UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y de la Matemática

PROPUESTA DE UN PASEO MATEMÁTICO POR VALLADOLID

Trabajo Final del Máster Universitario en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Especialidad de Matemáticas.

Alumno: Andrés Sanz Torres

Tutores: Tomás Ortega del Rincón

Cristina Pecharromán Gómez

Valladolid, junio 2018

Índice general

Introducción

Este trabajo se contextualiza dentro del máster en profesor de secundaria y bachillerato, un máster destinado a la gente que quiere dedicar su vida a la docencia, a enseñar, a mostrar y compartir su amor por una materia tan bella como es la materia de matemáticas. Fue esa pasión por las matemáticas y por enseñar lo que ha ido guiando mi vida hasta llegar a hacer este máster.

El punto culmen de este máster ha sido el periodo de prácticas en los institutos, donde he podido cerciorarme de que mi corazonada era cierta, quiero ser profesor de matemáticas. Es por tanto que la actividad propuesta durante este trabajo queda contextualizada en ese centro. Pese a no haber podido llevarlo a la práctica, me ha sido inevitable pensar cómo hubieran reaccionado mis alumnos a las actividades propuestas, qué hubieran hecho para intentar "hacerle trampas" al profesor, o ver sus reacciones al ver que la asignatura de matemáticas tiene gran relación con la ciudad en la que viven.

Las matemáticas están en todas partes, tanto en la naturaleza como en las construcciones hechas por el ser humano, y no es casualidad, es por la belleza que esconden en su interior. Por desgracia, mucha gente piensa que las matemáticas no sirven para nada, que son una materia difícil e incluso algunos piensan que hasta innecesaria. Es por ello que este trabajo pretende cambiar esa mentalidad.

La educación actual ha dejado de tener sentido, en el sentido de que se dan muchos conocimientos, pero se experimenta muy poco, al menos en el campo de las matemáticas. Los alumnos tienen que guiarse por un mapa abstracto que, si se tiene conocimiento real del terreno resulta una herramienta muy útil, sin embargo, cuando desaparecen las experiencias reales vividas y nos restringimos a estudiar ese "mapa" en el aula puede llegar a ser abrumador.

El trabajo que aquí se muestra trata de los paseos matemáticos, se ha dividido en cinco capítulos. En el primer capítulo se verá porqué es interesante el paseo matemático como herramienta didáctica, qué objetivos se persigue con este tipo de tareas, como visualizar las matemáticas y cambiar su imagen social y también cómo ha contribuido la realización de este máster para que el trabajo sea más rico en contenido y forma.

En el segundo capítulo se verán diversos paseos matemáticos que han sido llevado a cabo por España, en ellos veremos la gran variedad de maneras en la que se puede llevar una actividad para visualizar las matemáticas, desde una ruta divulgativa, hasta una gymkhana. Además, también se expondrá como contribuyen los paseos matemáticos a las siete competencias básicas, es decir, como contribuye a que nuestros alumnos desarrollen todas sus capacidades para que crezcan como personas.

El tercer capítulo se ha dedicado al estudio de Valladolid, en él se muestran diversos monumentos, edificios, balcones o figuras que guardan gran relación con las matemáticas. Se mostrarán algunas ideas para poder llevarlo a un aula de secundaria, ya sea como actividad independiente o como parte de un paseo matemático. La cantidad de matemáticas que hay en Valladolid es inmensa, y como es obvio, no se ha podido incluir todo en este trabajo, de modo que está centrado en los lugares del centro de Valladolid y las usadas para elaborar el paseo matemático que se propone.

En el cuarto capítulo se lleva a cabo la actividad, un paseo con nueve estaciones y 10 actividades. La actividad se contextualiza en el centro IES José Jiménez Lozano, y para hacer las matemáticas más cercanas aún a los alumnos el paseo empieza en el barrio de Parquesol y acaba en el centro de Valladolid, dejando claro que las matemáticas están por todo Valladolid. El paseo matemático tiene actividades de sobra, y esto es debido a que siempre es mejor que queden cosas por hacer que el quedarse sin materiales.

Por último, en el quinto capítulo se escribirán las conclusiones, relativas a los objetivos que marcamos en el trabajo. Se hace también un breve resumen de lo que aporta este trabajo de fin de máster, y se dejan claras cuáles son las líneas de futuro o trabajos de continuación, el más claro de ellos, el llevar este trabajo al aula, cosa que no se pudo hacer durante el periodo de prácticas.

Capítulo 1: Justificación del trabajo

Este trabajo se ubica dentro del Máster en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, dentro de la especialidad de Matemáticas. En este capítulo se hará una incursión sobre el porqué tienen interés los paseos matemáticos, es decir, se presentarán las estrategias metodológicas y transversales a las que contribuyen. También se enumerarán los objetivos que persigue la actividad. Por otro lado, en este capítulo también se observará la influencia del máster a la hora de elaborar esta actividad.

Interés y objetivos del trabajo

Los paseos matemáticos como herramienta didáctica llevan existiendo muchos años, pese a ello su uso no es muy generalizado, pues son escasos los centros que lo utilizan como herramienta didáctica para la clase de matemáticas. Hay diferentes maneras de entender un paseo matemático, lo que en este trabajo vamos a entender como paseo matemático es una ruta. Para empezar a hablar de los paseos matemáticos en primer lugar se verán qué tipos de paseos matemáticos hay y cuáles son los más interesantes para llevar al aula. Araceli Vilarrasa, directora de Barcelona Educació, propone los siguientes tipos de salidas (Vilarrasa, 2003).

Las salidas vivenciales

Este tipo de salidas son las hechas al principio de una unidad didáctica, están propuestas para aumentar las experiencias vividas a los alumnos. Sirven tanto para introducir un tema nuevo, como para conocer los conocimientos previos de los alumnos. Generalmente tiene un carácter divulgativo y no evaluador, pues el objetivo es que los estudiantes conozcan el contexto y las aplicaciones con el objetivo de motivarles para el estudio de la unidad didáctica. Estas salidas necesitan ser preparadas previamente con los alumnos, para que su vivencia sea más auténtica.

La propuesta de paseo matemático que se realiza en este trabajo tiene esta intencionalidad, se busca conocer cuáles son las fortalezas y debilidades de los alumnos en el ámbito de geometría plana y en el espacio, tener claro cuáles son sus conocimientos previos para reforzar los contenidos más olvidados. Con ello también se les motivará a los alumnos con lo que, sin lugar a dudas, se conseguirá que los alumnos muestren más atención en las sucesivas unidades didácticas.

Salidas de experimentación

Es la salida más clásica, en ella se pretende introducir nuevas informaciones y trabajarlas para adquirir nuevos conocimientos. Estas salidas se realizan durante la fase de desarrollo de la unidad didáctica y conlleva un trabajo continuo tanto dentro como fuera del aula. Esta salida consta de dos fases, la fase experimental y la fase de reflexión en el aula. Los alumnos gozan de autonomía y protagonismo en la fase experimental, mientras que el profesor será el principal protagonista a la hora de la reflexión guiando a los alumnos. El objetivo de estas salidas es que los alumnos hagan aprendizaje por descubrimiento.

En la actividad propuesta se ha decidido incluir dinámicas de este estilo, debido a que los conocimientos no son completamente novedosos para los alumnos, debido al carácter helicoidal del currículo, es por ello que las actividades también tienen cierto carácter de experimentación con el entorno en el que los alumnos deben enfrentarse a un problema de manera autónoma y debatir que procedimientos son los más adecuados para la resolución del problema.

Salidas como forma de participación social.

Estas salidas están situadas al final del proceso de enseñanza, de tal modo que debe permitir expresar conclusiones, así como aplicar los conocimientos adquiridos durante la unidad didáctica al entorno. El objetivo es vincular la educación en valores al aprendizaje, en el sentido de no imponer valores a los alumnos, sino que tras haber adquirido conocimientos y poder fundamentar sus opiniones los alumnos adquieran valores propios de manera crítica con una opinión informada.

La salida como actividad de educación para la ciudadanía.

La educación históricamente ha pasado de adquirirse únicamente en el entorno en las etapas preindustriales a prácticamente desvinculare de él en la actualidad. Otro de los objetivos de los paseos matemáticos es reapropiarse del entorno, en este sentido salir del aula es una actividad fundamental para la educación para la ciudadanía y que dan sentido social al aprendizaje académico: la educación ambiental, la educación para el desarrollo y la educación para la paz.

Los paseos matemáticos son una herramienta que vincula elementos de otras disciplinas con las matemáticas como por ejemplo la arquitectura, el urbanismo o el arte o incluso la historia. En este sentido otorga una gran transversalidad e interdisciplinariedad a las matemáticas. El aprendizaje basado en competencias se caracteriza por la transversalidad y su dinamismo, características claras de los paseos matemáticos. Los paseos visualizan las matemáticas que hay en los edificios, los puentes, los monumentos y en el embaldosado de la calle. Esta interdisciplinariedad está directamente relacionada con la idea errónea de que las matemáticas no sirven para nada y son inútiles. Es decir, con los paseos matemáticos contribuimos a destruir la imagen de inutilidad que tienen los alumnos acerca de las matemáticas y no de otras materias.

Los paseos matemáticos ponen en contacto el "mapa" con el "explorador", los estudiantes ven en la ciudad los elementos matemáticos que les rodean y le dan un sentido físico y práctico a lo que estudian en el aula. Se trata de hacer aprendizaje por descubrimiento, que el propio alumno reflexione sobre su entorno y encuentre las pautas a seguir para resolver problemas de la vida cotidiana, con ello se consigue un aprendizaje significativo, haciendo honor a la frase "una imagen vale más que mil palabras".

La educación actual habla del aprendizaje basado en competencias, el objetivo principal es que los alumnos adquieran capacidades útiles para enfrentarse después a la vida en sociedad, y es por ello que establece 7 competencias básicas. Los paseos matemáticos contribuyen en gran medida a estas competencias básicas, no solamente a la competencia matemática, sino también al resto por su carácter transversal y de experimentación con el entorno. Junto a hablar de competencias es conveniente hablar de las pruebas evaluadoras externas, como pueden ser las pruebas PISA, estas pruebas se caracterizan por ser un método de evaluar las competencias adquiridas, es por ello que los problemas no son del tipo abstracto, sino que tiene un contexto geométrico real, al igual que el paseo matemático que se propone.

Un elemento importante para lograr aprendizajes significativos es el hecho de que el alumno muestre interés y ponga de su parte en la asignatura. No se puede enseñar a quien no quiere aprender, en muchas ocasiones es necesario que los alumnos un mínimo de interés para que pueda discurrir la clase y los alumnos adquieran conocimientos y con ellos desarrollen las competencias básicas. Para evitar esto un profesor debe intentar hacer que los alumnos muestren interés por su asignatura, es ahí donde juega un papel la motivación. Los paseos matemáticos muestran las matemáticas como una herramienta útil, lo que conlleva que los alumnos estén más motivados ya que ven que lo que van a estudiar no es en vano. El paseo matemático propuesto en este trabajo está pensado para hacerse al inicio del bloque de Geometría para un curso de tercero de la ESO, en él se analizará el entorno urbano desde un punto de vista matemático, de ese modo los alumnos verán la utilidad de las matemáticas en el entorno urbano y, quizás, muestren más interés por la asignatura. Además, al repasar conceptos de cursos previos, los alumnos no se perderán en la asignatura, y quizás el hecho de entender las cosas que se vayan explicando en clase hace que no se descuelguen de la asignatura. Es por ello que en las actividades propuestas se mostrarán elementos decorativos en esculturas artísticas como la utilidad que puede tener las matemáticas en esos aspectos.

Un problema de la educación actual es el fracaso escolar. España es líder de la Unión Europea en fracaso escolar. El 20% de los jóvenes entre 18 y 24 ha abandonado prematuramente el sistema educativo sin haber terminado sus estudios de secundaria. A esto hay que sumarle que la asignatura de Matemáticas es la más odiada por los alumnos, es sin lugar a duda la asignatura que más difícil consideran los alumnos. Es por esto que las matemáticas cada vez se demonizan más, la sociedad inculca a las personas que las matemáticas so diabólicas y difíciles, causando que los alumnos estén condicionados. Los paseos matemáticos sirven para luchar contra esta imagen de las matemáticas, haciéndolas más dinámicas, cercanas y entretenidas.

Las matemáticas son una ciencia, y el motor de la ciencia es la curiosidad, en el paseo matemático se intenta transmitir esa curiosidad por saber cómo funciona el mundo que nos rodea, en ello está implicado el paseo matemático, las propiedades de los elementos geométricos quizás desconocidos o ignorados por los alumnos pueden llamarles la atención y hacer que sientan curiosidad y, en consecuencia.

El paseo matemático aquí propuesto engloba distintos tipos de objetivos, metodológicos, matemáticos y transversales entre los que se encuentran los siguientes:

- Motivar a los alumnos en la asignatura.
- Conocer los conocimientos previos de los alumnos.
- Hacer visible las matemáticas en el entorno urbano.
- Luchar contra el abandono escolar.
- Eliminar la imagen demonizada de las matemáticas.
- Concebir las matemáticas como una herramienta útil y necesaria para resolver problemas de la vida real.
- Mejorar el rendimiento académico de los alumnos.
- Favorecer las relaciones interpersonales entre los alumnos.
- Potencias las habilidades sociales.
- Fomentar el pensamiento crítico a la hora de decidir un procedimiento.
- Desarrollar la creatividad.
- Desarrollar la capacidad de razonamiento lógico-matemático.
- Mejorar las capacidades comunicativas de los alumnos, tanto el saber expresarse con claridad como el entender lo que otros dicen.
- Fomentar la curiosidad científica.
- Favorecer la adquisición de las competencias básicas.
- Potenciar el trabajo en equipo.
- Fomentar el aprendizaje autónomo al ser ellos los protagonistas de su propio aprendizaje.
- Fomentar la divulgación matemática.
- Contagiar a los alumnos el interés propio por las matemáticas.

Competencias del máster

El haber cursado el máster por la especialidad de matemáticas ha implicado un cambio de perspectiva en la mentalidad, de modo que me ha ayudado a la elaboración de este documento significativamente. Gracias a la adquisición de las competencias de las asignaturas uno es capaz de enfrentarse a diversas situaciones como, por ejemplo, diseñar actividades de aprendizaje y analizar los resultados obtenidos para poder mejorar dicha actividad en un futuro enmendando los posibles errores. Es por ello que esta sección se ha dedicado a estudiar cómo han intervenido las distintas competencias del máster en la elaboración de este trabajo, y en qué situaciones se han desarrollado o utilizado esas capacidades obtenidas. Estudiaremos de forma separada los distintos bloques, las competencias generales y de los módulos genérico, específico y practicum.

Competencias generales

Todas las competencias generales señaladas (UVA,sf) son desarrolladas en esta actividad, ya sea a la hora de la preparación de la actividad como a la hora de llevarla en práctica. El diseño y planificación de esta actividad conlleva tener conocimiento sobre los contenidos curriculares, así como conocer los procesos en los que se interacciona con el aula. Generalmente es necesaria la colaboración con el resto de personas del departamento de matemáticas, así como la comunicación con las familias para que sepan en qué consiste la actividad y cómo se va a desarrollar.

Esta actividad busca salir de la rutina del aula y puede tener distintos objetivos como motivar a los alumnos, repasar los conocimientos previos y que el profesor conozca qué saben sus alumnos, sus carencias y sus virtudes, o también puede hacerse con intención evaluadora, planteándola como una actividad que fomenta el aprendizaje por descubrimiento. La actividad que se propone es una mezcla de ambos tipos, puesto que, pese a que los conocimientos previos son los del curso anterior, se pretende que los alumnos también aprendan por descubrimiento.

Todo lo anterior implica el desarrollo de todas las competencias generales del máster en mayor o menor medida en concreto las más representativas serían las siguientes:

G.1. Conocer los contenidos curriculares de las materias relativas a la especialización docente correspondiente, así como el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje respectivos. *En los paseos aparecen muchos contenidos curriculares y, por tanto, su desarrollo implica una revisión curricular.*

G.2. Planificar, desarrollar y evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje potenciando procesos educativos que faciliten la adquisición de las competencias propias de matemáticas, atendiendo al nivel y formación previa de los estudiantes, así como la orientación de los mismos, tanto individualmente como en colaboración con otros docentes y profesionales del mismo. *Sin duda los paseos matemáticos potencian los procesos educativos, se adaptan al nivel educativo, favorecen la abstracción a través de la observación y el trabajo colaborativo.*

G.3. Buscar, obtener, procesar y comunicar información (oral, impresa, audiovisual, digital o multimedia), transformarla en conocimiento y aplicarla en los procesos de enseñanza y aprendizaje en las materias propias de la especialización cursada. *Durante el proceso de elaboración del paseo matemático se han buscado elementos por Valladolid analizándolos matemáticamente, así como elementos bibliográficos que incorporar.*

G.4. Concretar el currículo que se vaya a implantar en un centro docente participando en la planificación colectiva del mismo; desarrollar y aplicar metodologías didácticas tanto grupales como personalizadas, adaptadas a la diversidad de los estudiantes. *Claramente, la elaboración de un paseo matemático implica participar en la planificación del centro y contribuye a la elaboración del currículo.*

G.5. Diseñar y desarrollar espacios de aprendizaje con especial atención a la equidad, la educación emocional y en valores, la igualdad de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres, la formación ciudadana y el respeto de los derechos humanos que faciliten la vida en sociedad, la toma de decisiones y la construcción de un futuro sostenible. *Durante los paseos matemáticos se pretende educar en valores como el respeto al medio ambiente y al urbanismo. El trabajo en grupos pretende facilitar la* *vida en sociedad y la toma de decisiones,*

G.6. Adquirir estrategias para estimular el esfuerzo del estudiante y promover su capacidad para aprender por sí mismo y con otros, y desarrollar habilidades de pensamiento y de decisión que faciliten la autonomía, la confianza e iniciativa personales. *Los alumnos trabajan de forma autónoma en el paseo ayudados de sus compañeros, de modo que la confianza y la capacidad para aprender solos y con otros se ve estimulada.*

G.7. Conocer los procesos de interacción y comunicación en el aula, dominar destrezas y habilidades sociales necesarias para fomentar el aprendizaje y la convivencia en el aula, y abordar problemas de disciplina y resolución de conflictos. *El paseo matemático es una gran oportunidad para conocer la interacción entre los alumnos y sus capacidades interpersonales, en cualquier trabajo grupal pueden surgir conflictos y es ahí donde interviene el profesor.*

G.8. Diseñar y realizar actividades formales y no formales que contribuyan a hacer del centro un lugar de participación y cultura en el entorno donde esté ubicado; desarrollar las funciones de tutoría y de orientación de los estudiantes de manera colaborativa y coordinada; participar en la evaluación, investigación y la innovación de los procesos de enseñanza y aprendizaje. *Es evidente que el paseo matemático ayuda a conocer el entorno urbano desde un punto de vista matemático, es una actividad innovadora que puede ser una fuente de evaluación de los estudiantes.*

G.9. Conocer la normativa y organización institucional del sistema educativo y modelos de mejora de la calidad con aplicación a los centros de enseñanza. *Para poder llevar a cabo este paseo matemático es necesario primero conocer la normativa, tanto a nivel nacional como el reglamento de régimen interior del centro.*

G.10. Conocer y analizar las características históricas de la profesión docente, su situación actual, perspectivas e interrelación con la realidad social de cada época. *Durante el trabajo se han analizado los antecedentes históricos del trabajo, cuál era su intencionalidad y su aplicación en el aula.*

G.11. Informar y asesorar a las familias acerca del proceso de enseñanza y aprendizaje y sobre la orientación personal, académica y profesional de sus hijos. *En* *cualquier salida del centro es necesaria la comunicación con los padres o tutores de los alumnos para que den su autorización. De este modo tan sutil existe una comunicación con los padres que se enteran de que maneras se les está formando a sus hijos, con experiencias vivenciales.*

Competencias Específicas del módulo genérico

Aprendizaje y desarrollo de la personalidad

Este tipo de actividades tiene un aspecto fuertemente vinculado con la atención a la diversidad, en este caso por el carácter colaborativo que tiene el proyecto. Gracias a este carácter colaborativo y a hacer los grupos de trabajo con buen criterio se puede conseguir que los alumnos con mayores dificultades se apoyen en sus compañeros mejorando, tanto la convivencia en el aula, como su nivel académico. Además, la actividad propuesta tiene la característica de realizarse al comienzo de la unidad didáctica, precisamente para que el profesor de la asignatura conozca los conocimientos previos de sus alumnos y haga adaptaciones a la hora de dar clase si conviene. Todos los alumnos deben hacer las actividades, es por ello que el profesor podrá detectar problemas de aprendizaje o la falta de entendimiento de un ejercicio. Esto último no es incompatible con el trabajo en grupo, pues se persigue que los alumnos se expliquen la manera de proceder los unos a los otros para que la totalidad del grupo comprenda el ejercicio.

E.G.1. Conocer las características de los estudiantes, sus contextos sociales y motivaciones. *El acercarse al alumno en una actividad como ésta implica conocerle más, ver si las aplicaciones de las matemáticas son motivantes, o incluso ver que en que partes de la actividad el alumno está más activo puede darnos pistas sobre cuáles son sus gustos y por tanto como motivarle de manera más efectiva.*

E.G.2. Comprender el desarrollo de la personalidad de estos estudiantes y las posibles disfunciones que afectan al aprendizaje. *El hecho de que la actividad se realice en un entorno social permite al profesor localizar disfuncionalidades.*

E.G.3. Elaborar propuestas basadas en la adquisición de conocimientos, destrezas y aptitudes intelectuales y emocionales. *La base de un paseo matemático es adquirir conocimientos competencias y desarrollar las relaciones interpersonales y, por ende, aptitudes emocionales.*

E.G.4. Identificar y planificar la resolución de situaciones educativas que afectan a estudiantes con diferentes capacidades y diferentes ritmos de aprendizaje. *Los paseos matemáticos no son más que una actividad que mejora las capacidades de los estudiantes, al hacerse como repaso de contenido de los cursos anteriores ayuda a equilibrar los conocimientos previos ayudando a los alumnos con problemas de aprendizaje.*

Procesos y contextos educativos

Promover la realización de un paseo matemático para un curso en un centro conlleva ser participativo en este, y por tanto colaborar tanto con el resto de los compañeros del departamento como con el claustro a la hora de realizar el proyecto educativo del centro. Debido a que durante la actividad se realizará un paseo en el que se verá parte del patrimonio de la ciudad, se formará a los alumnos en el respeto a los monumentos públicos. Del mismo modo el trabajo, por su carácter colaborativo tiene consecuencias en la formación ciudadana y social, debido a lo que conlleva que un grupo se organice y debata.

E.G.5. Conocer los procesos de interacción y comunicación en el aula y en el centro, abordar y resolver posibles problemas. *Los paseos matemáticos son una gran oportunidad para comunicarnos con los alumnos fuera del aula, conociéndoles mejor y aprendiendo para luego saber cómo manejar al aula en grupo.*

E.G.8. Promover acciones de educación emocional, en valores y formación ciudadana. *El hecho de que el paseo sea por la ciudad y de manera colaborativa tanto la educación en valores y ciudadana como la emocional.*

E.G.9. Participar en la definición del proyecto educativo y en las actividades generales del centro atendiendo a criterios de mejora de la calidad, atención a la diversidad, prevención de problemas de aprendizaje y convivencia. *Esta actividad propone una salida del centro, una visión de la educación como forma de participación social y de contacto con el entorno urbano.*

Competencias módulo específico

Complementos para la formación disciplinar

Para la correcta elaboración de un paseo matemático se debe tener conocimientos de los contenidos de la materia, tanto en forma como en contextos en los que puede aparecer, en lo que se basa el paseo matemático. También se debe tener conocimientos superiores para dar datos divulgativos y motivar de ese modo a los alumnos, viendo que no solo lo más simple de las matemáticas está en la ciudad sino también matemáticas más complejas. Es importante tener un espíritu crítico durante el paseo matemático, por eso se les pedirá a los alumnos que sean lo más minuciosos y precisos posibles con sus respuestas, pues cuando se deja algo a medio explicar o mal explicado puede provocar que los alumnos comentar errores.

Algunas de las actividades tienen una fuerte relación con problemas clásicos de las matemáticas y el origen de ciertas cantidades, como por ejemplo la relación del diámetro de una circunferencia, su perímetro y el número π.

E.E.1. Conocer el valor formativo y cultural de las materias correspondientes a la especialización y los contenidos que se cursan en las respectivas enseñanzas. *Las matemáticas tienen gran valor formativo, esto se ve patente en el propio paseo matemático cuando se analizan distintos objetos y monumentos desde un punto de vista matemático, viendo así la utilidad de las mismas.*

E.E.2. Conocer la historia y los desarrollos recientes de las materias y sus perspectivas para poder transmitir una visión dinámica de las mismas. *En el presente trabajo se hace un enfoque tanto histórico de la ciudad de Valladolid para tener un contexto como un contexto histórico matemático, por ejemplo, explicando el número π como cociente del perímetro de una circunferencia y su diámetro.*

E.E.3. Conocer contextos y situaciones en que se usan o aplican los diversos contenidos curriculares. *A lo largo del paseo matemático se analizan distintos objetos, estructuras y monumentos de la ciudad desde un punto de vista matemático, es el principal objetivo del trabajo.*

Aprendizaje y enseñanza de las materias correspondientes

La base del paseo matemático se basa en las siguientes competencias. Pese a que la propuesta de paseo no se haya considerado como actividad final en la que se evalúan los contenidos adquiridos durante la unidad didáctica sí creo que debería evaluarse con un pequeño porcentaje de la nota, quizás medio punto, pues lo que no se evalúa se devalúa. Por otro lado, el simple hecho de planificar la actividad implica conocimientos teóricos de la materia, así como implica saber elaborar materiales educativos. En la segunda fase de la actividad, es decir, en la reflexión sobre el paseo en el aula, el profesor usará herramientas tecnológicas, como el GeoGebra, para realizar el análisis de las figuras vistas durante el paseo y las fotografías de los alumnos realizadas durante el mismo.

El trabajo colaborativo fomenta las relaciones interpersonales de los alumnos, lo cual influye en la mejora de la convivencia en el aula. Puesto que en el trabajo los estudiantes tienen total libertad para hacer los ejercicios de la manera en que crean necesario, los alumnos se verán atendidos, teniendo en cuenta todas sus aportaciones, las cuales se podrán someter a debate, para que los alumnos vean los distintos puntos de vista y aprender en el proceso.

E.E.6. Conocer los desarrollos teórico-prácticos de la enseñanza y el aprendizaje de las materias correspondientes. *Para desarrollar un paseo matemático es imprescindible conocer los contenidos curriculares.*

E.E.7. Transformar los currículos en programas de actividades y de trabajo. *Las actividades propuestas en el paseo matemático están pensadas conforme a desarrollar los currículos de los alumnos y que adquieran las competencias básicas.*

E.E.8. Adquirir criterios de selección y elaboración de materiales educativos. *Hay muchos elementos matemáticos en la ciudad de Valladolid, en cada uno de ellos se pueden ver conceptos para uno o distintos niveles, y es necesario hacer una selección para ver cuál es el que mejor se adapta a nuestros alumnos.*

E.E.9. Fomentar un clima que facilite el aprendizaje y ponga en valor las aportaciones de los estudiantes. *El clima colaborativo es más distendido y los alumnos se ven más motivados, pues siempre trabajar en grupo es más motivador.*

E.E.10. Integrar la formación en comunicación audiovisual y multimedia en el proceso de enseñanza aprendizaje. *Las redes sociales y las TIC están consideradas como medios de comunicación y reflexión sobre las actividades.*

E.E.11. Conocer estrategias y técnicas de evaluación y entender la evaluación como un instrumento de regulación y estímulo al esfuerzo. *El carácter evaluador de nuestro paseo matemático no persigue el hecho de calificar lo aprendido sino de dar puntos a los alumnos para motivarles en la actividad y posteriormente en la asignatura.*

Innovación docente e iniciación a la investigación educativa

La propuesta del paseo matemático como salida o excursión de matemáticas en un instituto es una práctica muy poco llevada a cabo por la comunidad educativa, es por tanto que se la puede considerar como innovación, ya que la inmensa mayoría de los centros en secundaria no hacen salidas de este estilo.

A su vez, esta práctica puede dar pie a un proceso de investigación en el que se estudie la eficacia de los procesos de enseñanza y aprendizaje de cursos anteriores, pues no es más que una manera de evaluar estos contenidos un año después de que hayan sido impartidos. De esta manera se pueden detectar problemas relativos a la enseñanza y poder enmendarlos.

E.E.12. Conocer y aplicar propuestas docentes innovadoras en el ámbito de la especialización cursada. *En la actualidad la cantidad de centros de educación secundaria que llevan a cabo una salida para ver la relación de las matemáticas con el entorno urbano es ínfimo, es por ello que se considera a esta experiencia innovadora.*

E.E.13. Analizar críticamente el desempeño de la docencia, de las buenas prácticas y de la orientación utilizando indicadores de calidad. *La encuesta posterior que se les hace a los alumnos acerca de la actividad ayudará a mejorarla posteriormente.*

E.E.14. Identificar los problemas relativos a la enseñanza y aprendizaje de las materias de la especialización y plantear alternativas y soluciones. *La actividad del paseo matemático pretende poner solución a la desmotivación de los alumnos de secundaria, y el hecho de que muchos alumnos vean las matemáticas como una asignatura inservible.*

E.E.15. Conocer y aplicar metodologías y técnicas básicas de investigación y evaluación educativas y ser capaz de diseñar y desarrollar proyectos de investigación, innovación y evaluación. *Además de la encuesta propuesta esta actividad da pie a hacer un estudio sobre el rendimiento de los alumnos en la asignatura tras haber hecho esta actividad o no.*

Competencias Específicas del módulo practicum

Durante la fase práctica de este máster se han adquirido estas competencias, de tal modo que han condicionado el modo de plantear las actividades y las palabras usadas para referirse a los distintos elementos y de escribir los ejercicios de las actividades.

En el trabajo estas competencias se ven retratadas a la hora de llevar al cabo esta práctica docente, es importante saber comunicarse con los alumnos, y así conseguir que incitar su curiosidad y por ende que mejore su capacidad matemática y su motivación con la materia. Al tratarse de una actividad al aire libre basada en experiencias reales, los alumnos lograran obtener un aprendizaje significativo al poder reflexionar en las experiencias vividas, que están basadas en hechos prácticos.

E.P.1. Adquirir experiencia en la planificación, la docencia y la evaluación de las materias correspondientes a la especialización. *En este caso se debe hacer una planificación muy diferente de las habituales sobre "docencia ordinaria".*

E.P.2. Acreditar un buen dominio de la expresión oral y escrita en la práctica docente. *La expresión escrita en el ámbito de las matemáticas se ve reflejado en la explicación de las posibles actividades de aprendizaje en monumentos, mientras que el oral se desarrollará con los alumnos en el aula cuando se analicen los ejercicios y las fotos mandadas por ellos.*

E.P.3. Dominar las destrezas y habilidades sociales necesarias para fomentar un clima que facilite el aprendizaje y la convivencia. *Este tipo de actividades proponen un ambiente más distendido en el aula, conocer a tus alumnos, y en consecuencia fomenta un clima que facilita el aprendizaje en el aula.*

E.P.4. Participar en las propuestas de mejora en los distintos ámbitos de actuación a partir de la reflexión basada en la práctica. *La reflexión en el aula tras el paseo matemático pone en primer plano la relación de una materia abstracta como es las matemáticas con el entorno urbano, viendo la practicidad de las mismas.*

Capítulo 2: Paseo matemático como herramienta didáctica

En este capítulo se estudiará al paseo matemático desde el punto de vista de herramienta didáctica actual. Primero se verán cuáles son los antecedentes a este trabajo, de qué manera se enfocaron, cuáles eran sus objetivos y su público objetivo. Después se estudiará cómo contribuye el paseo matemático con las competencias básicas de secundaria, pues con la LOMCE la educación secundaria ha de estar basada en el desarrollo de competencias.

Antecedentes

Los paseos matemáticos, rutas matemáticas o Gymkhanas matemáticas son una herramienta didáctica y divulgativa muy potente, es por ello que ya tienen cierto recorrido histórico dentro de España, entre los que se pueden encontrar los siguientes:

1. Paseo matemático por Santiago (APAGEMA, 2010-2012)

Esta es una actividad creada por la Asociación Gallega de Profesores de Matemáticas "APAGEMA". Las actividades tuvieron lugar entre los años 2010 y 2012, y consiste en un paseo por la ciudad de Santiago de Compostela a la par que se realizan ciertas actividades relacionadas con las Matemáticas contextualizando en lugares de interés de la ciudad.

2. Un paseo matemático por las competencias básicas (Fernández & Muñoz, 2008)

Estos profesores del IES Macarena de Sevilla, proponen unos cambios metodológicos elaborando una actividad que desarrolle las competencias básicas, que son aquellas que deben poseer los ciudadanos del siglo XXI. Es por ello que desarrollan una actividad interdisciplinar centrada en competencias como es el paseo matemático. Los autores presentan una serie de actividades de este tipo relacionadas con una plaza de la ciudad: la Alameda de Hércules, situada en el camino de acceso al Centro histórico, comercial y administrativo de Sevilla. En el paseo se proponen actividades con gran relación con la vida cotidiana desde un punto de vista realista, también se le incita al estudiante a que investigue acerca de elementos relacionados con los elementos y el entorno en que se trabaja, desarrollando de este modo las competencias básicas.

3. Rutas matemáticas por Valencia

Los autores tienen cuatro rutas, una de las Torres de los Serranos al Jardín Botánico (Puij, Monzò, & Queralt, 2007 (I)), la segunda de la Escuela de Magisterio "Ausiàs March" a la Ciudad de las Artes y las ciencias (Puij, Monzò, & Queralt, 2007(II)), la tercera de la Ciudad de la Justicia al Oceanográfico (Puij, Monzò, & Queralt, 2004(I)), la cuarta del Mercado de Colón a La Nau (Puij, Monzò, & Queralt, 2004(II)). Estas rutas están dirigidas a alumnos de Secundaria y bachillerato, en ellas se realizarán dos tipos de actividades, unas durante todo lo largo del recorrido, y otras más concretas donde se realizarán paradas para explicar el concepto matemático que hay en un edificio o monumento para después pasar a hacer una actividad sobre ello.

4. Rutas matemáticas en Zaragoza (Zaragoza, 2010)

En la página Web de Zaragoza se puede encontrar tres rutas matemáticas. La primera es una Gymkana matemática por la ciudad del Zaragoza, en la que se proponen diversas actividades en 6 puntos base. La segunda propone rutas para hacer por el centro de la ciudad en la que el objetivo es el conocimiento de las matemáticas y la reflexión en ellas. Por último, el tercero habla de la relación entre el mudéjar y las matemáticas, estableciendo una ruta con 9 paradas donde se ven patentes estas relaciones.

5. Paseo matemático por Logroño (Schmitt, 2007)

La Fundación Caja Rioja organizó un paseo por el Casco Antiguo enmarcado en el ciclo "Divulgaciencia 2007" que realizaron los alumnos del IES Batalla de Clavijo de Logroño en el que se mostraba la alta presencia de las matemáticas en la vida cotidiana. El objetivo era estudiar desde un punto de vista práctico las diversas figuras y objetos matemáticos encontrados por la ciudad.

6. Paseo matemático por la mezquita de Córdoba (De La Fuente, 2017)

El seminario federal "Paseos Matemáticos" que organiza la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), busca ilustrar a los asistentes sobre qué debe tener una visita o un paseo para mirarlo con ojos matemáticos y aportar de esta manera conocimiento a alumnos y alumnas. En este caso se hace un análisis exhaustivo sobre las matemáticas alrededor de la mezquita de Córdoba, como por ejemplo si es correcta la dirección a la Meca o los grupos cristalográficos que se encuentran en ella.

7. Ruta matemática por Madrid (Muñoz, 2010)

Esta actividad nació en septiembre de 1995, cuando se celebraban las VII Jornadas sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (JAEM). La cual otorga material didáctico destinado a Secundaria para visualizar las matemáticas del entorno. La ruta se centra en 3 lugares del eje de la Castellana, los museos Naval, arqueológico y de Escultura al aire libre. El objetivo es visualizar las matemáticas en el entorno de la ciudad mediante distintas actividades en estos tres enclaves.

8. Una ruta-yincana matemática por la Universidad de Alicante (Molina, Mulero, Segura, & Sepulcre, 2015)

El trabajo se enmarca en una ruta matemática para alumnos universitarios, en este caso tomando las matemáticas del campus de la Universidad de Alicante que está ubicado en la localidad de San Vicente del Raspeig. El objetivo es que los alumnos reconozcan los elementos de las cuatro ramas de las matemáticas. Las actividades para los alumnos de Ciencias están distribuidas en cuatro sectores, uno por cada rama (álgebra, geometría, análisis matemático y estadística) de tal modo que los estudiantes irán rotando de estación en estación. En cada estación se les dará una hoja con información acerca del concepto matemático que se estudiará y las actividades pertinentes

9. Paseo matemático por Albacete (Martínez-Tébar & García, 2015)

Este trabajo realizado por Serapio García y Juan Martínez-Tébar Giménez, profesor de secundaria y autor del blog “Los matemáticos no son gente seria”. El trabajo es una presentación de carácter divulgativo en el que exponen los elementos matemáticos de interés en la ciudad de Albacete, no solo comentando formas geométricas sino también personajes históricos relacionados con la ciudad de uno u otro modo.

10. Actividades matemáticas fuera del aula. Cuaderno de campo (Marcos & Carpintero, 2001)

Este artículo muestra el trabajo de unos profesores de secundaria en el que se presentan una serie de actividades educativas en las que se aprovecha el entorno para tratar ciertos contenidos del currículo de matemáticas. Hacen un estudio acerca de por qué hacer este tipo de actividades y sus beneficios para los alumnos, así como muestran un cuadernillo de campo donde se relatan estas actividades.

11. Paseo matemático por Torrelavega (Merino, 2016)

Trabajo realizado con la intención de buscar recursos educativos adaptados a la LOMCE. El trabajo que realiza y analiza Pablo busca motivar a los alumnos de segundo de ESO para aprender matemáticas, para ello realiza un recorrido por la ciudad de Torrelavega. Propone un nuevo método, innovador y atractivo que permite a los alumnos reforzar la adquisición de los contenidos incluidos en el currículo y, conocer la cara amable y útil de las matemáticas. Para ello considera de especial relevancia la experiencia fuera de las aulas, reapropiarse del entorno y así poder tener un aprendizaje significativo de las matemáticas.

12. Ruta matemática por Elche (Devesa, Fargueta, Gutiérrez, & López, 2001)

Este libro incluye dos rutas por la ciudad de Elche, una por el casco histórico y otra por el yacimiento arqueológico de La Alcudia. En la primera se diferencian dos niveles de dificultad, para el primer y el segundo ciclo de la ESO estableciendo ejercicios de diferentes dificultades dependiendo del nivel por tanto de los alumnos a los que va dirigida incluyendo también el modo en que están redactadas las actividades. Este libro está hecho para que cualquier docente lo use y pueda enseñar a sus alumnos que las matemáticas están presentes en las ciudades.

13. Elaboración de una ruta matemática por la ciudad de Valladolid (Sánchez, 2013)

En este trabajo de fin de Máster, Fernando hace un análisis de una ruta matemática por las calles de Valladolid enfocado principalmente al curso de tercero de ESO tocando todas las áreas de las matemáticas. En el trabajo trata de crear un recurso metodológico y didáctico que permita a los profesores transmitir a los alumnos la importancia de las matemáticas en la vida diaria más allá de su aplicabilidad en la futura actividad profesional.

14. Paseo matemático por el "Parque de las Ciencias" (Grupo LaX, 2012)

Esta actividad fue propuesta debido a la celebración de la XIX Olimpiada matemática "Thales". Consta de quince pruebas que deberán superar los alumnos, en las pruebas aparece primero una breve introducción y posteriormente la actividad. Además de lo anterior se insiste en el interés de cada prueba estableciendo que objetivos persigue y cuáles son los materiales necesarios para poder realizarse.

15. Paseo matemático por Granada (Exploria, s.f.)

Esta página web ofrece una experiencia virtual para realizar un paseo matemático por Granada. Este paseo pretende dar una visión distinta de la ciudad de Granada, en la que se integren el arte, las matemáticas, la historia y los recursos tecnológicos con GeoGebra. El paseo, que tiene fines divulgativos, la ruta virtual que se puede hacer en la página web tiene 5 estaciones, aunque en la fecha de la consulta solo estaba en funcionamiento la primera de ellas.

16. Los puentes del Pisuerga en la ciudad de Valladolid (Ortega & Ortega, 2003)

En el artículo se hace un estudio de las matemáticas en los puentes de Valladolid, este trabajo se hace basándose en los propios planos viendo los diferentes tipos de estructuras de los puentes. También propone llevar al aula como actividad de un taller de matemáticas, de manera que sea una experiencia motivadora para los alumnos.

Contribución a las competencias básicas

El sistema educativo actual se basa en la adquisición de competencias básicas. El aprendizaje por competencias favorece los propios procesos de aprendizaje y la motivación por aprender, debido a la fuerte interrelación entre sus componentes: el concepto se aprende de forma conjunta al procedimiento de aprender dicho concepto.

Con este paseo matemático se pretende contribuir al desarrollo de las 7 competencias básicas: competencia lingüística, competencia matemática, competencia para aprender a aprender, competencia digital, competencias sociales y cívicas, sentido de iniciativa y espíritu emprendedor y, por último, conciencia y expresiones culturales.

Competencia lingüística

La competencia lingüística se basa en la utilización del lenguaje como instrumento de comunicación oral y escrita, y de aprendizaje y regulación de conductas y emociones. La meta es comprender y saber comunicar tanto en la lengua materna como en lenguas extranjeras.

La manera en que se trabajarán en los paseos matemáticos tiene una clara vinculación con la competencia lingüística, tanto en su forma oral como escrita. Los alumnos deberán conversar entre ellos, comunicar sus hallazgos sus ideas de tal modo que el resto de los compañeros lo entiendan. En este sentido, escuchar, dialogar y una buena forma de expresarse serán un cimiento de esta actividad.

La comunicación y comprensión escrita también están presentes durante una actividad de este tipo, a los alumnos se les pedirá que realicen actividades en las que tendrán que expresarse con la mayor exactitud posible, tanto en lenguaje coloquial como en lenguaje matemático. Además, la comprensión escrita tiene un gran componente en la resolución de problemas, hay que comprender bien el enunciado antes de enfrentarse a un problema. Miguel de Guzmán (De Guzmán, 2008) dice que la primera fase por la que pasa un alumno de secundaria a la hora de resolver un problema es comprender el enunciado, saber qué dice, cuáles son los datos y lo que piden.

La expresión escrita es esencial a la hora de que los alumnos respondan a los problemas, debido a que en matemáticas hay que ser muy preciso con lo que se dice, cómo se dice y cómo se justifica. En el caso concreto de esta actividad los alumnos deberán responder razonadamente a los problemas propuestos, expresar sus ideas y realizar diversos razonamientos. El lenguaje matemático es una herramienta para comunicar ideas con gran exactitud, al mismo modo que es capaz de transmitir ideas gracias a su léxico abstracto.

Competencia matemática

Esta competencia se entiende como habilidad para desarrollar y aplicar el razonamiento matemático con el fin de resolver problemas diversos en situaciones cotidianas; en concreto, engloba los siguientes aspectos y facetas: pensar, modelar y razonar de forma matemática, plantear y resolver problemas, representar entidades matemáticas, utilizar los símbolos matemáticos, comunicarse con las Matemáticas y sobre las Matemáticas, y utilizar ayudas y herramientas tecnológicas.

La contribución del paseo a esta competencia es más que obvia. En general el currículo de matemáticas gira entorno a esta competencia y en consecuencia las actividades realizadas durante el paseo matemático. Todas las actividades tienen una alta componente matemática, las actividades en sí mismas están diseñadas para que el alumno muestre que conoce y sabe usar el lenguaje matemático, sabe razonar y usar argumentos matemáticamente válidos. En concreto en el paseo matemático que se propone los contenidos pertinentes serán los del bloque de geometría.

Competencias sociales y cívicas.

Esta competencia permite vivir en sociedad, comprender la realidad social del mundo en que se vive y ejercer la ciudadanía democrática. Además, incluye habilidades para participar plenamente en la vida cívica.

El componente colaborativo de un paseo matemático potencia estas competencias, la capacidad de comunicarse de una manera constructiva en distintos entornos sociales y culturales, mostrar tolerancia, expresar y comprender puntos de vista diferentes, negociar sabiendo inspirar confianza surge con el debate de cómo enfrentarse a un problema, pues generalmente se pueden encontrar diferentes caminos para su resolución. Dentro de esta competencia podemos hablar de la competencia interpersonal, es decir, la capacidad de relacionarse, y finalmente vivir en sociedad. El respeto entre compañeros de clase es algo fundamental y que se debería enseñar en todas las materias, y el paseo matemático puede contribuir a hacerlo efectivo.

Conciencia en expresiones culturales

La competencia en conciencia y expresión cultural implica conocer, comprender, apreciar y valorar con espíritu crítico, con una actitud abierta y respetuosa, las diferentes manifestaciones culturales y artísticas, utilizarlas como fuente de enriquecimiento y disfrute personal y considerarlas como parte de la riqueza y patrimonio de los pueblos. Con la actividad propuesta los alumnos conocerán la cultura de su ciudad, personajes históricos importantes de Valladolid, así como monumentos y lugares de interés, en general se conseguirá que conozcan y valoren la cultura de su entorno.

Un elemento principal de los paseos es la transversalidad de éstos en el ámbito educativo, esta permite adquirir diferentes habilidades, como por ejemplo la competencia cultural y artística. Las matemáticas están presentes en la cultura y expresiones artísticas, en los frisos y mosaicos, en las construcciones arquitectónicas tanto antiguas como las de estos días. Los elementos geométricos en concreto tienen gran importancia en este aspecto.

Se utilizarán las matemáticas de estos monumentos para motivar a los alumnos para que conozcan su ciudad, así como profundicen en los conocimientos matemáticos adquiridos durante el curso. Es importante destacar que en la actividad que se propone no se usarán las matemáticas para estudiar arquitectura o arte, sino que se utilizará la existencia de las matemáticas en estos campos para estudiar matemáticas y visualizarlas en el entorno urbano.

Competencia para aprender a aprender

Aprender a aprender supone iniciarse en el aprendizaje y ser capaz de continuarlo de manera autónoma. Consta de dos dimensiones. Por un lado, la toma de conciencia de las propias capacidades intelectuales, del proceso y las estrategias empleadas para desarrollarlas y, por otro lado, ser consciente de lo que puede hacer por sí mismo y de lo que puede hacer con la ayuda de los demás.

El paseo matemático contribuirá a que el alumno sea consciente de lo que ha aprendido durante el curso y de lo que necesita aprender y con ello sabrá cuáles son sus capacidades actuales, y que con ayuda de sus compañeros puede resolver los problemas. Debido a que esta actividad tiene una clara vinculación con la vida cotidiana, los problemas planteados harán que el alumno se plantee sus propias capacidades y, por tanto, esta competencia se verá fomentada.

Es importante destacar que resulta muy motivante a la par que fructífero el hacerles partícipes de su proceso de aprendizaje, es la mejor manera de conocer las carencias propias, de autoevaluarse y de mejorar la interacción social, y en ese sentido que los alumnos sean conscientes de lo que pueden hacer con ayuda de los demás.

Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor

Esta competencia se refiere a la posibilidad de optar con criterio propio y llevar adelante las iniciativas necesarias para desarrollar la opción elegida y hacerse responsable de ella en el ámbito personal, social y laboral.

Durante el paseo matemático se abordan habilidades como la capacidad de análisis, planificación y organización, además siendo una labor grupal influye la comunicación y el saber presentar una idea y negociar. Otro aspecto importante es la autonomía que se les da a los alumnos en una tarea como esta, las herramientas que podrán utilizar son toda aquella que esté a su alcance, el propio alumno es el que asume el reto y la toma de decisiones, lo que le atribuye responsabilidad, así como desarrollo personal.

Competencia digital

La competencia digital es aquella que implica el uso creativo, crítico y seguro de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) para alcanzar los objetivos relacionados con el trabajo, la empleabilidad, el aprendizaje, el uso del tiempo libre, la inclusión y participación en la sociedad. En la sociedad actual llena de tecnología los alumnos tienen cada vez a más temprana edad teléfonos inteligentes, como docentes debemos aprovechar esto como una herramienta positiva, usarla a nuestro favor y aprovecharnos de estos recursos.

En el caso del paseo matemático propuesto se usarán estas TIC en beneficio de diversos modos. A los alumnos se les pedirá que realicen fotografías a objetos que crean que tienen interés matemático y se las envíen al profesor vía correo electrónico, Moodle o mediante la plataforma Twitter que además se usará a lo largo de la asignatura como herramienta de comunicación anacrónica. Posteriormente estas fotografías se analizarán en el aula usando programas como GeoGebra para hacer un esquema del objeto enviado y analizar sus propiedades matemáticas, que principalmente serán geométricas.

Capítulo 3: Elementos matemáticos por Valladolid

Uno de los objetivos de este trabajo es mostrar los elementos matemáticos que hay en una ciudad como puede ser Valladolid, especialmente los elementos que estén vinculados con los contenidos docentes en enseñanza secundaria y Bachillerato. Por ello, se va a destinar este capítulo a mostrar diferentes emplazamientos de la ciudad de Valladolid que se pueden aprovechar con los alumnos para que ellos vean cómo se hacen patentes las matemáticas en un entorno urbano.

Los elementos matemáticos que se verán están presentes desde en los objetos más cotidianos hasta las esculturas y fachadas de edificios emblemáticos, con ello se pretende hacer ver que las matemáticas están presentes en la ciudad sin necesidad de tratarse de edificios de arte renacentista. Es decir, se pretende ver las matemáticas desde los más cotidiano y común, hasta las esculturas y el arte.

Las cuatro estatuas

En Valladolid, como en otras muchas ciudades, se pueden encontrar diferentes estatuas, estas suelen estar en plazas, y sitios abiertos, lo que será importante para que los alumnos realicen una actividad en los alrededores sin peligro. En concreto algunas de Valladolid podrían ser estas 4: la estatua del Conde Ansúrez en la Plaza Mayor, la de Miguel de Cervantes en la Plaza de la Universidad, la de Felipe II en la Plaza de San Pablo, y la de José Zorrilla en la plaza Zorrilla.

Figura 1: Cuatro estatuas de Valladolid, Conde Ansúrez (A), Miguel de Cervantes (B), Felipe II (C) y José Zorrilla (D).

Uno de los objetivos más importantes que se puede desarrollar con esta actividad es el cálculo de alturas de objetos inalcanzables, para ello dependiendo de los niveles, se podrá usar el teorema de Thales, ya sea con la sombra o usando la perspectiva con un objeto de altura conocida. Por ejemplo, con la estatua de Miguel de Cervantes (B).

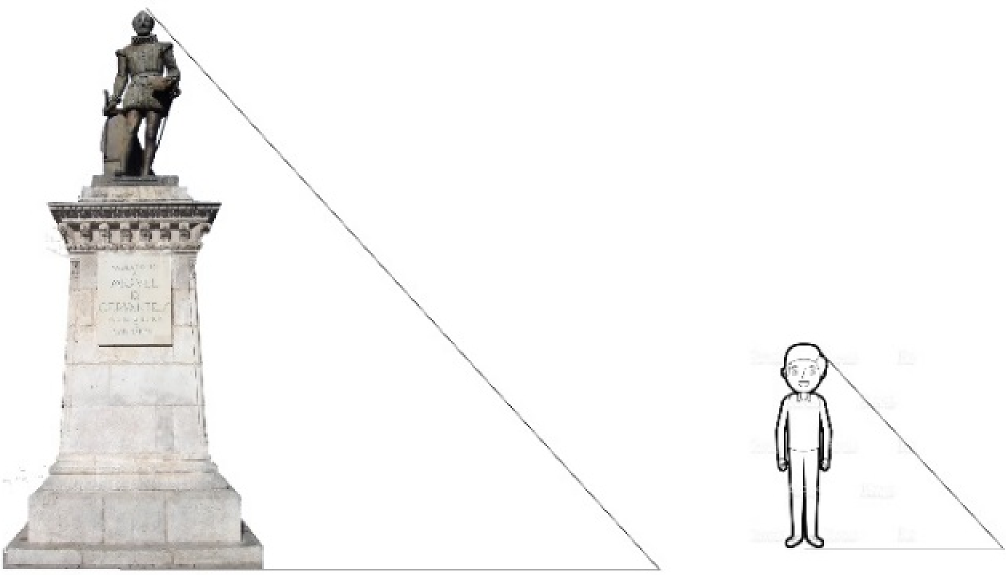


Figura 2: Teorema de Thales aplicado.

Con esta actividad podemos ver cuáles son las claves para que dos triángulos sean semejantes. Un método muy común y sencillo sería usar la sombra de la estatua y la nuestra para formar triángulos semejantes, pero, al haber cuatro localizaciones diferentes, es importante que en cada una de ellas midamos nuestra sombra. Esto es debido a que el sol habrá cambiado de posición y la sombra no medirá lo mismo ambos lados al haber una diferencia de tiempo. Gracias a la diferencia de tiempo en el que estaremos en una u otra ubicación se enfatizará en que una condición de triángulos semejantes es que tengan sus ángulos iguales. Del mismo modo, se observará y se fomentará el pensamiento crítico de los alumnos.

En bachillerato también se pueden usar conceptos de trigonometría, calculando la altura dela figura en vez de la de la estatua en sí, para ello se necesitarán herramientas específicas para calcular ángulos. En el caso de la figura que se muestra a continuación, es posible calcular la altura de Miguel de Cervantes (B) usando la propia altura, la distancia a la estatua y la tangente de los ángulos $\widehat{A+B}$ y $\hat{B}$.

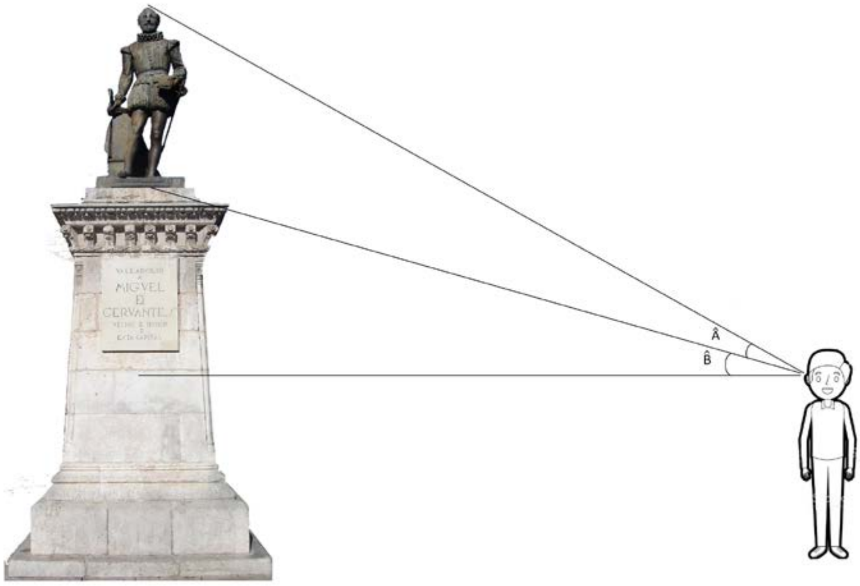


Figura 3: Trigonometría para calcular distancias.

También se valorará que los alumnos tomen la distancia de la sombra desde el centro de la figura y no desde su extremo. Esto es importante para que ambos triángulos tengan dos ángulos iguales, el dado por la posición del sol, y el ángulo recto de tu cuerpo con el suelo o de la cabeza de la estatua con el centro de su base. O en el caso de la trigonometría esto será importante, pues para poder usar la tangente de los ángulos $\widehat{A+B}$ y $\hat{B}$ como cociente de los catetos, el triángulo debe ser rectángulo.

Álgebra geométrica

En este apartado se van a aplicar conceptos de álgebra como las identidades notables. Al igual que se puede desarrollar el producto y comprobar cuál es la identidad notable, es posible hacer demostraciones con un dibujo, por ejemplo a través de la siguiente figura queda demostrado que $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ una de las igualdades notables. Esta demostración entra dentro del álgebra geométrica, pues se llega a resultados algebraicos a través de la geometría.

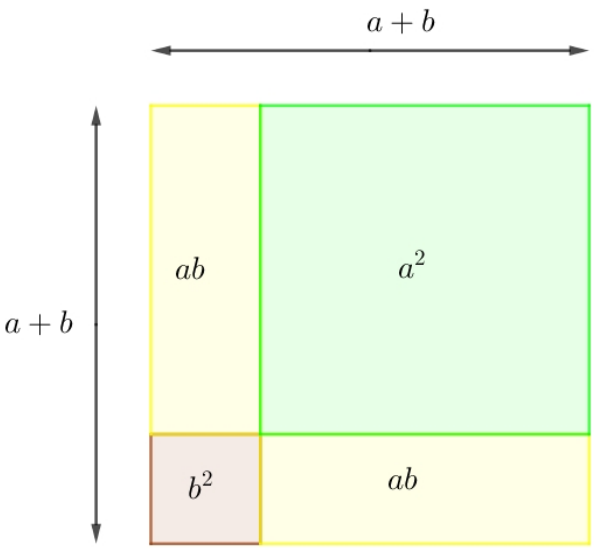


Figura 4: Identidad notable

Estas actividades realizadas en el aula pueden servir para desarrollar nuevas demostraciones con este tipo de razonamiento de otras identidades, la que sugerimos aquí en el contexto de Valladolid es la siguiente:

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

Esta igualdad se puede comprobar fácilmente desarrollando los productos notables, que son dos de los primeros que se aprenden y de los más importantes. Lo interesante de esta actividad es conseguir una demostración con álgebra geométrica como se hizo en la figura 4. Las vallas de la siguiente imagen se encuentran en la Plaza de Poniente.

Figura 5: Vallas de la Plaza Poniente

La demostración es tan sencilla como las anteriores, pero para ello habrá que tener en cuenta cuáles de las distancias son a y b. En la siguiente figura se muestra la vaya de forma esquemática con las medidas necesarias, mostrando como la identidad antes descrita mediante la demostración con álgebra geométrica.

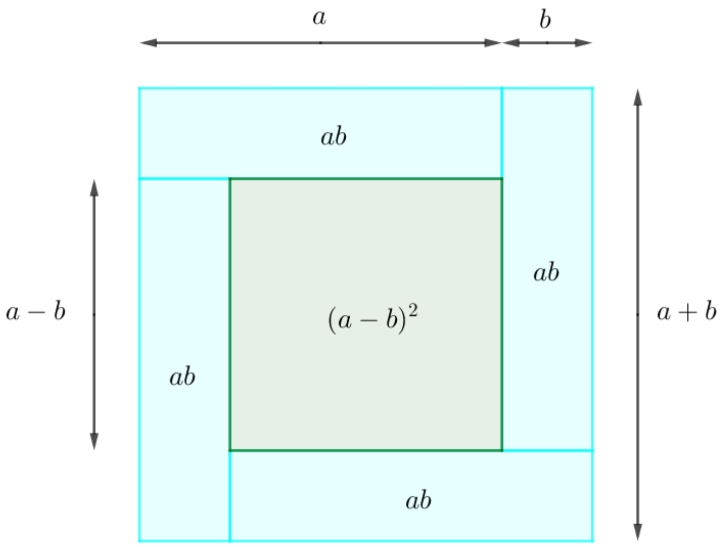


Figura 6: Demostración gráfica.

Uno de los beneficios de esta actividad es que el alumno obtiene la capacidad de extrapolar un razonamiento, y de este modo, llegar a hacerlo propio. Esta idea también recoge la idea de que la suma de las áreas de figuras disjuntas en una composición, suman el área total de la composición.

Planos de Valladolid

Los mapas y planos son herramientas de uso cotidiano, ya sea en forma digital o físico, y por tanto son cercanos a los alumnos. Los digitales los usan desde su teléfono móvil cuando han quedado con alguien, y los planos físicos cuando no disponen de conexión a internet, por ejemplo, cuando viajan a un país extranjero. La ciudad de Valladolid tiene una iniciativa llamada "Walking is Good", por ello, en varias zonas se puede encontrar un mapa similar al siguiente.

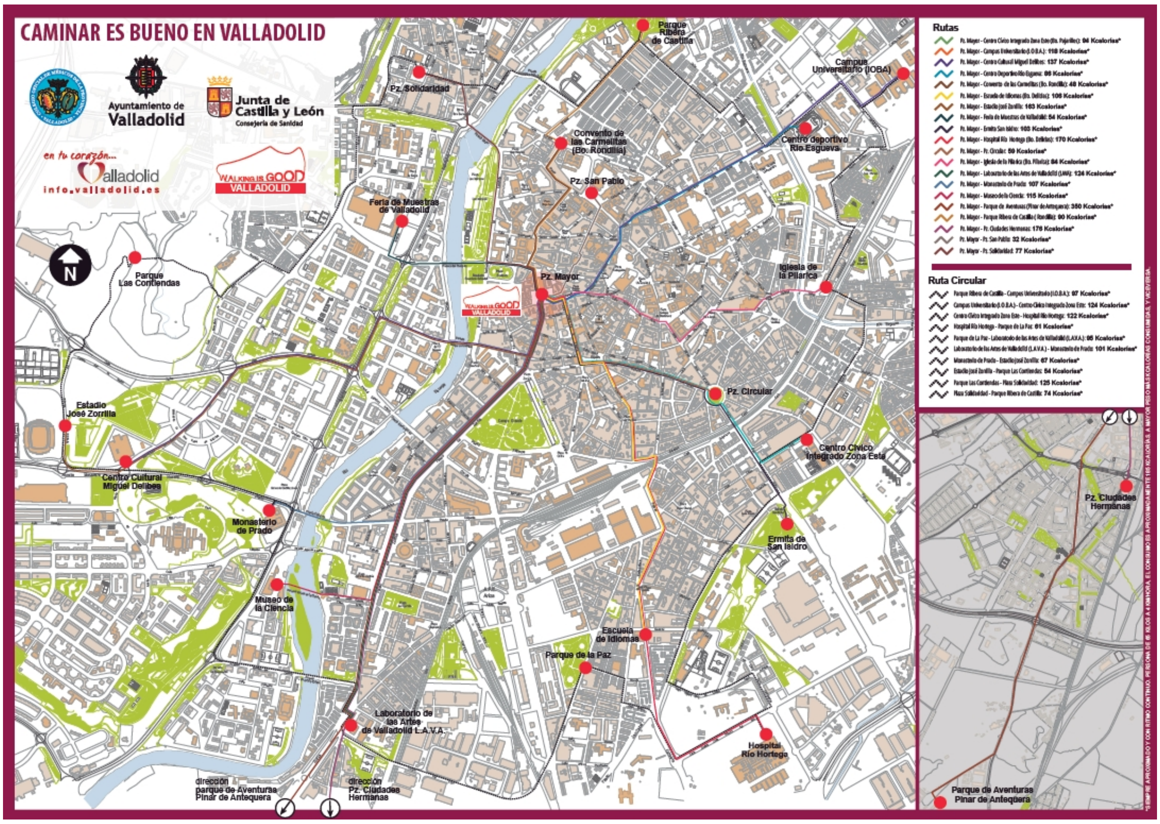


Figura 7: Mapa de Valladolid con rutas.

En el mapa se muestran diferentes rutas de la ciudad de Valladolid y las kilocalorías que se queman al realizar esta ruta. El hecho de que el propio mapa carezca de escala da pie a introducir este concepto, en esta ocasión podemos hacer con los alumnos de los primeros cursos de ESO la actividad de calcular la escala del mapa. Una vez calculada esta escala se puede utilizar para calcular los kilómetros de largo que tiene cada ruta y calcular la cantidad de kilocalorías que se queman por kilómetro en las diferentes rutas. Un ejercicio más avanzado para un curso de Bachillerato sería pedir una regresión lineal teniendo todos los datos de la longitud de cada ruta y las kcal que consume.

Con este tipo de actividades, por tanto, se pueden desarrollar conceptos como puede ser el de proporcionalidad y razón de proporcionalidad, así como recta que pasa por dos puntos, incluso dentro de la estadística y probabilidad el concepto de regresión lineal. Es importante ver que en muchos problemas de la vida diaria se presentan diversas relaciones con las matemáticas, pues ahí es donde se ve la transversalidad de esta materia.

Poliedros truncados

Durante diversos puntos de la ciudad, generalmente en instalaciones deportivas de la ciudad se encuentran contenedores de vidrio con forma de balón de fútbol, la cual da pie a hablar sobre poliedros. En concreto esta figura tiene forma de icosaedro truncado.

Figura 8: Contenedor con forma geométrica

Esta figura geométrica da pie a hablar a los alumnos de figuras regulares, así como el cálculo de diversas áreas. Como en clase se habrán hecho diversos desarrollos planos de los poliedros regulares, una de las cosas que se les puede pedir a los alumnos es que hagan el desarrollo plano del icosaedro truncado. Otro contenido del currículo de tercero de ESO es la identidad de Euler, con esta figura los alumnos pueden comprobar dicho teorema, debido a su convexidad y, por tanto, ausencia de agujeros.

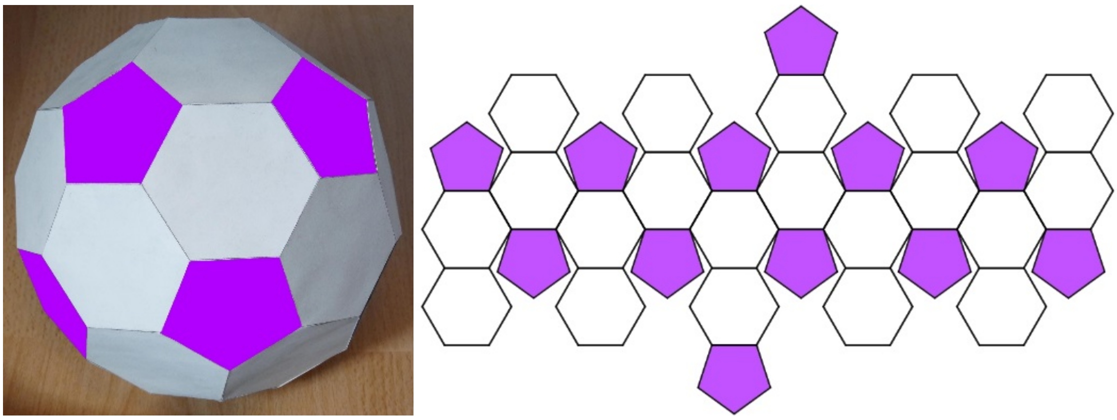


Figura 9: Icosaedro truncado hecho de papel (A) y su desarrollo plano (B)

Otra posible actividad sería pedir a los alumnos el volumen de icosaedro que se ha quitado para obtener el icosaedro truncado, para el cual tendrían que calcular el volumen de 12 pirámides pentagonales, de las cuales conocen el lado de la base y el lado de los triángulos de sus caras laterales, que en este caso serían todos el mismo e igual a la tercera parte de la longitud de las aristas originales del icosaedro. Para esta actividad es necesario tener cierto conocimiento básico de trigonometría, pues es lo más efectivo para calcular la apotema del pentágono.

El cubo

Uno de los elementos educativos de enseñanza secundaria es saber calcular la diagonal d de un ortoedro de aristas a, b y c. Esto es una práctica educativa que puede ayudar a mostrar el teorema de Pitágoras, pues con la siguiente imagen se puede razonar del siguiente modo:

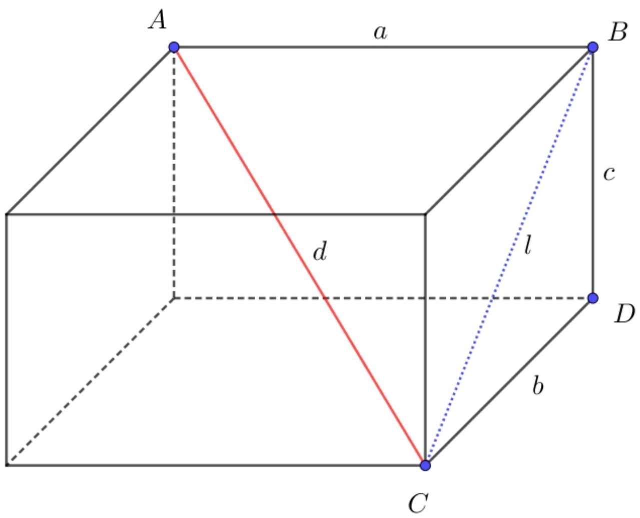


Figura 10: Ortoedro

Puesto que el objetivo es calcular la diagonal d, lo primero que hay que hacer es ubicarla en un triángulo rectángulo ABC , de modo que por el teorema de Pitágoras se tiene que

$$d^2 = a^2 + l^2$$

Por otro lado, l es la hipotenusa del triángulo rectánguloBCD, de modo que también se tiene que

$$l^2 = b^2 + c^2$$

Juntando ambas igualdades se deduce que:

$$d^2 = a^2 + l^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

En mi experiencia como docente en prácticas he visto que muchos de los alumnos se aprenden la fórmula directamente sin pasar por ese proceso de razonamiento, por lo que luego en posteriores ejercicios no son capaces de visualizar triángulos rectángulos en figuras para aplicar el teorema de Pitágoras y se quedan en blanco sin saber qué hacer. He ahí la importancia de hacer este proceso, pues sirve como ejemplo sencillo.

En el caso concreto de la ciudad de Valladolid está la siguiente escultura en la avenida Monasterio de Nuestra Señora de Prado.

Figura 11: Estructura de cubo abierta

En esta escultura se observa claramente como está dibujado el triángulo utilizado para realizar el teorema de Pitágoras en la demostración. El objetivo es que los alumnos estudien la diagonal del cubo tras haber calculado previamente la diagonal de una cara, en concreto la diagonal de la cara en la que se apoya el lado del triángulo interior.

Muchos alumnos de secundaria tienen dificultades a la hora de interpretar los dibujos tridimensionales que el profesor hace en la pizarra, esto puede ser debido a un bajo desarrollo de su visión espacial. Con esta figura se visualiza lo que representa la figura 10, haciendo que los alumnos puedan interactuar con ella, de manera que al poner el contacto el objeto con su representación, los alumnos desarrollen su visión espacial.

De este modo los alumnos podrán manipular y medir a su antojo, el objeto abstracto que se dibujaba en la pizarra y las líneas imaginarias que se suelen dibujar se hacen patentes en esta escultura. Es por esto que esta escultura puede sernos de gran utilidad para aquellos alumnos que tengan peor visión espacial, o que no sepan identificar bien las figuras tridimensionales cuando son dibujadas en el encerado, ayudándoles en el proceso a mejorar esta capacidad.

Balcones con patrones

Como ya se vio anteriormente, muchos de los elementos decorativos de Valladolid contienen matemáticas. En este caso se analizarán dos decoraciones de balcones en Valladolid, el primero está en la avenida de Miguel Ángel Blanco, y el segundo en la calle Santiago esquina con la calle Constitución.

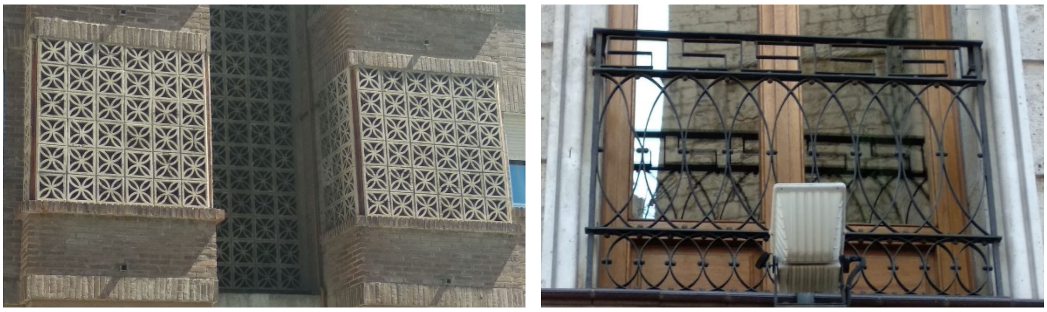


Figura 12: Balcones de Valladolid (A) y (B)

Ahora se trata de analizar qué elementos de los patrones son aprovechables en enseñanza secundaria y bachillerato, para realizarlo se esquematizarán ambos balcones. El primero está formado por un cuadrado y cuatro arcos de circunferencia.

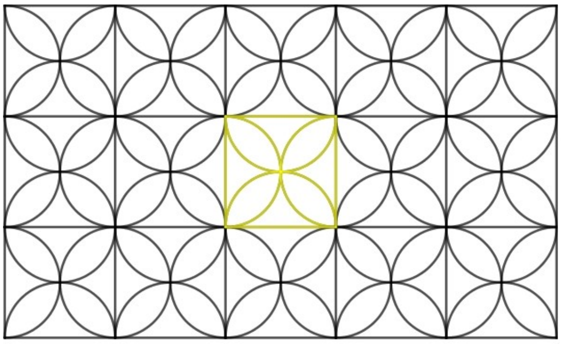


Figura 13: Esquema balcón (A)

En la imagen hay un círculo con cuatro semicircunferencias con centro el punto medio de sus lados. Esta imagen puede ser usada para ver la astucia de los alumnos, al tener que calcular el área de los cuatro pétalos que se forman. Como las rutas o paseos matemáticos están pensados para hacerse de forma colaborativa, los alumnos llegarán quizá a la solución por caminos diferentes. Esto es muy enriquecedor para los alumnos, pues les enseña no sólo matemáticas sino a debatir, explicarse y comprender a los demás.

Otro concepto que se encuentra en este dibujo es el de mosaico, con esta figura se puede incitar a los alumnos a encontrar ejes de simetría de giro y traslaciones que dejan invariante el patrón o la figura base, en este caso hay cuatro ejes de simetría para la figura base (en negro) y ocho que dejan invariante el patrón (negros y verdes). También se señalan los centros de giro de orden dos en rojo y de orden cuatro en azul.

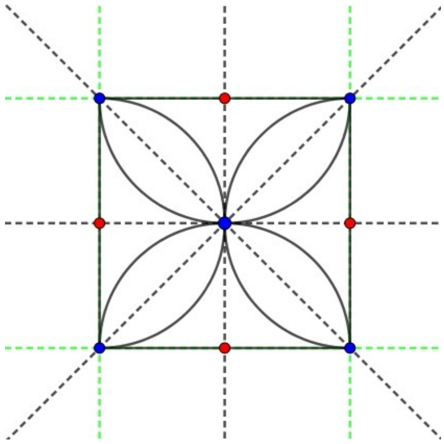


Figura 14: Simetrías

En cuanto al segundo balcón en él se distinguen dos estelas, formadas ambas por intersecciones de circunferencias, la primera de la que se va a hablar es la situada en la parte de abajo del balcón, y es la siguiente:

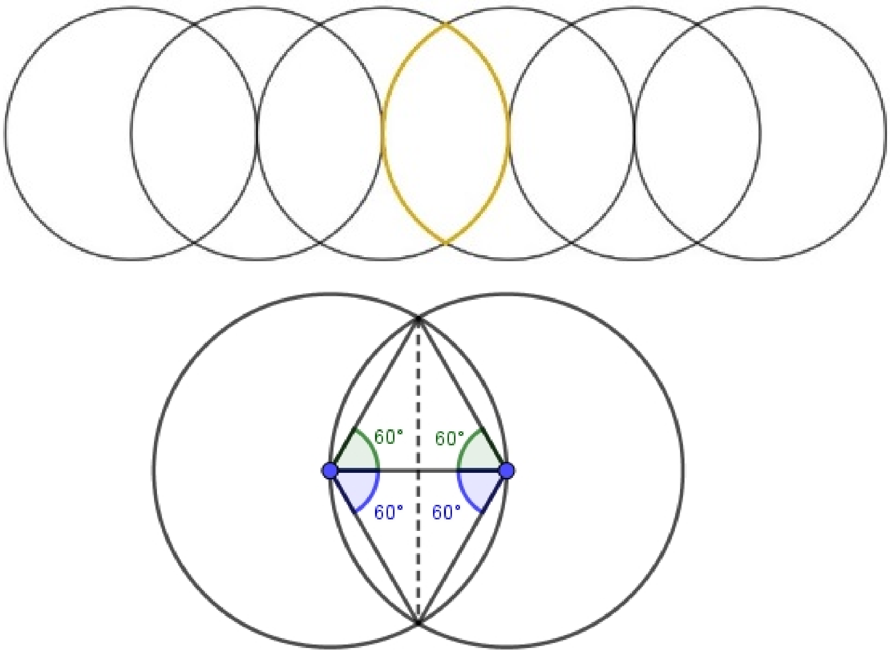


Figura 15: Arriba esquema parte inferior del balcón B, abajo detalle

El primero de los patrones son circunferencias del mismo radio con centros alineados y todos ellos equidistantes, y la distancia igual a su radio. Con ello se genera una curva famosa dentro de las matemáticas, la Vesica Piscis o Mandorla. Esta es una figura muy usada en la arquitectura relacionada con la iglesia.

Esta figura puede ser interesante para hablar de los números irracionales, en este caso el alto de la curva es $\sqrt{3}$ veces su ancho, debido a ser dos alturas de triángulos equiláteros de igual lado. También da pie a hablar de propiedades de los hexágonos para deducir razonadamente que los 6 triángulos que se forman al unir su centro con los vértices del hexágono son equiláteros.

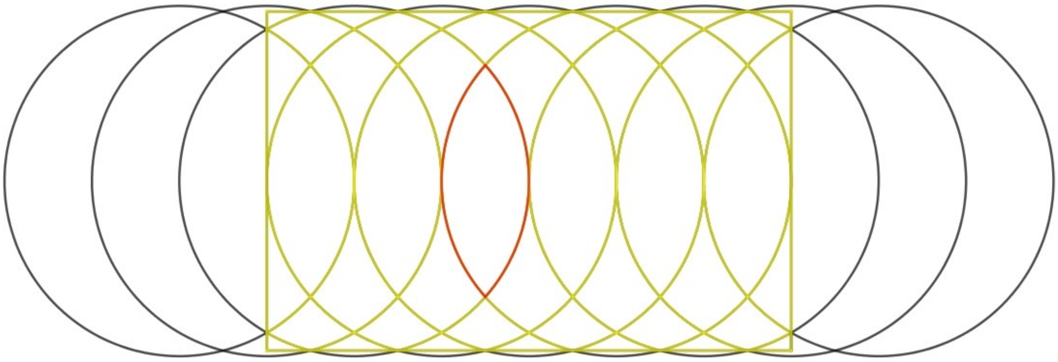


Figura 16: Esquema parte superior del balcón (B)

En el caso del segundo patrón lo que hay son circunferencias del mismo radio r con los centros alineados a distancia $\frac{r}{2}$. Esto produce que en la figura se puedan ver tanto la Mandorla como otra curva parecida a ella más pequeña, del mismo modo que en la Mandorla se veía que el cociente entre su alto y su ancho era $\sqrt{3}$, ahora la idea es sugerir como ejercicio que calculen el cociente de la altura y anchura de la figura señalada en rojo, similar a la anterior y así interiorizar las técnicas usadas que no son más que el teorema de Pitágoras.

En este caso habría que considerar las dos circunferencias que generan esa curva, así como sus medidas según se muestra en la siguiente figura:

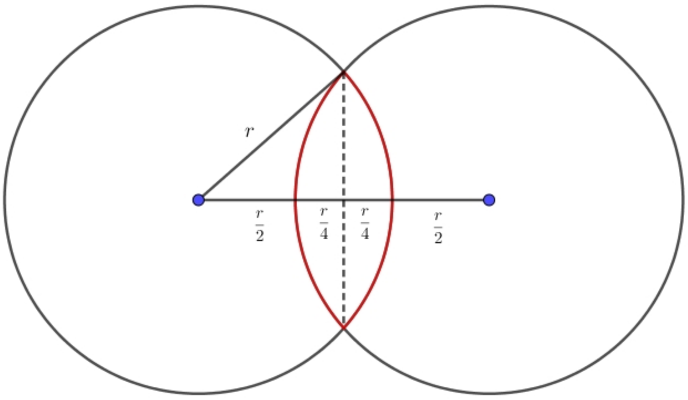


Figura 17: Detalle figura roja

En ella por el teorema de Pitágoras se tiene que:

$$r^2 = \left(\frac{r}{2} + \frac{r}{4}\right)^2 + h^2 = \frac{9r^2}{16} + h^2$$

y por lo tanto $h = \sqrt{r^2 - \frac{9r^2}{16}} = \sqrt{\frac{7r^2}{16}} = \frac{\sqrt{7}r}{4}$, por lo que el cociente entre la altura y la anchura de esta nueva figura es:

$$\frac{\frac{\sqrt{7}r}{4}}{\frac{r}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

El uso de este tipo de cálculos puede ayudar también a introducir la trigonometría a los alumnos, pues en todos los casos para calcular la altura de las figuras se usa el teorema de Pitágoras con el triángulo que parte del ángulo central, viendo la relación entre los dos catetos de un triángulo. Este cociente no depende del radio elegido lo cual está relacionado con el hecho de que a la hora de calcular las razones trigonométricas de un ángulo a partir de un triángulo rectángulo no dependan de las medidas del éste.

Polígonos en Valladolid

Otro de los elementos más utilizados en la decoración urbana son los polígonos regulares. Normalmente los polígonos existentes en la ciudad son triángulos, cuadrados, hexágonos y octógonos, que son polígonos muy fáciles de construir compás. También al ser todos divisores de 360º los ángulos centrales e inscritos de estos polígonos expresados en grados y no en radianes son expresiones enteras. Algunos ejemplos de estos polígonos en Valladolid son los siguientes:

Figura 18: diferentes polígonos en Valladolid, prisma hexagonal, triángulos y octógono

En cambio, también se va a destacar estos polígonos regulares que no se ven, debido a que no aparecen en ningún mosaico semirregular, en este trabajo se han destacado los dos siguientes. El primero y el más importante se ubica en la pasarela del Museo de la Ciencia, y es que esta pasarela está formada por pentágonos.

Figura 19:Pasarela del Museo de la Ciencia

En la imagen adjunta estos pentágonos no parecen ser regulares, pero esto es debido a que los pentágonos están inclinados y es un efecto visual. Si fuésemos al puente y midiésemos los lados de los pentágonos observaríamos que en efecto todos miden lo mismo, pero con eso no basta para concluir que los pentágonos sean regulares, pues también debe tener todos los ángulos iguales. Los pentágonos también son un polígono que se puede construir con regla y compás, además 5 también es divisor de 360. Con ello se pedirá a los alumnos ejercicios sobre ángulos inscritos centrales, semejanza de triángulos y para finalizar hacer que calculen el cociente entre el la diagonal y el lado de un pentágono, lo que da $\phi \approx 1,6180 \ldots$ el número de oro, este puede ser un punto de motivación de los alumnos debido a su relación con el arte.

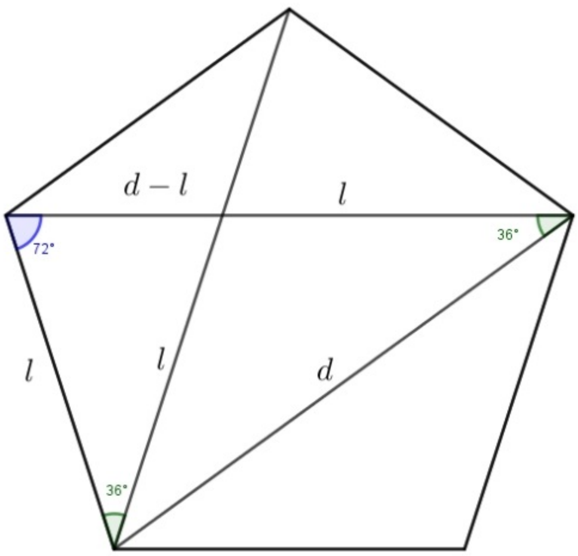


Figura 20: Cálculo del número áureo en el pentágono

Si llamamos x al cociente entre la diagonal y el lado del pentagono:

$$\frac{l}{d} = \frac{d-l}{l};$$

$$\frac{l}{d} = \frac{d}{l} - 1;$$

$$\frac{1}{x} = x - 1;$$

$$1 = x^2 - x;$$

$$x^2 - x - 1 = 0;$$

$$x = \phi \; x = \phi'$$

El otro polígono regular que se va a destacar es un polígono de trece lados, este se ubica junto al polideportivo “Ciudad Parquesol”, y forma parte del decorado del macetero de un olivo.

Figura 21: Macetero de trece lados

Este polígono es muy raro de encontrar debido a que no se puede construir con regla y compás. Puede servir nuevamente para estudiar los ángulos, pero un concepto que es más destacable en éste que en el pentágono es estudiar el concepto de primo, se ve retratado cuando se miran sus polígonos estrellados.

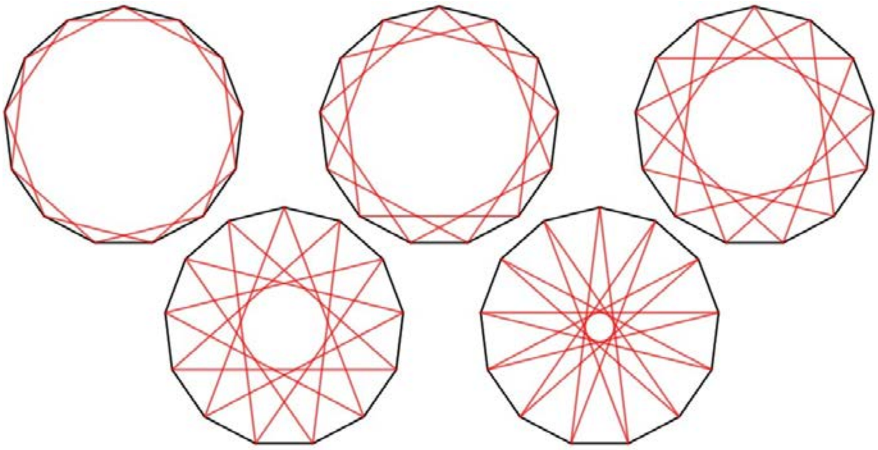


Figura 22: Polígonos estrellados de 13 vértices.

Puesto que todas las estrellas de 2, 3, 4, 5 y 6 pasos pasan por todos los vértices entonces el número 13 no es divisible por ninguno de éstos. Con estos 5 polígonos estrellados también quedan estudiados los de paso 7, 8, 9, 10 y 11, pues son los de 6, 5, 4, 3 y 2 respectivamente.

La bola del mundo

El monumento de la plaza España en el que se representa el globo terráqueo es de los más ilustres en la ciudad de Valladolid. Con esta figura se puede estudiar los cuerpos de revolución, el significado de generatriz, cálculos de áreas y volúmenes etc.

Figura 23:Bola del mundo plaza España

El currículo de los alumnos en tercero de ESO por la rama de matemáticas académicas establece que tienen que aprender los conceptos de polos, meridianos y paralelos, además de saber ubicar un punto en el globo terráqueo a parir de su latitud y longitud, este globo da una herramienta física para explicar dichos conceptos.

Los niveles de estudio más avanzados, en concreto segundo de Bachillerato, permiten utilizar el concepto de integral para calcular la fórmula del área y volumen de la esfera a partir de la generatriz.

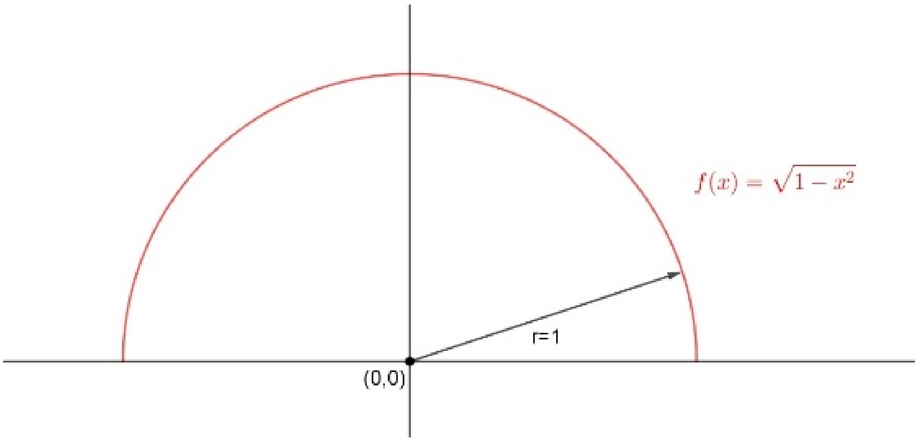


Figura 24: Generatriz esfera

La figura 22 para los alumnos de segundo de Bachillerato permite repasar el hecho de que el volumen V y la superficie S que engendra un cuerpo de revolución cuya generatriz tiene ecuación $f\ (x)$ con $a\ \leq\ x\ \leq\ b$ es:

$$V = \int_a^b \pi\big(f(x)\big)^2 dx\,, \qquad S = \int_a^b 2\pi f(x) dx.$$

Otro elemento a estudiar en la bola del mundo es explicar a los alumnos que no es desarrollable, es decir, que al contrario que otros cuerpos de revolución o poliedros no es posible encontrar una figura plana que al plegarla sea una esfera. Esto también permite hablar de la diferencia entre los distintos tipos de mapas, preguntando si creen que la superficie de un país septentrional como puede ser Rusia tiene las dimensiones parecidas a lo que se puede observar en bola del mundo comparado con lo que aparentan otros situados en el ecuador.

Con esta comparación se puede proponer a los alumnos nuevos modos de hacer un mapa en el que las longitudes y las distancias se respeten “más”, por ejemplo, anteriormente se vio cómo había una papelera esférica con un icosaedro truncado dibujado, puesto que el icosaedro truncado sí que admite desarrollo plano es posible plantearnos como sería el mapamundi proyectado sobre un icosaedro truncado.

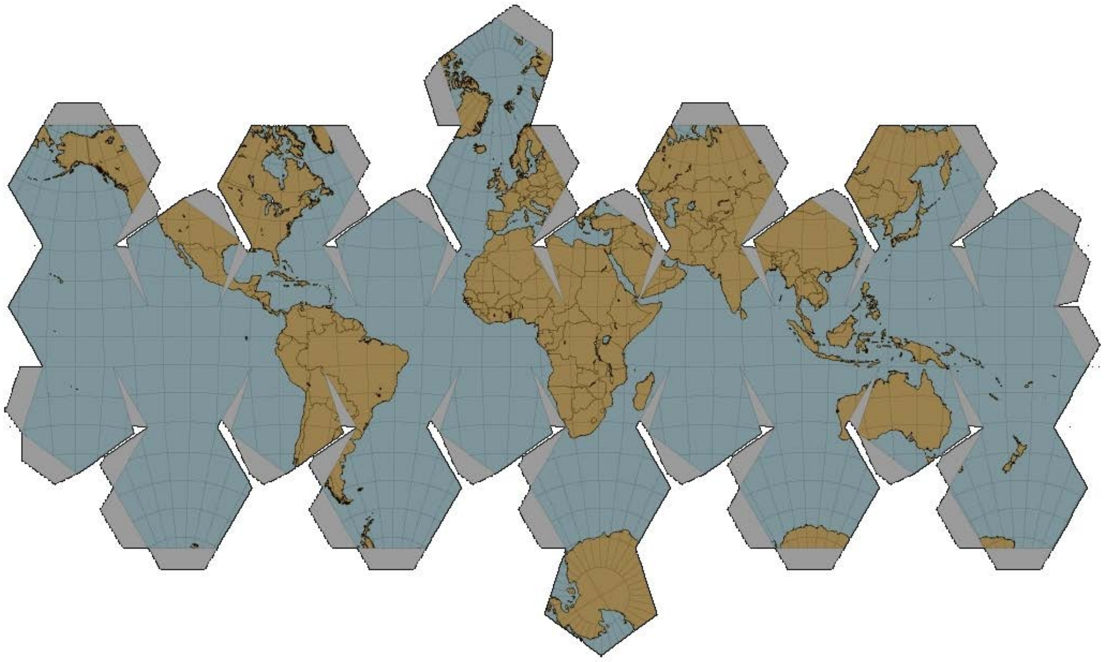


Figura 25: Mapamundi proyectado sobre un icosaedro truncado

Con este mapamundi se puede aproximar que superficie ocupan dos países, uno septentrional y otro ecuatorial, y compararlas con la superficie que abarcan estos mismos países en el mapamundi tradicional que usa la proyección de Mercator. Esto da pie a explicar a los alumnos las distintas proyecciones de la esfera, como puede ser la cónica, la esférica o la proyección polar, estudiando en cada una de ellas cuales son las ventajas e inconvenientes.

Curvas en puentes

Las ciudades suelen situarse en las cercanías de un río, pues antiguamente necesitaban ir ahí para abastecerse de agua, de modo que en la mayoría de ciudades suele haber varios puentes, y no es menos para el caso de Valladolid. Los puentes suelen estar construidos en forma de arco de parábola, es por ello que es un elemento interesante para un paseo matemático, pues las parábolas se estudian desde tercero de la ESO. He aquí algunas imágenes de puentes de Valladolid.

Figura 26 Puentes de Valladolid: Puente de Isabel la Católica (A), Puente de Poniente (B) y Puente Colgante (C)

El paseo matemático ayuda mostrar a los alumnos las distintas formas que tienen los puentes, en este caso el puente de Isabel la Católica (A) es una parábola. Con ello se puede ver la utilidad de las ecuaciones de segundo grado en la vida real, así como diferenciar, si se les diesen ya las ecuaciones dadas, cuando una parábola es más achatada o menos dependiendo de los parámetros a, b y c en la ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$, así como que el hecho de que la parábola tenga las ramas hacia abajo implica que $a < 0$.

Resulta muy interesante que sean los alumnos los que participen en lugar de hacerlo todo digitalmente, es por ello que el puente colgante puede resultar una mejor experiencia para ellos, debido a que en él los alumnos pueden tomar medidas y sacar ellos mismos la ecuación de la parábola. Y posteriormente en clase representar en GeoGebra la ecuación de la parábola por encima de la imagen, tal y como se muestra en la siguiente imagen con el puente de Isabel la Católica.

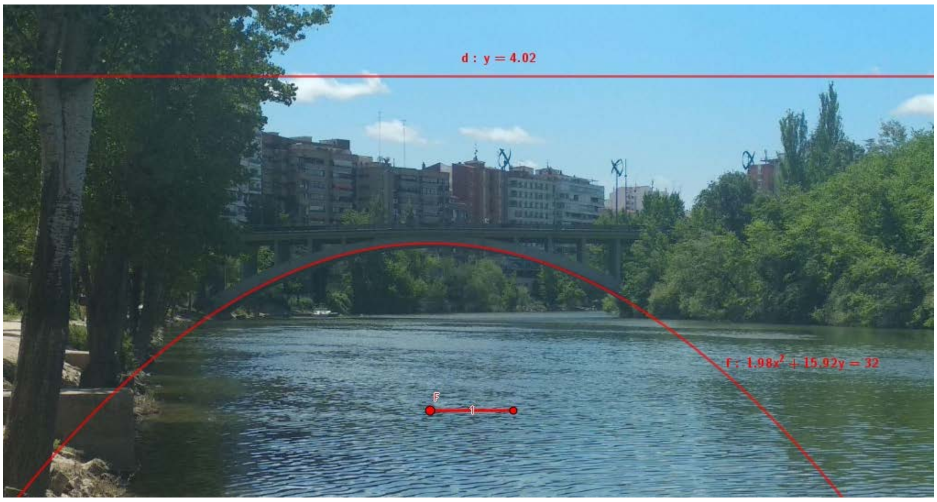


Figura 27: Parábola bajo el Puente de Isabel la Católica

Si bien es difícil en ese puente tomar las medidas necesarias para deducir la ecuación de la parábola. Por otro lado, para estudiar el puente colgante, está la posibilidad de que los alumnos debatan acerca de si el arco del puente colgante es un arco de circunferencia o un arco de parábola, ello se puede hacer mediante el GeoGebra debatiendo sobre las siguientes imágenes. Los alumnos en este puente si pueden tomar medidas, y sacar las ecuaciones aproximadas del puente.

Figura 28: Puente colgante con circunferencia (A) y parábola (B)

La cúpula del milenio

En la ciudad de Valladolid se encuentra con la cúpula del milenio, un edificio de usos múltiples en forma de cúpula, ésta fue instalada por primera vez en 2008 en Zaragoza durante la Exposición Internacional. El objetivo de este edificio en la exposición era concienciar a la gente sobre el cambio climático y mostrar cómo combatirlo gracias a su estructura. Debido a que el cambio climático sigue siendo un tema de actualidad es interesante utilizar este edificio con los alumnos.

Figura 29: Cúpula del milenio

Como se puede observar en la fotografía la estructura de la cúpula imita una forma semiesférica, donde la superficie está formada por hexágonos y pentágonos, al igual que el icosaedro truncado mostrado con anterioridad con la diferencia de que los pentágonos y hexágonos mostrados aquí no son regulares.

La cúpula del milenio puede servir de ejemplo para explicar a los alumnos los poliedros regulares e incluso sobre los poliedros truncados, figuras compuestas por polígonos regulares forman un poliedro. Es importante hacer notar que al juntar tres hexágonos (como los tiene la cúpula) por un vértice común, si estos tres son regulares no se salen del plano, no se necesita una dimensión extra.

Este hecho se puede utilizar para que los alumnos no se fíen de las primeras impresiones, pues en muchas ocasiones cuando se realiza un ejercicio que conlleva un dibujo, los alumnos hacen suposiciones inciertas. Un ejemplo muy común es utilizar el teorema de Pitágoras en un triángulo porque “parece” que es rectángulo. Entender que se puede dar por supuesto y que no es esencial para un alumno de ESO pues es muy importante para la modelización y la resolución de problemas.

El teorema del panal

El teorema del panal es un teorema que dice que el teselado hexagonal es la mejor manera de dividir una superficie en regiones de igual área y con el mínimo perímetro total, esta manera de recubrir la superficie se encuentra en los panales de abejas, al igual que en algunas construcciones.

Figura 30: Fachada Corte Inglés

En la imagen se observa la fachada del Corte Inglés en la calle Constitución. Este edificio ayuda a introducir a los alumnos este teorema de una manera más sencilla solo con los polígonos regulares que son capaces de cubrir el plano, los triángulos, los cuadrados y los hexágonos. Un ejercicio que podrían hacer los alumnos es calcular el área del triángulo, cuadrado y hexágono que tienen perímetro 12 m. Calcular la altura de un triángulo equilátero y la apotema de un hexágono regular es un ejercicio de geometría sencillo en el que solo se usa el teorema de Pitágoras.

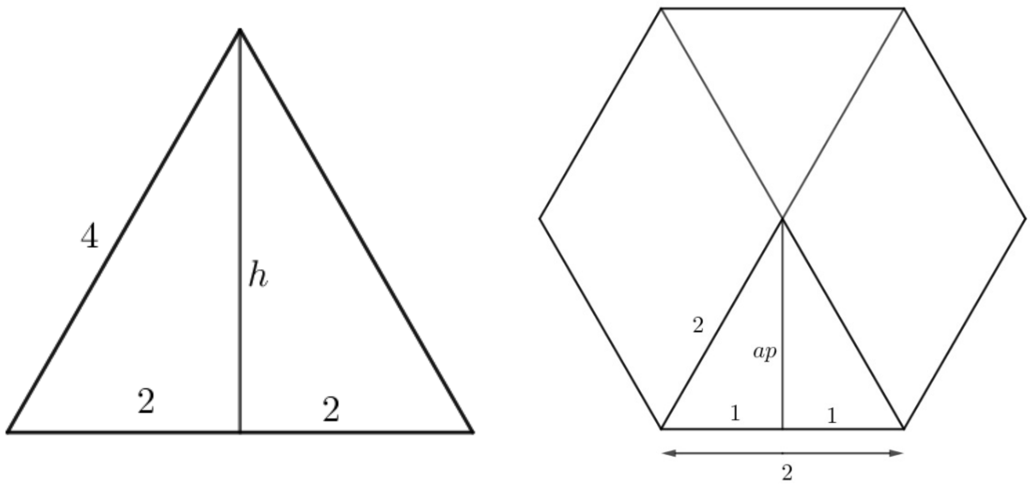


Figura 31: Cálculo de altura y apotema

De modo que $h = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, y $ap = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$, de tal modo que las superficies de los tres polígonos de perímetro 12 metros son:

$$A_{tri} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93\, m^2$$

$$A_{cua} = l^2 = 3^2 = 9m^2$$

$$A_{hex} = \frac{per \cdot ap}{2} = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \approx 10{,}39m^2$$

El siguiente ejercicio que se podría proponer una vez hechos estos cálculos es preguntar a los alumnos si son capaces de deducir cual sería el perímetro de un triángulo, cuadrado y hexágono de área 1. Para ello van a tener que tener en cuenta el cambio de dimensiones, es decir, cuando se duplica el lado de un polígono, se cuadruplica su área. Si se tiene un triángulo equilátero de perímetro $12m$ y por tanto de área $6{,}93\, m^2$, para calcular el perímetro de un triángulo equilátero de área 1 hay que tener en cuenta que como al multiplicar por k el lado, y por tanto el perímetro, el área se multiplica por k^2, si se divide el área por $6{,}93$, el perímetro se habrá dividido por tanto por $\sqrt{6{,}93} \approx 2{,}63$ de modo que el perímetro será

$$\frac{12}{2{,}63} \approx 4{,}56\, m$$

Con esto, los alumnos pueden convencerse de que el resultado es cierto, pero hay que dejarles claro que esto no es una demostración, sino una pequeña comprobación de que el resultado es correcto dado que el teorema del panal no se restringe a polígonos regulares sino a cualquier figura plana.

Como material divulgativo con motivación del teorema del panal es útil el monólogo de Eduardo Saenz de Cabezón (Sáenz de Cabezón, 2014). En el que utiliza el teorema del Panal y su evolución histórica para explicar de manera cómica lo que es un teorema y qué es una demostración y qué no.

Octógonos

En una sección anterior se habló de los polígonos regulares en la ciudad de Valladolid, haciendo más énfasis en los menos usuales como fueron el pentágono y el tridecágono, de trece vértices. Ahora toca hablar únicamente de los octógonos. Se destacan dos lugares donde aparecen octógonos regulares, en las columnas la iglesia de San Benito (prismas octogonales), y en la base del reloj de sol en el parque de la calle Manuel Silvela.

Figura 32:Octógonos en Valladolid. Pilares de la iglesia de San Benito con forma de prisma octogonal (A), base de reloj de sol (B)

Estos lugares permiten proponer a los alumnos ejercicios de geometría relacionados con los octógonos. Un alumno con el simple uso del álgebra y el teorema de Pitágoras puede calcular el área de un octógono regular dado su lado. Para ello uno debe fijarse en la siguiente figura.

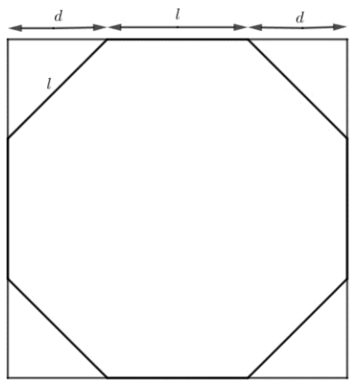


Figura 33: Octógono inscrito en un cuadrado

En la figura se puede observar al octógono formado a partir de retirar cuatro triángulos isósceles y rectángulo a un cuadrado. De modo que $A_{oct} = A_{cua} - 4A_{tri}$, puesto que $l^2 = 2d^2$, y se trata de medidas positivas, entonces $d = \frac{1}{\sqrt{2}}l$. De modo que:

$$A_{oct} = A_{cua} - 4A_{tri} = (l + 2d)^2 - 4\frac{d^2}{2} = l^2 + 4dl + 4d^2 - 2d^2$$

$$= l^2 + 4dl + 2d^2 = l^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}l^2 + l^2 = 2l^2 + 2\sqrt{2}l^2$$

Por lo tanto, se puede proponer a los alumnos algunos problemas como calcular la cantidad de piedra que ha sido necesaria para hacer las columnas de San Benito, donde usarán la fórmula del volumen de un prisma recto.

En el caso de la base del reloj de sol se puede observar que hay tres octógonos de lados distintos, además de poder calcular el volumen de dicha figura nuevamente se puede estudiar cómo cambia el área de una figura plana cuando cambia la longitud del lado. En la fórmula antes sacada $A_{oct} = 2l^2(1 + \sqrt{2})$ se puede apreciar que cuando se multiplica el lado por k, el área se multiplica por k^2, esta figura permite calcular las tres áreas, ver el cociente entre ellas y el cociente de los lados de los octógonos y asó compararlos y sacar las conclusiones oportunas.

Al igual que en los pentágonos aparece el número de oro $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, en los octógonos se encuentra otro número metálico, en este caso el número de plata $\delta = 1 + \sqrt{2}$. Por ejemplo, como vimos antes $A_{oct} = 2l^2\left(1 + \sqrt{2}\right) = 2\mathrm{l}^2\delta$.

También se tiene que el cociente entre el cuadrado antes mencionado y el lado del octógono es precisamente δ, pues razonando sobre la figura 29 anterior sabiendo que $d = \frac{1}{\sqrt{2}} l$ entonces:

$$\frac{l + 2d}{l} = \frac{l + \frac{2}{\sqrt{2}} l}{l} = \frac{l\left(1 + \sqrt{2}\right)}{l} = 1 + \sqrt{2} = \delta$$

Introduciendo al número áureo como la solución de la ecuación $x^2 = x + 1$ se puede hablar también del resto de números metálicos, que son la solución de la ecuación de segundo grado $x^2 = px + q$ cuando p y q son números naturales. Algunos ejemplos de ello sería el número de plata aquí visto $(p = 2, q = 1)$. Se trata por tanto de resolver ecuaciones de segundo grado, cosa que los alumnos ya saben hacer, es por ello que se propone enseñar los distintos métodos para resolver dichas ecuaciones. En este caso, se podría reescribir la ecuación del siguiente modo

$$x^2 - px - q = 0$$

De dónde los alumnos sabrán calcular las soluciones con la fórmula que rara vez se explica de donde se obtiene, haciendo

$$x = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \qquad (1)$$

Es nuestro deber como profesores de secundaria enseñar a los alumnos a tener un espíritu crítico, y creo que, en aspectos donde la demostración es sencilla y asequible para los alumnos como es un caso como este, se puede hacer en clase o incluso pedirla como deberes en un trabajo de investigación. También es importante ver otros métodos para resolver ecuaciones de segundo grado, en este caso, si x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación antes descrita, se debe cumplir que:

$$x^2 - px - q = (x - x_1)(x - x_2)$$

De donde que $p = x_1 + x_2$ y que $q = -x_1 x_2$. Un ejercicio interesante sería sustituir estos valores de p y q en la ecuación (1) para ver qué se obtiene.

Por último, mencionar que no todos los octógonos que se encuentran por la ciudad son regulares, y estos pueden ser una herramienta para enseñar al alumno a ser crítico y a no dar nada por supuesto. Un ejemplo se encuentra en la calle Santiago.

Figura 34: Octógono no regular

En él se puede ver que un lado mide $3l$ y el otro $2\sqrt{2}l \approx 2{,}83l$. Y pese a que los ángulos interiores si sean los correspondientes a un octógono regular, en este caso 135º, no se trata de un octógono regular. Además, esta última figura da pie a hablar del concepto de área, definido éste cono el número de cuadrados de lado unidad que podemos meter en una superficie, en este caso se puede observar como el área del octógono es 35 considerando la unidad como el lado de cada baldosa.

Circunferencias

Las circunferencias son una forma básica en la sociedad, ya sea para decoración como ventanas, columnas, fuentes, o como utilidad por sus propiedades en ruedas, rotondas, incluso la forma de los rotuladores. Es por eso que es tan importante el cálculo de perímetros de circunferencias y áreas de círculos. En una ciudad se pueden encontrar con multitud de figuras circulares de las cuales se desconocen el centro exacto. ¿Cómo calcular la longitud del radio de estas circunferencias? En la antigüedad se concluyó que lo más sencillo era medir el diámetro de la circunferencia, pues es la mayor distancia entre dos puntos de una circunferencia, de hecho, el origen del número π es la razón entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro.

Figura 35: Circunferencias en los restos del muro de Valladolid

El reto que se les puede proponer a los alumnos es calcular el radio de una circunferencia o un arco de circunferencia. Para ello los alumnos disponen de diversas herramientas. Ahora se proponen diversas opciones al alcance de alumnos de la ESO para resolver el problema. Otras tareas pueden ser determinar el centro y medir un ángulo central, midiendo el arco de circunferencia y poniéndolo en relación con el radio.

En el caso de tener acceso de un modo u otro al centro de la circunferencia una posibilidad es usar el hecho de que la circunferencia circunscribe a cualquier triángulo cuyos vértices estén en la circunferencia, por lo que bastaría con tomar tres puntos en la circunferencia, hacer las mediatrices de dos de los tres segmentos que puedes formar y éste será el centro de la circunferencia, teniendo el centro, se tiene el radio.

Si se tuviese la circunferencia en su totalidad otra técnica para calcular el radio de la circunferencia consiste en medir el perímetro de la misma, ya sea con un odómetro, o con una cuerda a lo largo de la circunferencia y luego midiendo ésta. Tras medir el perímetro basta con dividir entre 2π obteniendo así el radio de la circunferencia.

Por último, un método que se puede usar con una cuerda es medir el diámetro. Para ello se debe dejar un extremo de la cuerda fijo en una posición fija y recorrer la circunferencia hasta que la distancia entre los dos puntos de corte sea la máxima posible, este punto será el diametralmente opuesto, de modo que basta con medirlo para obtener el diámetro y por lo tanto su radio.

En caso de no poder acceder al centro de la circunferencia debido a contar solamente con un arco, como es en la segunda imagen, se puede calcular el radio usando dos cuerdas de la circunferencia paralelas y la distancia entre estas. Conocidas las longitudes de las dos cuerdas, en este caso 2a y 2b, y la distancia d entre ellas se plantea el siguiente dibujo:

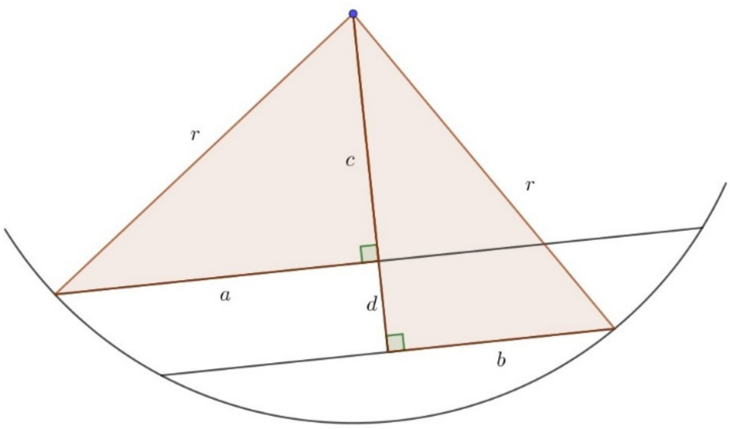


Figura 36: Método de dos cuerdas paralelas

De donde deducimos por el teorema de Pitágoras

$$r^2 = a^2 + c^2$$

$$r^2 = b^2 + (c + d)^2$$

Obteniendo así un sistema de dos ecuaciones no lineales con dos incógnitas resoluble.

Otro modo de resolverlo podía ser partiendo de un punto P de la circunferencia, calcular otros dos Q y Q' equidistantes de P y medir la cuerda $\overline{QQ'}$, de tal modo que se obtiene lo siguiente:

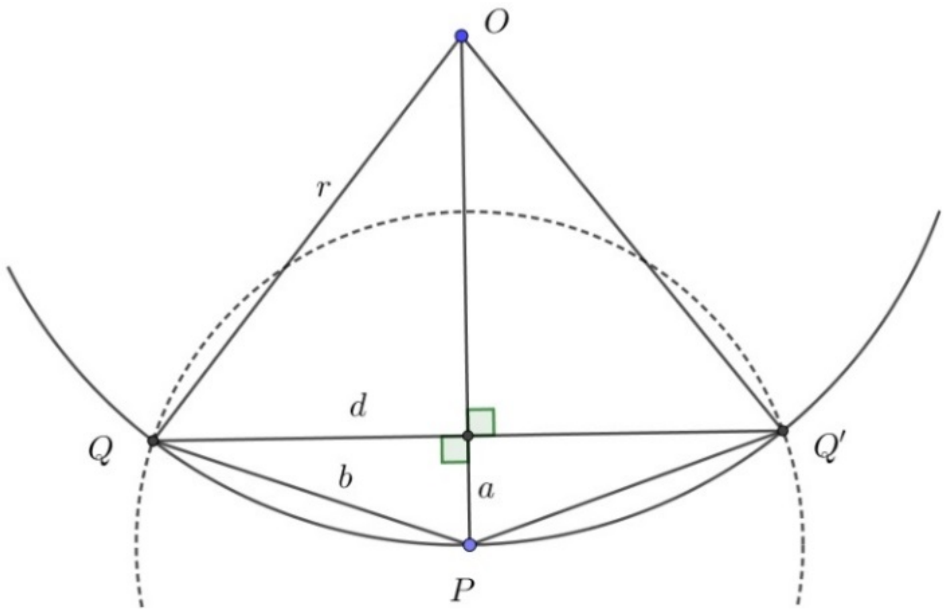


Figura 37: Método puntos equidistantes a uno P

De donde por ser el triángulo PQQ' isósceles y por tanto $\overrightarrow{QQ'} \perp \overrightarrow{OP}$, de donde deducimos nuevamente con el teorema de Pitágoras:

$$r^2 = d^2 + (r - a)^2, \qquad b^2 = d^2 + a^2$$

Como b y d son conocidos se tiene un sistema no lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas que se puede resolver analíticamente.

El objetivo de esta actividad es ilustrar la diversidad de caminos que se pueden utilizar a la hora de resolver un problema de matemáticas, la intención es que esto también les llegue a los alumnos, que comprendan que lo importante es razonar la respuesta, y no sólo el hecho de aprenderse algoritmos de memoria sin comprender qué se está haciendo.

Progresiones aritméticas

Otro contenido quizá a veces difícil de percibir en la ciudad son las progresiones aritméticas, en este caso se ve con un embaldosado de las aceras del puente de Juan de Austria del siguiente estilo:

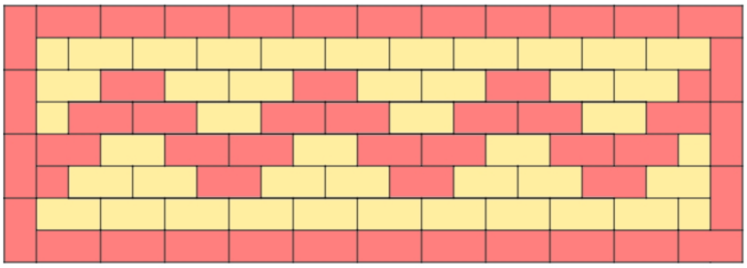


Figura 38: Patrón del puente Juan de Austria

Esto se puede aprovechar para utilizar las progresiones aritméticas en el paseo matemático. En este caso la idea es generar una progresión en la cual se cuente el número de baldosas rojas que se necesitan para construir una acera de n metros.

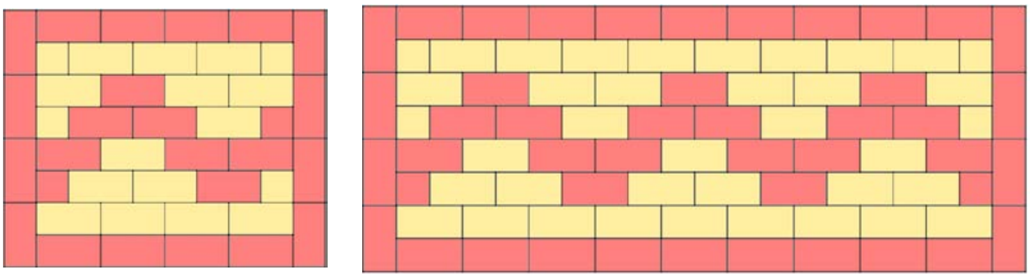


Figura 39: Los dos primeros términos en forma de patrón.

Las dimensiones de una baldosa son 10×20 centímetros, de tal modo que para embaldosar 1 metro se necesitarían 8 para los bodes laterales, otras 8 para el superior e inferior y otros 8 para hacer la figura interior, es decir, hay que considerar $a_1 = 24$.

Si se quisiera añadir otro metro, puesto que los bordes ya están contados se necesitarían 10 baldosas para los bordes superior e inferior y otras 10 para el dibujo interior, es decir $d = 10$. Una vez llegado aquí, se pueden sugerir ejercicios relacionados con las progresiones aritméticas contextualizados en este entorno, ya sea cambiando el dibujo de la baldosa o la longitud de la acera.

Capítulo 4: Una propuesta de paseo matemático.

Como colofón de este trabajo se propone una actividad concreta para llevar al aula, si bien no es posible añadir todas las actividades propuestas anteriormente, hay que adaptarse al entorno del aula y, por tanto, ser flexibles a la hora de escoger las actividades propuestas. La flexibilidad es una habilidad importante en un profesor de secundaria, así como la capacidad de adaptarse a los alumnos y elegir las mejores estrategias y metodologías para su bien. Es por ello que para dar sentido a la actividad primero se contextualizará.

Contextualización

Para este paseo matemático en concreto se ha centrado en el centro IES José Jiménez Lozano. Este centro está localizado en Valladolid, en el barrio de Parquesol, en la ladera unto a Arroyo de la Encomienda. Es por ello que los alumnos de este centro provienen tanto de Arroyo como de Valladolid. El IES José Jiménez Lozano tiene un alto compromiso con las actividades complementarias de aprendizaje y enseñanza como señalan en su Programación General Anual: “Programar un conjunto de actividades complementarias y extraescolares que contribuyan a dinamizar las actividades educativas del Centro, manteniendo una línea de continuidad en el tiempo que vaya creando y consolidando nuestra propia tradición en ese ámbito”

El curso al que se ha enfocado este paseo matemático es tercero de la ESO. Con esta edad los estudiantes ya se han sumergido completamente en el último estadio de Piaget, en el de las operaciones formales. A diferencia que en los cursos anteriores donde, debido a que cada persona se desarrolla de diferente manera, no todos los alumnos habrán alcanzado este último estadio, en tercero de ESO se tienen más garantías de que los alumnos van a conseguir hacer los razonamientos necesarios en cada actividad. También es en este curso donde se empieza a profundizar en conceptos de geometría, cálculo de áreas y de volúmenes de cuerpos geométricos, elementos que aparecerán durante el paseo matemático.

En cuanto a la contextualización en tiempo, esta actividad la está pensada para ser realizada al inicio de las unidades didácticas del bloque de geometría, siendo estas: Proporcionalidad, geometría en el plano, geometría en el espacio, y movimientos en el plano y espacio. La función de la actividad es saber cuáles son los conocimientos previos de los alumnos para así, condicionados a estos, se lleve el rumbo de la asignatura de un modo u otro. Por otro lado, otra de las intenciones de esta actividad es motivar a los alumnos para que comiencen el bloque sabiendo que tiene uso cotidiano en la vida real, pudiendo así conseguir una mayor atención y esfuerzo por parte del alumnado en las sucesivas clases.

Según la orden EDU/362/2015 los alumnos al haber aprobado el curso previo deberían ser capaces de realizar los siguientes estándares de aprendizaje evaluables del bloque de geometría de segundo de la ESO.

G.1.1. Reconoce y describe las propiedades características de los polígonos regulares: ángulos interiores, ángulos centrales, diagonales, apotema, simetrías, etc.

G.1.2. Define los elementos característicos de los triángulos, trazando los mismos y conociendo la propiedad común a cada uno de ellos, y los clasifica atendiendo tanto a sus lados como a sus ángulos.

G.1.4. Identifica las propiedades geométricas que caracterizan los puntos de la circunferencia y del círculo.

G.2.1. Resuelve problemas relacionados con distancias, perímetros, superficies y ángulos de figuras planas, en contextos de la vida real, utilizando las herramientas tecnológicas y las técnicas geométricas más apropiadas.

G.2.2. Calcula la longitud de la circunferencia, el área del círculo, la longitud de un arco y el área de un sector circular y las aplica para resolver problemas geométricos.

G.3.1. Comprende los significados aritmético y geométrico del teorema de Pitágoras y los utiliza para la búsqueda de ternas pitagóricas o la comprobación del teorema construyendo otros polígonos sobre los lados del triángulo rectángulo.

G.3.2. Aplica el teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en la resolución de triángulos y áreas de polígonos regulares en contextos geométricos o en contextos reales.

G.4.1. Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza y la razón de superficies y volúmenes de figuras semejantes.

G.4.2. Utiliza la escala para resolver problemas de la vida cotidiana sobre planos, mapas y otros contextos de semejanza.

G.5.1. Analiza e identifica las características de distintos cuerpos geométricos, utilizando el lenguaje geométrico adecuado.

G.5.2. Construye secciones sencillas de los cuerpos geométricos, a partir de cortes con planos, mentalmente y utilizando los medios tecnológicos adecuados.

G.5.3. Identifica los cuerpos geométricos a partir de sus desarrollos planos y recíprocamente.

G.6.1. Resuelve problemas de la realidad mediante el cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos, utilizando los lenguajes geométrico y algebraico adecuados.

Por otro lado, el bloque de contenidos comunes es muy importante a la hora de hacer cualquier actividad matemática, como estas unidades didácticas no están programadas para inicios de curso los alumnos ya habrán adquirido en mayor o menor medida los estándares de aprendizaje evaluables de su nivel, en cambio se van a tomar como referencia el curso anterior, segundo de la ESO, dentro del cual todas las competencias generales serán necesarias, de entra las cuales se destacan las siguientes:

C.1.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema).

C.1.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas.

C.2.2. Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad.

C.3.1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución.

C.4.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada.

C.5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas, utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico y estadístico-probabilístico.

C.6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas.

C.7.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.

C.8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas.

C.10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares.

En la siguiente tabla se ve retratado que conocimientos previos son necesarios para cada actividad, o qué conocimientos previos son los que vamos a repasar, pues el carácter colaborativo de la actividad permite que los alumnos tengan algunos conceptos más olvidados pues entre todos los recordarán y repasarán. Los estándares de aprendizaje evaluables generales, al ser necesarios para todas las actividades, no se han añadido a esta tabla, además como este bloque.

Tabla 1: Estándares de aprendizaje necesarios para cada actividad.

Actividad	Conocimientos previos necesarios
El reloj de sol	G.2.1, G.3.1, G3.2, G.4.1, G.6.1
Un macetero poligonal	G.1.1, G.2.1
El contenedor poliédrico	G.1.1, G.2.1
El cubo	G.2.1, G.1.2, G.3.1, G.3.2, G.5.1
Monumento a los donantes	G.2.1, G.5.1, G.5.2, G.6.1
Las tres estatuas	G.1.2, G.2.1, G.4.1
La bola del mundo	G.1.4, G.2.2, G.5.1, G.5.2, G.5.3, G.6.1
Las columnas de San Benito	G.2.1, G.3.1, G.3.2, G.6.1
La muralla de Valladolid	G.1.4, G.2.1, G.2.2, G.3.1, G.3.2
El mapa de las rutas	G.2.1, G.4.1, G.4.2

Recorrido y actividades

A.- IES José Jiménez Lozano, punto de partida.

B.- Parque del reloj de sol. Actividad 1.

C.- Polideportivo Ciudad Parquesol. Actividades 2 y 3.

D.- Avenida Monasterio de Nuestra Sª de Prado. Actividad 4.

E.- Plaza San Juan Bautista de la Salle. Actividad 5.

F.- Plaza Zorrilla. Actividad 6.1.

G.- Plaza de España. Actividad 7.

H.- Plaza de la Universidad. Actividad 6.2.

I.- Iglesia de San Benito y restos de murallas. Actividades 8 y 9.

J.- Plaza Mayor. Actividades 6.3 y 10.

Fotografía matemática

Como reto en el paseo de hoy os proponemos sacar fotos por la ciudad a objetos, edificios o elementos que consideréis que tienen relación con las matemáticas, las fotos que hagáis podéis mandarlas por cualquiera de estos tres medios, indicando que grupo sois.

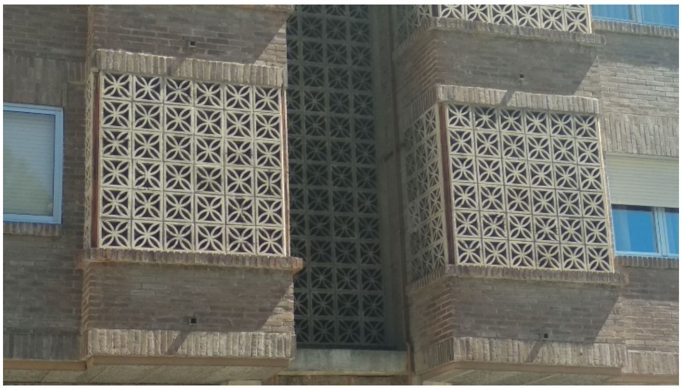
1.- Twitter, mencionando @AndresMates añadiendo #PaseoMatemático a tu tweet.

2.- Al Moodle de la asignatura en la carpeta correspondiente.

3.- Enviándolas al correo andresprofesordemates@gmail.com.

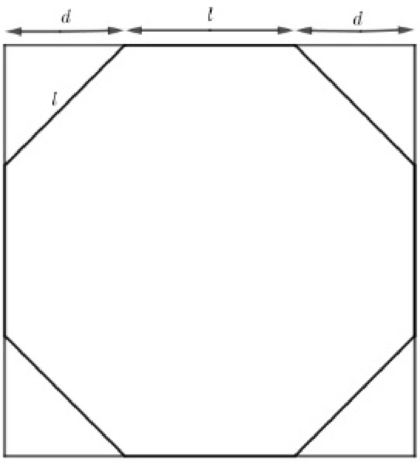
Una vez recopiladas las fotos se expondrán las más interesantes y divertidas en clase y se premiará al grupo con las mejores imágenes. El grupo saldrá a explicar a sus compañeros qué matemáticas vieron en la imagen y posteriormente todos juntos aportaremos ideas al respecto.

He aquí unos ejemplos (por los que no nos cruzaremos).



Actividad 1: La base del reloj de sol

Nuestra primera parada de este paseo matemático es en el barrio del instituto en el parque del reloj. En este parque nos encontramos un reloj de sol, que el mismo tiene muchas matemáticas detrás, pro hoy nos vamos a fijar en la base sobre la que está apoyado. Encontramos tres primas octogonales apilados.



1.- Toma las medidas que sean necesarias y calcula la superficie de los tres octógonos. En la figura tenéis una pista de cómo calcular el área.

2.- Calcula la apotema de cada uno de los octógonos.

3.- Haya el cociente entre las áreas del mayor y del menor de los octógonos. Calcula también el cociente entre los perímetros. ¿Es cierto que uno es el cuadrado del otro?

Actividad 2: El macetero

En nuestra segunda parada del recorrido encontramos un macetero, frente a la puerta del polideportivo municipal Ciudad Parquesol. Este macetero contiene un olivo y nos sirve como elemento decorativo.

1.- ¿Cuánto suman todos los ángulos interiores del macetero?

2.- ¿Cuánto mide el ángulo central que abarca un lado? Da la respuesta aproximando dos decimales.

3.- Calcula el ángulo exterior en uno de los vértices.

Actividad 3: El contenedor poliédrico

Por la puerta de la piscina encontramos un contenedor con una forma un tanto conocida. ¡Es un balón de fútbol! Si nos fijamos bien tiene forma de poliedro, formado por hexágonos y pentágonos, en concreto el poliedro del que se trata es un icosaedro truncado, es decir, un icosaedro en el cual hemos cortado por todos sus vértices una pirámide pentagonal.

Son pocos los poliedros regulares y ellos son bien conocidos desde la época clásica: tetraedro, cubo, octaedro dodecaedro e icosaedro, y todos ellos tienen su versión truncada, o cortada.

1.-Calcula el número de pentágonos, y hexágonos en esta figura, también cuenta el número de aristas y vértices y comprueba la siguiente identidad, llamada identidad de Euler. C+V-A=2 (C=nº de caras, V= nº de vértices, A=nº de aristas).

2.- Dibuja el desarrollo plano de la figura.

3.- Si se necesita 1 litro de pintura por cada metro cuadrado de contenedor, ¿cuántos litros de puntura se han necesitado para pintar el contenedor?

Actividad 4: El cubo

En nuestra siguiente parada nos encontramos con un cubo abierto, y en su interior encontramos un rectángulo. La escultura está llena de conceptos matemáticos como podemos ver en este cubo como, por ejemplo, el teorema de Pitágoras, las simetrías del cubo o simplemente los poliedros.

1.- ¿Cómo es el triángulo interior? Calcula sus dimensiones pudiendo solo medir las aristas del cubo.

2.- ¿Podríamos calcular la diagonal de un ortoedro cualquiera siguiendo un razonamiento similar?

Actividad 5: Monumento a los donantes

La siguiente figura sobre la que trabajaremos es esta escultura homenaje a la hermandad de donantes de sangre. Como podemos observar, nuevamente se han usado poliedros decorando la ciudad. Esta imagen si se mira desde 6 direcciones distintas (en frente, detrás, izquierda, derecha, abajo y arriba) se ve una cruz, todas de las mismas dimensiones, pero con una decoración diferente.

1.- ¿Se cumple la fórmula de Euler vista en la actividad 3?

2.- Si el material con el que está hecho tiene una densidad de 9g/cm^3 ¿Cuánto pesa la escultura?

3.- Para limpiar cada 15 cm^2 de metal en la superficie se necesitan 7 ml de un producto muy caro. ¿Cuánta cantidad de ese producto se necesita?

Actividad 6: Las tres estatuas

A lo largo del recorrido nos vamos a encontrar con diferentes estatuas de personajes ilustres relacionados con la ciudad de Valladolid, las reconoceréis por tener el siguiente aspecto. ¿Conocíais a estos personajes y cuál es su relación con la ciudad? Algunas de ellas son más grandes que otras. ¿Será por su importancia?



Calcula la altura de las 3 estatuas de maneras diferentes mediante el teorema de Thales.

- Usa tu altura y la de tu sombra.
- Usa la altura de un objeto y su sombra.
- Usa la perspectiva con algún objeto de la zona.

Actividad 7: La bola del mundo

El mundo lo representamos usualmente como una esfera, en la plaza de España podemos observar a la bola del mundo. Si estáis acostumbrados a los mapas, podéis observar que Rusia no tiene más superficie que África ni mucho menos, esto se debe a que los mapas usuales agrandan los lugares más cercanos a los polos.

1.- Se puede hacer un desarrollo plano de la esfera?

2.- Calcula el volumen de la tierra sabiendo que la longitud del ecuador es de 40.000km.

Actividad 8: Las columnas de San Benito

Nuevamente aparece otro elemento geométrico en la estructura de un edificio, en este caso la iglesia del monasterio de San Benito el Real, donde podemos encontrar columnas de base octogonal unidas por un arco de medio punto en su parte superior y un arco apuntado. Se construyó en el siglo XVI, pero tuvo que ser parcialmente demolida en el siglo XIX, antes las columnas eran aproximadamente un 50% más altas.

1.- Con todo lo aprendido y recordado durante este paseo matemático calcular razonadamente el volumen de piedra que se necesita para construir las dos columnas.

Actividad 8: La muralla

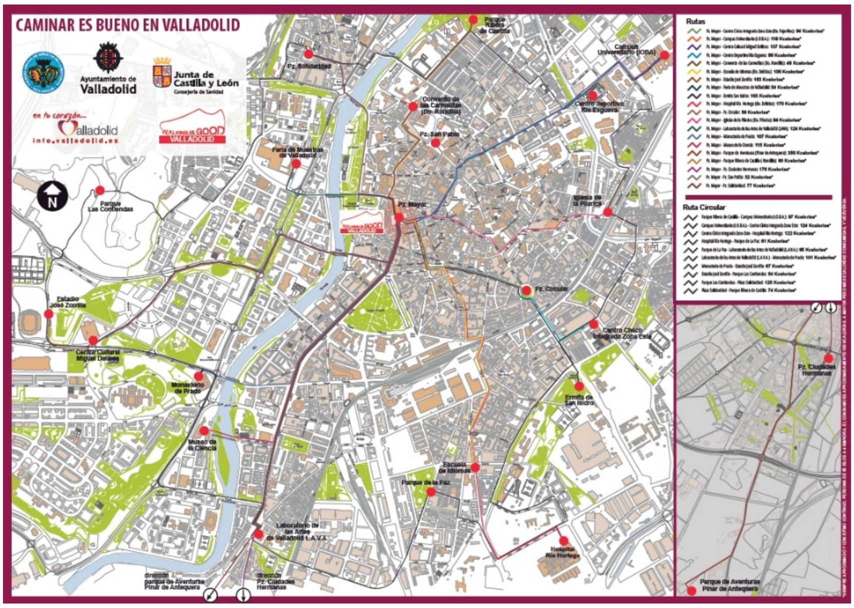
Antiguamente la ciudad de Valladolid tenía muralla como la gran mayoría de las ciudades medievales. Hoy en día solo podemos observar pequeños restos y reconstrucciones por distintos lugares de Valladolid. La siguiente parada es en uno de esos lugares en los que encontramos una parte del muro y dos posibles torres, de las cuales solo vemos que su base era circular.


1.- Calcula razonadamente el radio de la circunferencia de la primera imagen.

2.- ¿Cómo calcularías el radio de la segunda en la que solamente se puede ver una pequeña parte?

Actividad 10: El mapa

Durante todo el recorrido como guía hemos estado usando un mapa el cual nos decía qué camino seguir. Los mapas son una herramienta muy utilizada que tienen una estrecha relación con las matemáticas. En verdad lo que vemos en un mapa es una imagen a escala de la ciudad, es decir todas las medidas son proporcionales. En la Plaza Mayor encontramos un mapa similar a este en el que no se tiene la escala.



1.- Calcula la escala del mapa de la plaza.

2.- Calcula la distancia de una ruta y cuantas Kcal se consumen en 1 km.

3.- La ruta de hoy ha sido de 7 km. ¿Cuántas Kcal hemos consumido?

Encuesta

Responde a la siguiente en cuesta teniendo en cuenta que:

1. Totalmente en desacuerdo.
2. En desacuerdo.
3. Ni de acuerdo ni en desacuerdo.
4. De acuerdo.
5. Totalmente de acuerdo.

	1	2	3	4	5
El material de la ruta es adecuado					
La exposición de las actividades ha sido clara y ordenada					
La duración y recorrido de la actividad ha sido adecuado					
El tiempo por actividad ha sido adecuado					
Esta metodología ayuda a entender mejor las matemáticas					
Ves mayor aplicabilidad a las matemáticas					
La actividad usaba conceptos que no habías dado					
La actividad usaba conceptos que habías dado pero no recordabas con exactitud					
Las actividades te han resultado difíciles de resolver					
El paseo ha sido divertido y ameno					
Es interesante hacer este tipo de actividades					

Capítulo 5: Reflexión Personal

Conclusiones

- Gracias a este trabajo uno puede darse cuenta de la cantidad de elementos matemáticos que se pueden aprovechar de la ciudad de Valladolid para la docencia. No solo hay elementos útiles para la enseñanza en secundaria, sino que también para Bachillerato y estudios universitarios.

- Tras investigar los elementos previos se puede concluir que ésta es una práctica muy útil para los estudiantes, pese a ello, no se ve reflejado en los institutos, pues en la gran mayoría no se realizan este tipo de salidas. Más bien los centros que lo han hecho una vez continúan haciéndolo, dejando ver que la actividad en sí es útil, el posible problema por el que algunos centros no lo hagan es el hecho de no tenerlo elaborado o quizá la falta de tiempo.

- Se puede hacer esta actividad de forma muy local, es decir, en el barrio en el que esté el centro, de tal modo que sería menor el problema para desplazar a los alumnos, en este caso se ha querido hacer por la ciudad de Valladolid, pero aun así se han incorporado elementos comenzando en el barrio del centro, en este caso el barrio de Parquesol.

- Hay gran variedad de problemas que se pueden realizar con una misma figura o estructura. En ocasiones incluso se puede ver como en un problema se observan problemas de las diferentes áreas de las matemáticas, viendo de este modo como son trasversales entre sí, es decir, no son compartimentos estancos y en muchas ocasiones podemos resolver un mismo problema enfocándolo de maneras distintas.

- Al tratarse de problemas de la vida real en el que no se tiene un método predefinido, sino que estamos construyendo una necesidad y un problema desde cero, la diversidad de caminos para resolverlo es inmensa. Esto es muy enriquecedor para ellos, debido a que fomenta su análisis crítico y maneras de razonar, además de conocer el hecho de que existan diversos caminos.

- Pueden surgir dificultades durante el paseo matemático, en el paseo matemático propuesto hay un gran número de actividades, debido a que en caso de realizarse es preferible que queden actividades por hacer a que durante la ruta se acaben las actividades.

En cuanto a los objetivos que se pretenden conseguir con el trabajo podemos diferenciar cuatro diferentes bloques.

- El uso del trabajo para motivar al alumnado y luchar contra el fracaso escolar se consigue gracias al tipo de actividad que es, salir del aula en una asignatura es una experiencia motivadora de por sí.

- Ver las matemáticas como una herramienta útil, se consigue claramente con esta actividad, pues se visualizan a través del entorno urbano, desde el barrio propio hasta el centro de la ciudad. Con ello los alumnos reflexionarán sobre las matemáticas y sobre su visión de las mismas, quitando la imagen demonizada de éstas.

- Fomentar el trabajo en equipo es muy importante en la sociedad actual, y se ve claramente conseguido con esta actividad. El hecho de que los alumnos tengan que ponerse de acuerdo y debatan a la hora de resolver un problema los hace convivir y desarrolla la competencia interpersonal.

- Desarrollar el currículo de matemáticas y las competencias se consigue con mucha facilidad. Dar rienda suelta a la creatividad y posteriormente razonar cual es el mejor procedimiento por el cual resolver el problema contribuye en gran manera al desarrollo de las competencias del currículo de matemáticas.

Aportaciones

La visión desde un punto de vista matemático de Valladolid no es una herramienta común en la docencia de secundaria, pese a que en las asignaturas de historia, cultura clásica o lengua y literatura si se hagan salidas similares, en matemáticas no es el caso. Es por eso que este trabajo aporta una herramienta innovadora con la que trabajar con alumnos de secundaria de manera que se visualicen estas matemáticas en el entorno urbano. Este trabajo pretende visualizar las matemáticas y las herramientas que existen para profesores de secundaria.

En el trabajo se recogen un gran número de ejemplos de elementos matemáticos en la ciudad de Valladolid, incorporando contenidos de diferentes niveles de ESO y Bachillerato. Dentro del bloque de geometría se aporta gran cantidad de dinámicas para estudiar el teorema de Pitágoras, también encontramos diversas actividades para estudiar el área de polígonos regulares y como aumenta el área al variar el lado de un polígono. También se incorpora el cálculo de volúmenes, de prismas, y cuerpos de revolución. Se aportan ejercicios para trabajar la semejanza, escala y el teorema de Thales.

Dentro de otros bloques de las matemáticas también se aportan actividades relacionadas con el álgebra, como las relacionadas con las desigualdades notables o manejar el lenguaje algebraico con facilidad para generalizar una propiedad. En el apartado del análisis matemático se aportan actividades relacionadas con las funciones cuadráticas y el cálculo integral. También se ven aplicaciones directas de la trigonometría.

Una gran aportación es la visualización de las matemáticas en la decoración de la ciudad de Valladolid, por ejemplo, la gran cantidad de balcones en Valladolid con mosaicos, que se estudian directamente desde las matemáticas o tienen motivos muy relacionados con ellas.

Además de las actividades generales, el trabajo aporta un paseo matemático concreto con unas actividades concretas para un curso de 3º de la ESO, de un centro preferiblemente de Parquesol, pues es desde ese barrio desde el que se inicia la ruta.

Trabajos de continuación

- Elaborar rutas matemáticas para diferentes cursos y bloques, en concreto una ruta por los puentes de Valladolid para los alumnos de 1º de Bachillerato, estudiando la geometría de los puentes de Valladolid.

- Incorporar más elementos a la ruta de geometría de 3º de la ESO, sin una ruta específica, de este modo cualquier centro de Valladolid puede aprovechar el material y planificarse su propia ruta a partir de las actividades propuestas,

- Llevar el trabajo al aula, adecuando el paseo al contexto social de los alumnos, así como adaptarlo a su situación en la ciudad.

- Elaborar una investigación en la que se refleje cómo este tipo de actividades afecta al rendimiento académico de los alumnos y a su percepción de las matemáticas como algo inútil.

- Proponer una salida con otras asignaturas de forma transversal, de manera que, por ejemplo, los alumnos vean contenidos tanto históricos como matemáticos.

Reflexión personal

La motivación personal que me hizo elegir este trabajo fue una experiencia vivida durante una olimpiada matemática. En ella se vivía una experiencia similar a la mostrada, se trataba de una serie de problemas ambientados en Peñafiel. Aquel día mostré mucho interés por las actividades de este estilo, y es cierto, los paseos matemáticos son una herramienta didáctica muestra a las matemáticas como una herramienta útil ligada a la realidad. Este hecho consigue motivar a los alumnos haciendo que muestre más interés por la asignatura. Además, puesto que se basan en la experimentación con el entorno, favorece la adquisición de competencias básicas. Como docente en el futuro, tengo planeado realizar este tipo de actividades pues consigue que los alumnos no vean las matemáticas como una asignatura inútil y dinamiza la asignatura, de modo que los alumnos no perderán el interés en ella.

Bibliografía

APAGEMA. (2010-2012). *Con mirada matemáTICa. Paseos matemáticos por Santiago*. Obtenido de http://conmiradamatematica.wikispaces.com/Paseos+matem%C3%A1ticos+por+Santiago

*C*onsejería de Educación (2015) *Orden EDU-362-2015 de 4 de mayo por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.* BOCyL Núm. 86 Castilla y León, España, 8 de mayo de 2015.

*C*onsejería de Educación (2015) *Orden EDU-363-2015 de 4 de mayo por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo del bachillerato en la Comunidad de Castilla y León.* BOCyL Núm. 86 Castilla y León, España, 8 de mayo de 2015.

De Guzmán, M. (2008). *Aventuras matemáticas.* Madrid: Pirámide.

De La Fuente, M. (2017). *Un paseo matemático por la mezquita de Córdoba.* Obtenido de https://app.box.com/s/tmki2xcfl09t2eqtrbc2rlx9r2i48clg

Devesa, A. F., Fargueta, R. M., Gutiérrez, C., & López, F. (2001). *Ruta matemática por Elche.* Elche: Ayuntamiento de Elche. Obtenido de http://yair.es/multimedia/datos/RutaELCHE_011046_170610_1982.pdf

Exploria, F. (s.f.). *Paseo matemático por Granada*. Recuperado el 2018, de http://www.exploria.org/poi/

Fernández, J., & Muñoz, J. (2008). Un paseo matemático por las competencias básicas. *SIGMA Nº33*, 19-27. Obtenido de http://www.euskadi.eus/gobierno-vasco/contenidos/informacion/dia6_sigma/eu_sigma/adjuntos/sigma_33/4_paseo_matematico_33.pdf

Grupo LaX. (2012). *Paseo matemático por el Parque de las Ciencias de Granada.* Obtenido de https://sites.google.com/site/jgfpitagoras/home/recursos-1/paseo-matematico-por-el-parque-de-las-ciencias-granada

Marcos, A., & Carpintero, E. (2001). Actividades matemáticas fuera del aula: Cuaderno de campo. *Suma nº38*, 73-83.

Martínez-Tébar, J., & García, S. (2015). *Un Paseo Matemático Por la Ciudad de Albacete. En II Congreso de enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en castilla la Mancha*. Obtenido de http://www.sociedadelainformacion.com/56/juan1.pdf

Merino, P. (2016). *Paseo matemático por Torrelavega*. Obtenido de https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/8874/MerinoPelaezPablo.pdf?sequence=1

Ministerio de Cultura, Educación y Deporte (2013) *Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa,* BOE Núm.295 Madrid, España, 10 de diciembre de 2013

Ministerio de Cultura, Educación y deporte (2015) *Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato.* BOE Núm. 25 Madrid, España, 29 de enero de 2015

Molina, M. D., Mulero, J., Segura, L., & Sepulcre, J. M. (2015). *Una ruta-yincana matemática por la Universidad de Alicante*. Obtenido de http://17jaem.semrm.com/aportaciones/n63.pdf

Muñoz, J. L. (2010). *Rutas Matemáticas por Madrid: el eje de la castellana*. Obtenido de https://www.smpm.es/materiales/rutas-matematicas/54-el-eje-de-la-castellana

Ortega, E., & Ortega, T. (2003). Los puentes del Pisuerga en la ciudad de Valladolid. *Suma nº43,* 47-56.

Puij, L., Monzò, O., & Queralt, T. (2004(I)). *Rutes Matemàtiques a València. III. De la Ciutat de la Justícia a l'Oceanogràfic.* Valencia: Universitat de València. Obtenido de https://www.uv.es/puigl/rutesiii.pdf

Puij, L., Monzò, O., & Queralt, T. (2004(II)). *Rutes Matemàtiques a València. IV. Del Mercat de Colom a La Nau.* Valencia: Universitat de València. Obtenido de https://www.uv.es/puigl/rutesiv.pdf

Puij, L., Monzò, O., & Queralt, T. (2007 (I)). *Rutas Matemáticas por Valencia. I. De las*

Torres de los Serranos al Jardín Botánico. Valencia: Universitat de València. Obtenido de https://www.uv.es/puigl/rutasi.pdf

Puij, L., Monzò, O., & Queralt, T. (2007(II)). *Rutas Matemáticas por Valencia. II. De la Escuela de Magisterio "Ausiàs March" al Museo de las Artes y Las Ciencias.* Valencia: Universitat de València. Obtenido de https://www.uv.es/puigl/rutasii.pdf

Saenz de Cabezón, E. (2014). *Las matematicas son para siempre | Eduardo Saenz de Cabezon | TEDxRiodelaPlata*. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=jej8qlzlAGw

Sánchez, F. (2013). *Elaboración de una ruta matemática por la ciudad de Valladolid.* Obtenido de http://uvadoc.uva.es/bitstream/10324/3857/1/TFM-G221.pdf

Schmitt, M. (2007). *El Logroño matemático*. Obtenido de http://www.larioja.com/20071202/rioja-logrono/matematicas-generan-inquietud-20071202.html

UVA. (s.f.). *Competencias del Máster en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas* . Obtenido de http://www.uva.es/export/sites/uva/2.docencia/2.02.mastersoficiales/2.02.02.normativa/_documentos/COMPETENCIAS-MASTER-EN-PROFESOR-DE-EDUCACION-SECUNDARIA.pdf

Vilarrasa, A. (2003). Salir del aula. Reapropiarse del contexto. *íber [versión electrónica], nº36*, 13-25.

Zaragoza, A. (2010). *Ayuntamiento de Zaragoza. Educación. Rutas matemáticas*. Obtenido de http://www.zaragoza.es/ciudad/educacion/rutasmatematicas.htm