



**VNiVERSiDAD
D SALAMANCA**

**MEMORIA DE ACTIVIDADES
PROYECTO DE INNOVACIÓN DOCENTE ID2013/025**

**EMCVV : Elaboración de Materiales de Cálculo en
Varias Variables: Una experiencia interuniversitaria**

Coordinador del proyecto:

**Gerardo Rodríguez Sánchez
gerardo@usal.es**

30 de junio de 2014

INTRODUCCIÓN

Los cambios normativos, motivados fundamentalmente a raíz de la Declaración de Bolonia, y los cambios tecnológicos han supuesto un importante cambio en la enseñanza universitaria en los últimos años. Las enseñanzas de las distintas asignaturas en las Escuelas de Ingeniería no han sido ajenas a este proceso en el paradigma educativo. Ese cambio en la enseñanza de las matemáticas ha puesto de manifiesto nuevos problemas que resolver y que podemos resumir en dos grandes apartados:

- La necesidad de elaboración de nuevos materiales docentes que se acomoden a los distintos escenarios docentes que se plantean en la actualidad
- La nueva estrategia educativa, que debe implicar un cambio profundo en la metodología, y la necesidad de revisar en profundidad las técnicas de evaluación docente.

En resumen, no es razonable pensar que se pueden cambiar los objetivos docentes utilizando los mismos materiales y las mismas formas de evaluación que hace 30 años.

Para la realización de este proyecto, se ha formado un equipo interuniversitario estable para elaborar materiales docentes en diferentes formatos para poder crear, a partir de ellos, un curso de Cálculo en Varias Variables que pueda ser utilizado de muy diferentes formas en función de los contenidos de las distintas asignaturas de ingeniería y en función de las necesidades de aprendizaje de nuestros alumnos.

Además de una descripción de la situación actual de este proyecto, presentamos las ideas maestras sobre las que asentar el desarrollo futuro de esta experiencia.

DESARROLLO DEL PROYECTO

Como acabamos de mencionar, el objetivo general del proyecto es la elaboración de un curso de Cálculo en Varias Variables empleando nuestra plataforma STUDIUM que pueda ser utilizado por los alumnos de las 3 universidades implicadas en este proyecto. Todos los materiales elaborados se están colocando en la citada plataforma, en la dirección <https://moodle.usal.es/course/view.php?id=18487> y, en una etapa posterior, los materiales docentes elaborados serán puestos a disposición de los alumnos de las diferentes escuelas de ingeniería de las citadas universidades.

Hemos elegido como materia de nuestro curso el Cálculo en Varias Variables por ser un tema en el que el material pre-existente no está, a nuestro juicio, suficientemente desarrollado. La utilización de estos materiales por parte de estudiantes de ingeniería en distintas universidades nos obliga a un esfuerzo de coordinación importante para lograr un producto unitario de calidad, permitiendo una nueva mirada sobre la tarea común de ayudar a la formación en competencias de nuestros estudiantes, estimulando su aprendizaje autónomo y el trabajo en equipo.

La elaboración de estos materiales en formato electrónico incluye el inicio de las tareas de evaluación a través de la plataforma. Los cambios en la metodología docente han de llegar también a las tareas de evaluación, avanzando en la sustitución del tradicional examen presencial. Esto es esencial en nuestro proyecto, dado que el curso va dirigido a estudiantes de distintas universidades.

La siguiente figura muestra la página de STUDIUM donde están alojados en la actualidad los materiales elaborados por los miembros del equipo docente:

El equipo docente está formado por profesores de tres universidades, dos españolas y una argentina: la Universidad de Salamanca, la Universidad Pontificia Comillas y la Universidad Tecnológica Nacional (Campus General Pacheco). La siguiente figura muestra al equipo docente tal y como aparece en la página de STUDIUM:

CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES

[Participantes](#)
[Blogs](#)
[Notas](#)

Mis cursos CÁLCULO MULTIVARIABLE Mostrar usuarios que han estado inactivos durante más de Seleccionar período

Rol: Profesor

Todos los participantes: 10

Nombre : Todos ABCDEFGHIJKLMNÑOPQRSTUVWXYZ
Apellido : Todos ABCDEFGHIJKLMNÑOPQRSTUVWXYZ

Imagen del usuario	Nombre / Apellido	Ciudad	País
	Liliana Milevicich	Buenos Aires	Argentina
	GERARDO RODRÍGUEZ SÁNCHEZ	Zamora	España
	Agustín de la Villa	Salamanca	España
	SONSOLES PÉREZ GÓMEZ	Ávila	España
	MARÍA ASCENSIÓN HERNÁNDEZ ENCINAS	Bejar	España
	ÁNGEL MARÍA MARTÍN DEL REY	Salamanca/Ávila	España
	Alejandro Lois	Buenos Aires	Argentina
	MARÍA ARACELI QUEIRUGA DIOS	Béjar	España
	HIGINIO RAMOS CALLE	Zamora	España
	SUSANA NIETO ISIDRO	Zamora	España

La principal característica de todo el proyecto es la modularidad. Pretendemos que los materiales elaborados por los profesores participantes sean prácticamente objetos reutilizables (RLO, Reusable Learning Object en la terminología inglesa) para que cada profesor usuario pueda elaborar su propio curso en función de los aspectos que quiera resaltar y en función de los estudiantes a los que va dirigido y para ello escoja los materiales apropiados. Creemos que de esta manera y dado que los estudiantes usuarios pueden provenir de diferentes ingenierías y de diferentes países, el material puede ser usado de forma personalizada en cada curso. Es decir, los materiales elaborados pueden utilizarse de diferentes maneras y servir como material base para diferentes cursos elaborados en función de las necesidades docentes y de las necesidades de aprendizaje de los alumnos. Los profesores autores utilizan los foros creados dentro del curso para unificar criterios a la hora de incluir los diferentes materiales, dada la dispersión geográfica de los distintos autores. Un comité de redacción es el encargado de clasificar y validar el material, intentando dar una unidad de estilo a la hora de escribir los textos matemáticos.

En las siguientes figuras pueden verse algunos ejemplos de los materiales elaborados, tanto de carácter teórico como de carácter práctico. El primero de ellos hace referencia a la definición de matriz jacobiana:

MATRIZ JACOBIANA



Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, se define la matriz jacobiana de la función f en el punto a , si existen todas las derivadas parciales, como:

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{(a)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{(a)}$$

donde $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$

Si $n = m$ el determinante de la matriz se llama Jacobiano, y se utiliza en muchas aplicaciones.

Si $n = m = 3$, se suele escribir: $\left(\frac{\partial (f_1, f_2, f_3)}{\partial (x, y, z)} \right)$

Si $n=1$ y $m>1$, la matriz jacobiana representa las derivadas de las funciones componentes. Esta matriz permitirá calcular la tangente a dicha curva

La siguiente figura muestra un ejemplo sencillo sobre las derivadas direccionales:

DERIVADAS PARCIALES, DIRECCIONALES Y CONTINUIDAD



Ejemplo

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Esta función no es continua en (0, 0) ya que el límite según las parábolas $y^2 = mx$ depende de m. Comprobado

Sin embargo si tiene derivada direccional:

$$D_\theta f(0,0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\frac{\lambda^3 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta}{\lambda^2 (\cos^2 \theta + \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} - 0}{\lambda} = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\cos \theta} & \text{si } \theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \\ 0 & \text{si } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Es decir, puede tener derivadas direccionales o parciales y no ser continua

Los materiales elaborados con *Mathematica* incluyen procedimientos que automatizan algunos cálculos y que forman parte del material docente que los alumnos pueden utilizar. No es necesario un conocimiento exhaustivo por parte de los usuarios del funcionamiento del CAS elegido, aunque los estudiantes avanzados pueden elaborar sus propias cajas de herramientas. También se han elaborado materiales utilizando otros CAS, dado que, en nuestra opinión, el CAS utilizado es poco importante a la hora de elaborar materiales docentes, sino que lo que importa son las ideas matemáticas subyacentes en su utilización. La siguiente figura muestra un ejemplo del material realizado:

Ejemplo 3.2 -

Mostrar que no es continua la función $f(x,y) = \frac{x^6}{(x^2-y)^2 + x^6}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$, en el origen de coordenadas.

Vamos a demostrar que la función no es continua en el origen de coordenadas, demostrando que no existe el límite en dicho punto.

Definimos la función:

$$f[x_, y_] := \frac{x^6}{(x^2 - y)^2 + x^6}$$

Utilizamos las funciones definidas en apartados anteriores, `limre1` y `limre2` para calcular límites reiterados.

```
limre1[0, 0]
0
```

```
limre2[0, 0]
0
```

Como ambos son iguales no podemos determinar nada acerca de la existencia del límite.

Probamos con límites según subconjuntos, mediante el procedimiento `lim`:

Se introduce, por ejemplo, la parábola $y = x^2$.

```
phi[x_] := x^2
```

Se ejecuta entonces la instrucción que proporciona el límite según dicho subconjunto en $a = 0$.

```
lim[0, phi]
1
```

Como el resultado es distinto de 0, queda probado que $f(x,y)$ no es continua en el origen.

Los materiales elaborados incluyen materiales de evaluación que pueden ser utilizados con distintas finalidades. Se han elaborado bancos de preguntas, utilizando WIRIS (<http://www.wiris.com/es>) como editor matemático, que nos permiten la realización de diferentes cuestionarios de evaluación. Los profesores pueden crear de esta manera cuestionarios de autoevaluación que permiten a los estudiantes un conocimiento cercano de su proceso de aprendizaje y cuestionarios de evaluación dentro del proceso general de evaluación de las destrezas adquiridas por los estudiantes. Es preciso mencionar la necesidad de elaborar nuevos protocolos en el proceso de evaluación que sustituyan al tradicional examen escrito consistente en la resolución de distintos problemas “a mano”.

En las siguientes figuras se muestran algunas de las preguntas elaboradas por el sistema referido:

1 Sea $f(x,y) = \log(1/u)$ con $u(x,y) = \log(x+y)$. Entonces $\frac{\partial f}{\partial y}$ vale:
Puntos: -/1

Seleccione una respuesta.

- a. $\frac{-1}{(x+y)\log(x+y)}$
- b. $\frac{\log(x+y)}{(x+y)}$
- c. No se puede calcular.

2 Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación definida por $f(x,y) = x^3 \operatorname{sen} y$. La derivada de f en el punto $(1, \pi)$ en la dirección del vector $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ vale:
Puntos: -/1

Seleccione una respuesta.

- a. $-1/\sqrt{2}$
- b. $1/\sqrt{2}$
- c. Ninguna de las anteriores

4 El polinomio de Taylor de grado 1 de la función $f(x,y) = x^2 + xy + \operatorname{sen} x$ en el punto $(0, 1)$ es
Puntos: -/1

Seleccione una respuesta.

- a. $2x$
- b. $x+y$
- c. x

5 Sea C la circunferencia de centro el punto $(3, -7)$ y radio 10. Entonces $\int_C x dy - y dx$ vale:
Puntos: -/1

Seleccione una respuesta.

- a. 100π
- b. 200π
- c. -100π

Seguimos trabajando en la elaboración de materiales, pues, como ya advertimos en la solicitud del proyecto, la tarea a realizar excede el marco temporal del proyecto concedido y es de esperar que la tarea iniciada durante este curso académico se prolongue en los próximos años para poder alcanzar los objetivos señalados.

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

La necesidad de elaborar nuevos materiales didácticos para dar respuesta a la nueva situación docente creada en las asignaturas de matemáticas debe abordarse desde la colaboración de diferentes profesores en esta tarea. Para ello, hemos iniciado una experiencia interuniversitaria que engloba a profesores españoles y argentinos pertenecientes a tres universidades diferentes. Aunque la experiencia está en la fase inicial de desarrollo creemos que el trabajo colaborativo ayuda a crear materiales de una mejor calidad.

Los materiales elaborados están organizados en estructura modular y contienen archivos de teoría, problemas resueltos y propuestos, test de autoevaluación, materiales de evaluación, aplicaciones, materiales elaborados con paquetes de software, etc. En este sentido pretendemos un uso generalizado de los distintos CAS en toda la práctica docente. La estructura modular permite que cada profesor usuario elabore su curso concreto en función de los alumnos a los que va dirigido, poniendo el énfasis en aquellos objetivos de aprendizaje específicos para sus alumnos.

También se han elaborado diferentes materiales de evaluación y autoevaluación que inician el imprescindible cambio en los protocolos de evaluación en el sentido descrito en el artículo. El diseño de nuevos protocolos de evaluación que permitan valorar la adquisición de las competencias, descritas en los diferentes planes de estudio, por parte de los estudiantes es una cuestión de gran actualidad. No existe todavía un amplio consenso sobre la forma de actuar, aunque los documentos de organizaciones como el grupo de Matemáticas del SEFI (<http://sefi.htw-aalen.de/>) ya comienzan a plantear nuevos procedimientos que ahora forman parte del debate sobre este tema.

Además de completar la elaboración de los materiales, tanto docentes como de evaluación, el trabajo futuro se orienta fundamentalmente al estudio de las ventajas e inconvenientes que han encontrado los usuarios de los materiales. En este sentido, se trata de saber por parte de los profesores la facilidad de uso de los materiales creados a la hora de diseñar diferentes cursos de Cálculo en varias variables en función de los distintos destinatarios. Desde el punto de vista de los alumnos, queremos valorar, a través de las oportunas encuestas, el grado de satisfacción en la utilización de estos materiales comparándolos con los materiales tradicionales. Para la realización de estas tareas esperamos contar con la financiación adecuada por parte de las universidades participantes en esta experiencia.

RESULTADOS

A continuación citamos las comunicaciones presentadas al congreso 9ª Conferencia Ibérica de Sistemas y Tecnologías de Información (CISTI 14) celebrado durante el mes de Junio de 2014 en Barcelona para dar difusión al proyecto que estamos realizando:

Autores: Higinio Ramos, Gerardo Rodriguez, Araceli Queiruga, Ascensión Hernández, Susana Nieto, Angel Martín, Agustín de la Villa, Sonsoles Pérez

Título: Materiales para un curso de Cálculo en Varias Variables: Un ejemplo de colaboración interuniversitaria.

Publicación: Actas de la 9ª Conferencia Ibérica de Sistemas y Tecnologías de Información (CISTI 14). Editores: Álvaro Rocha, David Fonseca, Ernest Redondo, Luis Paulo Reis y Manuel Pérez Cota. ISBN: 978-989-98434-3-1.

Autores: Higinio Ramos, Susana Nieto

Título: Visualización de funciones de dos variables mediante el programa Mathematica (explorando las posibilidades pedagógicas del programa más allá de lo evidente)

Publicación: Actas de la 9ª Conferencia Ibérica de Sistemas y Tecnologías de Información (CISTI 14). Editores: Álvaro Rocha, David Fonseca, Ernest Redondo, Luis Paulo Reis y Manuel Pérez Cota. ISBN: 978-989-98434-3-1.