UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Dpto. Didáctica de las Ciencias Sociales, Experimentales y de la Matemática

UTILIZACIÓN DEL LENGUAJE GRÁFICO EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN SECUNDARIA

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Especialidad de Matemáticas.

Alumno: Manuel Gigosos Ruipérez
Tutor: Alfonso Jesús Población Sáez

Valladolid, Junio 2017

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Se dice por ahí que una imagen vale más que mil palabras. También es cierto que se dicen muchas tonterías. Todo es relativo. Hay imágenes que valen mucho, que cuentan mucho. También hay palabras muy valiosas. Preferimos un buen poema a los varios millones de *selfies* que se hacen en el mundo cada día.

Supongo que toda esta comparación entre palabras e imágenes es absurda pues todo depende de cuál es la palabra, de cuál es la imagen, incluso del valor que le quiera dar el receptor del mensaje.

Dentro del contexto educativo es importante la eficacia. Escoger la palabra justa en el momento apropiado, o el silencio justo. *Habla solo cuando tus palabras vayan a ser más hermosas que tus silencios*.

Lo que sí parece claro es que cuantos más recursos se tengan, más se pueden eliminar en el caso de que sean innecesarios. Usemos tanto las palabras como las imágenes para enseñar matemáticas.

El principal objetivo de este trabajo es demostrar que utilizando imágenes para enseñar matemáticas se podría conseguir un aprendizaje más significativo de las mismas. Personalmente me parece algo evidente. Usar tablas, gráficas, dibujos, esquemas facilita la labor de aprehender. Si vemos algo es más probable que se nos quede grabado. A nadie se le ocurriría enseñar geometría sin mostrar dibujos geométricos, o trigonometría sin dibujar los ángulos, a no ser que se le estén enseñando a un ciego en cuyo caso se trataría más bien de esculpirlos, pero por suerte la mayoría de los alumnos pueden ver y es nuestro deber aprovecharlo.

De hecho podríamos decir que un subrayado es un dibujo, un recurso gráfico, del mismo modo que puede serlo el hecho de utilizar diferentes colores para referirnos a las variables. Incluso podríamos preguntarnos si los símbolos matemáticos no serán también dibujos que facilitan y favorecen el aprendizaje. Antiguamente, y esto es algo que hemos visto en una visita a la biblioteca del palacio de Santa Cruz, los libros de matemáticas solo tenían texto, ni un signo igual, ni una *x* ni una *y* que no fuese una conjunción.

Como profesores o futuros profesores tenemos que perder el miedo a dibujar. Todo el mundo debería terminar la educación obligatoria sabiendo dibujar igual que se sabe escribir. También estaría bien saber tocar un instrumento, ser buenos ciudadanos y saber empatizar y relacionarse con las personas, pero aquí simplemente vamos a hablar de la existencia de herramientas de expresión más allá de la palabra. Si los profesores dibujamos conseguiremos que los alumnos empiecen a hacerlo, obteniendo acceso a todas las ventajas que ofrece la visualización a partir de gráficos, esquemas o dibujos, tanto en las matemáticas como en el resto de materias y en la vida en general.

Existe otro motivo para utilizar imágenes en el aula. Lograr que los alumnos aprendan a interpretarlas. Si observamos nuestro día a día, veremos que cualquier información suele estar acompañada de gráficos. Tanto en las noticias, como en los periódicos o en la publicidad y en internet estamos siendo bombardeados por mensajes gráficos y a menudo de carácter matemático. Muchas veces los gráficos están mal hechos y la información que transmiten se convierte en desinformación. Un ciudadano que no haya sido educado en la interpretación de mensajes gráficos, probablemente será fácilmente engañado por ciertas gráficas que los periodistas y anunciantes realizan con poco rigor, a menudo por desconocimiento, pero también en numerosas ocasiones con la intención de confundir y aprovecharse de las personas.

En este mundo centrado en la televisión e internet, este mundo de la imagen en movimiento, cada vez aparecen más espectadores pasivos y sin ningún tipo de visión crítica. Es una de nuestras misiones como docentes el luchar contra esta inacción de la sociedad. Así pues, hay que usar imágenes porque pueden ayudar a comprender mejor gran parte de los conceptos matemáticos, pero también hay que usar imágenes para que los alumnos se familiaricen con su uso, pues en su vida diaria de ciudadanos adultos les va a venir muy bien.

A continuación, vamos a analizar lo qué es realmente la visualización, los tipos de visualización, la evolución que ha tenido a lo largo de la historia y, a medida que lo hagamos, iremos exponiendo, analizando y comentando una larga serie de ejemplos de enseñanza/aprendizaje de conceptos matemáticos en los cuales un componente gráfico simplifica o clarifica la explicación.

LA VISUALIZACIÓN

Una prueba de que la visualización es útil en las matemáticas es que, a lo largo de este máster, todos y cada uno de los profesores han utilizado lenguaje gráfico para explicarnos a nosotros (futuros profesores pero al fin y al cabo alumnos) conceptos matemáticos y didácticos. Más adelante intentaré que una gran parte de los ejemplos que voy a tratar provengan directamente de las clases del máster, para que se vea claramente que ha servido para algo y que sin él este trabajo no podría haberse realizado. Lógicamente.

Pero ¿qué es la visualización en las matemáticas? La mayoría de los conceptos, ideas y métodos matemáticos poseen una gran cantidad de elementos visuales que podemos representar de manera intuitiva, gráficamente. Su uso es muy eficaz tanto para la transmisión de conocimiento como para la resolución de problemas.

Muchos maestros tienen en su cabeza intuiciones gráficas que les permiten entender nuevas ideas matemáticas rápidamente. Gracias a ello pueden crear una red de conexiones neuronales para resolver los problemas a los que se enfrentan. Es posible que muchas veces den por sentado que el alumno es capaz de ver las cosas de la misma manera que ellos y que sus dudas les parezcan triviales, evidentes. Esto es un error. El imaginario visual matemático hay que desarrollarlo y es tarea del profesor iniciar a los alumnos en su aprendizaje.

La propia naturaleza de las matemáticas nos muestra por qué la visualización es una parte tan importante de las mismas. Y es que las matemáticas exploran estructuras de la realidad y las matematizan. Toman las percepciones y abstraen lo que es común para luego elaborarlo racional y simbólicamente. En matemáticas se trabaja pues con abstracciones de lo sentido, generalmente de lo observado. La aritmética intenta dominar la multiplicidad, la geometría explora las formas, el álgebra estudia lo subyacente a los números, el análisis investiga sobre las operaciones que implican un cambio en el tiempo y el espacio.

La mayor parte de nuestra percepción es visual. Así que es natural que las matemáticas, que se dedican a analizar las cosas que percibimos, tengan como componente primordial la visualización. Ser conscientes de ello y utilizarlo va a resultar tremendamente útil en la enseñanza. En las décadas formalistas de finales del siglo XX se había intentado abandonar completamente cualquier tipo de representación gráfica en el aprendizaje de las matemáticas. Es nuestro deber recuperarlo. Lo visual no está solo en la geometría sino en todas las ramas de la matemática, desde el análisis a la estadística. Incluso en aquellas actividades que parecen más alejadas de la visualización, los matemáticos se basan en sistemas de símbolos, diagramas visuales y otros procesos imaginativos que les proporcionan una intuición de lo abstracto, una serie de reflejos que les ayuda a tener una visión relajada y directa de las diversas partes de los objetos de su estudio.

TIPOS DE VISUALIZACIÓN

VISUALIZACIÓN ISOMÓRFICA

Existe una relación sustitutiva, analógica, continua y no arbitraria entre el objeto cuyas características queremos representar y la imagen representada propiamente dicha que es lo que visualizamos. Es decir, el referente y la representación son semejantes. En este tipo de visualización se puede establecer una relación clara entre los aspectos visuales que vamos a utilizar y los significados matemáticos que representan.

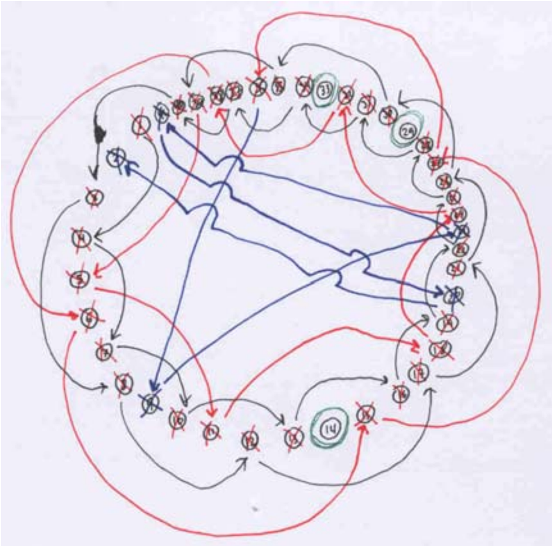
Es de gran utilidad y de fácil aplicación, porque la manipulación de realidades visuales percibidas directamente a través de los sentidos es mucho más sencilla que el tratamiento de conceptos abstractos.

También es seguramente la más aplicada porque los matemáticos tienden a aceptarla sin problemas. Los números reales se visualizan como puntos en una recta y los números complejos como puntos en un plano. Pues bien, esto no solo fue aceptado sino que supuso que los propios números complejos comenzasen a ser tenidos en cuenta por la comunidad científica.

Sin embargo, una de las desventajas de este tipo de visualización es que resuelve bien los casos particulares, pero no nos permite dar con la solución que encaje para el caso general. Esta última es la que al matemático debería interesarle, y con los isomorfismos nos quedamos cortos para poder averiguar lo que ocurre en el caso abstracto a partir de la estructura del problema. No obstante, muchas veces a partir del caso particular se obtienen momentos de inspiración que generan nuevas ideas que pueden acabar desembocando en esta solución general más abstracta, de modo que la visualización isomórfica no es para nada desdeñable.

En el libro *el rincón de la pizarra* aparece una historia que ilustra este tipo de visualización. Es más o menos la siguiente. Había 41 judíos refugiados en una cueva de una ciudad que había sido capturada por los romanos. Tras largas elucubraciones llegaron a la conclusión de que lo mejor que podían hacer era suicidarse. Decidieron hacerlo con un cierto orden. Se colocarían en círculo y se iría quitando la vida uno de cada tres, a partir de uno de ellos que tenía muchas ganas de ser el primero en morir. Sin embargo, dos de los judíos no querían suicidarse. Sabiendo a partir de quién se va a comenzar, ¿En qué posiciones del círculo deberían colocarse para quedar vivos entre los tres últimos y de este modo, al ser mayoría absoluta, terminar con la masacre antes de perder la vida?

La solución es claramente isomórfica y consiste en hacer una prueba contando uno de cada tres y viendo quienes serían los tres últimos en ser contados. Bastaría entonces con ocupar dos de esos tres puestos. Una vez obtenida la solución no estamos sin embargo en condiciones de decir cuáles serían las posiciones si hubiera 68 judíos y contásemos de 6 en 6. Es decir, no habríamos resuelto el caso general.



Si la simulación es correcta, los puestos para salvarse serían los de posiciones 14, 27 y 31.

VISUALIZACIÓN HOMEOMÓRFICA

Miguel de Guzmán incluye este tipo de visualización, y lo define como aquel en el que los elementos de nuestra representación tienen relaciones entre sí que imitan *suficientemente* bien para nuestros propósitos las relaciones entre los objetos que representan. De esta manera contamos con un poderoso aliado para los procesos mentales de búsqueda y demostración.

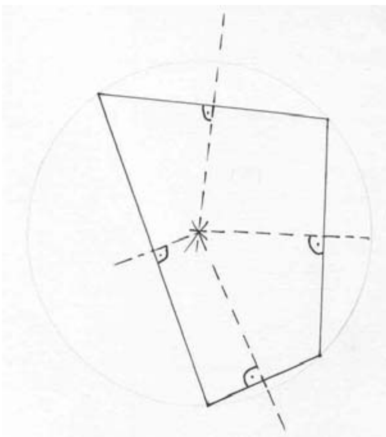
Es un tipo de representación mucho más subjetiva que la necesaria para la visualización isomórfica, por lo que a veces solo es comprensible y por lo tanto útil para el matemático, científico o simplemente persona que la diseña para su uso personal.

VISUALIZACIÓN ANALÓGICA

En este tipo de visualización sustituimos los elementos de estudio por otros que se relacionan de forma análoga y cuyo comportamiento tenemos más estudiado. Según Duval (1995) para aprender matemáticas hacen falta varios sistemas de representación y actividades cognitivas como la conformación, el tratamiento y la conversión. En la visualización analógica se consideran las representaciones que provienen de registros semióticos analógicos como los elementos fundamentales de estudio (figuras, gráficos cartesianos, esquemas…)

Un ejemplo sería el método empleado a continuación para determinar el área máxima de un cuadrilátero de lados dados.

Podemos sustituir los lados por varillas unidas y articuladas en sus extremos e introducir la figura en una lámina de jabón. Tras romper la película interior, las varillas se dispondrán formando el cuadrilátero deseado de área máxima, que es aquel en el que la tensión superficial es la mínima. En esta situación las fuerzas sobre el cuadrilátero se pueden reducir a cuatro aplicadas en cada punto medio de cada lado y proporcionales a sus longitudes. Se puede apreciar que dichas mediatrices se cortan las cuatro en un punto, centro de la circunferencia que inscribe el cuadrilátero. Es decir, que se consigue el cuadrilátero máximo cuando este es inscribible en una circunferencia.



No hay que pensar que la analogía es un sistema sin rigor. Basta señalar que Arquímedes la usaba constantemente. Además, si se es muy formalista, simplemente hay que formalizar los campos en los que se establece la analogía.

VISUALIZACIÓN DIAGRAMÁTICA

En este tipo de visualización, los objetos mentales y las relaciones que se establecen entre ellos son sencillamente transformados en símbolos para poder trabajar de una forma más cómoda. Dentro de este tipo de visualización podríamos hablar de símbolos, tablas, diagramas, esquemas en forma de árbol como los usados en combinatoria o simplemente reglas mnemotécnicas.

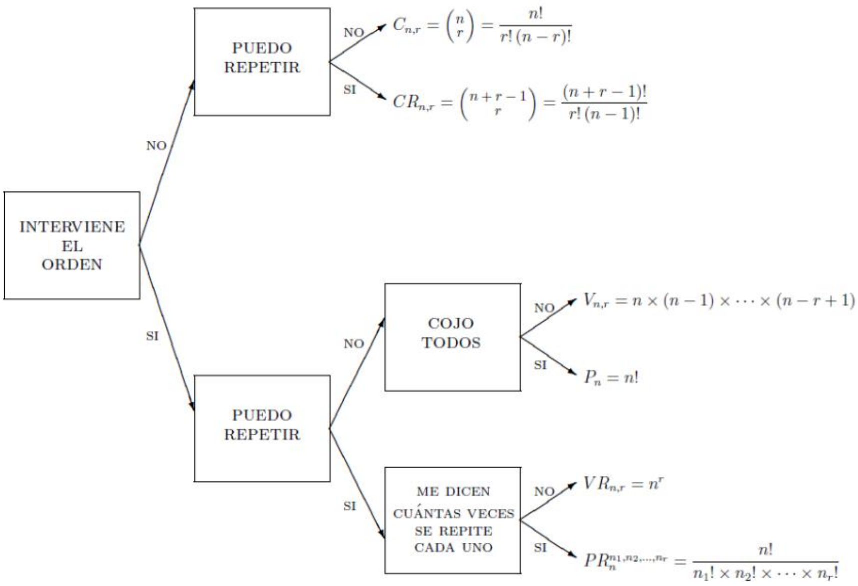


Diagrama de flujo para resolver ejercicios de combinatoria

A veces los símbolos se universalizan y sirven para que nos podamos entender entre todos. Sin embargo, lo más normal es que cada cual tenga sus diagramas y prefiera no compartirlos con los demás porque piensa que solo le sirven a él y que nadie los va a entender. Esta manera de proceder limita el avance científico al ralentizar el proceso de enseñanza, por muy personales que sean ciertos esquemas, si le sirven a un ser humano también otro será capaz de comprenderlo si se lo explican, y así se avanzará más deprisa en la adquisición de nuevos conocimientos.

Un buen maestro es aquel que, al transmitir sus descubrimientos, no se esfuerza solamente en que sus alumnos aprendan y comprendan los resultados de los mismos, sino que también pone empeño en que sean comprendidos los procesos mentales y visualizaciones que él tuvo que trabajar a lo largo del camino para llegar a dichos resultados.

KANJIS

En el apartado sobre la visualización diagramática, se ha indicado su similitud con las reglas mnemotécnicas. Al hablar de visualización, además de utilizar imágenes y analogías que transformen los objetos de estudio en abstracciones dentro de nuestra imaginación, es necesaria una labor de comprensión pero también de memorización.

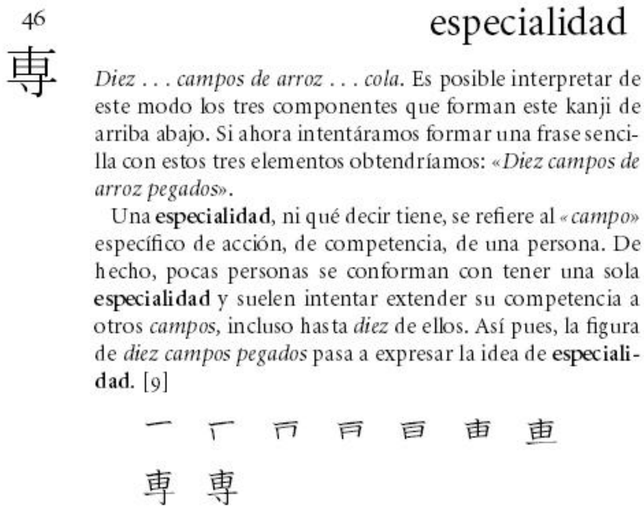
Para ello tenemos las propias imágenes pero necesitamos algo más, y esto son las historias. ¿Qué nos cuentan las percepciones? ¿Por qué recordamos unas cosas mejor que otras? A veces la imagen es muy fuerte y se nos queda grabada, por eso es tan útil el uso de herramientas gráficas en el proceso de enseñanza/aprendizaje. En múltiples ocasiones es lo que cuenta el profesor, el relato que acompaña a lo que vemos, o incluso el cómo lo cuenta, la entonación. A veces lo que determina el hecho de recordar algo son las aplicaciones prácticas del concepto que el alumno encontró en su día ¿Por qué al inicio de este máster recordaba perfectamente lo que es una potencia respecto de una circunferencia pero no tenía ni idea de lo que representaba o era una matriz?

Hace dos años viví en Japón, y allí estudié brevemente la escritura japonesa de los *Kanjis*, que es la misma que utilizan los chinos, ya que los japoneses no tenían escritura y la adoptaron de sus vecinos del Asia continental. El libro que utilicé estaba escrito por un occidental y consistía en un método tremendamente eficaz para enseñar los kanjis a un adulto, algo que los japoneses no se habían planteado, lo cual ha venido dando lugar a un habitual fracaso en la enseñanza de este tipo de escritura. No es lo mismo aprender los dos mil símbolos necesarios para desenvolverse siendo un niño que ya a una cierta edad. Nadie quiere copiar y copiar un kanji hasta aprenderlo como si estuviéramos usando un cuadernillo de caligrafía.

Lo interesante del método es que se basa en las historias. Para escribir todos los kanjis basta con conocer doscientos componentes que se repiten en unos y otros. A cada componente se le atribuye un significado que, a base de repetirlo por utilizarlo una y otra vez en las historias, se acaba aprendiendo de memoria. Con los componentes de un kanji te inventas un pequeño relato que da sentido al ideograma. En cierto modo cobra vida para ti. Al principio lo ves y piensas, componente a componente, qué es lo que te está contando hasta que finalmente la visualización de la historia hace aparecer el significado del kanji. Esto funciona también al revés, es decir, para escribirlo. Finalmente si lo usas habitualmente lo aprendes sin mayor problema. Se pueden llegar a aprender diez kanjis diarios con tan solo una hora de estudio. Para luego mantenerlos es aconsejable permanecer inmerso en la cultura japonesa, ya sea viviendo allí o dedicándose a ella en el día a día. No obstante la idea cala bastante hondo, y aunque se abandone totalmente el estudio de los kanjis y se olviden la mayoría, si luego se quiere recuperar no hace falta mucho tiempo para rememorarlos.

Al principio las historias las propone el autor del libro y luego pasa a ser trabajo del lector. En la introducción cuenta que le daba un poco de vergüenza haber descubierto este sistema que sabía que muchos formalistas iban a rechazar, pero como a él le dio unos resultados tan espectaculares decidió compartirlo. Un ejemplo con tres componentes sería el siguiente.

La cruz es el componente “*diez*”, el cuadrado con cruz es “*campo de arroz*” y el resto de trazos definen el componente “*pegado a*”


46 **especialidad**

專

Diez . . . campos de arroz . . . cola. Es posible interpretar de este modo los tres componentes que forman este kanji de arriba abajo. Si ahora intentáramos formar una frase sencilla con estos tres elementos obtendríamos: «*Diez campos de arroz pegados*».

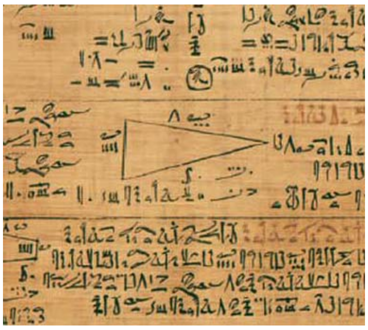
Una **especialidad**, ni qué decir tiene, se refiere al «*campo*» específico de acción, de competencia, de una persona. De hecho, pocas personas se conforman con tener una sola **especialidad** y suelen intentar extender su competencia a otros *campos,* incluso hasta *diez* de ellos. Así pues, la figura de *diez campos pegados* pasa a expresar la idea de **especialidad.** [9]

El sistema de relacionar las imágenes con las historias y los significados es muy eficaz. Es importante preocuparse por la manera en que los alumnos visualizan lo que se les intenta transmitir, tanto con el lenguaje oral como con los gráficos. También se les puede incitar a crear sus propias historias o trucos que les ayuden a aprender, recordar y comprender.

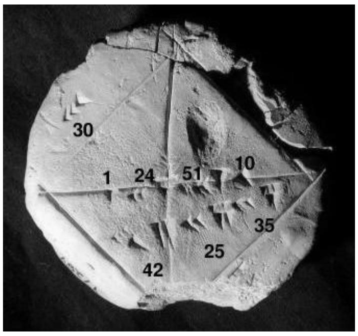
Con todo esto lo que pretendo decir es que como profesores tenemos que pensar en de qué manera las historias que contamos calan más hondo en nuestros alumnos y permanecen en su banco de datos. En este trabajo nos vamos a centrar en el aspecto gráfico de la enseñanza, sin olvidar en ningún momento que todo lo demás tiene también mucha importancia. Y del mismo modo que en su día fue un error desdeñar las imágenes, como comentaremos en el apartado de historia, no sería para nada adecuado renunciar a las explicaciones. Las explicaciones bellas son más entretenidas y cuando uno se divierte, aprende.

LA VISUALIZACIÓN A LO LARGO DE LA HISTORIA

Las primeras culturas que dispusieron de una potencia de fuego matemática significativa fueron la egipcia y la babilónica. Sin embargo el papel de la visualización no está muy desarrollado en ellas. Para ellos las matemáticas eran meramente utilitarias, no existía distinción entre los entes matemáticos y los objetos que representaban. Podemos decir que el número cinco carecía de sentido si no iba acompañado de la palabra melones o metros de valla para cerrar un campo. En cualquier caso está claro que tenían visualización porque usaban un lenguaje gráfico como podemos ver en los siguientes ejemplos:

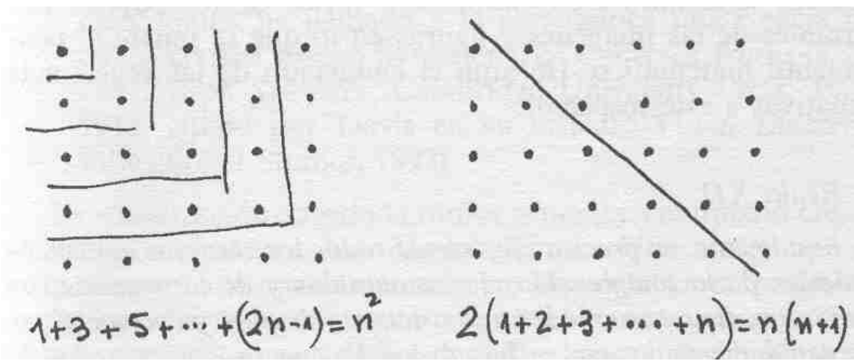


Papiro de Ahmes



cálculo de $\sqrt{2}$ con escritura cuneiforme

Los que sí establecieron la visualización como su máxima fueron los griegos. De hecho la palabra griega *zeorein* significa contemplar y *zeorema* se refiere a aquello que se contempla, y no a aquello que se demuestra, como piensan muchos. En este máster hemos aprendido que para demostrar algo a alguien basta con convencerle de que es cierto (salvando las distancias), pues muchas veces no hay mejor manera de convencerse de algo que viéndolo gráficamente. Veamos dos ejemplos de teoremas gráficos de los griegos.



Explicaciones gráficas para visualizar respectivamente la suma de los primeros *n* números impares y la suma de los primeros *n* números naturales.

Los griegos inventaron la abstracción matemática, pero al provenir sus matemáticas de las egipcias y babilónicas también estaban muy atadas a la realidad. Les daba lo mismo el número cinco que un pentágono. Para Platón y su mundo de las ideas la imagen evoca la idea, del mismo modo que las sombras del mito de la caverna evocan la realidad. Un dibujo de un círculo no es la realidad pero resulta muy útil como evocación. Los matemáticos se acercan a lo inteligible a través de lo sensible.

En la época moderna, Descartes enuncia una serie de reglas que están muy relacionadas con la visualización. Lo que hace es marcar la importancia de ciertas imágenes y figuras a la hora de comprender determinados conceptos matemáticos.

Por ejemplo:

Regla XV

Es útil también en muchas ocasiones describir estas figuras y mostrarlas a los sentidos externos para que de este modo se mantenga atento nuestro pensamiento más fácilmente.

El cálculo del siglo XVII aparece con un alto grado de componente visual relacionado con el mundo físico y geométrico, y evoluciona de esta manera en los siguientes siglos. En la matemática era muy valorada la capacidad de observación. Gauss la llamó (a la matemática) la ciencia del ojo.

Durante una gran parte del siglo XX ha reinado un formalismo matemático que ha dado como resultado un cierto abandono de la visualización. Este formalismo se debe en parte a que el cálculo se asentó sobre terrenos un tanto movedizos hasta la llegada de Weierstrass y su aritmetización del análisis de finales del siglo XIX. También aparecieron las geometrías no euclídeas que incitaban a desconfiar de la intuición, o las paradojas de Gödel, que atacaban la base de las matemáticas y la teoría de conjuntos de Cantor. Todos estos acontecimientos contribuyeron a que los matemáticos del siglo XX se inclinasen hacia una matemática pura y formal, sin ningún tipo de fisuras. Esto les hizo recelar de las imágenes que no suelen ser entes matemáticos perfectos y muchas veces se vanagloriaban de desterrarlas completamente en sus libros de texto (a excepción de la geometría). El modelo de la actividad científica en la enseñanza universitaria fue también el formalista, y luego fue mimetizado en la educación secundaria.

¿En qué situación nos encontramos en la actualidad? Se puede decir que el abandono de la visualización a favor del formalismo se detuvo y comenzó a revertirse. Se aprecia una tendencia a la renovación del papel de la visualización en las matemáticas. Una muestra de que algunos expertos han cambiado de opinión es que han aparecido numerosos ensayos en revistas sobre matemáticas, que hablan de la importancia de la visualización. También las nuevas tecnologías empiezan a ser una pieza clave a la hora de llevar la visualización a las aulas. Contamos con *Geogebra*, diapositivas o videos que facilitan el aprendizaje.

ECUACIONES Y RECTAS

En la ESO todos los alumnos deberían de saber lo que es resolver una ecuación del tipo $2x + 3 = 5x - 1$ y no con la típica receta de: me llevo el -1 y pasa sumando y luego muevo el $2x$ a la derecha que pasa restando… Sería deseable que entendieran que cuando pasamos sumando el uno a la derecha, lo que en realidad estamos haciendo es sumar 1 a ambos lados de la ecuación y que como es una igualdad la solución no varía. Ocurre lo mismo con el $2x$, lo que hacemos es restar $2x$ a ambos lados de la ecuación. Así pues los pasos serían:

$$2x + 3 = 5x - 1$$

$$2x + 3 + 1 = 5x - 1 + 1$$

$$2x + 4 = 5x$$

$$2x - 2x + 4 = 5x - 2x$$

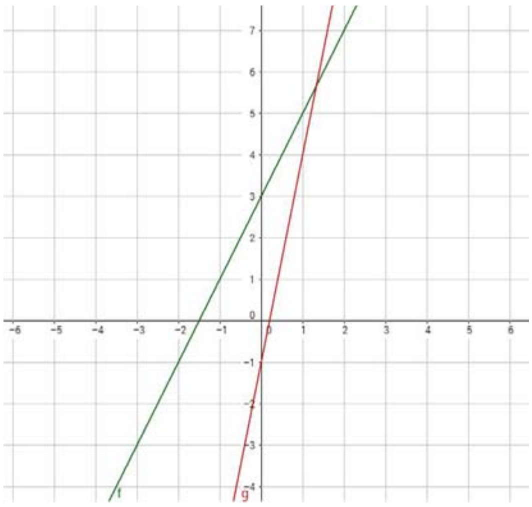
$$4 = 3x$$

$$\frac{4}{3} = \frac{3x}{3}$$

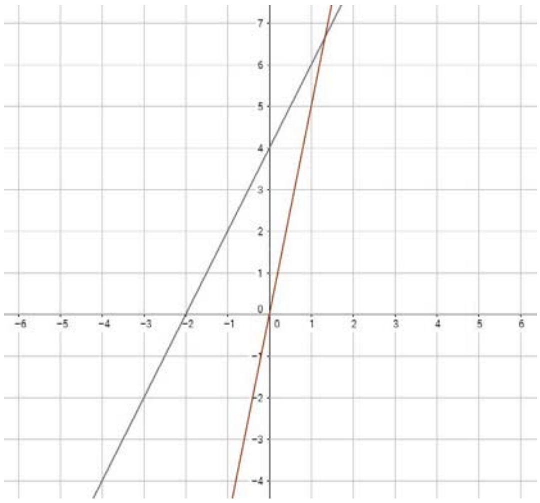
$$\frac{4}{3} = x$$

Puede parecer tedioso pero merece la pena hacerlo al menos una vez porque así se sabe lo que se está haciendo.

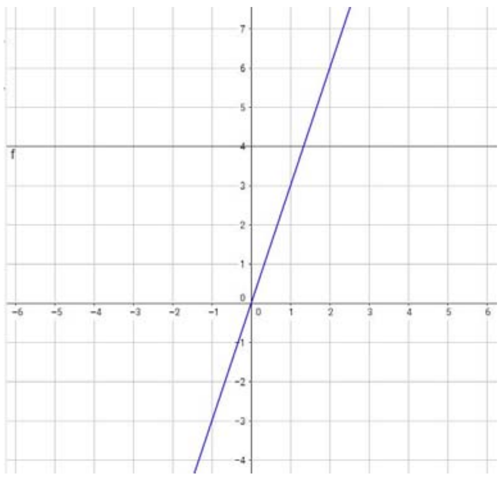
Otra cosa que se tiene que saber en secundaria es que una ecuación del tipo $y = 2x + 3$ representa una recta, en la cual la y aumenta en 2 unidades por cada unidad que aumenta la x y la ordenada en el origen vale 3, o sea que se trata de la recta que pasa por el punto (0, 3). Entonces para la anterior ecuación $2x + 3 = 5x - 1$ tendríamos dos rectas $y = 2x + 3$ & $y = 5x - 1$. Sabiendo esto existe una sencilla y didáctica forma de ver lo que ocurre con las dos rectas al ir resolviendo la ecuación. Consiste en ir dibujando los pasos.



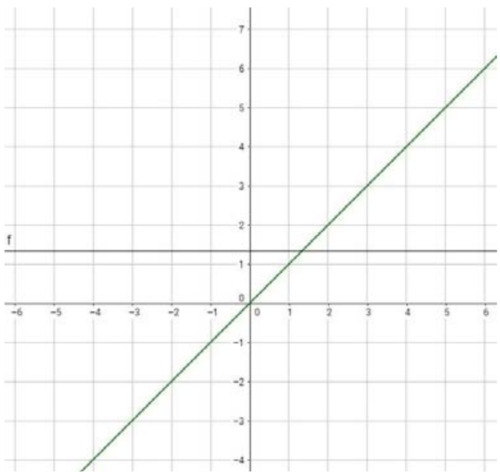
$2x + 3 = 5x - 1$



$2x + 4 = 5x$



$4 = 3x$

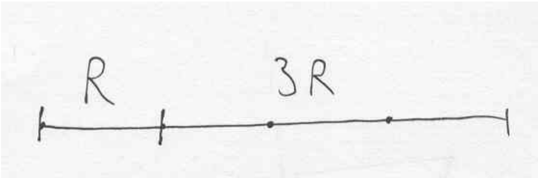


$\frac{4}{3} = x$

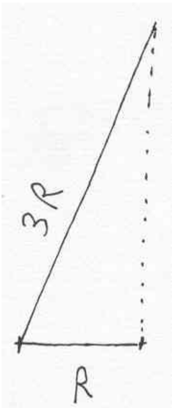
Lo primero que apreciamos es que al sumar 1 las dos rectas suben una unidad en el eje de ordenadas. Cuando restamos $2x$ las rectas "giran" en torno a los puntos de corte con el eje de ordenadas. Pero lo más importante es que el punto de corte de las dos rectas siempre está en la coordenada $\frac{4}{3}$ que es la solución de la ecuación. Si se explica esto una vez, se va a entender de una forma mucho más profunda lo que se está haciendo al despejar la x de una ecuación, se entenderá, se cometerán menos errores y se aprehenderá, haciendo el alumno suyo el concepto.

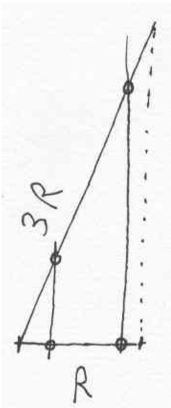
CONJUNTOS TRASFINITOS

Para el estudio de la cardinalidad de los conjuntos infinitos N, Q y R se puede usar una primera idea intuitiva gráfica. Supongamos dos segmentos de recta de los cuales uno mide tres veces más que el otro.



Como podemos ver, a priori parece que en 3R tendría que haber más puntos que en R. Sin embargo basta con que coloquemos el segmento 3R de la siguiente manera.





Se observa que cuando tracemos por cualquier punto de 3R una recta perpendicular a R tendremos en R un punto correspondiente al primero. Este sencillo ejercicio que también puede hacerse con dos circunferencias concéntricas trazando semirrectas desde su centro, nos permite apreciar que ciertos conjuntos que aparentemente son mayores que otros en realidad son iguales en cuanto a su cardinalidad.

Sigamos ahora con los conjuntos N, Q y R y la solución que dio Cantor al orden de sus infinitos. Para ello usaremos como ayudas gráficas visualizaciones diagramáticas tipo tablas, secuencias y finalmente el argumento de la diagonal, que no deja de ser un recurso gráfico.

Se dice que A es subconjunto de B si todos los miembros de A están en B. Es decir, B sería un subconjunto de B. Se dice que C es subconjunto propio de B si todos los miembros de C están en B, y al menos uno de los miembros de B no está en C. O sea que B no puede ser subconjunto propio de B.

Basándose en estas definiciones, un matemático de la segunda mitad del siglo XIX, Georg Cantor dijo que un conjunto infinito es aquel que puede ponerse en correspondencia 1-1 con al menos uno de sus subconjuntos propios. Ponerse en correspondencia 1-1 es lo mismo que tener la misma cardinalidad. Por ejemplo, podemos tratar de poner en correspondencia los números naturales y los enteros aunque los segundos carezcan de orden, de la siguiente manera.

NATURALES		ENTEROS
1	--->	1
2	--->	-1
3	--->	2
4	--->	-2
5	--->	3
.		
.		
.		
2n	--->	(-2n)/2
2n+1	--->	(2n+2)/2

De esto se deduce que tienen la misma cardinalidad. Para los números racionales basta con darse cuenta de que cada uno de ellos se puede escribir de la forma $\frac{p}{q}$ así que podemos realizar una tabla como la que sigue.

$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	…	$\frac{n}{1}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	…	$\frac{n}{2}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	…	$\frac{n}{1}$
…	…	…	…	…	…	…
$\frac{1}{n}$	$\frac{2}{n}$	$\frac{3}{n}$	$\frac{4}{n}$	$\frac{5}{n}$	…	$\frac{n}{n}$

Para, a continuación, recorrerla en zigzag pasando por cada celda para obtener la sucesión 1, 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, 1, 3, 4, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$,… de la que simplemente eliminamos los términos repetidos obteniendo la sucesión 1, 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, 3, 4, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$,… secuencia que incluye a todos los números racionales y que es perfectamente numerable por lo que se puede poner en correspondencia con los números naturales. La tabla y la manera de recorrerla es claramente una demostración gráfica, del mismo modo que lo es la siguiente.

Una de las genialidades de Cantor fue demostrar que los números reales no pueden ponerse en correspondencia 1-1 con los racionales. Es una demostración del tipo reducción al absurdo basada en el argumento de la diagonal.

Primero suponemos que sí existe una correspondencia 1-1 entre naturales e irracionales, es decir, suponemos que los números reales son numerables. Entonces se pueden numerar de la siguiente manera.

1º Real = $\boldsymbol{X_1},a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$…

2º Real = $X_2,\boldsymbol{b_1}b_2b_3b_5b_6b_7$…

3º Real = $X_3,c_1\boldsymbol{c_2}c_3c_5c_6c_7$…

4º Real = $X_4,d_1d_2\boldsymbol{d_3}d_5d_6d_7$…

5º Real = $X_5,e_1e_2e_3\boldsymbol{e_5}e_6e_7$…

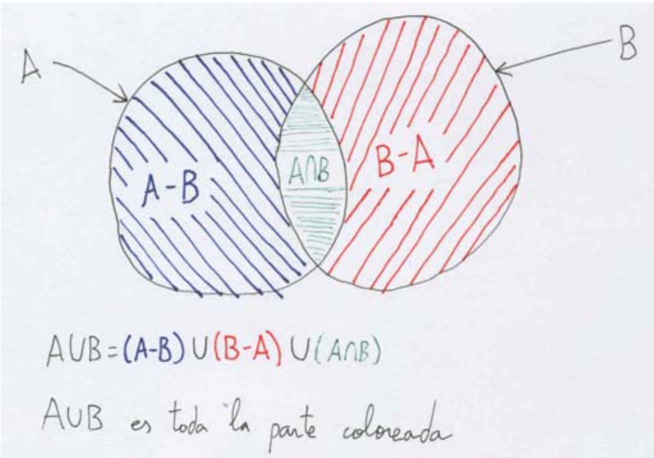
Donde *X* son las partes enteras y *abc*… representan las infinitas sucesiones decimales. Ahora supongamos que cogemos el número compuesto por todos los elementos de la diagonal, es decir $X_1,b_2c_3d_4e_5f_6g_7$…y restamos 1 a cada uno de los dígitos (lo cambiamos por un 9 en el caso de que dicho dígito sea 0). Entonces tenemos que dicho número no está (no puede estar) en la lista que nos hemos confeccionado porque diferirá de todos los que en ella hay en al menos un dígito. Es decir, la suposición inicial es rebatida y el conjunto de todos los números reales no se puede numerar, o dicho de otro modo, no se puede poner en correspondencia 1-1 con el conjunto de todos los enteros. Y como el conjunto de los racionales sí puede ponerse en correspondencia 1-1 con el de los enteros entonces la cardinalidad de los reales es mayor que la de los racionales.

VISUALIZACIÓN DE RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

Si bien el lenguaje de la lógica formal es claro y preciso, a veces puede resultar un tanto farragoso a los ojos de un estudiante. Existen casos en los que la demostración se representa y se entiende con mucha mayor comodidad mediante diagramas circulares en el plano. Por ejemplo, tenemos dos conjuntos A y B y queremos demostrar que

$$A\bigcup B=(A-B)\bigcup(B-A)\bigcup(A\bigcap B)$$

y que los tres conjuntos del segundo miembro son disjuntos dos a dos. Podemos usar la siguiente demostración visual más sencilla.



O podemos realizar una demostración analítica.

Llamamos $C=(A-B)\cup(B-A)\cup(A\cap B)$

Si $x\in A\cup B$ entonces $x\in A$ o $x\in B$. Si $x\in A$ entonces $x\in B$ o $x\notin B$. En el primer caso $x\in A\cap B$ en el segundo $x\in A-B$ y las dos verifican C. Si $x\in B$ entonces $x\in A$ o $x\notin A$. En el primer caso $x\in A\cap B$ en el segundo $x\in B-A$ y las dos verifican C. Por lo tanto $C\subset A\cup B$.

Si $x\in C$ entonces $x\in A\cap B$ o $x\in B-A$ o $x\in A-B$. En cualquiera de los tres casos $x\in A\cup B$ así que se verifica $A\cup B\subset C$.

Se concluye pues $A\cup B=C$

Por último el hecho de que $(B-A)\cap(B\cap A)=\emptyset$, es claro de la misma definición de los conjuntos implicados y se puede aplicar a las otras dos relaciones.

CONCEPTO DE LÍMITE

Nos parece que el concepto de límite es uno de los que más cuesta entender. Por esta causa cuando los alumnos terminan la universidad han olvidado completamente aquello que “aprendieron” en bachillerato. Como se les explicó simbólicamente no fueron capaces de aprehenderlo. Existe una forma de acercarse a la idea de lo que es un límite que utiliza imágenes que muestran el concepto de manera muy intuitiva.

Nos basamos en la idea de aproximación óptima. Es una idea de menor complejidad y que los estudiantes recuerdan durante más tiempo.

Hay un programa de ordenador diseñado por un profesor* de didáctica de las matemáticas de la UVA para enseñar este concepto. Seguramente sea uno de los conceptos más complicados en todos los cursos. Al cabo de unos pocos años los alumnos han olvidado y es porque se aprendieron de memoria las fórmulas y los algoritmos para calcular límites (cosa que sí pueden hacer todavía) pero nunca llegaron a interiorizar la idea rigurosa de lo que es un límite.

Hay que intentar pues diseñar una secuencia adecuada para la enseñanza-aprendizaje del concepto de límite para alumnos de secundaria. Observando que los alumnos intuyen que el límite tiene que ver con las aproximaciones, habría que explicarles que ambos conceptos difieren y que el límite sería más bien aquella aproximación que no se puede mejorar.

Vamos a hablar de una investigación que consistió en impartir una serie de clases sobre el concepto del límite y ver cómo respondían los alumnos. El trabajo de investigación fue realizado por el profesor de la UVA mencionado anteriormente. Primeramente se expone un análisis epistemológico, esto es, cómo ha ido evolucionando el propio concepto a lo largo de la historia. Cnido, D’Alembert, Cauchy, Weierstrass… Este acercamiento histórico permite captar el interés de los estudiantes haciéndoles ver que estas ideas las han tenido personas reales.

Con un análisis curricular se llega a la conclusión de que se pueden introducir en primero de bachillerato el límite secuencial de forma numérica, distinguiendo entre finito e infinito. Luego, en segundo de bachillerato, se introducirá mediante la aritmética y para servir como fundamentación a los conceptos de derivada e integral. Hay que buscar la manera de que los alumnos se interesen por el tema antes de introducirlo. Hablarles de su utilidad.

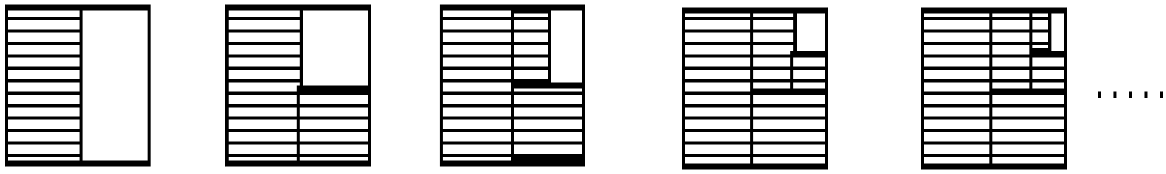
Se debe tratar el límite secuencial.

Como ya se ha dicho hay que buscar la idea de aproximación óptima y desterrar la de aproximación subjetiva que se tiene ahora. También es bueno saber lo que tienen los alumnos

* Tomás Ortega del Rincón, Dpto. de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y de la Matemática.

en la cabeza y utilizar distintos tipos de representación, tanto algebraico como numérico, verbal o gráfico.

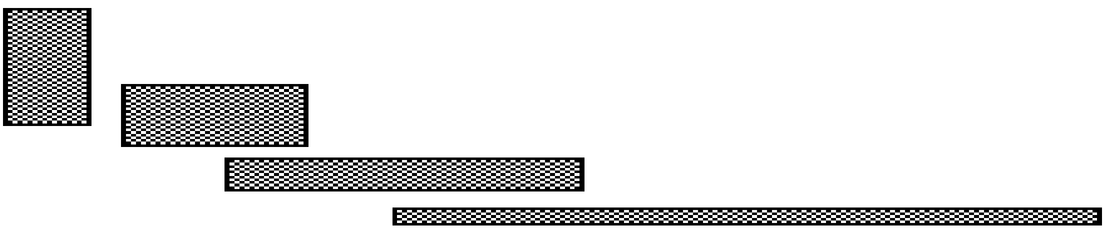
Existe una serie de actividades que permiten acercarse intuitivamente al concepto. Por ejemplo, si continuamos indefinidamente esta secuencia, ¿Qué valor se alcanza?.



Se tiende al cuadrado entero, y desde aquí se puede pasar al modo algebraico y ver que esto es una serie de término general $\frac{1}{2^n}$, donde *n* toma valores desde 1 a infinito. La suma final es la unidad.

También hemos visto que en el caso de que en el denominador apareciese un 3^n se tendería a $\frac{1}{2}$. Esto se ve muy bien de forma gráfica. Al final se generaliza y todo tiende a $\frac{1}{\alpha - 1}$ siendo $\frac{1}{\alpha^n}$ el término de la serie geométrica general, con $\alpha > 1$.

Otros ejercicios como el del rectángulo de área constante, uno de cuyos lados tiende a infinito, también son interesantes para visualizar límites.



Nos parece importante también que aprendan la diferencia entre aproximación y tendencia. Por ejemplo, la secuencia 1, 1.9, 1.99, 1.999, 1.9999… se podría decir que se aproxima al número 356 pero está claro que no tiende hacia él. Tendería hacia 2, porque las aproximaciones están más cerca de 2 que cualquier aproximación fijada.

Se han realizado una serie de entrevistas en la investigación de la que estamos hablando, realizada por el profesor de la UVA. Dichas entrevistas muestran que muchos alumnos tienen problemas con el orden de los decimales: no consiguen observar la dependencia entre la aproximación y el entorno del punto al que se aproxima la *x* cumpliendo que sus imágenes mejoran dicha aproximación.

Luego se proponen tres definiciones de límite de una función en un punto y se trabaja con el concepto del entorno de dicho punto. Una de ellas es:

Sea f una función y a un número real, el número L es el límite de la función f en el punto a, y se escribe $\text{lím}_{x\to a}f(x)=L$ *(se lee límite de f(x) cuando x tiende a a es L), si cuando x tiende a a, siendo x distinto de a, sus imágenes, f(x), tienden a L.*

Son definiciones sin usar los conceptos de ε ni δ. En principio los alumnos aprenden mejor y no tan de memoria. Razonan mejor.

En el informe de la investigación también hay un gráfico en el que apreciamos que si preguntamos por el concepto de límite a los alumnos un año después, hay cuatro de cada diez que lo explican bien, dos años después dos y cuatro años después solo un alumno de cada diez. De este hecho podemos deducir que el concepto de límite no queda fijado correctamente en la mente de los alumnos, de manera que éstos lo van olvidando paulatinamente durante los cuatro años inmediatamente posteriores al momento de su enseñanza. Es decir, que hay algo que no se está haciendo bien.

- Se extraen una serie de conclusiones:

- El uso de software es muy motivador.

- A los alumnos les cuesta mucho aprender el concepto.

- A veces se cometen errores en la explicación que según se ha comentado en las clases del máster, pueden aparecer incluso en libros de texto. Por ejemplo, se habla de una función creciente en un punto. Esto es una falacia. En un punto no puede haber variación, las funciones crecen en intervalos. Se puede ver este error, por ejemplo, en un glosario matemático de la universidad de Barcelona, que aparece en internet.

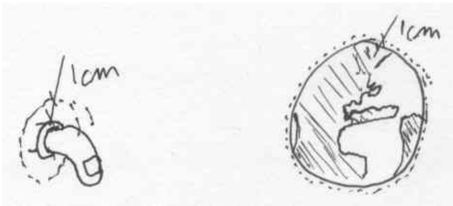
- Los alumnos no saben describir una función sin límite en un punto.

- Todos dicen preferir la definición construida en esta investigación. Afirman entenderla mucho mejor.

- Hay simbologías que dan lugar a confusión. Debería distinguirse entre infinito y “tiende a infinito”, o entre cero y “tiende a cero”. En muchas ocasiones los alumnos escriben expresiones del tipo $\frac{5}{\infty}=0$ en lugar de $\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x}=0$.

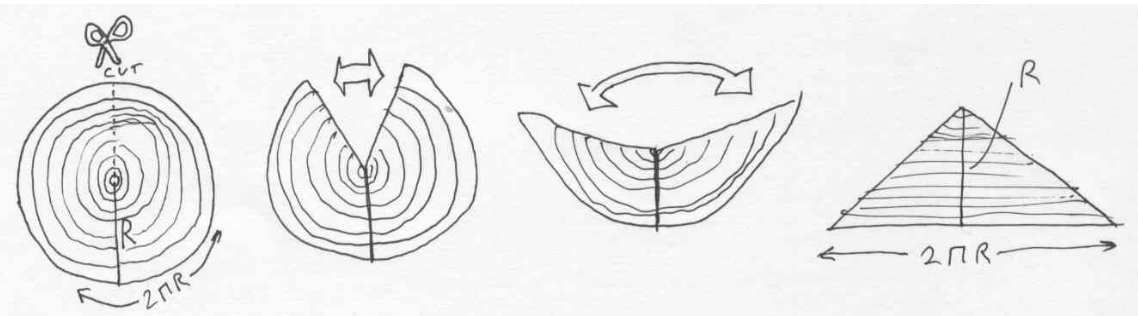
FÓRMULA DEL ÁREA DEL CÍRCULO

Normalmente lo tenemos claro, el área del círculo es πr^2, ¿o era $2\pi r^2$? A veces estas dudas pueden surgir. Lo que sí que no da lugar a dudas es que el radio y la longitud de la circunferencia tienen una relación directamente proporcional. ¿Seguro? entonces si cogemos una circunferencia con un radio 1 *cm* mayor que un anillo y otra con un radio 1 *cm* mayor que una circunferencia máxima terrestre ¿La diferencia de longitud existente entre cada pareja de circunferencias es la misma?



Pues sí, cada una de las circunferencias de puntos difiere de la concéntrica interior (anillo y planeta Tierra respectivamente) en $2\pi\Delta r$ en este caso 2π centímetros. Admitimos que en el caso de la tierra la separación entre la línea de puntos y el planeta no está dibujada a escala, seguramente sea eso lo que genera la confusión.

Pero nuestro objetivo es generar claridad y no confusión. De modo que recomencemos. La longitud de una circunferencia es directamente proporcional al radio según la fórmula $L = 2\pi r$. Ahora, simplemente miremos la siguiente serie de imágenes.



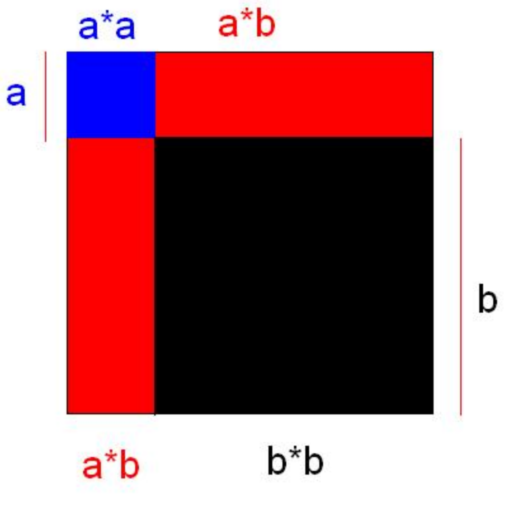
Como, en principio, cualquier estudiante de secundaria conoce la fórmula del área de un triángulo $A = \frac{b*h}{2}$ y las imágenes nos muestran que en nuestro caso la base coincide con la longitud de la circunferencia y la altura con el radio, entonces $A = \frac{b*h}{2} = \frac{2\pi r*r}{2} = \pi r^2$.

Algún alumno puede protestar diciendo que los lados iguales del triángulo no tienen por que ser líneas rectas. En ese caso basta con recordarle que ya se le ha convencido de que el radio y la longitud de la circunferencia son proporcionales, es decir, $L = kr$ lo cual es claramente la ecuación de una recta. Muy bien, aquí tenemos nuestra visualización del área del círculo. Parece que no hay motivos para dudar ni para olvidar. Y, por cierto, todo esto se hace mucho mejor con un tapete circular. Si recortamos materialmente un radio del tapete, podremos desdoblarlo hasta obtener el triángulo isósceles correspondiente. Las imágenes no tienen por qué ser siempre dibujos en la pizarra. Si las explicaciones se pueden tocar aprendemos con más sentidos y aprendemos mejor.

CUADRADO DE LA SUMA Y CUADRADO DE LA RESTA

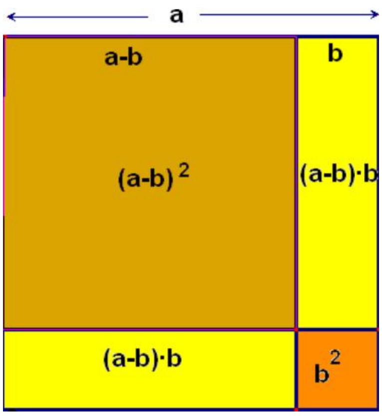
Una de las cosas que más me ha llamado la atención de la asignatura de innovación impartida por Tomás Ortega han sido las pruebas visuales de ciertos algoritmos. Más allá de si pueden considerarse como auténticas demostraciones o no, está claro que ayudan a entender por qué algunas cosas son de una determinada manera. Hay ciertas fórmulas que los estudiantes se aprenden de memoria porque a veces no se tiene el tiempo o el nivel para realizar o comprender determinadas demostraciones formales. En esos casos se pueden usar “demostraciones” visuales para clarificar conceptos.

Por ejemplo, hemos visto de una manera sencillísima que el cuadrado de la suma es igual al cuadrado del primer sumando, más el cuadrado del segundo, más el doble del primero por el segundo. Simplemente dibujando un cuadrado con la herramienta gráfica *Paint*.



$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Y esto sirve también para la diferencia de cuadrados.

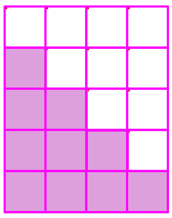


$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$a^2 = (a-b)^2 + b^2 + 2(a-b)b$$

SUMA DE LOS *N* PRIMEROS NÚMEROS NATURALES*

Fijándose en el gráfico del rectángulo se puede entender fácilmente que la suma de los primeros *n* números naturales se expresa como $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Ya que el número de cuadrados que tiene el rectángulo es la mitad del producto entre los que tiene en la base (*n*) y los que tiene en la altura (*n+1*). En este caso $n = 4$, así que hay 4 cuadrados en la base y 5 en la altura, entonces $S_n = \frac{4(4+1)}{2} = 10$.



En una clase de secundaria, antes de mostrar la gráfica, es un buen recurso didáctico narrar la anécdota de Gauss cuando era niño y sumó los números del 1 al 100 como 101 parejas de 50, es decir $5050 = \frac{100(100+1)}{2}$

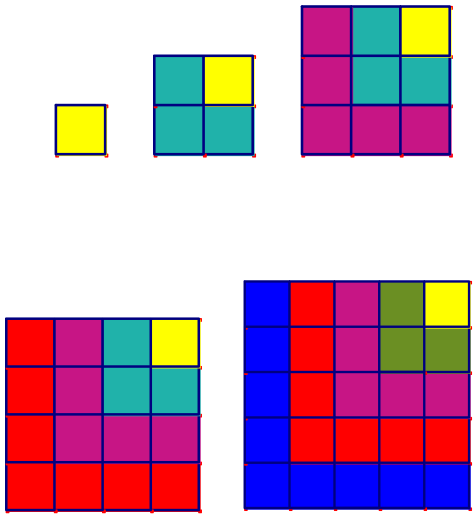
*Los gráficos de este apartado y los dos siguientes han sido tomados de los apuntes de las clases de Tomás Ortega del Rincón, Dpto. de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y de la Matemática.

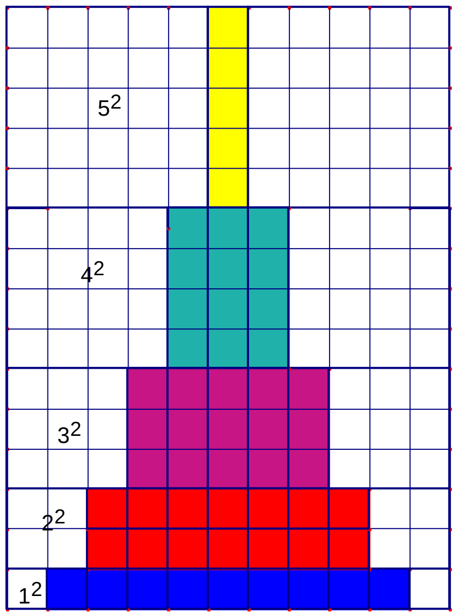
SUMA DE LOS CUADRADOS DE LOS *N* PRIMEROS NÚMEROS NATURALES

Fijándonos en los siguientes dibujos tenemos de una manera visual la obtención del algoritmo que nos da el cuadrado de los primeros *n* números naturales

$$3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) = (2n + 1)(1 + 2 + \cdots + n)$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$$





Se puede observar que los cuadrados coloreados son los mismos a la derecha que a la izquierda. Como a la izquierda tenemos $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$, a la derecha tenemos esos mismos más los cuadrados blancos, pero los blancos son dos veces esa cantidad que es la suma de cuadrados, $2 + 1 = 3$ de ahí obtenemos el $3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$.

Por otro lado el rectángulo de la derecha tiene como base $2n + 1$ y como altura la suma de los n primeros números naturales. En este caso 1+2+3+4+5.

Dividiendo ambos términos de la ecuación entre tres, obtenemos la fórmula para la suma de los cuadrados de los *n* primeros números naturales.

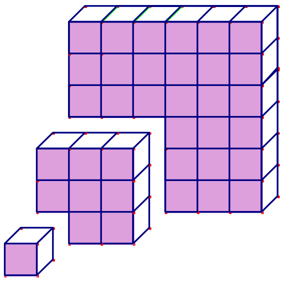
$$\frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$$

SUMA DE LOS CUBOS DE LOS *N* PRIMEROS NÚMEROS NATURALES

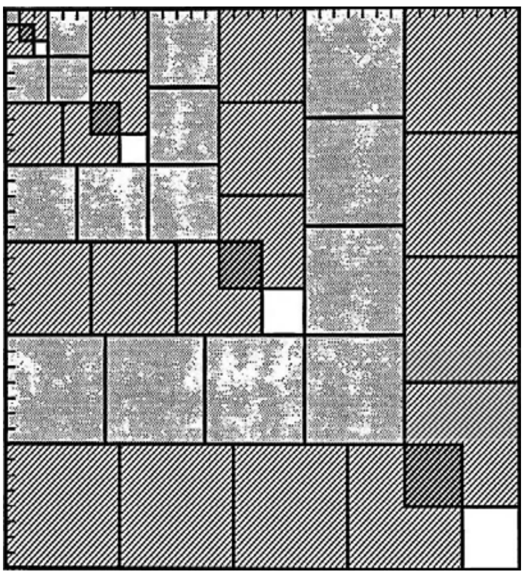
$$S_{n^3} = (1 + 2 + \cdots + n)^2 = \frac{1}{4}(n(n+1))^2$$

En el dibujo se ve que tenemos cuadrados que tienen como lado la suma de los *n* primeros números naturales. Es decir, que si elevamos al cuadrado dicha suma obtenemos la fórmula para los cubos.

$$(S_n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(n(n+1))^2$$



También se puede ver que la suma de los cubos es el cuadrado de la suma en esta prueba visual de Solomon W. Golomb.*

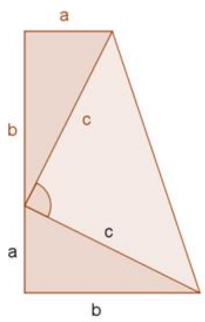


* NIELSEN, R. *Proofs without words, 1993.*

TEOREMA DE PITÁGORAS

Hay montones de demostraciones de este teorema. Muchas algebraicas y algunas hasta construidas físicamente. Se pueden ver algunos videos en internet que muestran un mecanismo compuesto por tres compartimentos prismáticos de base cuadrada ensamblados a otro prisma que tiene como base un triángulo rectángulo. Cada lado del triángulo coincide en longitud con el lado de cada cuadrado. Se realiza un proceso consistente en llenar de agua o de semillas los compartimentos pequeños para luego volcar el contenido en el grande y comprobar que encaja perfectamente.

La siguiente demostración es curiosa porque es puramente gráfica y además se supone que fue ideada por un presidente de los estados unidos, James A. Garfield. Si duplicamos la figura con una simetría central en el centro de la hipotenusa del triángulo de color clarito tenemos un cuadrado de lado *a+b*. Luego la figura tiene un área de ½(*a+b*).



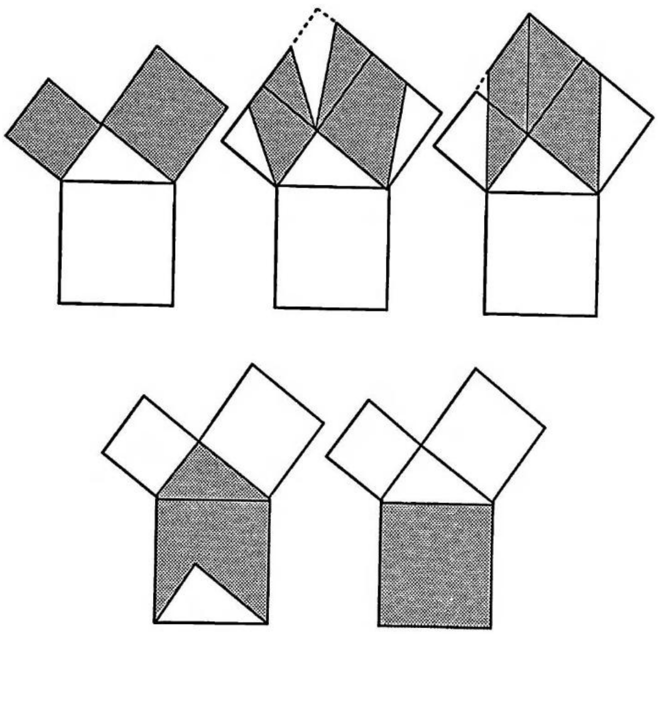
$$\acute{A}rea = 2 \cdot \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}(a+b)$$

$$ab + \frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + 2ab)$$

$$\frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

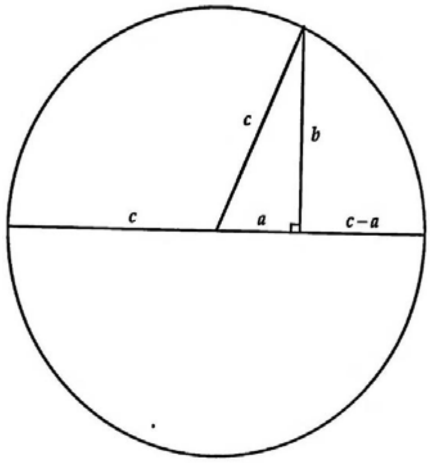
Fijémonos en la siguiente demostración también visual, esta vez basada en la prueba de Euclides.



Se puede explicar, si es necesario, que los cuadrados iniciales se transforman en romboides, conservando el área, ya que siguen teniendo las mismas base y altura. Los siguientes pasos son evidentes visualmente pero más complicados de aritmetizar.

También es curiosa esta otra demostración de Michael Hardy* que utiliza el teorema de la altura.

La altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es media proporcional entre los dos segmentos en los que la divide.

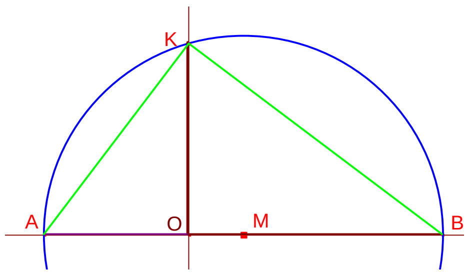


$$\frac{c+a}{b}=\frac{b}{c-a}$$

$$\frac{c+a}{b}=\frac{b}{c-a}$$

$$c^2=a^2+b^2$$

Podemos aprovechar para explicar y demostrar el teorema de la altura que sirve para la anterior demostración del teorema de Pitágoras.



Los triángulos AKO y KBO son semejantes por tener los tres ángulos iguales, entonces el cociente entre el cateto mayor y el menor en cada uno de ellos es el mismo.

$$\frac{OB}{OK}=\frac{OK}{OA}$$

* NIELSEN, R. *Proofs without words, 1993.*

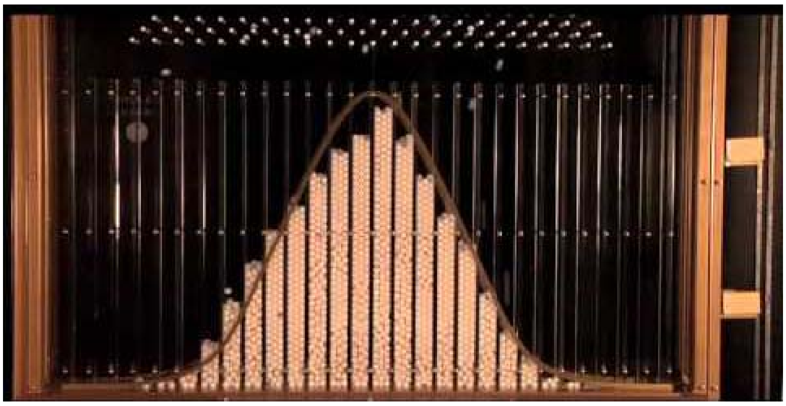
ESTADÍSTICA

En las clases de estadística, tanto en la asignatura de *Complementos de matemáticas* como en la de *Ideas y conceptos matemáticos a través de la historia*, se ha mostrado un video de una máquina que muestra de manera real la generación de la curva normal o campana de Gauss en un modelo estadístico. El aparato en cuestión se llama *Máquina de Galton*.

La máquina tiene una serie de pequeños cilindros de metal de aproximadamente medio centímetro de diámetro y cinco centímetros de longitud. Los cilindros están dispuestos al tresbolillo encajados perpendicularmente a una caja de plástico, de una manera similar a las piezas en las que rebota la bola en un *pinball*.

El procedimiento consiste en dejar caer en la zona central una gran cantidad de pequeñas bolas de metal que, en función de los rebotes, irán hacia la izquierda o hacia la derecha en cada choque con cada cilindro para, finalmente, distribuirse en cajas en la parte inferior.

Como dictan las leyes de la probabilidad y la estadística, al llegar abajo, las bolas quedarán dispuestas formando una campana de Gauss.



Máquina de Galton

Es un método muy visual que ayuda a comprender cómo sucede un proceso estadístico. Se ve en tiempo real y al concluirse tenemos la forma de campana. Tal vez bastaría con decir que la gráfica es una campana, pero es mejor hacer al menos un dibujo y mucho mejor todavía mostrar el video o llevar la máquina a clase si se dispone de ella.

MEDIOS AUDIOVISUALES

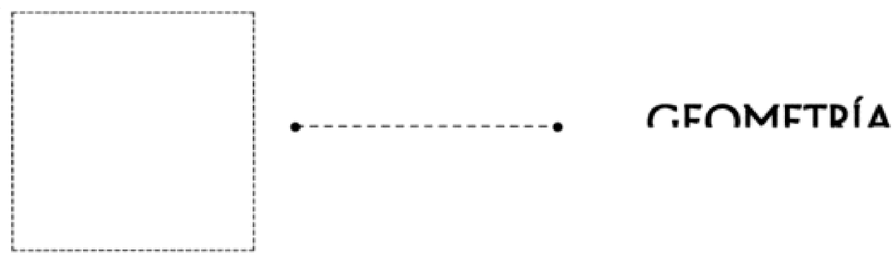
No podemos excluir de este trabajo sobre la imagen las imágenes en movimiento. Nos parece menester hacer una reflexión sobre los medios audiovisuales y su repercusión en el alumnado. Se trata seguramente de una influencia negativa, pero tenemos la obligación como docentes de explotar todo lo positivo que puede haber en ella y de amoldarnos a la presencia de estos medios (incluso de aprovecharnos de ella) para que los estudiantes aprendan más y mejor, es decir, para que su aprendizaje sea significativo.

Los medios de comunicación de masas terminan conformando una manera de ver la realidad. No olvidemos que la realidad es única pero las percepciones de la misma son tantas como individuos hay en el universo. Esta percepción va cambiando con el paso del tiempo. De manera que la visión que tenían los espectadores de los cortos de Lumière en 1895, que se asustaban de la llegada de un tren que parecía que iba a salir de la pantalla y atropellarlos, se encuentra a años luz de la de cualquier persona del siglo XXI, que ha crecido inmersa en una cultura de la imagen, la televisión y el videojuego. Incluso hay una marcada diferencia entre nuestros padres y nosotros. Ellos sí, iban al cine, incluso mucho más que la mayoría de la gente de nuestra sociedad actual, pero ese era prácticamente todo el audiovisual que recibieron siendo niños, estando su educación mucho más marcada por el libro que por las imágenes en movimiento. Nosotros de pequeños teníamos videojuegos y veíamos la televisión varias horas al día. Hay quien ha leído más y quien ha leído menos pero la parte audiovisual nos ha influido de manera notable. Para los nacidos en el siglo XXI el asunto está desbocado. Según ciertos artículos consultados en internet, un niño pasa unas 6 horas delante de la televisión cada fin de semana. Los menores de 30 años están más de 10 horas diarias mirando diversas pantallas, ordenador, teléfono inteligente, televisión, videojuegos (es la misma pantalla pero el concepto es distinto, luego lo explicaremos), *ipad*… evidentemente, esto influye en su manera de percibir los estímulos visuales educativos que reciben luego en el instituto.

Sobre el tema de la percepción, es decir, cómo nuestro cerebro visualiza lo que vemos, pasamos a comentar algunos de los procesos mentales de representación visual que se consideran comunes a toda la sociedad.

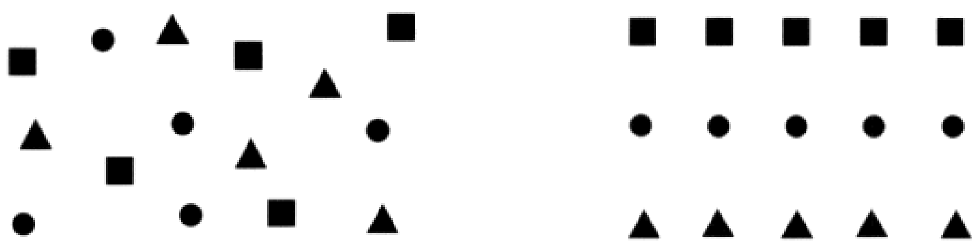
Reintegración.

Consiste en completar imágenes incompletas mediante simetrías o para dotarlas de continuidad o regularidad. Por ejemplo, en la siguiente imagen podemos ver un cuadrado, un segmento y la palabra geometría aunque ninguna de las tres esté completa.



Dimensión máxima de atención.

Está relacionada con la cantidad de información que se puede percibir en un tiempo determinado. Si a alguien se le muestra rápidamente una imagen con objetos, es difícil que pueda contarlos si son más de 9. Si son objetos de menos de cuatro tipos diferentes, se pueden agrupar mentalmente para contarlos más deprisa. Y si además los objetos vienen agrupados entonces el conteo se facilita enormemente.



Fondo figura.

Normalmente percibimos la figura más nítidamente que el fondo, este último pasa a ser un elemento difuso. Sin embargo a veces al cambiar el foco de atención podemos percibir realidades diferentes, como en el siguiente ejemplo, en el que vemos, o bien figuras geométricas, o bien letras mayúsculas.

Ilusiones ópticas.

Todos hemos sido engañados por imágenes como éstas. Líneas que parecen curvarse o tener distinta longitud a la que en realidad poseen.

En el cine y en los videojuegos se utilizan continuamente efectos como estos, pero también lo hacemos en clase. Por ejemplo, si al ángulo de la izquierda le añadimos unos cuantos elementos, lo convertimos en una carretera simplemente usando las leyes de la perspectiva, y pasan de ser dos líneas secantes a ser dos líneas paralelas, que también se cortan pero en el infinito.

Todos estos procesos mentales de visualización existen, están en el imaginario colectivo, y si se usan bien pueden ser muy provechosos, tanto para promocionar bienes y servicios con fines comerciales, como para enseñar conceptos. Los medios audiovisuales facilitan la estimulación visual y sonora del individuo, pero al final generan la necesidad de dicha estimulación y pueden convertir a las personas en entes pasivos, al disminuir los tiempos para la asimilación de toda la información con la que nos bombardean a razón de menos de dos segundos por plano. Con estos ritmos trepidantes resulta muy difícil una integración reflexiva de lo que nos están contando y se recortan las actitudes críticas y los procesos de abstracción.

En la televisión, la información se presenta fragmentada, en planos muy cortos como acabamos de decir. Sobre todo en los anuncios, aunque cada vez los programas se parecen más a la publicidad. Además el espectador en lugar de luchar contra esta fragmentación la potencia con el *zapping*. La información aparece de manera inconexa y descontextualizada. Es una información trivializada y saturada. No se produce la abstracción. La cultura impresa privilegia el análisis y la reflexión, mientras que la televisión exige al espectador una apertura sensitiva que impide la reflexión y lo convierten en un ser pasivo y no crítico.

Los videojuegos difieren de la televisión en el hecho de que el espectador ha de tener una actitud activa. Se convierte en el protagonista y debe de manejar la información para tomar decisiones. A veces se trata de enormes cantidades de información con la que a algunos adultos les resultaría imposible trabajar. Es decir, que los jóvenes desarrollan destrezas y habilidades difíciles de alcanzar para un adulto.

Captura de pantalla de *Metroid prime II: Echoes* en el que podemos ver: orientación respecto a una brújula, arma equipada, indicador de vida y número de vidas, situación en la sala con pequeño esquema en tres dimensiones, situación dentro del mapa general, nombre del enemigo y cantidad de vida, a lo que hay que añadir todo lo que se ve fuera del casco del personaje que es en realidad la parte importante del conjunto.

Todo ocurre muy rápido y hay muchas variables alrededor del jugador. El esfuerzo mental que realiza el joven es bastante superior al necesario para seguir una clase de matemáticas, y las habilidades que se desarrolla son de un tipo diferente. De manera que tanto las representaciones de la realidad que aparecen en el videojuego, como las destrezas que éste genera, contrastan fuertemente con lo que el alumno se encuentra luego en la escuela. Durante muchos años desde sus inicios, los videojuegos obligaban al jugador hispanohablante a aprender inglés, siempre que quisiera enterarse de la historia o saber qué hacer para concluir el juego. Ahora están casi todos traducidos de manera que este aprendizaje lingüístico ha desaparecido.

Los videojuegos están ahí y los jóvenes van a seguir utilizándolos. Nuestra labor no es luchar contra esta realidad sino tratar de encauzarla hacia fines más provechosos. Por ejemplo, dominando el programa *Geogebra* se puede construir un triángulo y apreciar muchas de sus cualidades para luego, desplazando uno de sus vértices, observar que muchas de estas propiedades no varían para los distintos triángulos que vamos mostrando, por ejemplo la alineación de baricentro, circuncentro y ortocentro en la *Recta de Euler*.

Los medios audiovisuales tienen muchas ventajas en el instituto. Acercan la realidad al aula. Permiten elaborar representaciones mentales del objeto representado. Ofrecen una gradación del proceso de abstracción acorde a la evolución intelectual del alumno. También permiten la apreciación de fenómenos difícilmente accesibles en el aula mediante simulaciones o animaciones. Aprovechemos los medios audiovisuales, cuantos más recursos tengamos mejor podremos seleccionar los más adecuados a nuestros fines.

INVESTIGACIÓN EN EL AULA: GRÁFICAS ESCALONADAS

Se ha realizado un estudio (ver bibliografía) en un aula de secundaria, concretamente con alumnos de tercer curso de la ESO. El objetivo del estudio era ver si sabían trabajar con gráficas sencillas de funciones escalonadas. Se les plantearon dos situaciones diferentes y en el primer caso se les ofreció una lista de gráficas, mientras que en el segundo se les pidió que elaborasen la suya propia. Analizando los resultados se puede aprender sobre lo que representa para los alumnos el continuo y el discreto, si son capaces de entender las coordenadas cartesianas y los conceptos de variable dependiente y variable independiente, entre otras cosas.

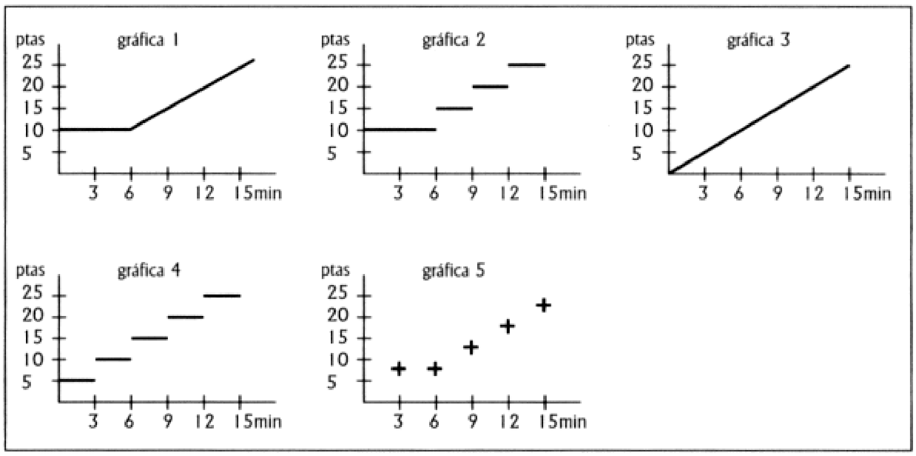
Hoy en día se le da mucha importancia a la representación gráfica de las funciones. Esto ocurre desde el ámbito institucional, y podemos ver que en los currículos de este siglo se prioriza el lenguaje gráfico y en especial las gráficas cartesianas. Sin embargo, parece que no lo explicamos bien porque los estudiantes tienen bastantes problemas para entender correctamente de que manera funciona el plano cartesiano.

En este estudio se han centrado en la concepción que tienen los chicos de 14-15 años sobre gráficas cartesianas (de puntos, escalonadas, continuas formadas por una recta, por varios segmentos y/o por curvas…) y su relación con aquello que representan. Resulta curioso observar cómo, los alumnos, para comparar situación y gráfica a veces modifican una de las dos para que la comparación resulte coherente.

Es interesante ver que para muchos alumnos la dependencia entre la variable dependiente y la variable independiente se limita a las parejas de valores que representan puntos concretos de la gráfica. Para ellos muchas veces la línea es una manera de unir los puntos, pero no se dan cuenta de que cada línea contiene infinitos puntos que también son pares de valores. Tengamos en cuenta que el estudio es anterior al 2002 y aún no existía el euro.

La primera situación es la siguiente: Para realizar una llamada telefónica es necesario introducir 10 pesetas. Esto nos permite hablar durante 6 minutos. A continuación podemos ir introduciendo en la máquina monedas de 5 pesetas y cada moneda nos permite mantener la conexión durante tres minutos adicionales. La cabina no acepta monedas más pequeñas que un duro.

A continuación se pide a los alumnos que elijan entre las siguientes cinco gráficas.



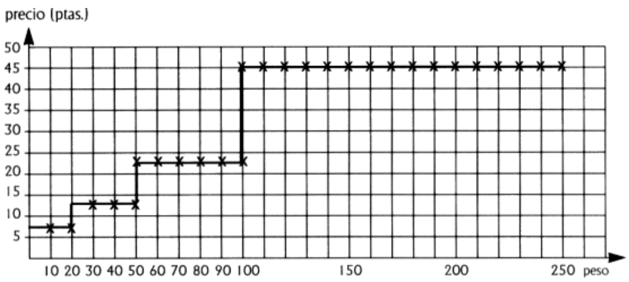
Hubo una gran diversidad en la elección. Exceptuando la gráfica 4 todas las demás fueron señaladas como la preferida por algún alumno. También aparecieron respuestas inesperadas como “la 2 y la 5”, “todas” o “ninguna”. La número 1 fue escogida por un tercio de los alumnos, la 1 y la 3 por un quinto cada una y la 2 que, como sabemos, es la correcta, por tan solo uno de cada siete.

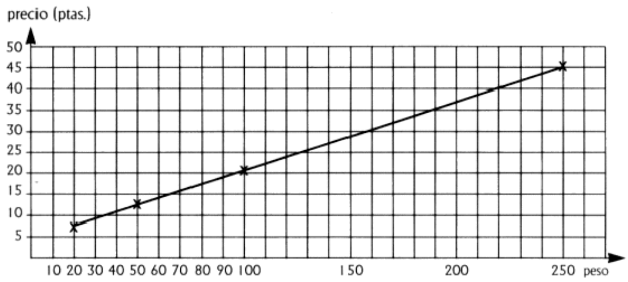
Parece ser que, al seleccionar una situación, los alumnos escogen las características del gráfico que les parecen más relevantes para compararlas con su interpretación de la situación. A veces no es posible tal comparación y lo que hacen es comparar las diversas gráficas entre sí.

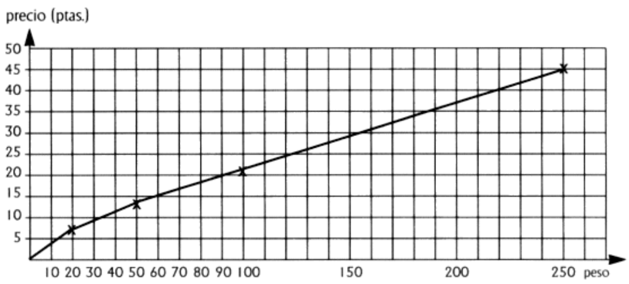
De este modo se fijan en los puntos matemáticos más relevantes (6, 10) (9, 15) (12, 20) que aparecen en todas las gráficas y por lo tanto no deberían de ser importantes a la hora de elegir una concreta, pero por sus comentarios sí lo son, y les lleva a elegir la gráfica 5. También aprecian la situación inicial por la que rechazan las gráficas 3 y 4 pues está claro que hacen falta 10 *ptas*. para comenzar la llamada. Sobre la horizontalidad/oblicuidad de los segmentos muy pocos son capaces de explicar que el horizontal indica que para un mismo coste hay diversos periodos de tiempo. En general creen que la raya horizontal se refiere al coste del tiempo más elevado del intervalo exclusivamente. Los saltos en la gráfica no son capaces de explicarlos y tienden a preferir las funciones continuas.

La situación 2 en la que se propone al alumno, como dijimos, dibujar la gráfica, consiste en lo siguiente: enviar una carta de menos de 20 gramos cuesta 7 pesetas; enviar más de 20 y hasta 50 gramos, 14 pesetas; enviar más de 50 y hasta 150 gramos, 22 pesetas; y más de 100 gramos y hasta 250 gramos, 45 pesetas.

Las distintas gráficas más significativas dibujadas por los alumnos fueron las siguientes:







El 72% de los alumnos hicieron gráficas continuas y el 50% estrictamente crecientes. Más del 75% marcaron un número finito de puntos al margen de la línea trazada posteriormente.

Hubo gráficas escalonadas (segmentos horizontales) sólo un 10%, y gráficas en escalera (segmentos horizontales y verticales) 23%. Las primeras, que son las que más correctamente describen la gráfica, fueron explicadas de manera correcta respecto a lo que ocurre en los tramos horizontales, pero no en los saltos. También hay gráficas con segmentos horizontales y oblicuos mezclados, son curiosas porque muestran una discretización en la dependencia, pero conservan los segmentos oblicuos para explicar con continuidad el cambio de precios. Los alumnos que hicieron gráficas estrictamente crecientes argumentaron, llegando a modificar la situación, para que la función fuera estrictamente creciente. Si hicieron una sola línea recta, como ésta no pasa exactamente por todos los puntos, defendieron que los puntos no estaban bien dibujados del todo.

Las conclusiones que se pueden extraer son las siguientes:

- La mayoría de alumnos discretiza la situación al dar importancia solo a los puntos que da el problema pero sin embargo dibuja una gráfica continua. Todo mal.

- Lo que produce esta discretización es el hecho de que en las situaciones la variable dependiente es discreta mientras que la independiente es continua. Los alumnos entonces tienden a discretizar también la variable independiente, ya que consideran que una dependencia entre dos variables debe ser biyectiva.

- Cuando la ley que establece la relación entre las dos variables es muy sencilla, como en el caso de la cabina, que es de tipo lineal, solo se tienen en cuenta los valores enunciados en el ejercicio. Sin embargo, si la ley es más compleja, se piensa también en el resto de valores posibles.

- Para las gráficas con trazados oblicuos pueden ocurrir tres cosas:

1. Que la gráfica complete y modifique la descripción verbal, al surgir valores intermedios entre los pares de valores relevantes.

2. Que la gráfica exprese la relación de dependencia que se daba en la situación y no haya problemas de incoherencia.

3. Que la gráfica altere la relación de dependencia, en cuyo caso el alumno se plantea que no es una buena representación.

- Las gráficas con trazados horizontales son entendidas o bien como que para cada valor de la variable dependiente hay varios valores de la variable independiente (bien), o bien como que el único valor a tener en cuenta es el que aparece en la situación, esto es el valor relevante (mal).

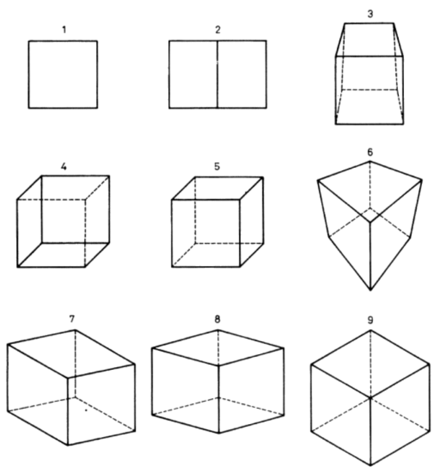
- La preferencia por las funciones continuas hace que muchos alumnos transformen sus gráficas escalonadas en escaleras y otros simplemente no comenten las discontinuidades.

- Por último aparecen gráficas mixtas con tramos horizontales con aumentos discretizados, y tramos oblicuos que permiten, según los alumnos que las realizan “mostrar los aumentos de manera progresiva.

De todas estas conclusiones se deduce que hace falta hacer más hincapié en la enseñanza mediante gráficos cartesianos para conseguir que nuestros alumnos se familiaricen con su uso y sus características.

REPRESENTACIÓN PLANA DE FIGURAS ESPACIALES

Si se nos muestran las siguientes figuras y se nos pregunta cuál es la que identificamos más claramente con un cubo, la mayoría de nosotros escogeríamos la 4 o la 5.



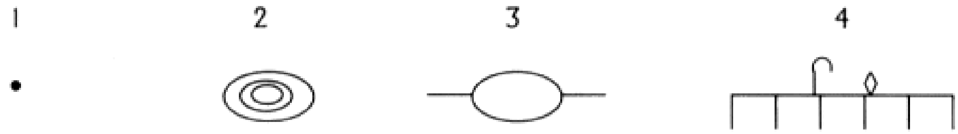
Es decir, la perspectiva caballera. Sin embargo lo que nuestro cerebro percibe al ver un cubo tridimensional se parece más a los ejemplos 3 y 6, que son perspectivas cónicas.

En cualquier caso, se utilice el sistema que se utilice (cónica, caballera, axonométrica, caballera frontal, plantas, alzados…) es necesario introducir unas reglas del juego para que los alumnos aprendan a interpretar y dibujar en el sistema deseado.

Primeramente es necesario un análisis para ver de qué manera el estudiante es capaz de representar el espacio en el plano. En matemáticas estamos utilizando constantemente sistemas de representación con los que no tienen por qué estar familiarizados. Si los conocen es una gran ventaja, porque avanzarán más deprisa, pero si no, es posible que tengan errores de comprensión, que se podrían evitar dedicando un poco de tiempo a explicar los distintos métodos para plasmar el espacio en el plano y realizar ejercicios en esa línea.

Se puede trabajar tanto con objetos tridimensionales, como maquetas o cartulinas plegadas, como con objetos bidimensionales mediante fotos o dibujos. Sin duda lo mejor es ir combinando todas las opciones y aprovechar la información gráfica que aparece en el libro de texto.

A modo de juego se pueden introducir los siguientes dibujos que representan: Cien mil kilómetros de alambre vistos de punta, un huevo frito o cocido, un mexicano en bicicleta y un obispo detrás de una valla.

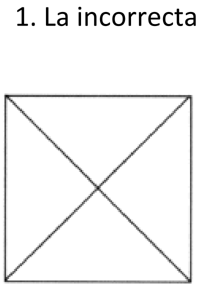


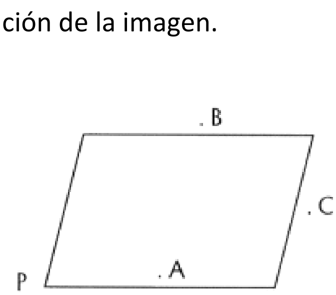
De esta manera los alumnos verán que las imágenes no siempre son lo que parecen, o en este ejemplo concreto, más bien que no siempre parecen lo que son y que las cosas cambian cuando se ven desde distintos puntos de vista.

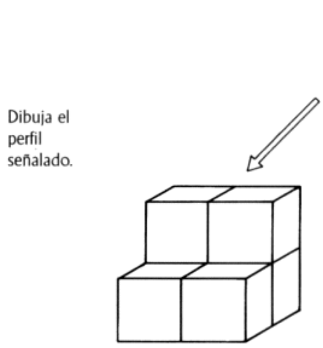
Hoy en día, en parte gracias a los videojuegos pero también por el fácil acceso a programas de diseño en tres dimensiones para ordenador, los chavales llegan con una gran cantidad de ideas preconcebidas sobre la representación de objetos tridimensionales. Generalmente es un hecho positivo y tenemos que aprovechar este conocimiento autodidacta utilizando dichos programas en el aula. A veces, sin embargo, cuesta más crearles el conflicto cognitivo para que ellos desarrollen el nuevo conocimiento.

Los cuatro problemas más comunes son:

1. La incorrecta interpretación de la imagen.



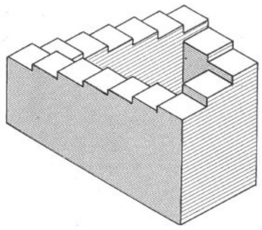


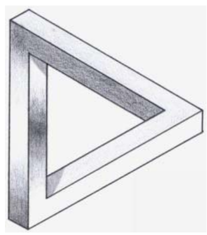


La figura de la izquierda puede ser percibida como una pirámide, o como un agujero en forma de pirámide o como un octaedro. En la imagen del central cualquiera de los puntos *A, B* y *C* podrían estar contenidos en el plano *P*, el cual es infinito aunque se dibuje mediante un romboide finito. En el caso de la figura de la derecha, algunos alumnos podrían interpretar que les pedimos dibujar la planta de la figura en vez del alzado posterior.

2. Problemas al pasar del plano al espacio. Muchas veces los estudiantes no entienden el problema o no son capaces de visualizar el espacio en el plano. También puede ser que elijan un sistema de representación incorrecto o que el que elijan lo utilicen mal.

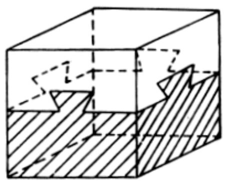
3. Figuras imposibles. Son figuras que pueden representarse en el plano pero que al pensar en ellas en espacio resultan incomprensibles. Puede ser un buen punto de partida para demostrar que cuando hacemos un dibujo estamos haciendo eso precisamente, dibujar en dos dimensiones, y que el resultado podrá ser una representación de la realidad pero puede también no serlo. Ejemplos de esto serían la escalera que siempre sube o el prisma que se retuerce de manera incomprensible.



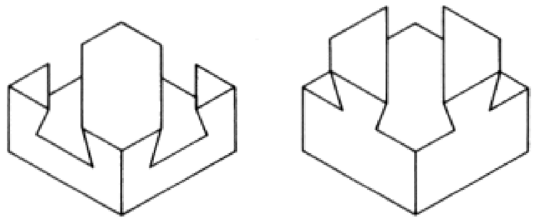


4. Ilusiones ópticas. Son imágenes engañosas a causa de la luz, del ángulo de visión o del modo en que está realizado el dibujo. No tiene nada que ver con visión defectuosa o sugestión psíquica. Al igual que en las anteriores figuras imposibles, las ilusiones ópticas permiten al estudiante agudizar su perfección y tener una visión crítica respecto al material con el que trabaja.

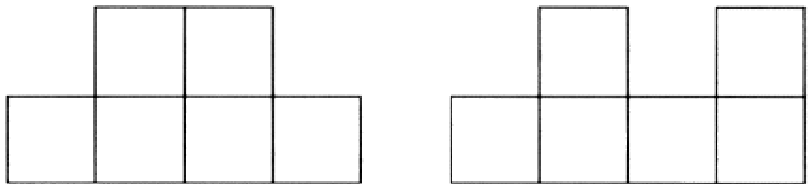
A continuación vamos a plantear una serie de ejercicios con los que se podría trabajar en clase. Se muestra la siguiente imagen y se dice que está compuesta tan solo de dos piezas de madera, la superior y la inferior, se pide que se explique cómo son por dentro las piezas y de qué manera han sido ensambladas.



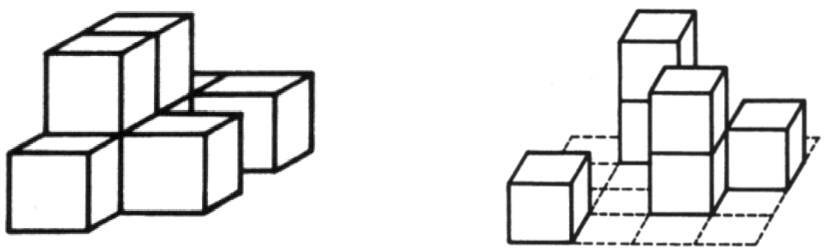
Al principio, el estudiante se bloquea, pero si se le deja el tiempo suficiente en clase o en casa será capaz probablemente de dar con la solución. Las mejores perspectivas para trabajar en este ejercicio son la axonométrica y la caballera. También se puede realizar una maqueta con madera o corcho blanco. Además explicaremos el ensamble en forma de cola de milano.



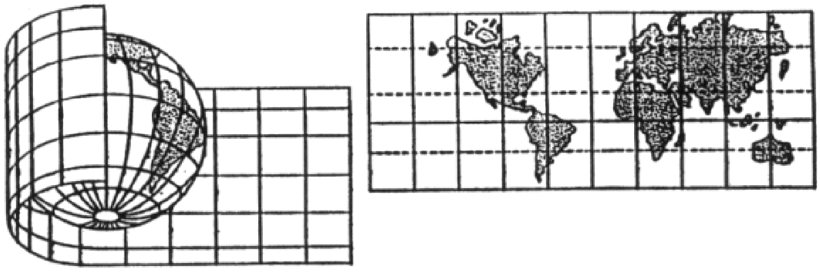
Otro ejercicio consiste en mostrarles las siguientes dos vistas.



Se les dice que pertenecen a la misma figura hecha con cubos y se les pide que la construyan utilizando el menor número de cubos posible. Es posible pedírselo sin más, con papel y lápiz, aunque tal vez sea demasiado exigente y una opción más sencilla es dejarles cubos para que construyan en el espacio. De este modo pueden crear la figura con el máximo número de cubos (20) y luego ir bajando hasta el mínimo (6).



Un ejercicio muy didáctico consiste en dibujar el planeta en el que vivimos. Podemos buscar modelos de distintos mapamundis y copiarlos. Es interesante ver cómo cambian los continentes al pasar de la superficie esférica a la superficie plana. Otro aspecto notable es ver que se da mucha más importancia al hemisferio norte que al sur.



La percepción influye en los distintos niveles de representación, cuanta más cultura tengamos veremos la realidad de una manera más rica. Por esto nos parece importante realizar ejercicios de percepción sensorial en clase.

OPTIMIZACIÓN

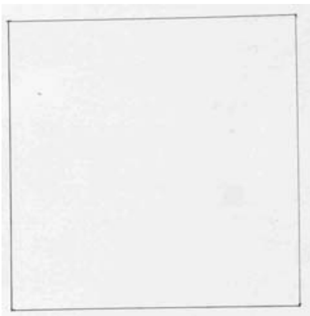
Normalmente para optimizar resultados se utilizan las derivadas, que es un método que funciona perfectamente pero resulta muy poco intuitivo. Con él aprendemos a hacer las cuentas y a utilizar el algoritmo, pero no tenemos muy claro qué es lo que estamos haciendo exactamente. Lo mejor es combinar diversos métodos, el geométrico, el gráfico y el analítico. Contamos con la ayuda de las calculadoras gráficas. Además, en estos tiempos modernos no es necesario comprarse una calculadora gráfica para disponer de sus servicios. Basta con poseer un *Smartphone* (que por desgracia es algo habitual en niños de secundaria) para tener al alcance de la mano la representación gráfica de cualquier función. Nos descargamos la aplicación adecuada y ya podemos trabajar. Por un lado los alumnos estarán entusiasmados de poder trabajar con su teléfono inteligente, pero hay que tener cuidado de que lo utilicen realmente para lo que se les pide. Recuerdo el nacimiento de internet y cómo cuando íbamos a las aulas con ordenadores, eran pocos los que prestaban atención al profesor y muchos los que navegaban y "aprendían" por su cuenta. Es de suponer que nosotros, profesores del siglo XXI, seremos capaces de detectar y evitar este tipo de engaños.

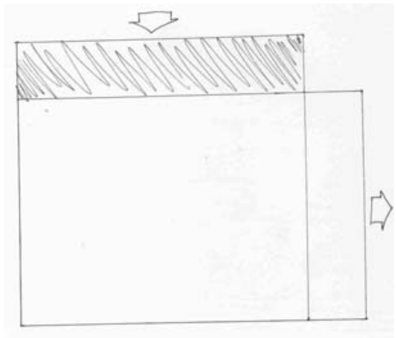
Teniendo la calculadora gráfica la parte matemática consiste en encontrar la fórmula adecuada, esto corre a cargo del alumno, mientras que la parte técnica la realiza la calculadora.

El profesor Martin Kindt realizó una serie de experiencias de optimización con la calculadora gráfica en cursos de bachillerato. Al principio los alumnos se sentían un poco perdidos y superados, pero pronto se habituaron a esta nueva manera de trabajar, y ya no aceptaban una sola solución para los ejercicios o una sola manera de resolverlos. Aprendieron a ir por múltiples caminos y a entender mejor los problemas.

El primer problema fue uno de los postulados por Euclides. De todos los rectángulos posibles ¿Cuál es el que tiene área máxima? Es un problema que se puede estudiar desde un punto de vista algebraico, geométrico o gráfico-numérico.

Partiendo de un caso particular en el que el perímetro sea 40 cm, podemos resolverlo muy fácilmente de manera geométrica. Simplemente dibujamos un Cuadrado de 10x10, esto es, de 40 cm de perímetro, y probamos a restarle una franja de dos centímetros por un lado y a sumarle una franja de dos centímetros por el otro, de modo que el perímetro se mantiene constante.





Se ve claramente que la franja eliminada, en este caso 2x10 cm, es mayor que la añadida de 2x8 cm. Y esto siempre va a ser así cuando partamos de un cuadrado, de modo que el rectángulo de área máxima con perímetro dado es el cuadrado.

Buscando soluciones algebraicas tenemos una parecida a la anterior, intuitiva, tanteando con diferentes combinaciones de longitudes, y una más formal. La primera consiste en partir del cuadrado e ir modificando los lados.

$$10 \times 10 = 100$$

$$11 \times 9 = 99$$

$$12 \times 8 = 96$$

$$13 \times 7 = 91$$

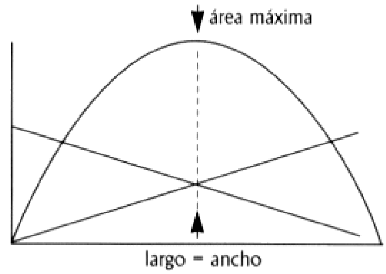
Etc

Parece evidente que el cuadrado es la mejor solución, y que cuanto más nos alejemos de él menor será el área del rectángulo. La solución formal consiste en llamar a los lados $10 + a$ y $10 - a$ de tal manera que el perímetro valdría $(10 + a) \times (10 - a) = 100 - 2a$ que alcanza el valor máximo cuando $a = 0$. De aquí deducimos que el equivalente algebraico del teorema de Euclides es que si $p + q$ es constante, $p \times q$ es máximo si $p = q$.

Pasemos ahora al método numérico-gráfico utilizando la calculadora gráfica o la aplicación del teléfono inteligente. Tenemos un rectángulo en el que base más altura nos da ocho. Entonces, si la base mide x la altura será $8 - x$ y el área valdrá $x(8 - x)$. Podemos pedir a los alumnos que dibujen tres funciones en la misma gráfica con cada uno de estos valores.

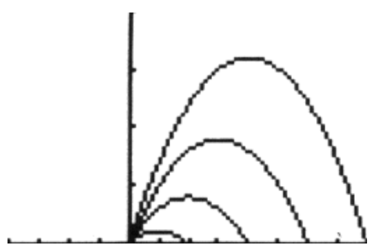
$$y_1 = x \qquad y_2 = 8 - x \qquad y_3 = x(8 - x)$$

A continuación se les pedirá que analicen la gráfica y saquen conclusiones.



Se puede apreciar que el área máxima de valor 16 coincide con el punto en el que la base y la altura del rectángulo también coinciden. Este es un primer paso para la traducción de un problema en fórmulas. No es especialmente sencillo pues los estudiantes tienen que ser capaces de traducir el área del rectángulo de semiperímetro 8 a la ecuación *x(8 - x)*, leer el máximo gráficamente y comprobar que las dimensiones son iguales en el caso óptimo.

Para generalizar se propone realizar la gráfica *y = x(a - x)* para distintos valores de *a*. un alumno ha obtenido la siguiente imagen dando a los valores 2, 4, 6, 8.



Entonces se le pide que obtenga la ecuación de la curva que pasa por todos los vértices. Un alumno de los que participaron en la investigación de Martin Kindt, en primer lugar dijo que los vértices estaban unidos por una línea recta, pero se le pidió que lo comprobara y resolvió que no se trataba de una recta. Luego el profesor le pidió obtener las coordenadas de los vértices. El alumno murmuró "*4, 16, quizás es una parábola pero tendría que ir arriba a la izquierda también*" entonces introduce x^2 y dice "*sí*". Luego el profesor le felicitó y le pidió que lo probara para un caso general. ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de $y = x(a - x)$?. Finalmente se concluye que el vértice tiene como coordenadas $\left(\frac{a}{2}, \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)$ de modo que $y_v = x_v{}^2$ lo cual es ciertamente una parábola. Todo esto puede resultar un tanto abstracto, probablemente porque lo es. Para que los alumnos no se pierdan debemos regresar al contexto. El rectángulo máximo es el cuadrado y la función que pasa por las áreas máximas o áreas de cuadrado es la parábola $área = lado^2$

Se puede profundizar más en todo esto haciendo una variación del teorema de Euclides y pasando al estudio del paralelepípedo de volumen máximo y perímetro definido. Supongamos que alto + ancho + largo suman 12 *cm*. Una primera solución intuitiva sería decir que los tres lados midan lo mismo, $a = b = c = \frac{12}{3} = 4cm$, lo cual es correcto, pero no es suficiente pues buscamos una demostración. La prueba geométrica no es tan sencilla como la de los rectángulos de perímetro constante. En el caso del método algebraico la cosa se complica también al haber una variable más. Por ejemplo, si suponemos $a = 3$, ¿Cuánto han de valer b y c para que el producto de los tres sea máximo? La respuesta es inmediata, $b = c = 4.5$

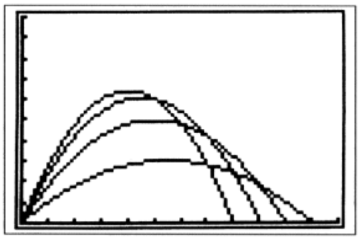
Entonces podemos hacer una lista dando valores a a y calcular el máximo para cada valor, pero la lista no puede ser exhaustiva, no podemos coger los infinitos valores entre 0 y 12 que podría tomar a.

Para resolverlo podemos usar la calculadora gráfica y obtener una función. Pero primero hay que ver que las opciones antes enunciadas corresponden a una familia de funciones del tipo:

$$y_1 = 1 \times x \times (11 - x)$$

$$y_2 = 2 \times x \times (10 - x)$$

a=	y=	x_V=	y_V=
1	$1 \cdot x \cdot (11-x)$	5,5	$1 \cdot 5{,}5^2 = 30{,}25$
2	$2 \cdot x \cdot (10-x)$	5	$2 \cdot 5^2 = 50$
"	"	"	"



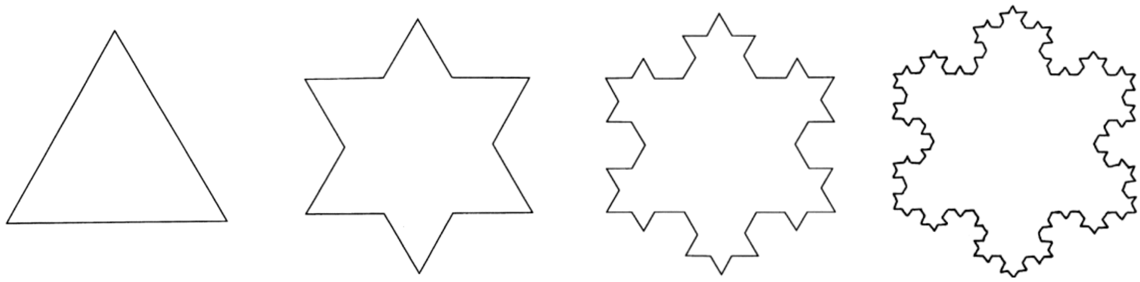
Por el sistema de prueba error el alumno acabará dándose cuenta de que no se trata de una parábola, sino de una ecuación de tercer grado. Hay que estudiar las coordenadas de los vértices de las parábolas. Mirando la tabla, se llega a la conclusión de que $a + 2x_v = 12$, pero también según la tabla, $y_v = a \times {x_v}^2$ luego $y_v = (12 - 2x_v){x_v}^2 = 12{x_v}^2 - 2{x_v}^3$, y esta es la curva de los vértices. El máximo de los máximos se obtiene derivándola: $y = 12x^2 - 2x^3$, $y' = 24x - 6x^2$ cuyo valor máximo es 64 para $x = 4$.

En conclusión, el enfoque gráfico-numérico permite dar nuevos impulsos a temas antiguos de la matemática. Gracias a la calculadora se levantan las barreras de tedioso cálculo de expresiones analíticas y se estimula la investigación gráfica. Al no ser muchos de los resultados exactos, el alumno se siente estimulado hacia la investigación y la obtención de resultados de carácter general. La calculadora desarrolla la capacidad crítica hacia los resultados y la posibilidad de resolver problemas de una manera más flexible.

FRACTALES

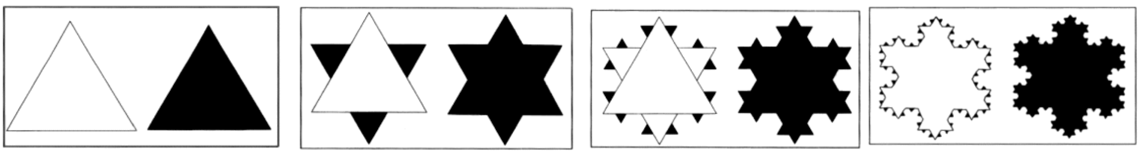
En la educación secundaria se plantean problemas de geometría en dos y tres dimensiones, sobre polígonos y poliedros respectivamente. Vamos a calcular el área de un triángulo equilátero al que realizamos un cambio iterativo en sus lados, del mismo modo se obtendrá el volumen de un tetraedro al que vamos modificando hasta el infinito el tamaño de sus caras. Gracias a los resultados obtenidos podremos acercarnos al concepto de fractal en la educación secundaria.

A partir de un triángulo equilátero podemos obtener un copo de nieve fractal de la siguiente manera: primero dividimos la longitud de cada lado en tres segmentos, luego eliminamos el segmento central y colocamos en su lugar los dos lados de un triángulo equilátero que apunte hacia fuera del que el lado eliminado sería el tercer lado. De este modo el perímetro del triángulo se multiplica por $\frac{4}{3}$. Si repetimos la operación o iteramos, vemos que en cada iteración el perímetro se multiplica por $\frac{4}{3}$, y tras n iteraciones tendremos una longitud de $P \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$, siendo *P* el perímetro inicial. Podemos ver a medida que *n* toma valores mayores también el perímetro aumenta.



Sencillamente es una razón geométrica cuyo primer término es el perímetro del triángulo y la razón es $\frac{4}{3}$, que al ser mayor que 1 hace que la serie diverja.

Para ver lo que ocurre con el área tenemos que darnos cuenta de que en cada iteración le vamos a sumar a lo que teníamos, una serie de triángulos (tantos como lados teníamos) con un área igual a $\left(\frac{1}{3^n}\right)^2$.



Área inicial del triángulo $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Área tras la primera iteración $\frac{\sqrt{3}}{4}[1 + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2] = \frac{\sqrt{3}}{4}[1 + \frac{3}{9} = 1 + \frac{1}{3}]$.

Área tras la segunda iteración $\frac{\sqrt{3}}{4}[1 + \frac{1}{3} + 12 \times \left(\frac{1}{9}\right)^2] = \frac{\sqrt{3}}{4}[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{9}]$

Área tras la tercera iteración $\frac{\sqrt{3}}{4}[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} + 48 \times \left(\frac{1}{27}\right)^2] = \frac{\sqrt{3}}{4}[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{9}\right)^2]$

Área tras la iteración i-ésima $\frac{\sqrt{3}}{4}[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{9}\right)^i]$

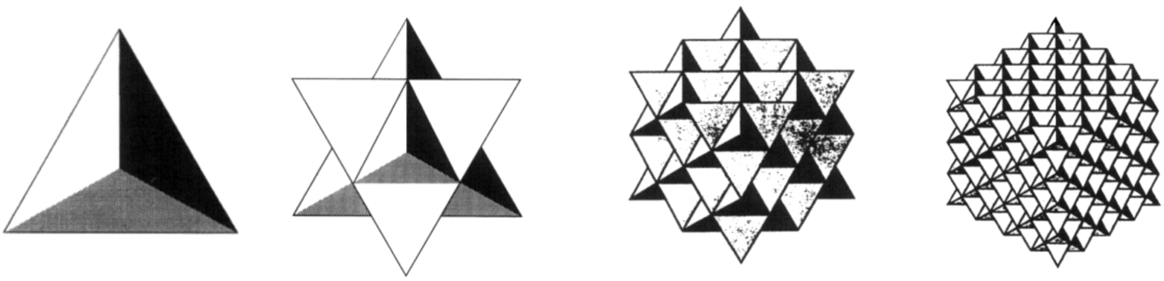
Si observamos la expresión que hay en el corchete, a excepción del 1, se trata de la sucesión de los *i* primeros términos de la serie cuyo primer término es $\frac{1}{3}$ y cuya razón es $\frac{4}{9}$, que al ser menor que uno hace que la serie sea convergente y que se pueda sumar.

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left[1 + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{4}{9}}\right] = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

En conclusión el perímetro tiende hacia un valor infinito mientras que el área tiende hacia un valor finito.

En la enseñanza de la geometría siempre es interesante trasladar los problemas del plano al espacio. En este caso se trataría de obtener un copo de nieve tridimensional partiendo de un tetraedro, en lugar de comenzar con el triángulo equilátero. Así pues, si cogemos una cara del tetraedro, que es un triángulo equilátero, y unimos los puntos medios de sus lados, obtenemos cuatro triángulos más pequeños. A continuación construimos un tetraedro sobre la cara central de estas cuatro y eliminamos la que queda entre el tetraedro primero y el segundo más pequeño, ya que esta cara deja de ser exterior y por lo tanto no forma parte de la superficie del volumen. Es decir que en cada paso le estamos añadiendo a cada cara triangular un volumen de un tetraedro con una cara que es en superficie un cuarto de la cara original, y dos superficies de caras que suponen la mitad de una cara original (le añadimos tres caras y le restamos una).

Luego repetimos el proceso *ad infinitum*. En las imágenes podemos ver tres iteraciones.



Visto lo visto en la versión en dos dimensiones cabe esperar que aquí la superficie tienda hacia el infinito y el volumen no. Veámoslo.

Para calcular el área debemos calcular el número de caras de cada iteración n_i, el cual será 4 para el tetraedro inicial, 6×4 para la primera iteración, $6^2 \times 4$ para la segunda iteración y en general $6^i \times 4$ para la *i-ésima* iteración. A continuación tenemos que multiplicar el número de caras por el área de cada cara. Como el lado se va reduciendo a la mitad, habrá que multiplicar el área de la cara anterior por el factor $\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

<u>Primera iteración</u>:

Área de la cara $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$

Superficie del objeto $(6 \times 4)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\right] = \sqrt{3} \times \frac{3}{2}$

<u>Segunda iteración</u>:

Área de la cara $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$

Superficie del objeto $(6^2 \times 4)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\right] = \sqrt{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2$

<u>Iteración i-ésima</u>:

Área de la cara $\left(\frac{1}{2}\right)^{2i} \times \frac{\sqrt{3}}{4}$

Superficie del objeto $\left(6^i \times 4\right)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2i} \times \frac{\sqrt{3}}{4}\right] = \sqrt{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^i$

Se observa que es una serie geométrica cuyo primer término es $\frac{\sqrt{3}}{4}$ y cuya razón es $\frac{3}{2}$ que al ser mayor que la unidad, hace que la serie sea divergente. El área del objeto tiende a infinito tras infinitas iteraciones.

En el caso del volumen, con cada iteración estamos sumando al volumen que teníamos antes, un número de tetraedros igual al número de caras anterior y que cada uno de ellos tiene una arista mitad de la del anterior. Si la arista de un tetraedro disminuye en factor $\frac{1}{2}$ su volumen lo hace en factor $\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

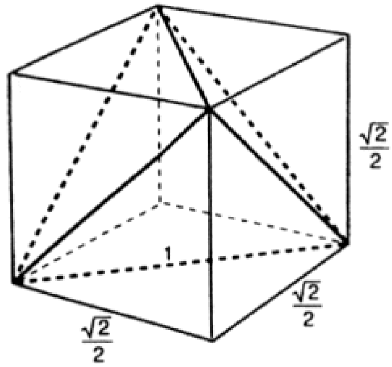
Operando llegamos a la siguiente expresión:

$$\frac{\sqrt{2}}{12}\left\{1 + \frac{1}{2}\left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right]\right\}$$

Si n tiende a infinito la sucesión dentro del corchete con primer término 1 y razón $\frac{3}{4}$ se puede sumar ya que es convergente porque la razón es menor que la unidad. El resultado es:

$$\frac{\sqrt{2}}{12}\left\{1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 - \frac{3}{4}}\right]\right\} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Se demuestra que el volumen del copo 3D es finito. Una curiosidad que se aprecia en el siguiente gráfico es que el volumen del objeto coincide con el del cubo en el cual se puede inscribir el prisma inicial. Recordemos que aquel tenía lado 1 así que el cubo tendrá de lado $\frac{\sqrt{2}}{2}$ que al elevarlo al cubo nos da $\frac{\sqrt{2}}{4}$.



La mejor manera para introducir el estudio de los fractales en un curso de secundaria es una mezcla entre matemáticas y dibujo. Lo primero será realizar algún tipo de presentación para mostrar que existen figuras en las que al hacer un zoom vuelven a aparecer las figuras iniciales, se puede mostrar un romanesco o un *Conjunto de Mandelbrot* que podamos ampliar.

A continuación se dividirá a los alumnos en grupos de tres o de cuatro, se repartirán folios y material de dibujo y se les pedirá a que tracen una línea de veintisiete centímetros. Se les mandará borrar los nueve centímetros centrales y trazar con el compás los dos lados del triángulo equilátero que se apoyaría en el segmento que acaban de borrar. Luego se solicitará que realicen dos iteraciones más, pasando por lados de tres y un centímetro respectivamente.

Ahora tienen que recortar sus líneas fractales y coger las tres del grupo que mejor hayan quedado para formar un triángulo.

Una vez fabricados los copos se tratará de obtener los perímetros y las áreas de cada iteración. Lo mejor es dejar que lo hagan ellos solos y vaya saliendo un portavoz de cada grupo informando sobre el procedimiento. Deducirán con rapidez que cada área es $\frac{1}{9}$ de la calculada anteriormente y no las calcularán una por una.

Ahora separamos los grupos y pedimos que trabajen individualmente para encontrar una fórmula que sirva para obtener el perímetro y el área de un copo en la iteración *i-ésima*.

Para concluir, el profesor puede explicar la divergencia de la sucesión de perímetros y la convergencia de la sucesión de áreas.

También se puede dedicar un tiempo a jugar en el aula de informática con ciertos programas que permiten la creación de un fractal introduciendo una serie de parámetros. En principio, basta con que los estudiantes vean los infinitos resultados que ofrece la teoría de fractales, y la belleza de las imágenes creadas. Se les puede comentar que aquello que están haciendo sea probablemente único. Tal vez los parámetros introducidos en el ordenador sean complicados de explicar, pero solo estamos intentando conseguir que adquieran una idea intuitiva del tema. Seguramente alguno verá que al modificar tal o cual valor sucede tal o cual transformación en el dibujo que aparece en la pantalla de su ordenador.

MEDIOS VISUALES EN GEOMETRÍA

Muchas veces se enseñan conceptos mediante modelos concretos que pueden hacer que el alumno obtenga un aprendizaje restringido. A veces se dan definiciones diferentes para un mismo objeto matemático. Por ejemplo, un paralelogramo se podría describir de las siguientes maneras:

- Cuadrilátero con lados paralelos dos a dos.
- Cuadrilátero con ángulos opuestos iguales.
- Cuadrilátero con diagonales que se intersecan en su punto medio.
- Cuadrilátero con una simetría central.
- Cuadrilátero con lados opuestos iguales.

Se puede demostrar que si una figura tiene una de estas propiedades, entonces tiene también todas las demás. Son definiciones que se aplican a todos los paralelogramos, si bien luego pueden existir condiciones más específicas para distinguir entre unos paralelogramos y otros. Por ejemplo, si dos ángulos contiguos son iguales entonces se trata de un rectángulo, o si las diagonales se cortan perpendicularmente estamos hablando de un rombo. Es decir, hay conceptos superiores e inferiores que dan lugar a jerarquías conceptuales. Algunas definiciones superiores que se podrían aplicar al concepto de cuadrilátero serían:

- Sucesión de rectas que no se cruzan.
- Plano que contiene esa sucesión de rectas y todos los puntos de su interior.
- Sistema de cuatro puntos en un plano.

Una manera de presentar conceptos de figuras geométricas es pedir a un alumno que describa, por ejemplo, un rombo, pero sin que sus compañeros se enteren de lo que le hemos pedido. El estudiante debe leer su definición y el resto de la clase ha de intentar dibujar lo que se les pide (evidentemente la definición no puede ir acompañada de la palabra rombo). Si algunos de los dibujos no representan un rombo, es porque tal vez han entendido mal la definición, o porque ésta es incompleta. Se puede investigar a ver que le falta al texto del alumno para llegar a la definición precisa que contenga todas las propiedades del rombo.

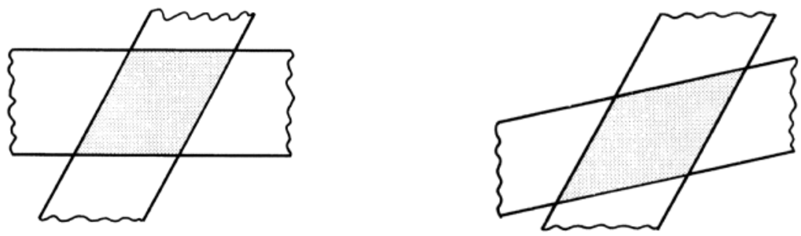
Este ejercicio también se puede hacer al revés, que sea el propio profesor el que dicta la definición y los alumnos tengan que dibujar y nombrar la figura.

Otra forma de proceder es mostrar a los alumnos un modelo visual que sirva para construir el concepto a partir de impresiones de percepción. Hay que decidir que material usamos, tal vez cartón recortado, pero puede dar el problema de que en realidad es un prisma pues tiene volumen, o cuatro cordeles, o cuatro ramitas, o sencillamente una transparencia o un dibujo en la pizarra.

Un problema que plantea este método es que ciertas partes de la definición, como la igualdad de lados, no se pueden medir en la figura, porque es imposible que los lados sean exactamente iguales. Y en el caso de que lo fueran casi a nivel atómico el proceso de medirlos tampoco sería lo suficientemente preciso como para marcar esta igualdad. El mismo problema se aplica a la igualdad de mitades de diagonal o al paralelismo de lados. Los alumnos pueden pensar al verlo dibujado de una determinada manera, que los lados inferior y superior son paralelos y los otros lados están inclinados hacia la derecha, quedándose con un concepto sesgado del asunto. Partimos de la idea de que con este método el paralelogramo mostrado es uno sin características particulares, es decir, un romboide. Otro problema de este sistema es que no se explica el hecho de que unas características del paralelogramo se derivan de otras. Puede llegar a ocurrir que algunos alumnos no identifiquen al cuadrado, rectángulo y rombo como paralelogramos.

Una forma de resolver estos problemas es entregar a los alumnos distintos modelos en cartón, o dibujos en papel con distintas configuraciones respecto al plano de muchos tipos de paralelogramos diferentes. Se puede pedir que se busque una definición que sirva para todos los objetos y que finalmente será la definición de paralelogramo.

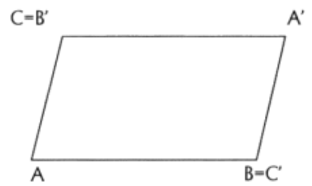
Otro método, que soluciona los anteriormente citados problemas, consiste en dar cintas de color transparentes a los alumnos y pedirles que generen intersecciones y reflexionen sobre las características de las figuras que aparecen en ellas.



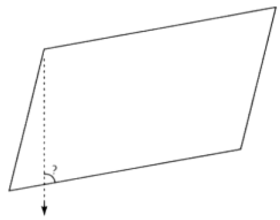
Como las cintas tienen las caras paralelas, aparecerán paralelogramos y esta es la característica común que más claramente apreciarán. También verán que tienen los lados iguales dos a dos, y lo mismo ocurre con los ángulos. Si cruzan las cintas perpendicularmente aparecerá un rectángulo, y si les damos cintas con el mismo ancho podrán obtener rombos y cuadrados. De esta manera descubrirán que estos son tipos particulares de paralelogramos.

También se les puede dar dos pares de briznas de paja de la misma longitud, con ellas podrán obtener cometas si juntan las dos briznas de un par en el mismo vértice, o paralelogramos si no lo hacen así. Aquí ocurre como con las cintas respecto a ir de lo general a lo particular.

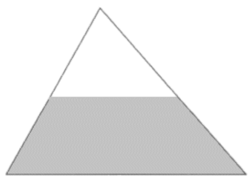
Una tercera vía sería partir de un triángulo y realizar una rotación de 180 grados respecto a uno de sus lados. Según el tipo de triángulo obtendremos uno u otro paralelogramo. En este caso será más complicado describir la definición de paralelogramo como cuadrilátero con una simetría central.



De todo lo anterior se desprende que los modelos geométricos pueden ser muy útiles a la hora de representar conceptos, y que hay muchas formas de utilizarlos. Por desgracia también pueden ser mal utilizados como en el caso de un profesor que utiliza un cordel con una plomada para representar la altura de un cuadrilátero, ya que esto solo es correcto si la base es paralela al suelo, lo que no siempre es así, por lo que se crea entre los alumnos la falsa creencia de que la altura debe de ser siempre vertical.



Otro ejemplo de un mal uso de los modelos gráficos es el de una profesora que define al trapecio como la figura que se obtiene al cortar un triángulo con una línea paralela a la base. De esta idea resulta casi imposible deducir que los paralelogramos y los rectángulos son tipos especiales de trapecios.



De modo que existen modelos mejores que otros. Podemos establecer un sistema para elaborar modelos mentalmente de manera que generen ideas apropiadas a los conceptos.

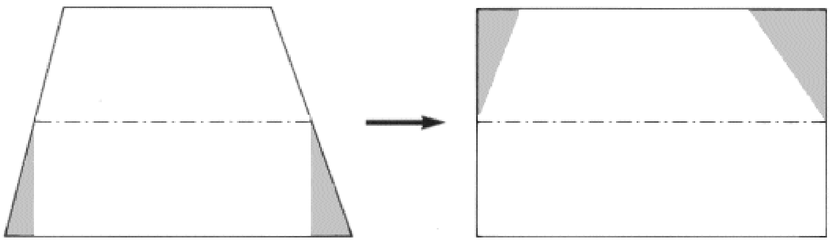
Hay que idealizar las características de los modelos, suponiendo iguales rectas o ángulos que deban serlo, aunque en la realidad material no lo sean porque es imposible desde el punto de vista de la física. Aunque el modelo sea finito hay que trascenderlo al imaginar rectas paralelas que se cortan en el infinito y conjuntos de puntos infinitos. Las definiciones que se extraen de teoremas o de la lógica se deben de transmitir lingüísticamente.

En matemáticas no se tratan conceptos empíricos representados por objetos o procesos reales, sino que hablamos de conceptos teóricos representados por procesos mentales. Podemos utilizar los modelos para fijar conceptos pero cada persona verá una cosa diferente en el modelo. Por esto es necesaria la comunicación lingüística entre los alumnos para interpretar los modelos, y entre estos y el profesor, para que éste pueda explicar lo que pretende mostrar con un determinado modelo y para que éstos le digan lo que ellos ven, y así él pueda actuar en consecuencia, quizás corrigiendo sus modelos o las construcciones mentales de sus pupilos, siempre con el fin de que el concepto sea aprendido significativamente.

INVESTIGACIÓN SOBRE TRAPECIOS

Este apartado describe ciertos hechos recogidos en un informe (ver bibliografía), basado en unas cintas de video y textos transcritos de unas clases de introducción al cálculo del área de un trapecio. Las sesiones se realizaron en un colegio alemán con alumnos de once y doce años.

Se plantea una clase para ver si los alumnos son capaces de obtener el área del trapecio mediante procedimientos visuales. Primeramente el profesor les explica o les recuerda cómo se halla el área de un rectángulo y otras fórmulas relacionadas con paralelogramos y cuadrados. A continuación se reparten diversos trapecios de papel entre los alumnos y se pide que calculen su área transformándolos en alguna figura que conozcan. Rápidamente llegan a la conclusión de que si la doblan por la mitad en el sentido de los lados paralelos del trapecio y recortan los triángulos con vértices en los extremos del doblez, se puede generar un rectángulo.



Se pidió calcular el área numéricamente y una alumna dijo que era igual a la línea media por la altura. $A_t = m \times h$

En la siguiente clase se les volvieron a entregar varios trapecios a los alumnos para que estos calculasen las áreas midiendo a partir de la fórmula obtenida. Luego el profesor desarrolló un poco más el tema.

1. Transformación del trapecio en rectángulo: se expone con una transparencia parecida a la imagen anterior.

2. Se pide a los alumnos que deduzcan la fórmula basándose en conceptos como línea media, longitud, altura, y no numéricamente.

3. La longitud del rectángulo es la de la línea media del trapecio. El profesor preguntó ¿qué longitud tiene ahora mi rectángulo? Y un alumno lo resolvió diciendo que era igual a la línea media del trapecio.

4. La altura del trapecio es la misma que la del rectángulo. También se resolvió con una pregunta directa.

5. El área del rectángulo ¿con qué fórmula la calculas? $A_r = b \times h$

6. ¿Cómo podemos calcular el área del trapecio?

Estas clases se pueden describir con la siguiente secuencia. Trabajo con modelos concretos y números determinados, trabajo con modelos diseñados y con números determinados, trabajo con modelos diseñados y con variables (deducción de fórmulas), trabajo con fórmulas: ejercicios y problemas de aplicación. Se busca que los alumnos encuentren una fórmula que funcione y ellos mismos sean capaces de deducir, al ver de dónde viene la entenderán mejor y la interiorizarán.

Se ha entrevistado a dos alumnos, Thomas y Alex:

Thomas es capaz de explicar las fórmulas obtenidas en clase. También sabe señalar en el trapecio las partes que aparecen en las fórmulas y comprende que el producto obtenido es el área. Sin embargo no sabe explicar la relación entre la transformación de recorta y pega de triángulos y la fórmula final, ni tampoco indicar algo sobre la demostración.

Alex reproduce términos como $A_t = m \times h = \frac{B+b}{2} \times h$ de forma precisa, y sabe utilizarlas, pero tampoco es capaz de explicar la relación entre la transformación de la figura y la semisuma de las bases.

En los dos alumnos se produce una separación entre las fórmulas y el trabajo con los modelos. ¿Por qué ocurrió tal cosa? Si nos fijamos en el método explicativo veremos que el profesor mostró dos figuras. En la primera aparece un trapecio con dos triángulos coloreados. En la segunda los triángulos se han desplazado para dar lugar a un rectángulo. Para el profesor está claro que ambas figuras tienen la misma área y que cuando calculamos el área del rectángulo resultante estamos obteniendo la del trapecio inicial. Sin embargo para el alumno la transformación no resulta tan evidente. Es al menos tan compleja como el hecho de que la base del rectángulo coincida con la línea media del trapecio, o que la altura del rectángulo sea la altura del trapecio. Cuestiones estas dos que sí se explicitaron en la explicación. Cuando trabajaban individualmente dibujaron un solo trapecio que recortaron y convirtieron en rectángulo. En este caso la transformación está clara, porque usamos la misma cantidad de material. Sin embargo al mostrar en la pizarra el trapecio y el rectángulo a la vez pueden surgir dudas y que ambas figuras no queden suficientemente relacionadas.

Un alumno explicó que los dos triángulos procedentes del trapecio estaban ahora en el rectángulo. Pero no dio a entender nada sobre que las áreas de ambas figuras fueran por lo tanto la misma. En cuanto a las longitudes, se estableció que la altura del trapecio y del rectángulo eran la misma, y que la base del rectángulo coincidía con la línea media del trapecio. El problema es que se hizo de manera empírica. Midiendo. Luego el profesor pregunto "¿Cuál es la altura del rectángulo?" Y un alumno contestó "cuatro centímetros, no ha cambiado a pesar de los recortes triangulares". Midieron luego la base del rectángulo de seis centímetros y encontraron un segmento de la misma longitud a media altura del trapecio. Todo esto resulta un tanto incierto y parece fruto de la casualidad. No ha sido bien demostrado.

Markus ha realizado la transformación en el tiempo de trabajo individual y cuando se le pide explicación contesta "línea base por altura" se le pregunta si el rectángulo es más grande y dice que no porque se quitaron los vértices y se volvieron a poner. Se le pregunta por la línea base y la marca a rotulador en la cartulina pero no es consciente de que la línea base del trapecio es mayor (o menor) que la del rectángulo.

El profesor pide el área del rectángulo y un alumno llamado Bernhard dice que hay que calcular $A_r = b \times h$. Nos preguntamos si Bernhard sabe que con esa fórmula está obteniendo también el área del trapecio. El profesor dice que se limiten al rectángulo y entonces Thomas dice que la solución es *b* por *h* dos veces. Parece que no se puede esperar que los alumnos sigan el razonamiento propuesto por el profesor. También está claro que los niños tienen problemas con las variables, altitud, línea media, línea base…

A pesar de los problemas que han surgido en esta experiencia no se debe de pensar que trabajar con modelos resulta superfluo o incluso contraproducente. Simplemente hay que saber de qué manera usar los modelos. En el caso de que un profesor explicara geometría solo con la comunicación oral, haría que muchos alumnos se perdieran y viesen la lengua como un formalismo sin mucho sentido. Los modelos permiten dotar de un sentido a las explicaciones del profesor. Hay modelos que permiten ver al alumno ciertas realidades muy útiles para la explicación de conceptos, como es el caso del recorte de triángulos de la transformación de trapecio en rectángulo. Pero dichos modelos son solo el principio y son insuficientes. Es necesario un proceso inductivo lógico con demostraciones de por qué las cosas son de una determinada manera. Además, hay que tener en cuenta que las visualizaciones son muy subjetivas, y a menudo la imagen mental que tiene el alumno tras ver el modelo no es la que nosotros desearíamos. Es por esto que resulta necesario un esquema de trabajo del tipo:

- Dejarles que vean el modelo y extraigan sus conclusiones.

- Pedirles que hablen entre ellos para apreciar lo que cada uno visualiza.

- Explicación y comunicación por parte del profesor para asegurarse de que todos tienen una elaboración mental adecuada y reducir el riesgo de malentendidos.

Los símbolos y las denominaciones deben tener una significación clara. Esto es algo que no ocurrió en el ejercicio del trapecio. En definitiva, para explicar geometría mediante modelos hay que planificar todo con mucha precisión.

INVESTIGACIÓN DE PROCESOS COGNITIVOS

En matemáticas cada vez está más claro que el aprendizaje no consiste en una adquisición de habilidades y competencias, sino que está directamente relacionado con procesos cognitivos. Es decir, el proceso mental de comprensión auténtica es fundamental para que se produzca el aprendizaje significativo, a diferencia de otras ramas del saber que tal vez sean más memorísticas o de repetición cotidiana de una práctica. Con lo cual no pretendo decir que hacer muchos problemas sea contraproducente, de hecho uno de nuestros profesores dice siempre que si haces mil ejercicios el mil uno te sale, pero es necesario entender las cosas.

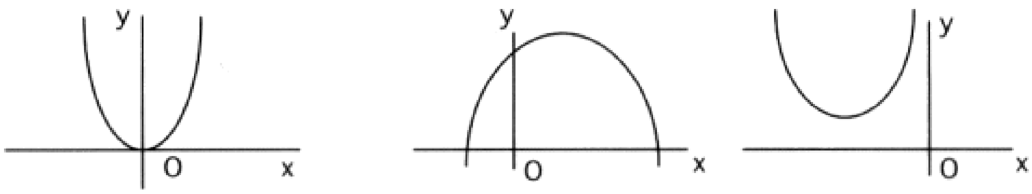
Se ha venido realizando un estudio de los errores más frecuentes que cometen los profesores al investigar cómo son los procesos que tienen lugar en la mente de los estudiantes, y comprender dónde están las principales dificultades. Antes este tipo de investigaciones solo se realizaban con estudiantes de primaria, pero hace ya más de dos décadas se estudian problemas relacionados con un pensamiento matemático más avanzado, típico de los estudiantes de bachillerato. El estudio de temas de análisis como las funciones, el infinito, los límites, integrales y derivadas o números reales está enriqueciendo los modelos que describen los procesos cognitivos.

En palabras de Carmen Azcárate, *“Cuando nos referimos a procesos cognitivos implicados en el pensamiento matemático avanzado pensamos en procesos tales como representar, visualizar, generalizar, clasificar, conjeturar, inducir, analizar, sintetizar, abstraer, formalizar”.* A continuación nos vamos a centrar en lo que respecta a los procesos de representación. Para alcanzar el éxito matemático es muy útil una amplia gama de procesos de representación mental de los conceptos. Cuantas más herramientas tenga la mente del alumno para representarse lo que le explicamos, más probable será que comprenda las cosas. Decimos que una representación es rica cuando contiene una gran cantidad de elementos relacionados con el concepto. Es importante que los profesores dominemos muchos tipos de representación, para poder ayudar a los alumnos, que conozcamos la teoría sobre de qué manera funcionan sus mentes a la hora de crear nuevas representaciones. También tenemos que darnos cuenta de que la visualización no es algo que ocurra de manera espontánea en los estudiantes, sino que son los procesos fundamentales que queremos provocar para que sean interiorizados por ellos.

Hay que diferenciar entre el “concepto” matemático universal, o conocimiento científico de referencia, y la “concepción” o el “esquema conceptual” que cada individuo fija en su mente terminado su proceso de representación.

Así la definición conceptual científica consistiría en una serie de palabras que definen el concepto con precisión. Por otro lado, el esquema conceptual son todas las imágenes o ideas que vienen a la mente de la persona, evocadas por la enunciación del concepto. Cuando hablamos de imágenes nos referimos a cualquier tipo de representación visual del concepto, hasta los símbolos.

Por ejemplo, con el concepto de función cuadrática pueden aparecer en la mente de las personas gráficas coordenadas como las siguientes:



O también expresiones simbólicas:

$$y = x^2, y = ax^2 + bx + c, \ldots$$

O tablas:

x	-2	0	2	4
y	4	0	4	16

Si consideramos el concepto de función, además del conjunto de imágenes mentales asociadas a dicho concepto, aparecen en la mente de los estudiantes de bachillerato una serie de consideraciones que forman parte de su conocimiento previo y que muchas veces son erróneas. Por ejemplo:

- La gráfica de una función siempre pasa por el origen de coordenadas.

- En una función los valores de las variables son siempre números naturales.

- En una función dada por su gráfica, la imagen de un valor cualquiera $x = a$ se obtiene...;

- La derivada de un producto de dos funciones es el producto de las derivadas de dichas funciones.

Todas estas incorrecciones no son producto de la ignorancia sino de conocimientos erróneos, es decir, existe un obstáculo en la mente del alumno que dificulta su aprendizaje. Estos conocimientos pueden ser completos o incompletos pero tienen coherencia. Además producen resultados correctos en algunos casos particulares (por ejemplo, la afirmación de que una función siempre pasa por el origen de coordenadas funciona cuando tenemos funciones que efectivamente pasan por el origen de coordenadas, las que carecen de término independiente). Son errores sistemáticos y difíciles de corregir pues el estudiante los tiene muy arraigados en su memoria.

Teniendo esto en cuenta, es importante que analicemos los errores que cometen nuestros alumnos y el por qué los cometen. Tenemos que buscar situaciones en las que salgan a la luz, no por el hecho de hacerles fallar, sino para que puedan ver que hay un fallo y lógicamente lo corrijan. También hay que saber que no sirve de nada introducir nuevos conceptos si previamente el alumno no ha creado mediante su propia experiencia algo parecido a un esquema conceptual. Para aprender son necesarios conocimientos previos.

En un concepto matemático podemos distinguir:

- La noción matemática académica aceptada por todos, que puede variar con el paso del tiempo.

- Los significantes asociados al concepto.

- Los problemas en cuya resolución es aplicable.

- Los instrumentos específicos del tratamiento del concepto.

Mientras que en las concepciones de los sujetos distinguiremos:

- La clase de situaciones que le dan sentido al concepto para el alumno.

- El conjunto de los significantes que es capaz de asociarle, en particular las imágenes mentales, las expresiones simbólicas, las expresiones gráficas.

- Los instrumentos disponibles para manipular el concepto.

La idea de situaciones que dan sentido al concepto para el alumno es interesante, porque está claro que para entender algo siempre tendemos a relacionarlo con experiencias vividas. Sobre este tema se realizó un estudio en tres clases de 4º de la ESO para ver cómo entendían los alumnos los conceptos de variación, tasa media de variación y tasa instantánea de variación de una función relacionándolos con sus ideas previas sobre la velocidad media y la velocidad instantánea. Se establecieron tres perfiles de estudiantes:

Perfil primitivo: para estos alumnos no hay diferencia entre velocidad media a lo largo de toda la gráfica y velocidad puntual. Tienen un esquema de "velocidad general" que funciona como obstáculo cognitivo. Estos estudiantes no han desarrollado un esquema conceptual que les permita entender los conceptos de variación instantánea de funciones.

Perfil aproximación: Son estudiantes que describen la velocidad en un punto *P* de la gráfica espacio-tiempo como una aproximación entre la velocidad media de dos puntos próximos a *P*. Sus representaciones gráficas son segmentos secantes que pasan por los dos puntos.

Perfil límite: Estos alumnos poseen esquemas conceptuales que les permiten comprender el concepto de tasa instantánea de variación de una función. Para calcular la velocidad instantánea en un punto representan la tangente a la curva en ese punto y calculan la pendiente de la tangente.

Se confirma con este ejemplo que las experiencias con situaciones y problemas ligados a un concepto matemático influyen en la estructura cognitiva que permite conocer dicho concepto.

Anna Sfard, profesora de didáctica de las matemáticas en la universidad de Haifa, habla de tres etapas correspondientes al proceso de formación de concepciones y las denomina interiorización, condensación y cosificación.

En la interiorización el estudiante tiene un primer contacto con los procesos que darán lugar al nuevo concepto. Es un proceso elemental. En el caso de las funciones estaría relacionado con el aprendizaje del concepto de variable y de los pasos necesarios para obtener la variable dependiente, usando la fórmula y dando valores a la variable independiente.

En la condensación se van simplificando las largas secuencias de operaciones ligadas al concepto. Se piensa en el concepto como un todo sin prestar atención a cada uno de sus detalles. Se facilitan el análisis, comparaciones, representaciones. Sobre el concepto de función se trataría del momento en el que el trazado de la gráfica es un todo y el alumno no se fija en los valores de cada una de las variables.

La cosificación es un proceso instantáneo que se da cuando la persona es capaz de concebir la nueva noción como un objeto matemático en sí mismo. Es un cambio ontológico que aporta la posibilidad de ver algo desde una nueva perspectiva. Podría ser considerar propiedades generales de diferentes procesos realizados con funciones, como son la composición o la inversión.

Vamos a comentar un ejemplo para ver la diferencia entre las concepciones de expertos y principiantes. Para demostrar la siguiente igualdad siendo $f(x)$ una función continua $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+k}^{b+k} f(x-k)dx$ el alumno tendrá que integrar la función entre *a* y *b* para obtener un número y a continuación desplazar la función un valor *k* e integrar entre los intervalos trasladados. Sin embargo el profesor podrá poner en marcha y mostrar una serie de procesos de representación cognitiva muy variados como:

- Visualizar la función gráficamente.

- Transformarla por traslación.

- Visualizar la traslación y el área bajo la curva.

- Comprobar que las dos traslaciones van en la misma dirección.

- Deducir que los resultados numéricos son iguales.

- Reducir a funciones positivas.

- Generalizar a funciones cualesquiera.

Estos recursos del experto, que a los profesores nos parecen triviales, son lo que debemos de esforzarnos en transmitir. Para los alumnos no pueden ser triviales en absoluto y su desconocimiento puede suponer una gran frustración e incomprensión de nuestra capacidad de resolver problemas.

NUEVAS TECNOLOGÍAS, NUEVAS METODOLOGÍAS

En un artículo de Franklin Bert K Waits de 1995, publicado en la revista *UNO,* se habla de que la forma de impartir matemáticas iba a cambiar a causa de la tecnología. Se decía que el currículum necesitaba un cambio para dedicar mucho menos tiempo a la resolución de algoritmos y al cálculo de toda la vida con lápiz y papel. Opino que dominar dicho cálculo es necesario para entender cómo funcionan las operaciones más básicas, o ser capaz de hacer una raíz cuadrada a mano, pero está claro que su reiteración es un sin sentido que además consume enormes cantidades de tiempo, que podrían dedicarse a aprender matemáticas. La solución pasa por la democratización de las nuevas tecnologías. En el texto se habla de las calculadoras gráficas. Se trata de pequeños ordenadores o calculadoras con una pantalla que permite visionar gráficas cartesianas. Los autores decían que cuando dichas calculadoras costasen menos de 180€, entonces cualquier alumno podría tener una. Hoy en día, veinte años después, dudo mucho que algún alumno posea una calculadora gráfica, pero además no es necesario pues lo que si tienen todos es un teléfono inteligente. Con un teléfono inteligente puedes descargarte muchas calculadoras gráficas, así que el coste no es 180€ sino 0€ (suponiendo que todos posean ya un *Smartphone*).

En cualquier caso, cuando yo estudié la educación secundaria hace más de diez años no utilizábamos estas tecnologías gráficas, y hace unos meses cuando fui a dar clases en el *IES Emilio Ferrari* en el prácticum de este máster, tampoco vi a los niños trabajando con los móviles o con las calculadoras gráficas. Se seguía usando el lápiz y el papel y la repetición excesiva de ejercicios. Tal vez la revolución aún no ha llegado. Veamos qué es lo que esperaban en 1995.

La idea era que si cada estudiante tenía un aparato electrónico capaz de manejar datos y generar gráficos, se podría conseguir que el aula se convirtiera en un laboratorio y que las matemáticas tuvieran muchas posibilidades de trabajar la investigación, sin gastar grandes cantidades de dinero en los aparatos. Se realizaron tres experiencias en el estado de Ohio con calculadoras científicas, calculadoras gráficas y ordenadores, respectivamente. En el segundo de estos experimentos se usaron las calculadoras para realizar diez funciones diferentes, algunas de ellas se repetían cada día y todas aparecían al menos una vez por tema. Son las siguientes:

1. Plantear problemas numéricamente.

2. Buscar un apoyo visual a los resultados analíticos obtenidos mediante la aplicación de algoritmos algebraicos para resolver ecuaciones e inecuaciones.

3. Usar métodos visuales para resolver ecuaciones e inecuaciones y después confirmar los resultados usando métodos algebraicos.

4. Presentar, simular y resolver problemas.

5. Usar entornos generados por ordenador para ilustrar conceptos matemáticos.

6. Usar métodos visuales para resolver ecuaciones e inecuaciones que no pueden ser resueltas con métodos algebraicos.

7. Dirigir experimentos matemáticos y hacer conjeturas sobre los resultados.

8. Estudiar y clasificar el funcionamiento de diferentes tipos de funciones.

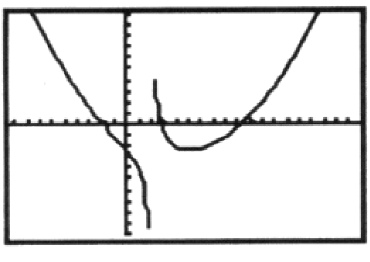
9. Predecir conceptos de cálculo.

10. Investigar y explorar las diversas conexiones entre distintas representaciones del planteamiento de un problema.

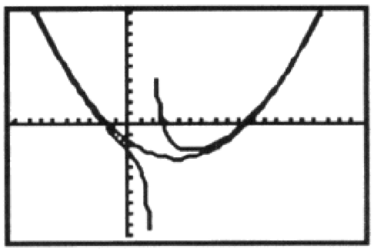
Así pues el método consistía en trabajar algebraicamente con lápiz y papel para luego comprobar los resultados gráfica y numéricamente, o al revés, o solo gráfica y numéricamente si es imposible aplicar lápiz y papel a determinados problemas.

Veamos ahora unos ejemplos:

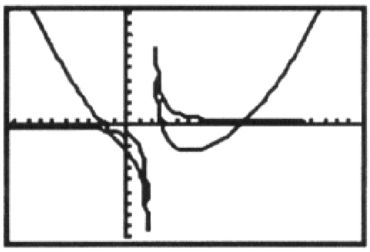
Si consideramos el cociente polinómico $\frac{x^3-20x^2+x+50}{x-2}$ y operamos algebraicamente obtenemos $x^2-8x-15$ y de resto obtenemos 20. Es decir, que hemos descompuesto en sumandos $x^2-8x-15+\frac{20}{x-2}$. Pero ¿qué significa esto? Si nos fijamos en la gráfica de la función $\frac{x^3-20x^2+x+50}{x-2}$.



Podemos apreciar que para valores que no se acerquen a 2 la gráfica encaja con la de $x^2 - 8x - 15$. Así que es una parábola fuera de la franja cercana a 2.

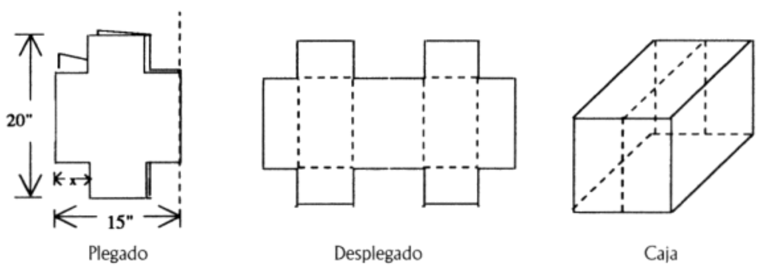


Cuando estamos cerca del 2 la gráfica se comporta como la de una dilatación de la hipérbola equilátera $\frac{1}{x}$, aquí vemos las gráficas $\frac{x^3-20x^2+x+50}{x-2}$ y $\frac{20}{x-2}$ juntas.



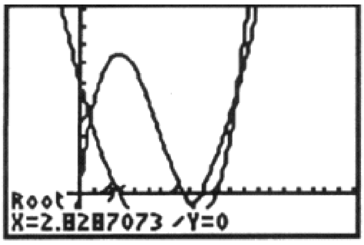
La descomposición cociente y resto nos da mucha información sobre el comportamiento de la función. Lo importante es ser capaz de leerlo y las calculadoras gráficas nos ayudan enormemente a ello. La división del polinomio, que también es bueno controlar, es algo meramente mecánico que puede ser realizado por máquinas, y que debe serlo, para no perder el tiempo, en el caso de operaciones tediosas.

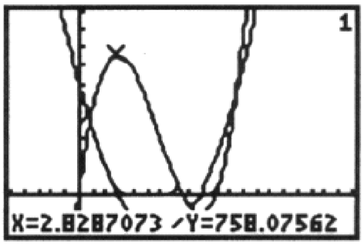
También podemos usar la calculadora gráfica para realizar manipulaciones matemáticas, y luego comprobar los resultados analíticamente. Por ejemplo tenemos el siguiente problema: se pretende construir una caja de cartón cerrada a partir de una lámina de cartón de 30x20 *cm*. Primero se dobla a la mitad obteniendo una plancha doble de 15x20, luego se cortan cuatro cuadrados iguales en las esquinas y por último se monta la caja. Se pide obtener el lado de los cuadrados recortados para que el volumen de la caja sea máximo.



Hay que decir que al dibujo le faltan solapas para poder pegar la caja, pero no es un problema de arquitectura sino de matemáticas, es una caja didáctica de escaso valor constructivo.

Podemos introducir en la calculadora la fórmula del volumen de la caja que será $(2x \times (15 - 2x) \times (20 - 2x))$ y su primera derivada, utilizando la derivada numérica de la calculadora. El punto en el que la derivada sea nulo, dado que la función es una cúbica determinada, proporciona el valor máximo de la función *y*(*x*). Se puede aplicar la teoría del cálculo y buscar el valor del límite cuando la derivada vale cero, y resolverlo con un alto grado de precisión gracias a la calculadora. También se puede pedir que los estudiantes lo resuelvan a la manera tradicional para comparar resultados y generar algún tipo de debate.





INVESTIGACIÓN SOBRE LA INFLUENCIA DEL USO DE GRÁFICOS EN LA TRADUCCIÓN ALGEBRAICA DE PROBLEMAS VERBALES

A la hora de traducir problemas verbales al lenguaje algebraico siempre ha habido controversia, porque algunos profesores opinan que lo que hay que hacer es remarcar los conceptos clave del propio enunciado del problema, otros dicen que basta con leer el problema varias veces, y algunos pensamos que la traducción puede realizarse de manera más sencilla si acompañamos el enunciado con gráficos o proponemos a los alumnos que sean ellos mismos los que los realicen.

En esta línea se realizó una investigación a principios de los noventa en la que participaron cien estudiantes de 1º de BUP, lo que sería ahora 3º de la ESO, es decir, una media de edad de 14.5 años. Se dividió a los alumnos en tres grupos y se les hicieron dos test de cuarenta minutos de duración. Primero se realizó el test A, que no contenía gráficos, y dos semanas después se les planteó el test B, con gráficos. Cada uno de las dos pruebas constaba de cinco problemas verbales, respectivamente 1A, 2A, 3A, 4A, 5A, y 1B, 2B, 3B, 4B, 5B. Cada problema tenía una primera operación de cambio que podía ser una suma o una resta y (salvo el ejercicio 2 que repetía la adición haciéndola comparativa) una operación de comparación que podía ser una multiplicación o una división.

En la siguiente tabla podemos apreciar una traducción simbólica de cada uno de los problemas y las operaciones de cambio y comparación que contiene cada uno de ellos.

Problema	Trad. simbólica	Operaciones que contiene: 1º.op. (de «cambio»)	2º.op. (de «comp.»)
1A/1B	$x + a = (y + a)/m$ o $m(x+a)= y+a$	1 (aditiva)	1 (mult.)
2A/2B:	$x-a_1+a_2 = y+a_1$;	1 (aditiva)	1 (aditiva)
3A/3B:	$x = m(y + a)$;	1 (aditiva)	1 (mult.)
4A/4B:	$m (x -a) = y +a$;	1 (aditiva)	1 (mult.)
5A/5B:	$x - a = y +a$; $x + a = m(y - a)$;	2 (aditivas)	1 (mult.)

Es decir, que la dificultad de los procesos necesarios para el examen A era idéntica a la del examen B. Lo único en lo que diferían es que en el B aparecían al lado de los enunciados gráficas clarificando lo que estos querían decir.

Voy a mostrar el último ejercicio de cada uno de los test, para que esta diferencia quede clara.

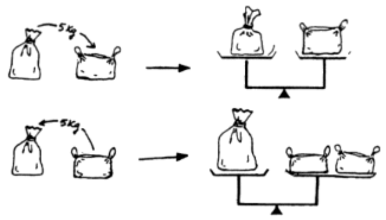
5A.- Expresa algebraicamente el siguiente enunciado:

“Un grupo de personas sale de excursión en 2 vehículos. Si del primero pasan 3 personas al segundo, habrá el mismo número de personas en los dos coches; pero si del segundo pasan 3 al primero, habrá en éste el doble que en el segundo. ¿Cuántas personas van en cada coche?

5B.- Expresa algebraicamente el siguiente enunciado:

“Tenemos dos sacos de lentejas. Si sacamos del primer saco 5 *kg* y los ponemos en el segundo entonces habrá la misma cantidad de lentejas en los dos sacos; pero si del segundo pasamos 5 *kg* al primero, en este último habrá el doble. ¿Cuántos kilos de lentejas había en cada saco?”

Esquema del problema:



Como podemos apreciar los ejercicios son prácticamente idénticos. La principal diferencia es la presencia del esquema en el ejercicio 5B.

Para puntuar los test se tiene en cuenta que en total hay 11 operaciones, 6 de cambio y 5 de comparación. Se da un punto por cada operación correcta, aunque en el ejercicio resuelto la otra sea incorrecta. No se tienen en cuenta los errores de la identificación de "letras como objeto". Tampoco se considera un error poner $mx - a = y + a$ cuando lo correcto habría sido $m(x - a) = y + a$ porque no se está dejando de usar bien la comparación estática que es lo que se valora aquí. Es decir, se trata de un error derivado del uso del paréntesis.

Hacemos una comparación general de la media de los resultados en la que valoramos desviación típica, media de cada test y el estadístico razón crítica (Z), el cual nos permite afirmar que existe una diferencia significativa entre la media del test A y la del test B.

	Verbal	V. con gráficos			
N	x_A	s_A	x_B	s_B	Z
100	4.34	3.00	5.60	3.12	5.22*

Nota: puntuación máx. 11 p.
* significativa (p=0.01)

Si hacemos una comparación problema a problema vemos que la diferencia es significativa para los problemas 3, 4 y 5, mientras que para los problemas 1 y 2 no lo es, si bien se produce siempre una mejora en el test con gráficos respecto al test sin ellos. En el primer problema, esta similitud de resultados puede deberse a que es el único ejercicio que utiliza la división en la comparación estática, y el segundo problema es el único que utiliza dos adiciones y como la acumulación de adiciones es algo que cuesta mucho a los alumnos pues no se produce mejora significativa.

	1A	1B	2A	2B	3A	3B	4A	4B	5A	5B
Media	0.94	1.01	0.37	0.51	0.92	1.30	0.82	1.06	1.29	1.73
Desv. Típ.	0.72	0.77	0.65	0.73	0.73	0.86	0.78	0.78	1.08	1.13
Z	0.83		2.04		4.2*		2.87*		5.05*	

Nota: puntuación máx. de 5A/5B: 3 p. (los demás problemas 2 p.).
* significativa p = 0.01.

Si dividimos a los alumnos entre aquellos que obtienen resultados altos, es decir, los que consideramos de altas habilidades, por un lado y los de habilidad baja por otro lado, en los segundos se produce mucha más mejora que en los primeros, llegando a no ser significativa para los de habilidad alta en el caso de las operaciones de comparación.

			Verbal		V. con gráficos		
Habilidad	Operaciones	N	x_A	s_A	x_B	s_B	Z
Alta	de cambio	39	4.82	1.25	5.26	1.02	2.42*
	de comp.		2.59	1.66	3.18	1.54	2.13
Baja	de cambio	61	1.84	1.28	2.72	1.68	4.18*
	de comp.		0.51	0.7	1.18	1.2	4.24*

Nota: puntuación máx. para la op. de cambio: 6 p.; para la de comparación: 5 p.
* significativa (p = 0.01).

Se concluye pues que la inclusión de gráficos en problemas verbales que tienen operaciones de cambio y de comparación representa una mejora significativa a la hora de traducir dichos problemas verbales al lenguaje algebraico. También se observa que la mejora es más marcada en alumnos de baja habilidad que en alumnos de alta habilidad.

Este resultado sugiere que en lo sucesivo se intente introducir en las clases elementos de tipo gráfico, figuras, esquemas, cuadros que permitan al alumno situarse con más comodidad entre lo verbal y lo intelectual. Sobre el tipo de elementos gráficos que resultará más conveniente utilizar, opinamos que es necesario seguir investigando, pero creemos que no es adecuado poner en duda su utilidad.

LA QUÍMICA DEL CEREBRO

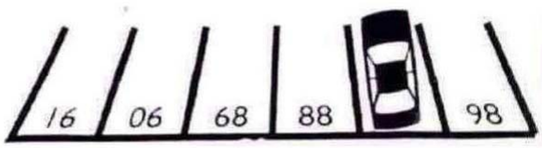
Me gustaría desarrollar un apartado que explicara científicamente por qué aprendemos mejor con apoyos gráficos que sin ellos. Me refiero a cómo se produce el aprendizaje desde un punto de vista neuronal o sináptico, incluso molecular o atómico. Llegar al fondo de la cuestión de una vez por todas. Buscaba algo parecido a "cuando ves una imagen tu cerebro genera un determinado compuesto químico que ayuda a fijar más cantidad de información en donde quiera que esté la memoria, ayudando en gran medida al aprendizaje significativo".

Por desgracia lo único que he sido capaz de encontrar en internet sobre el tema es una frase lapidaria de dudosa valía. Decía algo así "*A través de las imágenes el cerebro procesa la información sesenta mil veces más deprisa que con un texto escrito*" Me parece una exageración pero la traigo a colación, en parte porque no he hallado nada más y porque la página a la que estaba vinculada la imagen había caducado. Quizás lo que quería decir es que recibimos muchísima información visual durante el día, y la mayor parte de lo que hace nuestro cerebro con todos estos estímulos es descartarlos. En el caso de que estemos pensando en algo ajeno a nuestro entorno inmediato, sospecho que solo tenemos en cuenta los estímulos necesarios para nuestra supervivencia. Al leer un texto sin embargo nos concentramos en una sola cosa. Si es algo así entonces no me parece tan exagerado. Pero sospecho que no es esa la cuestión y que ese "*sesenta mil*" se parece a lo que comentábamos al principio del trabajo sobre que una imagen vale más que mil palabras.

Supongo que el cerebro es un gran desconocido. Sobre todo en cuanto a su funcionamiento metafísico. ¿Dónde está la memoria? ¿Cómo se generan las ideas? ¿Por qué recordamos unas cosas y otras no? ¿Por qué se aprende mejor de una determinada manera? Por lo poco que he visto, lo único que se sabe es qué zonas del cerebro se activan más intensamente al realizar una determinada actividad. Con esto se entiende que cada tipo de actividad se hace más con una parte del cerebro que con otra. También se alcanza un conocimiento similar cuando alguien pierde una parte de su encéfalo en algún tipo de accidente y esto le hace perder determinadas facultades.

Entonces, si no sabemos nada sobre la química profunda de las ideas y el aprendizaje ¿Cómo vamos a diseñar mejores métodos de enseñanza? ¿Cómo vamos a saber si el alumno está aprendiendo más y mejor con gráficos o sin ellos? Me temo que no podemos saberlo con certeza lógica. Sin embargo, se han venido realizando estudios e investigaciones en las aulas. Por ejemplo, enseñando el mismo concepto con imágenes y sin ellas a varios grupos de alumnos y viendo si hay una diferencia significativa en el aprendizaje de cada grupo. Hemos comentado algunas de estas investigaciones y las conclusiones nos decían que la visualización, absolutamente necesaria en matemáticas, se realizaba de manera más rápida y precisa con el uso de gráficos. Los alumnos con un soporte visual siempre entienden mejor el concepto que se les está explicando.

También nos parece importante que los estudiantes dibujen, o mejor dicho, que no dejen de hacerlo, porque todos los niños dibujan. El cerebro es multifuncional, activa varias zonas de trabajo al mismo tiempo. Es importante que potenciemos nuestra habilidad de pensar en imágenes, esto se conoce como "*visual thinking*". En el sistema escolar se incentiva a todo el mundo para expresarse únicamente mediante palabras. Las palabras son útiles, sintetizan mucha información en muy poco espacio, pero dejar de lado el dibujo hace que vayamos perdiendo esa capacidad de pensamiento visual. Hacer un dibujo puede parecer una pérdida de tiempo en comparación con escribir, pero libera una alta creatividad y facilita la retención y la memorización. Fijémonos en la siguiente imagen.



Si se nos pide decir cuál es el número de la plaza de aparcamiento que ocupa el coche muchos tardaríamos en contestar. Si nos dicen que es un problema que los niños resuelven en menos de veinte segundos seguramente veamos la solución más deprisa. La respuesta es claramente la plaza ochenta y siete. El problema es que estamos acostumbrados a pensar con palabras y a ver series numéricas con razones, y cuando nos ponen este ejemplo intentamos resolver la secuencia 16 06 68 88 x 98. Sin embargo si pensamos en términos de imagen veríamos rápidamente, como un niño, que los números están puestos para verlos desde el coche. Su pensamiento está menos condicionado que el de los adultos por las reglas que suelen usarse para resolver series matemáticas.

Al pasar de niños a adultos perdemos la capacidad de pensar visualmente, empezamos a pensar en palabras que son conceptos abstractos que dificultan el aprendizaje y la comunicación. Imaginar, recrear visualmente construcciones imaginarias y conceptos es una poderosa herramienta que debemos esforzarnos en conservar. Esto se consigue en parte utilizando el dibujo.

Tal vez las investigaciones sobre el funcionamiento del cerebro estén aún arañando la corteza del asunto, pero tenemos las otras investigaciones realizadas en el aula que nos muestran que el uso de gráficos a la hora de enseñar matemáticas resulta muy beneficioso. Puede que dentro de unas décadas podamos instalarnos un chip y descargar aprendizajes como en la película *Matrix*, pero por ahora limitémonos a coger un lápiz y dejar hablar a nuestras manos.

BIBLIOGRAFÍA

AZCARATE, C. (1995) Sistemas de representación. *Revista UNO. Monográfico nº 4 Lenguajes gráficos en matemáticas.* pp. 13 - 20. Editorial GRAÓ. Barcelona, ISSN 2014-4784.

COBO, P. (1995). Efectos de la utilización de gráficos en la traducción algebraica de problemas verbales. *Revista UNO. Monográfico nº 4 Lenguajes gráficos en matemáticas.* pp. 166 - 122. Editorial GRAÓ. Barcelona, ISSN 2014-4784.

DELOFEU, J. (1995). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre distintas gráficas de funciones. *Revista UNO. Monográfico nº 4 Lenguajes gráficos en matemáticas.* pp. 54 - 60. Editorial GRAÓ. Barcelona, ISSN 2014-4784.

DUVAL, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle, Grupo de Educación Matemática. ISBN 9588030234.

GRACIA, F. (1995). Representación del espacio en el plano. *Revista UNO. Monográfico nº 4 Lenguajes gráficos en matemáticas.* Editorial GRAÓ. Barcelona, ISSN 2014-4784.

GUZMÁN, M. (1996). *El rincón de la pizarra: Ensayos de visualización en Análisis Matemático. Elementos básicos de Análisis.* Madrid. España: Pirámide, ISBN 84-368-0990-4.

HEISIG, J., BERNABÉ, M. y CALAFELL, V (2001). *Kanji para recordar,* Empresa Editorial Herder, S.A., Barcelona, ISBN: 9788425425936.

KINDT, M. (1995). Problemas antiguos y la calculadora gráfica. *Revista UNO. Monográfico nº 4 Lenguajes gráficos en matemáticas.* pp. 31 - 53. Editorial GRAÓ. Barcelona, ISSN 2014-4784.

MAIER, H. (1995). Sobre el trabajo con medios visuales en las clases de geometría. *Revista UNO. Monográfico nº 4 Lenguajes gráficos en matemáticas.* pp. 89 - 100. Editorial GRAÓ. Barcelona, ISSN 2014-4784.

NELSEN, R. (1993). *Proofs Without Words. Exercises In visual Thinking*. The Mathematical Association of America. Washington, ISBN 0-88385-700-6.

PÉREZ, A. (1995). Las tecnologías audiovisuales: Hábitos perceptivos y enseñanza de la Geometría. *Revista UNO. Monográfico nº 4 Lenguajes gráficos en matemáticas.* pp. 21 - 30. Editorial GRAÓ. Barcelona, ISSN 2014-4784.

PEREZ, R. (1995). Actividades para introducir la geometría fractal en la ESO. *Revista UNO. Monográfico nº 4 Lenguajes gráficos en matemáticas.* pp. 101 - 115. Editorial GRAÓ. Barcelona, ISSN 2014-4784.

WAITS, B. y DEMANA, F. (1995). La reforma de las matemáticas y el papel de la tecnología. *Revista UNO. Monográfico nº 4 Lenguajes gráficos en matemáticas.* pp. 61 - 72. Editorial GRAÓ. Barcelona, ISSN 2014-4784.

Portal de salud Muy en forma. http://muyenforma.com/ninos-espanoles-horas-tele-pc-jugando.html Última consulta: 9/06/2017.

Portal del periódico La Vanguardia http://www.lavanguardia.com/estilos-de-vida/20141212/54421278703/ojo-con-la-pantalla.html Última consulta: 9/06/2017.

Portal de la tienda de videojuegos mbtecnic http://www.mbtecnic.com.ar/ficha-2502-0155-metroid-prime-trilogy.html Última visita: 9/06/2017.

Blog del portal aprendiendo matemáticas https://aprendiendomatematicas.com/como-el-dibujo-ayuda-a-desarrollar-la-inteligencia-de-nuestros-hijos/ Última visita: 19/06/2017.

Glosario matemático del portal de la Universidad de Barcelona http://www.ub.edu/glossarimateco/content/funci%C3%B3n-creciente-decreciente-en-un-punto Última visita: 21/06/2017.