Corolario 1:
$\nvdash A$ implica que hay una teoría normal y prima x, tal que $A \notin x$
Prueba:
Sea B el conjunto de todos los teoremas y A una fbf tal que $A \notin B$. Dada la definición de B, si A no pertenece, entonces no es demostrable, es decir, $\nvdash A$. Por el Lema 6 es posible extender B a x, donde x es una teoría prima y normal tal que $A \notin x$.
■

Lema 7: $A \in a$ syss $\neg A \notin a*^c$

Prueba:

De izquierda a derecha:

1. $A \in a$	*Hipótesis*
2. $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$	$A9$
3. $\neg\neg A \in a$	$a\,es\,teoría, 1, 2$
4. $\neg A \notin a*^c$	$C5$

De derecha a izquierda:

1. $\neg A \notin a*^c$	*Hipótesis*
2. $\neg\neg A \in a$	$C5, 1$
3. $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$	$A9$
4. $A \in a$	$a\,es\,teoría, 2, 3$

■

Una vez completada la prueba de los lemas previos, procedemos al paso (I) de la prueba que demuestra que el modelo canónico es efectivamente un modelo. En este paso se prueba que hay al menos una teoría normal y prima.

Prueba:

Por el corolario 1, podemos demostrar que, si hay una fbf A, tal que $\nvdash A$, entonces tendremos, al menos, una teoría normal y prima que no la contendrá. ■

Una vez concluido el paso (I), procedemos al paso (IV), ya que, tal y como se ha especificado más arriba, (II) y (III) son obvios. En este paso probaremos que se cumplen los postulados.

(IV):

Sean $a, b, c...$ elementos de O^c

P1. $a \leq^c a$

Prueba:

Obvio por el Lema 4, ya que $a \subseteq a$ ■

P2. $a \leq^c b \,\&\, R^c bcd \Rightarrow R^c acd$

Prueba:

1. $a \leq^c b \,\&\, R^c bcd$	$Hipótesis$
2. $A \to B \in a \,\&\, A \in c$	$Hipótesis$
3. $a \subseteq b \,\&\, R^c bcd$	$Lema\, 4, 1$
4. $A \to B \in b$	$2, 3$
5. $B \in d$	$C4, 2, 3, 4$

■

P3. $a \leq^c b \Rightarrow b* \leq a*$

Prueba:

1. $a \leq^c b$	$Hipótesis$
2. $A \in b*^c$	$Hipótesis$
3. $a \subseteq b$	$Lema\, 4, 1$
4. $\neg A \notin b$	$C5, 1$
5. $\neg A \notin a$	$3, 4$
6. $A \in a*^c$	$C5, 5$

■

P4. $a \leq^c a *^c *^c$

Prueba:

1. $A \in a$	$Hipótesis$
2. $\vdash A \to \neg\neg A$	$A9$
3. $\neg\neg A \in a$	$a\, es\, teoría, 1, 2$
4. $\neg A \notin a*^c$	$C5, 3$
5. $A \in a *^c *^c$	$C5, 4$

■

P5. $a *^c *^c \leq^c a$

Prueba:

1. $A \in a *^c *^c$ — $Hipótesis$
2. $\neg A \notin a*^c$ — $C5, 1$
3. $A \in a$ — $Lema\, 7, 2$

■

Una vez probado que se cumplen los postulados, procedemos al paso (V), demostrar que se cumplen las cláusulas.

(V):
Previo a la demostración de que se cumplen las cláusulas, llevaremos a cabo la demostración de un lema auxiliar que probará ser de utilidad.

Lema 8: Sean a y b dos teorías cualesquiera. Considérese el conjunto $x = \{B | \exists A\, [A \in b \,\&\, A \to B \in a]\}$. Entonces x es una teoría tal que $R^T abx$

Prueba:

Primero se prueba que x es efectivamente una teoría, es decir, está cerrado por B-implicación y adjunción.

x está cerrado por B-implicación:

1. $\vdash A \to B$ — $Hipótesis$
2. $A \in x$ — $Hipótesis$
3. $C \to A \in a$ y $C \in b$ — $Definición\ de\ x, 2$
4. $\vdash C \to A \to \mathbf{.} C \to B$ — $R6, 1$
5. $C \to B \in a$ — $a\ es\ teoría, 4$
6. $B \in x$ — $Definición\ de\ x, 3, 5$

x está cerrado por adjunción:

1. $A \in x$ — $Hipótesis$
2. $B \in x$ — $Hipótesis$
3. $C \to A \in a$ y $C \in b$ — $Definición\ de\ x, 1$
4. $C' \to A \in a$ y $C' \in b$ — $Definición\ de\ x, 2$
5. $(C \to A) \wedge (C' \to B) \in a$ — $a\ es\ teoría, 3, 4$
6. $\vdash (C \to A) \wedge (C' \to B) \to \mathbf{.} (C \wedge C') \to (A \wedge B)$ — (IX)
7. $(C \wedge C') \to (A \wedge B)$ — $a\ es\ teoría, 5, 6$
8. $A \wedge B \in x$ — $C4, 3, 4, 7$

Dado que a, b y x son teorías, es decir, $a, b, x \in K^T$, y $R^T abx$ syss $A \to B \in a \,\&\, B \in b \Rightarrow B \in x$, es obvio, por la definición de x, que $R^T abx$, concluyendo así la prueba del Lema 8■

Una vez probado el lema procedemos a probar las cláusulas

C1. $a \leq^c b \,\&\, a \models^c p_i \Rightarrow b \models^c p_i$

1. $a \leq^c b \,\&\, a \models^c p_i$	$Hipótesis$
2. $a \subseteq b$	$Lema\, 4, 1$
3. $p_i \in a$	$Definición\, 3 - (V), 1$
4. $p_i \in b$	$C1, 2, 3$
5. $b \models^c p_i$	$Definición\, 3 - (V), 4$

■

C2. $a \models^c A \wedge B$ syss $a \models^c A$ y $a \models^c B$
De izquierda a derecha:

1. $a \models^c A \wedge B$	$Hipótesis$
2. $A \wedge B \in a$	$Definición\, 3 - (V), 1$
3. $\vdash (A \wedge B) \rightarrow A$	$A2$
4. $\vdash (A \wedge B) \rightarrow B$	$A3$
5. $A \in a$	$a\, es\, teoría, 2, 3$
6. $B \in a$	$a\, es\, teoría, 2, 4$
7. $a \models^c A$	$Definición\, 3 - (V), 5$
8. $a \models^c B$	$Definición\, 3 - (V), 6$
9. $a \models^c A$ y $a \models^c B$	$7, 8$

De derecha a izquierda:

1. $a \models^c A$ y $a \models^c B$	$Hipótesis$
2. $A \in a$ y $B \in a$	$Definición\, 3 - (V), 1$
3. $A \wedge B \in a$	$a\, está\, cerrada\, por\, adjunción, 2$
4. $a \models^c A \wedge B$	$Definición\, 3 - (V), 3$

■

C3. $a \models^c A \vee B$ syss $a \models^c A$ o $a \models^c B$
De izquierda a derecha:

1. $a \models^c A \vee B$	$Hipótesis$
2. $A \vee B \in a$	$Definición\, 3 - (V), 1$
3. $A \in a$ o $B \in a$	$a\, es\, prima, 2$
4. $a \models^c A$ o $a \models^c B$	$Definición\, 3 - (V), 3$

De derecha a izquierda:

1. $a \models^c A$ o $a \models^c B$ — *Hipótesis*
2. $A \in a$ o $B \in a$ — $Definición\, 3-(V), 1$
3. $\vdash A \to (A \vee B)$ — $A5$
4. $\vdash B \to (A \vee B)$ — $A6$
5. $A \vee B \in a$ — $a\, es\, prima, 2, 3, 4$
6. $a \models^c A \vee B$ — $Definición\, 3-(V), 5$

■

C4. $a \models^c A \to B$ syss $R^c abc \,\&\, b \models^c A \Rightarrow c \models^c B$
De izquierda a derecha:

1. $a \models^c A \to B \,\&\, R^c abc \,\&\, b \models^c A$ — *Hipótesis*
2. $A \to B \in a \,\&\, R^c abc \,\&\, A \in b$ — $Definición\, 3-(V), 1$
3. $B \in c$ — $Definición\, 3-(III), 2$
4. $c \models^c B$ — $Definición\, 3-(V), 3$

De derecha a izquierda:

En esta prueba procederemos por contraposición, es decir, $A \to B \notin a \Rightarrow$ No $(R^c abc \,\&\, A \in b \Rightarrow B \in c)$ o también $A \to B \notin a$ implica que hay $b', c' \in K^c$ tales que $R^c ab'c'$ & $A \in b \,\&\, B \notin c$. Para ello damos la siguiente definición: $b = \{C | \models A \to C\}$, o sea, $D \in b$ syss $\vdash A \to D$. A continuación probamos que b es teoría, es decir, está cerrado por B-implicación y adjunción, donde C y D son dos fbf cualesquiera.

b está cerrado por B-implicación:

1. $\vdash C \to D$ — *Hipótesis*
2. $C \in b$ — *Hipótesis*
3. $\vdash A \to C$ — $Definición\, de\, b, 2$
4. $\vdash A \to D$ — $Transitividad, 1, 3$
5. $D \in b$ — $Definición\, de\, b, 4$

b está cerrado por adjunción:

1. $C \in b$ — *Hipótesis*
2. $D \in b$ — *Hipótesis*
3. $\vdash A \to C$ — $Definición\, de\, b, 1$
4. $\vdash A \to D$ — $Definición\, de\, b, 2$
5. $\vdash A \to (C \wedge D)$ — $A4, 3, 4$
6. $C \wedge D \in b$ — $Definición\, de\, b, 5$

De manera similar definimos $c = \{C \mid \exists D \in b \,\&\, (D \to C) \in a\}$, es decir, $F \in b$ syss $D \to F$, para alguna $D \in b$. Por el Lema 8 que hemos probado con anterioridad c es una teoría tal que $R^T abc$.

Ahora procedemos por reducción al absurdo para probar $B \notin c$:

1. $B \in c$	$Hipótesis$
2. $D \to B \in a$ & $D \in b$	$Definición\, de\, c, 1$
3. $\vdash A \to D$	$Definición\, de\, b, 2$
4. $\vdash D \to B \to .A \to B$	$Sufijación, 3$
5. $A \to B \in a$	$a\, es\, teoría, 2, 4$

Dado que 5 contradice la hipótesis, tenemos que $B \notin c$.

Probamos ahora que $A \in b$:

A través de A1, y de la definición que hemos dado antes de b, tenemos que $A \in b$. Por tanto, tenemos teorías b y c tales que $R^T abc$ & $A \in b$ & $B \notin c$.

Falta por último extender las teorías b y c a teorías primas tales que $R^c ab'c'$&$A \in b'$ & $B \notin c'$. Para ello primero extendemos c a una teoría prima. Para ello usaremos el Lema 6, que dice que si A es una fbf y a es una teoría tal que $A \notin a$, existe una teoría prima x tal que $a \subseteq x$ & $A \notin x$, con lo cual nos resulta fácil ver que podemos transformar c en una teoría prima c'. Una vez extendida c a una teoría prima c', b es extendible a una teoría prima por el Lema 5 que dice que si a y b son teorías y $c \in K^c$, tales que $R^T abc$, entonces existen $x, y \in K^c$ tales que $a \subseteq x, b \subseteq y$ y $R^T xbc$ y $R^T ayc$. Así, b es extendida a una teoría prima b', con lo cual queda probada la Cláusula 4 ■

C5. $a \models^c \neg A$ syss $a{*}^c \not\models^c A$
Podemos interpretar la cláusula como $\neg A \in a$ syss $A \notin a{*}^c$, gracias a la Definición 3-(V). Por la Definición 3-(IV) $a{*}^c = \{B | \neg B \notin a\}$ .Entonces $B \in a{*}^c$ syss $\neg B \notin a$. Por tanto, $\neg A \in a$ syss $A \notin a{*}^c$ ■

Con la prueba de las cláusulas hemos probado que el modelo canónico es efectivamente un modelo.

1.6.2 Teorema de Completud

Podemos ya proceder al la segunda parte de la prueba de completud, consistente en probar el teorema de completud: $\models A \Rightarrow \vdash A$

Prueba:

Procedemos por contraposición, suponiendo que $\nvdash A$. Sea c la teoría maximal sin A, por el Corolario 1, A no pertenece a c, i e. $A \notin c$. Por la definición del modelo canónico $c \in O^c$ y $c \not\models A$, con lo cual $\not\models A$. Hay un modelo, a saber, el canónico, y un mundo designado en él, $c \in O^c$, tal que $c \not\models A$: $\not\models A$ ■

7 La lógica DW

La lógica relevante DW es una extensión de la lógica básica B, caracterizada por la sustitución de la regla de contraposición por el axioma correspondiente. Debido al cambio de epígrafe, al igual que se hizo en el anterior, se evitarán los subíndices correspondientes a los operadores de consecuencia y validez semántica, que en este caso pasarán de ser B a ser DW. Su formulación pues, quedaría como sigue:

Axiomas:

A1. $A \to A$
A2. $(A \wedge B) \to A$
A3. $(A \wedge B) \to B$
A4. $(A \to B) \wedge (A \to C) \to \mathbf{.} A \to (B \wedge C)$
A5. $A \to (A \vee B)$
A6. $B \to (A \vee B)$
A7. $(A \to C) \wedge (B \to C) \to \mathbf{.} (A \vee B) \to C$
A8. $A \wedge (B \vee C) \to \mathbf{.} (A \wedge B) \vee (B \wedge C)$
A9. $\neg\neg A \to A$
A10. $A \to \neg B \to \mathbf{.} B \to \neg A$

Reglas:

R1. $\vdash A, \vdash A \to B \Rightarrow \vdash B$
R2. $\vdash A, \vdash B, \Rightarrow \vdash A \wedge B$
R3. $\vdash A \to B, \vdash C \to D \Rightarrow \vdash B \to C \to \mathbf{.} A \to D$

R3 puede mantenerse como una sola regla o puede ser descompuesta en dos reglas distintas:

R4. $\vdash A \to B \Rightarrow \vdash B \to C \to \mathbf{.} A \to C$
R5. $\vdash A \to B \Rightarrow \vdash C \to A \to \mathbf{.} C \to B$

Donde R1 corresponde a la regla Modus Ponens, R2 a la regla de Adjunción, R3 a la regla de Afijación, R4 a la regla de Sufijación y R5 a la regla de Prefijación.

7.1 Modelo-DW

Un modelo-DW es una restricción del modelo-B definido en la sección anterior correspondiente, cuya única diferencia estriba en la inclusión de un nuevo postulado, específico para la contraposición, que, como se ha señalado antes, aparece como axioma en vez de como regla.

P6. $R^c abc \Rightarrow R^c ac * b*$

La inclusión de este postulado hace que los postulados que valían con anterioridad en B, sigan siendo igual de importantes excepto P3, que se sigue trivialmente de P6, pero al que seguiremos haciendo referencia si fuese necesario en DW debido a la utilidad práctica que pueda tener.

7.2 Prueba de corrección de DW

Para la prueba de corrección de DW tomaremos como referencia la prueba de corrección de B que hemos llevado a cabo más arriba, que recordemos que era una extensión de la prueba de corrección de B+ aparecida en Cf.[**Robles, G.**, 2006]. A esta prueba le añadiremos la demostración de que A10 es válido y eliminaremos la prueba de que R3 preserva la validez.

A10 es válido:

Prueba:

Usamos el Lema de vinculación para todo $a \in K$ de todo M, $a \models A \to \neg B \Rightarrow a \models B \to \neg A$

1. $a \models A \to \neg B$	*Hipótesis*

Sean b y $c \in K$, hemos de probar $c \models \neg A$, para así probar $a \models B \to \neg A$

2. $Rabc$ & $b \models B$	*Hipótesis*
3. $b* \not\models \neg B$	$C5, 2$
4. $Rac * b*$	$P6, 2$
5. $c* \not\models A$	$C4, 1, 3, 4$
6. $c \models \neg A$	$C5, 5$

■

7.3 Algunos ejemplos de validez de teoremas y reglas de DW

Al igual que hicimos con la lógica B, probaremos algunos teoremas que demostrarán ser de utilidad para el desarrollo de las pruebas posteriores.
(XIV): $\models A \to B \to .\neg B \to \neg A$

(XIV):
Sea M un modelo-DW arbitrario tal que $a \in O$ y $b, c \in K$

1. $a \models A \to B$	*Hipótesis*
2. $Rabc$ & $b \models \neg B$	*Hipótesis*
3. $b* \not\models B$	$C5, 2$
4. $b \leq c$	$D1, 2$

5. $c* \leq b*$ $\qquad P3, 4$
6. $b* \not\models A$ $\qquad Lema\, 2, 1, 3$
7. $c* \not\models A$ $\qquad Lema\, 1, 5, 6$
8. $c \models \neg A$ $\qquad C5, 7$

■

7.4 Algunos ejemplos de pruebas sintácticas en DW

Como el epígrafe anterior, por semejanza a la parte dedicada a B, incluiremos determinadas pruebas sintácticas para DW, a saber, las de aquellos teoremas que no puedan ser probados en B.

(a) T6: $A \to B \to .\neg B \to \neg A$

Prueba:

1. $A \to \neg\neg B \to .\neg B \to \neg A$ $\qquad A10$
2. $B \to \neg\neg B$ $\qquad T1$
3. $A \to B \to .A \to \neg\neg B$ $\qquad R5, 2$
4. $A \to B \to .\neg B \to \neg A$ $\qquad Transitividad, 1, 3$

■

(b) T2: $\neg A \to B \to .\neg B \to A$

Prueba:

1. $\neg A \to \neg\neg B \to .\neg B \to \neg\neg A$ $\qquad A10$
2. $\neg A \to \neg\neg B \to .\neg B \to A$ $\qquad A9, 1$
3. $B \to \neg\neg B$ $\qquad T1$
4. $\neg A \to B \to .\neg A \to \neg\neg B$ $\qquad R5, 3$
5. $\neg A \to B \to .\neg B \to A$ $\qquad Transitividad, 2, 4$

■

(c) T3: $\neg A \to \neg B \to .B \to A$

Prueba:

1. $\neg A \to \neg\neg\neg B \to .\neg\neg B \to \neg\neg A$ $\qquad A10$
2. $\neg B \to \neg\neg\neg B$ $\qquad T1$
3. $\neg A \to \neg B \to .\neg A \to \neg\neg\neg B$ $\qquad R5, 2$
4. $\neg A \to \neg B \to .\neg\neg B \to \neg\neg A$ $\qquad Transitividad, 1, 3$
5. $\neg A \to \neg B \to .B \to A$ $\qquad A9, 4$

■

7.5 Completud de DW

La prueba de completud de DW es una extensión de la prueba de completud de B, la única diferencia estriba en P6, con lo cual, lo único que debemos hacer para probar la completud de DW es añadir a la prueba de completud de B la demostración de que P6 se cumple.

Se cumple P6. $R^c abc \Rightarrow R^c ac *^c b*^c$

Prueba:

1. $R^c abc$	*Hipótesis*
2. $A \to B \in a \,\&\, A \in c*^c$	*Hipótesis*
3. $\vdash A \to B \to .\neg B \to \neg A$	(XIV)
4. $\neg B \to \neg A \in a$	$a\, es\, teoría, 2, 3$
5. $\neg A \notin c$	$C5, 2$
6. $\neg B \notin b$	$C4, 1, 4, 5$
7. $B \in b*^c$	$C5, 6$

■

Con esta adición quedaría probada la completud de DW

Parte III

Postulados semánticos correspondientes a la tesis MP, MT y otras relacionadas

Los postulados semánticos correspondientes son una serie de teoremas y tesis ligados a unas determinadas configuraciones en forma de postulados, aparecidos en Cf.[**Robles, G. y Méndez, J. M.**, 2014a], cuya formulación es exactamente como sigue:

T1. $A \to .B \vee \neg(A \to B)$
T2. $\neg B \to .\neg A \vee \neg(A \to B)$
T3. $(A \to B) \wedge \neg B \to .\neg A$
T4. $(A \to B) \wedge A \to .B$
T5. $A \wedge \neg B \to .\neg(A \to B)$
T6. $A \to B \to .\neg A \vee B$
T7. $A \wedge \neg B \to .B \vee \neg(A \to B)$
T8. $A \wedge \neg B \to .\neg A \vee \neg(A \to B)$
T9. $(A \to B) \wedge A \to .\neg A \vee B$
T10. $(A \to B) \wedge \neg B \to .\neg A \vee B$

Los postulados semánticos correspondientes a estas tesis son, respectivamente:

P1. $Ra*aa$
P2. $Ra*a*a*$
P3. $Raa*a*$
P4. $Raaa$
P5. $Ra*aa*$
P6. $Raa*a$
P7. $Ra*aa$ o $Ra*aa*$
P8. $Ra*a*a*$ o $Ra*aa*$
P9. $Raaa$ o $Raa*a$
P10. $Raa*a*$ o $Raa*a$

Cada uno de estos postulados añadidos a la semántica de DW junto con el teorema correspondiente en el cuerpo del sistema, genera un sistema por derecho propio, para ello, primero se ha de probar la validez de los teoremas, y después se ha de probar que el postulado semántico correspondiente se sigue canónicamente. Para la prueba de la validez de los teoremas procederemos por reducción al absurdo, mientras que para la prueba de la demostración canónica de los postulados procederemos a comprobar su adecuación a la definición dada en C4, señalando que los postulados que van de P7 a P10, es decir, los postulados de carácter disyuntivo, serán probados por reducción al absurdo. Es importante también señalar que A y B son dos fbf cualesquiera.

T1 y P1
$A \to .B \vee \neg(A \to B)$ y $Ra*aa$

T1 es válido:

Prueba:

1. $a \models A$	*Hipótesis*
2. $a \not\models B \vee \neg(A \to B)$	*Hipótesis*
3. $a \not\models B$ y $a \not\models \neg(A \to B)$	$C3, 2$
4. $a \not\models B$	3
5. $a \not\models \neg(A \to B)$	3
6. $a* \models A \to B$	$C5, 5$
7. $Ra*aa$	$P1$
8. $a \models B$	$C4, 1, 6, 7$

Pero 4 y 8 se contradicen ■

P1 se sigue canónicamente:

Prueba:

1. $A \to B \in a*$	*Hipótesis*
2. $A \in a$	*Hipótesis*
3. $\vdash A \to .B \vee \neg(A \to B)$	$T1$
4. $[B \vee \neg(A \to B)] \in a$	$C4, 2, 3$
5. $\neg(A \to B) \notin a$	$C5, 1$
6. $B \in a$	$C3, 4, 5$

■

T2 y P2
$\neg B \to .\neg A \vee \neg(A \to B)$ y $Ra*a*a*$

T2 es válido:

Prueba:

1. $a \models \neg B$	*Hipótesis*
2. $a \not\models \neg A \vee \neg(A \to B)$	*Hipótesis*
3. $a \not\models \neg A$ y $a \not\models \neg(A \to B)$	$C3, 2$
4. $a* \models A \to B$	$C5, 3$
5. $a* \models A$	$C5, 3$

6. $a* \not\models B$ $\quad C5, 1$
7. $Ra * a * a*$ $\quad P2$
8.$a* \models B$ $\quad C4, 4, 5, 7$

Pero 6 y 8 se contradicen ■

P2 se sigue canónicamente:

Prueba:

1. $A \to B \in a*$ $\quad Hipótesis$
2. $A \in a*$ $\quad Hipótesis$
3. $\vdash \neg B \to .\neg A \vee \neg (A \to B)$ $\quad T2$
4. $\neg (A \to B) \notin a$ $\quad C5, 1$
5. $\neg A \notin a$ $\quad C5, 2$
6. $\neg A \vee \neg (A \to B) \notin a$ $\quad C3, 4, 5$
7. $\neg B \notin a$ $\quad C4, 3, 6$
8. $B \in a*$ $\quad C5, 7$

■

T3 y P3
$(A \to B) \wedge \neg B \to .\neg A$ y $Raa * a*$

T3 es válido:

Prueba:

1. $a \models (A \to B) \wedge \neg B$ $\quad Hipótesis$
2. $a \not\models \neg A$ $\quad Hipótesis$
3. $a \models A \to B$ y $a \models \neg B$ $\quad C2, 1$
4. $a* \models A$ $\quad C5, 2$
5. $Raa * a*$ $\quad P3$
6. $a* \models B$ $\quad C4, 3, 4, 5$
7. $a \not\models \neg B$ $\quad C5, 6$

Pero 3 y 7 se contradicen ■

P3 se sigue canónicamente:

Prueba:

1. $A \to B \in a$ $\quad Hipótesis$
2. $A \in a*$ $\quad Hipótesis$
3. $\neg A \notin a$ $\quad C5, 2$
4. $\vdash (A \to B) \wedge \neg B \to .\neg A$ $\quad T3$

5. $(A \to B) \wedge \neg B \notin a$ $C4, 3, 4$
6. $\neg B \notin a$ $C2, 1, 5$
7. $B \in a*$ $C5, 6$

■

T4 y P4
$(A \to B) \wedge A \to .B$ y $Raaa$

T4 es válido:

Prueba:

1. $a \models (A \to B) \wedge A$ *Hipótesis*
2. $a \not\models B$ *Hipótesis*
3. $a \models A \to B$ y $a \models A$ $C2, 1$
4. $Raaa$ $P4$
5. $a \models B$ $C4, 3, 4$

Pero 2 y 5 se contradicen ■

P4 se sigue canónicamente:

Prueba:

1. $A \to B \in a$ *Hipótesis*
2. $A \in a$ *Hipótesis*
3. $\vdash (A \to B) \wedge A \to .B$ $T4$
4. $(A \to B) \wedge A \in a$ $C2, 1, 2$
5. $B \in a$ $C4, 3, 4$

■

T5 y P5
$A \wedge \neg B \to .\neg (A \to B)$ y $Ra * aa*$

T5 es válido:

Prueba:

1. $a \models A \wedge \neg B$ *Hipótesis*
2. $a \not\models \neg (A \to B)$ *Hipótesis*
3. $a \models A$ y $a \models \neg B$ $C2, 1$
4. $a* \models A \to B$ $C5, 2$
5. $Ra * aa*$ $P5$
6. $a* \models B$ $C4, 3, 4, 5$

7. $a \not\models \neg B$ $C5, 6$

Pero 3 y 7 se contradicen ■

P5 se sigue canónicamente:

Prueba:

1. $A \to B \in a*$ $Hipótesis$
2. $A \in a$ $Hipótesis$
3. $\vdash A \land \neg B \to .\neg (A \to B)$ $T5$
4. $\neg (A \to B) \notin a$ $C5, 1$
5. $A \land \neg B \notin a$ $C4, 3, 4$
6. $\neg B \notin a$ $C2, 2, 5$
7. $B \in a*$ $C5, 6$

■

T6 y P6
$A \to B \to .\neg A \lor B$ y $Raa * a$

T6 es válido:

Prueba:

1. $a \models A \to B$ $Hipótesis$
2. $a \not\models \neg A \lor B$ $Hipótesis$
3. $a \not\models \neg A$ y $a \not\models B$ $C3, 2$
4. $a* \models A$ y $a* \models \neg B$ $C5, 3$
5. $Raa * a$ $P6$
6. $a \models B$ $C4, 1, 4, 5$
7. $a* \not\models \neg B$ $C5, 6$

Pero 4 y 7 se contradicen ■

P6 se sigue canónicamente:

Prueba:

1. $A \to B \in a$ $Hipótesis$
2. $A \in a*$ $Hipótesis$
3. $\vdash A \to B \to .\neg A \lor B$ $T6$
4. $\neg A \lor B \in a$ $C4, 1, 3$
5. $\neg A \notin a$ $C5, 2$
6. $B \in a$ $C3, 4, 5$

$\blacksquare$

T7 y P7
$A \wedge \neg B \to . B \vee \neg (A \to B)$ y $Ra * aa$ o $Ra * aa*$

T7 es válido:

Prueba:

1. $a \models A \wedge \neg B$	*Hipótesis*
2. $a \not\models B \vee \neg (A \to B)$	*Hipótesis*
3. $a \models A$ y $a \models \neg B$	$C2, 1$
4. $a \not\models B$ y $a \not\models \neg (A \to B)$	$C3, 2$
5. $a* \models A \to B$	$C5, 4$
6. $a* \not\models B$	$C5, 3$

En este punto existen dos casos, donde en cada uno consideramos una de las dos partes del postulado. 1er caso:

7. $Ra * aa$	$P7$
8. $a \models B$	$C4, 3, 5, 7$

Pero 4 y 8 se contradicen. 2do caso:

9. $Ra * aa*$	$P7$
10. $a* \models B$	$C4, 3, 5, 9$

Pero 6 y 10 se contradicen $\blacksquare$

P7 se sigue canónicamente:

Prueba:

1. $A \to B \in a*$ y $A' \to B' \in a*$	*Hipótesis*
2. $A \in a$ y $A' \in a$	*Hipótesis*
3. $B \notin a$ y $B' \notin a*$	*Hipótesis*
4. $A \wedge \neg B \to . B \vee \neg (A \to B)$	$T7$
5. $(A \wedge A') \wedge \neg (B \wedge B') \to . (B \wedge B') \vee \neg [(A \wedge A') \to (B \wedge B')]$	4
6. $(A \to B) \wedge (A' \to B') \in a*$	$C2, 1$
7. $A \wedge A' \to . B \wedge B' \in a*$	$(IX), 6$
8. $\neg [(A \wedge A') \to (B \wedge B')] \notin a$	$C5, 7$
9. $A \wedge A' \in a$	$C2, 2$
10. $B \wedge B' \notin a$	$C2, 3$
11. $(B \wedge B') \vee \neg [(A \wedge A') \to (B \wedge B')] \notin a$	$C3, 8, 10$
12. $(A \wedge A') \wedge \neg (B \wedge B') \notin a$	$C4, 5, 11$
13. $\neg (B \wedge B') \notin a$	$C2, 9, 12$

14. $B \wedge B' \in a*$	$C5, 13$
15. $B \in a*$ y $B' \in a*$	$C2, 14$

Pero 3 y 15 se contradicen ■

T8 y P8
$A \wedge \neg B \rightarrow .\neg A \vee \neg (A \rightarrow B)$ y $Ra * a * a*$ o $Ra * aa*$

T8 es válido:

Prueba:

1. $a \models A \wedge \neg B$	*Hipótesis*
2. $a \not\models \neg A \vee \neg (A \rightarrow B)$	*Hipótesis*
3. $a \models A$ y $a \models \neg B$	$C2, 1$
4. $a* \not\models B$	$C5, 3$
5. $a \not\models \neg A$ y $a \not\models \neg (A \rightarrow B)$	$C3, 2$
6. $a* \models A$	$C5, 5$
7. $a* \models A \rightarrow B$	$C5, 5$

En este punto existen dos casos, donde en cada uno consideramos una de las dos partes del postulado. 1er caso:

8. $Ra * a * a*$	$P8$
9. $a* \models B$	$C4, 6, 7, 8$

Pero 4 y 9 se contradicen. 2do caso:

10. $Ra * aa*$	$P8$
11. $a* \models B$	$C4, 3, 7, 10$

Pero 4 y 11 se contradicen■

P8 se sigue canónicamente:

Prueba:

1. $A \rightarrow B \in a*$ y $A' \rightarrow B' \in a*$	*Hipótesis*
2. $A \in a*$ y $A' \in a$	*Hipótesis*
3. $B \notin a*$ y $B' \notin a*$	*Hipótesis*
4. $A \wedge \neg B \rightarrow .\neg A \vee \neg (A \rightarrow B)$	$T8$
5. $(A \vee A') \wedge \neg (B \vee B') \rightarrow .\neg (A \vee A') \vee \neg [(A \vee A') \rightarrow (B \vee B')]$	4
6. $(A \rightarrow B) \wedge (A' \rightarrow B') \in a*$	$C2, 1$
7. $A \vee A' \rightarrow .B \vee B' \in a*$	$(XI), 6$
8. $\neg [(A \vee A') \rightarrow (B \vee B')] \notin a$	$C5, 7$
9. $A \vee A' \in a*$	$C3, 2$

10.	$\neg(A \vee A') \notin a$	$C5, 9$
11.	$B \vee B' \notin a*$	$C3, 3$
12.	$\neg(A \vee A') \vee \neg[(A \vee A') \to (B \vee B')] \notin a$	$C3, 8, 10$
13.	$(A \vee A') \in a$	$C3, 2$
14.	$(A \vee A') \wedge \neg(B \vee B') \notin a$	$C4, 5, 12$
15.	$\neg(B \vee B') \notin a$	$C2, 13, 14$
16.	$B \vee B' \in a*$	$C5, 16$

Pero 11 y 15 se contradicen ■

T9 y P9
$(A \to B) \wedge A \to .\neg A \vee B$ y $Raaa$ o $Raa * a$

T9 es válido:

Prueba:

1.	$a \models (A \to B) \wedge A$	*Hipótesis*
2.	$a \not\models \neg A \vee B$	*Hipótesis*
3.	$a \models A \to B$ y $a \models A$	$C2, 1$
4.	$a \not\models \neg A$ y $a \not\models B$	$C3, 2$
5.	$a* \models A$	$C5, 4$

En este punto existen dos casos, donde en cada uno consideramos una de las dos partes del postulado. 1er caso:

6.	$Raaa$	$P9$
7.	$a \models B$	$C4, 3, 6$

Pero 4 y 7 se contradicen. 2do caso:

8.	$Raa * a$	$P9$
9.	$a \models B$	$C4, 3, 5, 8$

Pero 4 y 9 se contradicen ■

P9 se sigue canónicamente:

Prueba:

1.	$A \to B \in a$ y $A' \to B' \in a$	*Hipótesis*
2.	$A \in a$ y $A' \in a*$	*Hipótesis*
3.	$B \notin a$ y $B' \notin a$	*Hipótesis*
4.	$(A \to B) \wedge A \to .\neg A \vee B$	$T9$
5.	$[(A \vee A') \to (B \vee B')] \wedge (A \vee A') \to .\neg(A \vee A') \vee (B \vee B')$	4
6.	$(A \to B) \wedge (A' \to B') \in a$	$C2, 1$

7. $A \vee A' \to .B \vee B' \in a$ $(XI), 6$
8. $A \vee A' \in a$ $C3, 2$
9. $B \vee B' \notin a$ $C3, 3$
10. $[(A \vee A') \to (B \vee B')] \wedge (A \vee A') \in a$ $C2, 7, 8$
11. $\neg (A \vee A') \vee (B \vee B') \in a$ $C4, 5, 10$

En este punto existen dos casos, donde en cada uno consideramos uno de los dos miembros de la disyunción. 1er caso:

12. $\neg (A \vee A') \in a$ $C3, 11$

Pero 8 y 12 se contradicen. 2do caso:

13. $B \vee B' \in a$ $C3, 16$

Pero 9 y 13 se contradicen■

T10 y P10
$(A \to B) \wedge \neg B \to .\neg A \vee B$ y $Raa * a*$ o $Raa * a$

T10 es válido:

Prueba:

1. $a \models (A \to B) \wedge \neg B$ *Hipótesis*
2. $a \not\models \neg A \vee B$ *Hipótesis*
3. $a \models A \to B$ y $a \models \neg B$ $C2, 1$
4. $a* \not\models B$ $C3, 3$
5. $a \not\models \neg A$ y $a \not\models B$ $C3, 2$
6. $a* \models A$ $C5, 5$

En este punto existen dos casos, donde en cada uno consideramos una de las dos partes del postulado. 1er caso:

7. $Raa * a*$ $P10$
8. $a* \models B$ $C4, 3, 6, 7$

Pero 4 y 8 se contradicen. 2do caso:

9. $Raa * a$ $P10$
10. $a \models B$ $C4, 3, 6, 9$

Pero 5 y 10 se contradicen ■

P10 se sigue canónicamente:

Prueba:

1. $A \to B \in a$ y $A' \to B' \in a$	*Hipótesis*
2. $A \in a*$ y $A' \in a*$	*Hipótesis*
3. $B \notin a*$ y $B' \notin a$	*Hipótesis*
4. $(A \to B) \wedge \neg B \to .\neg A \vee B$	$T10$
5. $[(A \wedge A') \to (B \wedge B')] \wedge \neg (B \wedge B') \to .\neg (A \wedge A') \vee (B \wedge B')$	4
6. $(A \to B) \wedge (A' \to B') \in a$	$C2, 1$
7. $(A \wedge A') \to (B \wedge B') \in a$	$(IX), 6$
8. $A \wedge A' \in a*$	$C2, 2$
9. $\neg (A \wedge A') \notin a$	$C5, 8$
10. $B \wedge B' \notin a$	$C2, 3$
11. $\neg (A \wedge A') \vee (B \wedge B') \notin a$	$C3, 9, 10$
12. $[(A \wedge A') \to (B \wedge B')] \wedge \neg (B \wedge B') \notin a$	$C4, 5, 11$
13. $\neg (B \wedge B') \notin a$	$C2, 7, 12$
14. $B \wedge B' \in a*$	$C5, 12$
15. $B \in a*$ y $B' \in a*$	$C2, 13$

Pero 3 y 15 se contradicen ■

8 Bibliografía

Anderson, A. R. y Belnap, N. D. Jr.

1962 *The pure calculus of entailment.* The Journal of Symbolic Logic, vol. 27, pp. 19-52
1975 *Entailment: The logic of relevance and necessity, Vol. I.* Princeton University Press

En la referencia de 1962 se define un cálculo de deducción natural respecto del sistema S4 de Lewis y la lógica intuicionista, pero sólo para la implicación relevante. La obra de 1975 supone la gran obra acerca de la lógica de la relevancia y de la implicación, que recoge resultados hasta, más o menos, el año 1970 donde no aparecen contenidos semánticos pero sí tratamientos algebraicos.

Anderson, A. R., Belnap, N. D. Jr. y Dunn, J. M.

1992 *Entailment: The logic of relevance and necessity, Vol. II.* Princeton University Press

La continuación de Cf.[**Anderson, A. R. y Belnap, N. D. Jr.**, 1975] supone una gran recopilación de los desarrollos que habían surgido a partir de la obra anterior hasta, aproximadamente, el año 1986, incluyendo ya tanto semántica como cuantificación.

Beall, J., Brady, R. T., Dunn, J. M., Hazen, A., Mares, E., Meyer, R. K., Priest, G., Restall, G., Ripley, D., Slaney, J. y Sylvan, R.

2012 *On the ternary relation and conditionality.* Journal of Philosophical Logic, vol. 41, issue 3, pp. 595-612

Supone la colaboración de figuras de gran importancia dentro de las lógicas de la relevancia tratando acerca de la relación R definida por la semántica relacional ternaria.

Belnap, N. D. Jr.

1960 *Entailment and relevance.* The Journal of Symbolic Logic, vol. 25, pp. 144-146
1977 *How a computer should think.* Contemporary Aspects of Philosophy, ed. Ryle, G., Oriel Press Ltd., pp. 30-55

El primer ítem corresponde a la primera formulación de las pruebas de la VSP. 1977 es una de las primeras referencias en relación a las aplicaciones de las lógicas de la relevancia.

Brady, R. T.

1992 *Hierarchical semantics for relevant logics.* Journal of Philosophical Logic, vol. 21, issue 4, pp. 357-374
2003 *Relevant Logics and their Rivals, Vol. II.* Editor, Ed., Ashgate
2006 *Universal logic.* CSLI

En 1992 aparece por primera vez la jerarquía de sistemas de la lógica de la relevancia profunda definida por el mismo autor. 2003 es la continuación del trabajo de Cf.[**Routley, R., Meyer, R. K., Plumwood,V. y Brady, R. T.**, 1982], de la cual Brady se declara, aparte de autor de buena parte de los resultados, también como editor. 2006 es la obra más importante en consideración del propio Brady, tal y como ha comentado a Robles, en la cual lleva a cabo la construcción de una teoría intuitiva de conjuntos no trivial basada en el sistema DJ definido en 1992.

Copeland, B. J.

1979 *On when a semantics is not a semantics: Some reasons for disliking the Routley-Meyer semantics for relevance logic.* Journal of Philosophical Logic, vol. 8, issue 1, pp. 399-413

Es una de las críticas más importantes que se le han hecho a la semántica relacional ternaria, pero fue contestada, en lo que se refiere al tratamiento de la negación, ya en 1999 por Restall.

Dosen, K.

1992 *The first axiomatization of relevant logic*, Journal of Philosophical Logic, vol. 21, pp. 339-356

Investigación histórica que mostraría como la primera axiomatización de una lógica de la relevancia fue llevada a cabo por el ruso I. Orlov antes de 1928

Dunn, J. M. y Restall, G.

2002 *Relevance logic.* Handbook of Philosophical Logic, 2ª edición, eds. Gabbay, D. M. y Guenthner, F., vol. 6, pp 1-128

Se trata del desarrollo de los llamados cuatro problemas de Anderson, definidos en el año 1963.

Fine, K.

1974 *Models for entailment.* Journal of Philosophical Logic, vol. 3, pp.347-372

Se da una semántica operacional para las lógicas de la relevancia, pero cuyo éxito no sería tan importante como el de la semántica relacional ternaria.

Henkin, L.

1949 *The completeness of the first order functional calculus.* Journal of Symbolic Logic, vol. 14, pp. 159-166

Primera aparición del tipo de pruebas denominadas según el apellido del autor.

Lewis, C. I. y Langford, C. H.

1959 *Symbolic logic.* 2ª edición, Dover Publications

Reedición de la obra original de 1932 en la cual Lewis define su cadena de sistemas S1-S5.

Mares, E.

2004 *Relevant logic: A philosophical interpretation.* Cambridge University Press

Uno de los manuales arquetípicos de la lógica de la relevancia donde es apreciable un tratamiento filosófico así como se señalan las posibles aplicaciones de estas en la teoría de la información.

Restall, G.

1999 *Negation in Relevant Logics (How I Stopped Worrying and Learned to Love the Routley Star).* Applied Logic Series: What is negation?, vol. 13, pp. 53-76

Se trata de una vindicación del tratamiento de la negación en la lógica de la relevancia. En la actualidad se acepta que que solventa las críticas de Copeland que atañen a la negación.

Robles, G.

2006 *Negaciones subintuicionistas para lógicas con la conversa de la propiedad Ackermann.* Ediciones Universidad de Salamanca

Aparecen de manera explícita las pruebas de corrección y completud de B+, así como una serie de teoremas de utilidad de dicho sistema.

Robles, G. y Méndez, J. M.

2012 *A general characterization of the variable-sharing property by means of logical matrices.* Notre Dame Journal of Formal Logic, vol. 53, issue 2, pp. 223-

244
2014a *A Routley-Meyer semantics for truth preserving and well-determined Lukasiewicz 3-valued logics.* Logic Journal of the IGPL, vol. 22, issue 1, pp. 1-23
2014b *Curry's paradox, generalized modus ponens axiom and depth relevance.* Studia Logica, vol. 102, issue 1, pp. 185-217
2014c *Generalizing the depth relevance condition: Deep relevant logics not included in R-Mingle.* Notre Dame Journal of Formal Logic, vol. 55, issue 1, pp. 107-127
2014d *Blocking the routes to triviality with depth relevance.* Journal of Logic, Language and Information, May 2014

En 2012 se encuentran definiciones exactas de la VSP y la propiedad de la ausencia de piezas sueltas, así como las pruebas de que importantes sistemas tienen estas propiedades. 2014a es el artículo original en el que aparecen los postulados semánticos tratados en la Parte III. En 2014b se muestra cómo bloquear la paradoja de Curry dentro de las lógicas de la relevancia profunda de Brady, sirviendo también como punto de referencia de este tipo de lógicas. 2014c supone la generalización del concepto de lógicas de la relevancia profunda a una serie de lógicas no incluidas en R-Mingle. 2014d es el punto de partida para extender y generalizar los resultados de 2014b.

Routley, R. y Meyer, R. K.

1972a *The semantics of entailment - II.* Journal of Philosophical Logic, vol. 1, pp. 53-73
1972b *The semantics of entailment - III.* Journal of Philosophical Logic, vol. 1, pp. 192-208
1973 *The semantics of entailment - I.* Truth, Syntax and Modality. Proceedings of the Temple University conference on alternative semantics, ed. Leblanc, H., North Holland Publishing Company, pp. 199-243

Es en la obra de 1973 en la que aparece por primera vez la semántica para el sistema R de Anderson y Belnap. En 1972b aparece por primera vez la formulación de B+ y se define la semántica relacional ternaria para lógicas positivas. 1972a supone la aparición de la semántica para el sistema NR, resultado de añadir los axiomas característicos de S4 de Lewis al sistema R de Anderson y Belnap; la conjetura de los autores es que NR debería haber sido equivalente a E, pero en 1973 se demostró, gracias a L. Maksimova, que no lo son, ya que NR incluye a E pero no al revés.

Routley, R., Meyer, R. K., Plumwood,V. y Brady, R. T.

1982 *Relevant Logics and their Rivals, Vol. I.* Ridgeview

Se trata de la obra central de la semántica relacional ternaria, donde se define B y en el mismo capítulo, el capítulo cuatro, se define también por primera vez

la idea de postulado semántico correspondiente, en particular en relación con B. En el primer apéndice de la misma obra se da una semántica para E y los sistemas de Ackermann, Π y Π'.

Tomova, N.

2012 *A lattice of implicative extensions of regular Kleene's logics.* Reports of Mathematical Logic, vol. 47, pp. 173-182

Definición de la implicación natural para las lógicas trivaluadas, en clara relación con la tesis doctoral de la autora, sólo disponible en ruso.

Urquhart, A.

1972 *Semantics for relevant logics.* The Journal of Symbolic Logic, vol. 37, pp. 159-169

Define una semántica semejante a la semántica relacional ternaria pero no incluye un mecanismo para la negación característica de las lógicas de la relevancia. Al igual que Cf.[**Fine, K.**, 1974], no tuvo la misma repercusión y éxito que la semántica de Routley y Meyer

Weber, Z.

2012 *Transfinite cardinals in paraconsistent set theory.* Review of Symbolic Logic, vol. 5, issue 2, pp. 269-293

La muestra de que las aplicaciones de las lógicas de la relevancia, a día de hoy, todavía no han sido agotadas.

Zorn, M.

1935 *A remark on method in transfinite algebra.* Bulletin of the American Mathematical Society, vol.41 issue 10, pp. 667–670

Publicación del Lema de Zorn en su formulación moderna. Es importante señalar que no se trata de la primera publicación, ya que, C. Kuratowski lo habría publicado en 1922 pero sin tener ni una acogida tan importante y ni una formulación tan amplia como la de Zorn.