



---

**Universidad de Valladolid**

Facultad de Ciencias

## **TRABAJO FIN DE GRADO**

**MATEMÁTICAS**

**FÓRMULAS DE BRION, LAWRENCE Y VARCHENKO**

*Andrea Prieto García*

*Antonio Campillo López*



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>iii</b>
<b>1. Fórmulas de Brion y Lawrence-Varchenko</b>	<b>1</b>
1.1. Definiciones básicas . . . . .	1
1.2. Ejemplos fórmula de Brion . . . . .	4
1.3. Teorema de Brion . . . . .	6
1.4. Ejemplos fórmula de Lawrence y Varchenko . . . . .	7
1.5. Fórmula de Lawrence-Varchenko . . . . .	9
1.6. Convergencia . . . . .	9
<b>2. Demostraciones</b>	<b>11</b>
2.1. Cono simplicial . . . . .	11
2.2. Series de Laurent racionales . . . . .	16
2.3. Símplices . . . . .	22
2.4. Politopos . . . . .	24
2.5. Lawrence-Varchenko . . . . .	25
2.6. Teorema de Barvinok . . . . .	27
<b>Bibliografía</b>	<b>31</b>



# Introducción

El objetivo de este trabajo es presentar detalladamente una demostración basada en combinatoria y en cálculo algebraico de las fórmulas de Brion y de Lawrence-Varchenko. Éstas no solo permiten calcular la totalidad de puntos con coordenadas enteras dentro de un politopo reticular de  $\mathbb{R}^d$ , sino también mostrar de cuales se trata.

Michel Brion descubrió y publicó en 1988 en [6] una fórmula que había descubierto previamente y que permitía encontrar, por un procedimiento sencillo mediante un cálculo algebraico, el polinomio indicador reticular de cualquier politopo reticular. Por polinomio indicador reticular se entiende el polinomio de Laurent que es la suma con coeficientes 1 de todos los monomios de Laurent cuyos exponentes son puntos reticulares que están dentro del politopo.

La fórmula de Brion afirma que dicho polinomio indicador es igual a la suma extendida a todos los vértices del politopo de las funciones racionales generadoras de los conos tangentes al politopo desde dichos vértices. Por cono tangente a un politopo desde uno de sus vértices se entiende el cono desde el que se visualiza el contorno del politopo. La función racional generadora del cono es la función racional determinada por la serie indicatriz reticular del cono, es decir la serie de Laurent dada por la suma infinita de todos los monomios que están dentro del cono con coeficiente 1. Es bien conocido, de hecho una consecuencia del teorema de la base de Hilbert, que la serie indicatriz de dichos conos, que son racionales, determina una función racional. Existen otras pruebas interesantes de este hecho, por ejemplo al descomponer el cono racional dado en unión de conos regulares.

La prueba original de Brion es técnica y no elemental, se trata de aplicar “el teorema de Lefschetz-Riemann-Roch en K-teoría equivariante [4] a variedades tóricas no singulares”, algo lejos de nuestro alcance y de cualquier grado de Matemáticas. De forma simultánea James Lawrence y Alexander Varchenko en 1987-88 en [8] y [9] descubrieron otra fórmula similar, también por métodos técnicos no elementales, que expresa el polinomio indicador reticular de un politopo reticular como suma de otras funciones racionales asociadas a los vértices cuando los conos tangentes al politopo son todos simpliciales. En realidad, si se observan con cuidado las dos fórmulas se puede apreciar cómo las funciones racionales de ambas son expresiones alternativas

para una misma función asociada a cada vértice.

La fórmula de Brion tiene además una repercusión importante, ya que Alexander Barvinok publicó en 1994 [1] que cada cono racional poliédrico puede descomponerse en tiempo polinómico como suma algebraica (con coeficientes enteros positivos o negativos) de conos regulares. Dado que la función racional generadora de un cono regular se calcula directamente en función de las aristas del cono (como la suma de una serie geométrica en varias variables), se deduce del algoritmo de Barvinok, que la totalidad de puntos reticulares de un polinomio reticular se pueden calcular en tiempo polinómico. Recientemente, Mattias Beck, Christian Haase y Frank Sottile, en [5] han encontrado una prueba elemental para las fórmulas de Brion y de Lawrence-Varchenko. Nuestro trabajo se ha dedicado en comprender esta prueba y detallarla. Nuestro detalle incluye los puntos no suficientemente claros en su trabajo, como es, por ejemplo, su teorema 2.4, que es en sí mismo un resultado de interés general y que afecta a una clase más general de series de Laurent. En el primer capítulo está dedicado a expresar las fórmulas de Brion y Lawrence-Varchenko y sus ingredientes, el segundo a las demostraciones elementales y el final a los resultados de Barvinok. Alexander Barvinok fue conferenciante invitado en el ICM de 2006 en Madrid por sus resultados en esta línea [2].

# Capítulo 1

## Fórmulas de Brion y Lawrence-Varchenko

Nuestro objetivo es ilustrar las fórmulas de Brion y Lawrence-Varchenko, así como enseñar de forma sencilla y comprensible su demostración.

### 1.1. Definiciones básicas

En primer lugar vamos a dar algunas definiciones básicas.

Sea  $\mathbb{R}^d$  el espacio euclídeo  $d$ -dimensional con el producto escalar usual. Sea  $E$  un conjunto de puntos del espacio afín y  $\mathbf{V}$  el espacio vectorial tangente a  $E$ . Si  $p$  es un punto de  $E$  y  $\mathbf{v}$  un vector de  $\mathbf{V}$ ,  $p+\mathbf{v}=q$  es la traslación del punto  $p$  por el vector  $\mathbf{v}$ . Lo denotamos así ya que si tomamos cualquier sistema de referencia afín  $R$ , un origen  $o$  en  $E$  y una base de vectores  $B$  de  $\mathbf{V}$ , entonces la suma de las coordenadas de  $p$  con las de  $\mathbf{v}$  son las de  $q$ .

**Definición 1.1.1.** Sea  $L$  el conjunto de puntos de la forma  $p+\mathbf{L}$  para algún  $p$  de  $E$  y donde  $\mathbf{L}$  es un subespacio vectorial de  $\mathbf{V}$ , entonces  $L$  es un *subespacio lineal afín*. Dicho de otra forma,  $L$  es el conjunto de traslaciones posibles de  $p$  por vectores de  $\mathbf{L}$ .

**Definición 1.1.2.** Un *hiperplano vectorial* en  $\mathbb{R}^d$  se define como el conjunto de puntos  $\mathbf{H} = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : a_1x_1 + \dots + a_dx_d = 0\}$ .

$\mathbf{H}$  divide a  $\mathbf{V}$  en tres regiones: el propio  $\mathbf{H}$  y los semiespacios vectoriales dados en la base  $B$  por  $\{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : a_1x_1 + \dots + a_dx_d < 0\}$  y  $\{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : a_1x_1 + \dots + a_dx_d > 0\}$  respectivamente.

**Definición 1.1.3.** Un *hiperplano afín*  $H$  es un subespacio lineal afín  $H=p+\mathbf{H}$  donde  $\mathbf{H}$  es un hiperplano vectorial de  $\mathbf{V}$ . En la referencia  $R$ ,  $H$  es de la forma:

$$H = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : a_1x_1 + \dots + a_dx_d = b \text{ y } a_i \neq 0 \text{ para algún } i\}$$

H divide a E en tres regiones: el propio H y los semiespacios afines abiertos dados en la referencia R por  $\{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : a_1x_1 + \dots + a_dx_d < b\}$  y por  $\{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : a_1x_1 + \dots + a_dx_d > b\}$  respectivamente.

**Definición 1.1.4.** Un *semiespacio* es la región cerrada que hay a cada lado de un hiperplano H cualquiera,  $H = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : a_1x_1 + \dots + a_dx_d = b\}$  en  $\mathbb{R}^d$ . Los dos semiespacios definidos por H serían

$$S_1 = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : a_1x_1 + \dots + a_dx_d \leq b\}$$

$$S_2 = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : a_1x_1 + \dots + a_dx_d \geq b\}$$

**Definición 1.1.5.** Un *semiespacio racional* (cerrado) es el subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^d$  definido por

$$\{x \in \mathbb{R}^d : \mathbf{w} \cdot x \geq b\},$$

donde  $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^d$  y  $b \in \mathbb{R}$ . Su límite es el hiperplano racional

$$\{x \in \mathbb{R}^d : \mathbf{w} \cdot x = b\}$$

**Definición 1.1.6.** Un *punto reticular* de  $\mathbb{R}^d$  es aquel cuyas coordenadas forman una  $d$ -upla de números enteros.

**Definición 1.1.7.** Un *politopo*  $\mathcal{P}$  es un conjunto acotado que es intersección de un conjunto finito de semiespacios cerrados de  $\mathbb{R}^d$ . El conjunto vacío sería el caso trivial.

**Definición 1.1.8.** La *envolvente convexa* de un conjunto de puntos es el menor conjunto convexo de  $\mathbb{R}^d$  que contiene a dicho conjunto de puntos. Un subconjunto de  $\mathbb{R}^d$  es convexo si contiene a los segmentos lineales que unen pares de puntos del subconjunto.

**Definición 1.1.9.** Un *politopo*  $\mathcal{P}$  es la envolvente convexa de una cantidad finita de puntos. Para una cantidad vacía sería el caso trivial (es decir, el politopo vacío).

**Definición 1.1.10.** Un *politopo reticular* es la envolvente convexa de un número finito de puntos reticulares.

**Definición 1.1.11.** Dado un politopo  $\mathcal{P}$  diremos que es un *politopo simple* si en cada vértice de  $\mathcal{P}$  confluyen  $d$  aristas cuyos vectores directores son linealmente independientes.

**Definición 1.1.12.** Los *vértices* de un politopo reticular generado por un conjunto finito F de puntos, son aquellos puntos p de F tales que la envolvente convexa de  $F \setminus \{p\}$  es un subconjunto propio del politopo.



**Definición 1.1.13.** Un *cono* es la envolvente convexa de un conjunto de rayos con vértice fijo, entendido como rayo una semirrecta con origen en dicho vértice.

**Definición 1.1.14.** Un *cono racional*  $\mathcal{K}_p$  con vértice  $p$  es la envolvente convexa de un conjunto finito  $S$  de rayos que parten de  $p$  (punto reticular), y que cada uno de ellos tiene al menos otro punto reticular diferente de  $p$ .

**Definición 1.1.15.** Un cono  $\mathcal{K}_p$  se dice que es un *cono fuertemente convexo* si existen hiperplanos que pasan por  $v$  y dejan todo  $\mathcal{K}_p$  excepto a  $p$  en uno de los semiespacios que determina el hiperplano.

**Definición 1.1.16.** Un *cono cerrado*  $\mathcal{K}$  es la intersección finita de semiespacios cerrados cuyos hiperplanos límites tienen puntos en común.

**Definición 1.1.17.** Un *cono vectorial* es aquel cuyo vértice es el origen.

**Definición 1.1.18.** Un *cono regular* es un cono vectorial y racional  $\mathcal{K}$  que es la envolvente convexa en  $\mathbb{R}^d$ , con origen en un mismo punto, de las  $d$  semirrectas racionales definidas por las  $d$ -uplas de una base del retículo  $\mathbb{Z}^d$ . Dichas bases son exactamente las dadas por los vectores de las filas de una matriz  $A=(a_{ij})_{d \times d}$  con coeficientes en  $\mathbb{Z}$  y cuyo determinante es  $\pm 1$ . Los  $d$  rayos que definen un cono vectorial son sus aristas. Dentro de cada subretículo de  $\mathbb{Z}^d$  de dimensión  $k \leq d$  hay conos regulares de dimensión  $k$ .

**Definición 1.1.19.** Un *cono poliédrico* es la intersección de un número finito de semiespacios afines cerrados de  $E$ , definidos por hiperplanos cuyas ecuaciones lineales tienen coeficientes racionales (pudiendo ser enteros), tal que todos los semiespacios contengan al menos un punto en común. Si se elimina la condición de tener un punto en común, entre los conos poliédricos se pueden considerar como caso degenerado los politopos. También se puede considerar como cono poliédrico la intersección de una cantidad vacía de semiespacios cerrados, que no es otra cosa que  $\mathbb{R}^d$  y, por tanto,  $\mathbb{R}^d$  también es un cono poliédrico.

**Definición 1.1.20.** El *vértice* de un cono poliédrico  $\mathcal{K}$  es la intersección no vacía de los hiperplanos afines, cuyos subespacios definen  $\mathcal{K}$ . Esta intersección es una variedad lineal afín  $T$ , la cual es la mayor subvariedad afín entre las que están contenidas en  $\mathcal{K}$ .

Los vértices de la intersección son racionales porque son solución de sistemas de ecuaciones lineales homogéneos y, por consiguiente, sus ecuaciones se definen sobre los racionales.

Cuando el vértice de  $\mathcal{K}$  existe, el cono es no acotado. Si se toma cualquier punto  $p$  del vértice se tiene que  $\mathcal{K}=p+\mathbf{K}$  y que  $T=p+\mathbf{T}$ . Donde  $\mathbf{K}$  es el cono vectorial de  $\mathbf{V}$  dado por las desigualdades homogéneas de las no homogéneas que definen  $\mathcal{K}$ . Así mismo, el subespacio vectorial  $\mathbf{T}$  de  $\mathbf{V}$  es el vértice de  $\mathbf{K}$ .

**Definición 1.1.21.** Una semirrecta es *racional* si su origen es un punto reticular de  $E$  y si tiene un vector director también reticular en  $\mathbf{V}$ , es decir de coordenadas en  $\mathbb{Z}^d$ ; cada semirrecta está determinada por el vector director reticular de módulo mínimo (se caracteriza entre los vectores directores reticulares porque sus coordenadas tienen máximo común divisor igual a 1).

## 1.2. Ejemplos fórmula de Brion

Empezaremos con algunos ejemplos básicos, para familiarizarnos con los conceptos y la notación.

Supongamos que queremos realizar una lista con todos los naturales mayores que 0. Aunque habría varias formas, una sería la siguiente:

$$x^1 + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{k>0} x^k = \frac{x}{1-x} \quad (1.1)$$

Ahora vamos a hacer una lista con todos los enteros menores o iguales que 4:

$$\dots + x^{-1} + x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = \sum_{k \leq 4} x^k = \frac{x^4}{1-x^{-1}} \quad (1.2)$$

Sumando ambas funciones racionales, los elementos laterales se cancelan:

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x^4}{1-x^{-1}} = \frac{x}{1-x} + \frac{x^5}{x-1} = \frac{x-x^5}{1-x} = x + x^2 + x^3 + x^4 \quad (1.3)$$

Esta suma de funciones racionales representa cómo dos series infinitas sumadas pueden dar una serie finita en forma de polinomio. Esto es una primera visión del Teorema de Michel Brion. Podemos ver (1.1) como una función para enumerar los enteros positivos y (1.2) como una función para listar los puntos enteros del intervalo  $(-\infty, 4]$ . En la siguiente figura a la izquierda tenemos una ilustración de esta aritmética.

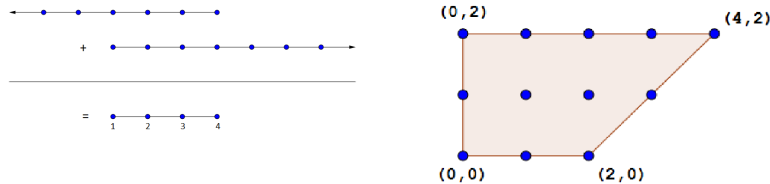
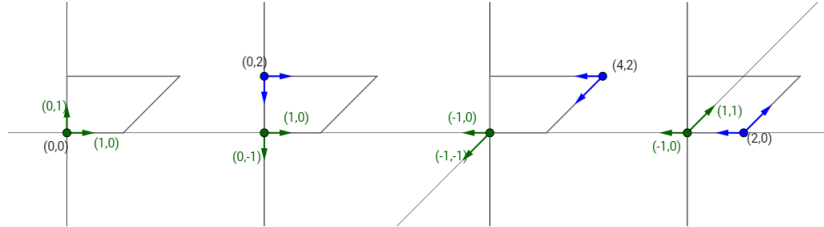


Figura 1.1: Politopos

Ahora vamos a ver otro sencillo ejemplo en una dimensión mayor. Consideramos el cuadrilátero  $\mathcal{Q}$  con vértices  $(0,0)$ ,  $(0,2)$ ,  $(4,2)$  y  $(2,0)$ , ilustrado

en Figura 1.1 a la derecha. La analogía con las funciones generadoras (1.1) y (1.2), es que la función generadora de cada cono en cada vértice está generada por las aristas que concurren en esos vértices.



Las dos aristas que concurren en el origen generan el primer cuadrante no negativo, el cual tiene como función generadora

$$\sum_{m,n \geq 0} x^m y^n = \sum_{m \geq 0} x^m \cdot \sum_{n \geq 0} y^n = \frac{1}{(1-x)} \cdot \frac{1}{(1-y)} = \frac{1}{(1-x)(1-y)}$$

Las dos aristas que concurren en  $(0, 2)$  generan el cono  $(0, 2) + \mathbb{R}_{\geq 0}(0, -2) + \mathbb{R}_{\geq 0}(4, 0)$  con la función generadora

$$\frac{y^2}{(1-x)(1-y^{-1})}$$

El tercer cono racional es  $(4, 2) + \mathbb{R}_{\geq 0}(-4, 0) + \mathbb{R}_{\geq 0}(-2, -2)$ , el cual tiene la función generadora

$$\frac{x^4 y^2}{(1-x^{-1})(1-x^{-1}y^{-1})}$$

Finalmente, el cuarto cono racional es  $(2, 0) + \mathbb{R}_{\geq 0}(2, 2) + \mathbb{R}_{\geq 0}(-2, 0)$ , con función generadora

$$\frac{x^2}{(1-xy)(1-x^{-1})}$$

Basándonos en los cálculos realizados en una dimensión del ejemplo anterior, sumamos las funciones racionales anteriores, obtenemos el polinomio indicador reticular de  $\mathcal{Q}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1-x)(1-y)} + \frac{y^2}{(1-x)(1-y^{-1})} + \frac{x^4 y^2}{(1-x^{-1})(1-x^{-1}y^{-1})} + \frac{x^2}{(1-xy)(1-x^{-1})} \\ &= y^2 + xy^2 + x^2 y^2 + x^3 y^2 + x^4 y^2 + y + xy + x^2 y + x^3 y + 1 + x + x^2 \end{aligned}$$

La suma de funciones racionales de nuevo resulta ser un polinomio, el cual a partir de sus exponentes nos proporciona los puntos reticulares que están contenidos en el politopo  $\mathcal{Q}$ . En estos resultados se basa el Teorema de Brion.

### 1.3. Teorema de Brion

Dado un politopo reticular  $\mathcal{P}$ , para cada vértice  $p$  de  $\mathcal{P}$  se considera el cono  $\mathcal{K}_p$  con vértice  $p$  que proyecta el politopo  $\mathcal{P}$  desde  $p$ . Los conos  $\mathcal{K}_p$  son racionales y positivos. Se considera el polinomio indicador reticular  $\sigma_{\mathcal{P}}$  de  $\mathcal{P}$  y las expresiones racionales  $\sigma_{\mathcal{K}_p}$  de las series indicatrices reticulares de los conos  $\mathcal{K}_p$ .

**Definición 1.3.1.** El *polinomio indicador reticular*  $\sigma_{\mathcal{P}}$  de  $\mathcal{P}$  es el polinomio dado por la suma de todos los monomios de Laurent  $M$  con coeficientes 1, cuyas  $d$ -uplas de exponentes están en  $\mathcal{P}$ .

**Definición 1.3.2.** El *soporte* de un polinomio de Laurent  $p$  es el conjunto de los puntos reticulares que son exponentes de los monomios que aparecen con coeficiente no nulo en  $p$ .

Es evidente que el soporte de  $\sigma_{\mathcal{P}}$  es el conjunto de puntos reticulares que están dentro de  $\mathcal{P}$ .

**Definición 1.3.3.** El *cono tangente* a un vértice  $p$  es aquel que contiene al politopo y es intersección de todos los semiespacios determinados por las facetas (caras codimensión 1 del politopo) que contienen al vértice.

**Teorema 1.3.1 (BRION).** *Se tiene que  $\sigma_{\mathcal{P}}$  es la suma extendida a todos los vértices  $p$  de  $\mathcal{P}$  de las funciones generadoras racionales  $\sigma_{\mathcal{K}_p}$ , siendo  $\mathcal{K}_p$  los conos tangentes a cada vértice  $p$  del politopo.*

Este teorema, como anteriormente se ha mencionado, permite calcular los puntos reticulares de un politopo a partir de la expresión como suma algebraica de conos regulares, de las series indicatrices reticulares de los conos asociados a los vértices del politopo.

El cono  $\mathcal{K}_p$  con vértice  $p$  es el cono con pico en  $p$  y vectores generadores las direcciones que emanan de  $p$ . La función generadora para cada cono (asegurándonos que  $\mathcal{Q}$  es un politopo reticular) es la función racional del término de la izquierda determinada por la serie de Laurent del término de la derecha (que es la serie indicatriz reticular del cono) en la siguiente fórmula

$$\sigma_{\mathcal{K}_p}(\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{K}_p \cap \mathbb{Z}^d} \mathbf{x}^{\mathbf{m}} \quad (1.4)$$

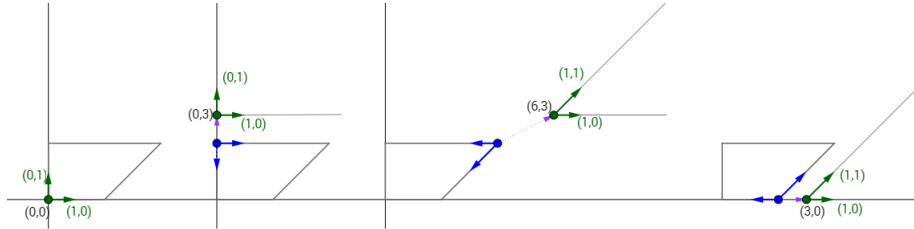
Hemos abreviado  $\mathbf{x}^{\mathbf{m}}$  por  $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_d^{m_d}$ , siendo  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_d)$ . El teorema de Brion viene a decir que las funciones racionales que representan los puntos con coordenadas enteras en cada cono, sumadas dan el polinomio  $\sigma_{\mathcal{P}}$  que cifra los puntos reticulares de  $\mathcal{P}$ , osea el polinomio indicador reticular de  $\mathcal{P}$ :

$$\sigma_{\mathcal{P}}(\mathbf{x}) = \sum_{p \text{ vértice de } \mathcal{P}} \sigma_{\mathcal{K}_p}(\mathbf{x}) \quad (1.5)$$

### 1.4. Ejemplos fórmula de Lawrence y Varchenko

Un segundo teorema, el cual muestra un colapso similar de las funciones generadoras de los conos, es debido (separadamente) a James Lawrence y a Alexander Varchenko. Vamos a ilustrar su método con el ejemplo anterior del cuadrilátero  $\mathcal{Q}$ .

Elegimos un vector  $\xi$ , el cual no es perpendicular en cada vértice  $p$  a ninguna de las aristas de  $\mathcal{Q}$  que confluyen en  $p$ . Por ejemplo, podemos tomar  $\xi = (2, 1)$ . Ahora, en cada vértice  $p$  de  $\mathcal{Q}$ , formamos un cono (no necesariamente cerrado) generado por los vectores directores  $\mathbf{w}$  de las  $d$  aristas como sigue. Si  $\mathbf{w} \cdot \xi > 0$  entonces tomamos el span no negativo y si  $\mathbf{w} \cdot \xi < 0$ , tomamos el span negativo. Los conos de Varchenko siempre estarán contenidos dentro del primer hiper-octante (primer cuadrante para  $d=2$ ).



El vértice  $(0, 0)$  no se desplaza porque ninguno de los vectores primitivos de las aristas cambia de sentido de un cono al otro, y el cono de Varchenko es de nuevo el cuadrante no negativo como cono cerrado. La función racional en este caso es, por tanto,

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)}$$

En el vértice  $(0, 2)$  los vectores direcciones de las aristas son  $(0, -2)$  y  $(4, 0)$ . El primero tiene producto negativo con  $\xi$  y el segundo tiene producto positivo, esto se traduce en que la arista horizontal no cambia de sentido el vector primitivo  $[(1,0)]$ , pero la arista vertical cambia de sentido del cono de Brion (vector primitivo  $(0,-1)$ ) al cono de Varchenko (vector primitivo  $(0,1)$ ). Así que obtenemos el cono medio abierto  $(0, 2) + \mathbb{R}_{<0}(0, -2) + \mathbb{R}_{\geq 0}(4, 0) = (0, 2) + \mathbb{R}_{>0}(0, 2) + \mathbb{R}_{\geq 0}(4, 0)$ . Luego, se traslada el vértice  $(0, 2)$  por el vector  $(0, 1)$ , siendo el nuevo vértice para el cono de Varchenko el punto  $(0, 3)$ . La función racional es

$$\frac{y^3}{(1-x)(1-y)}$$

En el vértice  $(4, 2)$  los vectores direcciones de las aristas son  $(-2, -2)$  y  $(-4, 0)$ , ambas tienen producto negativo con  $\xi$ , por tanto los dos vectores

primitivos de las dos aristas cambian de sentido, es decir, los vectores primitivos  $(-1, 0)$  y  $(-1, -1)$  de las aristas del cono de Brion han cambiado de sentido y son  $(1, 0)$  y  $(1, 1)$  en el cono de Varchenko. Luego obtenemos el cono abierto  $(4, 2) + \mathbb{R}_{>0}(4, 0) + \mathbb{R}_{>0}(2, 2)$  Entonces el nuevo vértice para el cono de Varchenko es el trasladado del vértice  $(4, 2)$  por el vector  $(1, 0) + (1, 1)$ , de forma que el nuevo vértice es  $(6, 3)$ . La función racional de en este vértice es

$$\frac{x^6 y^3}{(1 - xy)(1 - x)}$$

Por último, en el vértice  $(2, 0)$  los vectores directores de las aristas son  $(-2, 0)$  y  $(2, 2)$ . El primero tiene producto negativo con  $\xi$  y el segundo positivo, luego no cambia de sentido el vector primitivo  $(1, 1)$  de la arista oblicua, pero sí cambia de sentido el vector  $(-1, 0)$  del cono de Brion al vector  $(1, 0)$  del de Varchenko. Así obtenemos el cono medio abierto  $(2, 0) + \mathbb{R}_{>0}(2, 0) + \mathbb{R}_{\geq 0}(2, 2)$  Entonces se traslada el vértice  $(2, 0)$  por el vector  $(1, 0)$ , obteniéndose el punto  $(3, 0)$  que es el nuevo vértice para el cono de Varchenko. La función racional en este caso es

$$\frac{x^3}{(1 - x)(1 - xy)}$$

En los nuevos vértices  $(0, 0)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(3, 0)$  y  $(6, 3)$ , los conos de Varchenko son cerrados y, por tanto, se tratarán igual que los conos de Brion (que siempre son cerrados). Luego las funciones racionales son respectivamente

$$\frac{1}{(1 - x)(1 - y)}, \frac{y^3}{(1 - x)(1 - y)}, \frac{x^6 y^3}{(1 - xy)(1 - y)}, \frac{x^3}{(1 - x)(1 - xy)}$$

y sus signos correspondientes en la fórmula de Varchenko son  $+1, -1, +1, -1$ , es decir signo  $+$  o  $-$ , según el número de cambios de sentido de los vectores primitivos sea par o impar. Obtenemos el polinomio indicador reticular de  $\mathcal{Q}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1 - x)(1 - y)} - \frac{y^3}{(1 - x)(1 - y)} + \frac{x^6 y^3}{(1 - xy)(1 - y)} - \frac{x^3}{(1 - x)(1 - xy)} \\ & = y^2 + xy^2 + x^2 y^2 + x^3 y^2 + x^4 y^2 + y + xy + x^2 y + x^3 y + 1 + x + x^2 \end{aligned}$$

Esta suma de funciones racionales termina siendo de nuevo un polinomio que codifica los puntos reticulares de  $\mathcal{Q}$ . Esto debería ser claro aquí, los puntos reticulares que están en el cuadrante no negativo son contados con signo  $\pm$  dependiendo del cono en el que estén y estos coeficientes se cancelan excepto para los puntos reticulares de  $\mathcal{Q}$ .

La identidad ilustrada en este ejemplo sirve para cualquier politopo simple.

## 1.5. Fórmula de Lawrence-Varchenko

Dado un politopo simple  $\mathcal{P}$ , elegimos un vector  $\xi \in \mathbb{R}^d$  que no sea perpendicular en cada vértice  $p$  a ninguna de las aristas que confluyen en  $p$ . Sea  $E_p^+(\xi)$  el conjunto de vectores direccionales  $\mathbf{w}$  de las aristas que concurren en  $p$  con  $\mathbf{w} \cdot \xi > 0$  y  $E_p^-(\xi)$  aquellos que  $\mathbf{w} \cdot \xi < 0$ . El cono de Varchenko con vértice  $p$  se define como sigue

$$\mathcal{K}_{\xi,p} := p + \sum_{\mathbf{w} \in E_p^+(\xi)} \mathbb{R}_{\geq 0} \mathbf{w} + \sum_{\mathbf{w} \in E_p^-(\xi)} \mathbb{R}_{< 0} \mathbf{w} \quad (1.6)$$

Esta es la analogía con los conos de nuestro ejemplo previo. La Fórmula de Lawrence-Varchenko nos dice que sumar las funciones racionales de estos conos con los signos apropiados resulta ser el polinomio  $\sigma_{\mathcal{P}}(x)$  que cifra los puntos con coordenadas enteras de  $\mathcal{P}$ , es decir, el polinomio indicador reticular de  $\mathcal{P}$

$$\sigma_{\mathcal{P}}(x) = \sum_{p \text{ vértice de } \mathcal{P}} (-1)^{|E_p^-(\xi)|} \sigma_{\mathcal{K}_{\xi,p}}(x) \quad (1.7)$$

Aquí,  $\sigma_{\mathcal{K}_{\xi,p}}(x)$  es la función generadora que codifica los puntos reticulares del cono  $\mathcal{K}_{\xi,p}$ .

## 1.6. Convergencia

Cabe destacar que los conos de Varchenko tienen un dominio de convergencia común al contrario de lo que ocurre con los conos de Brion. Explicaremos esto con más detalle.

Los conos de Varchenko, debido a cómo son definidos, son todos subconos del primer hiper-octante (primer cuadrante para  $d = 2$ ) y, por ello, las series indicatrices de sus puntos reticulares son todas ellas series de potencias. Debido a que estas series de potencias son los desarrollos en serie de funciones racionales cuyo denominador no se anula en el origen, todas ellas convergen. Los dominios de convergencia de cada una de ellas contienen entornos abiertos de  $\mathbb{R}^d$  que contienen al origen. Esto lo que viene a decir es que, si vemos las series como funciones, todas ellas están definidas en un entorno abierto del origen y, por lo tanto, se pueden sumar o restar como funciones.

En el caso de los conos de Brion esto no sucede. Por ejemplo, para  $d = 2$  un cono contenido en el tercer cuadrante define una función analítica en un abierto del tipo  $|x^{-1}| < a$ ,  $|y^{-1}| < b$  ( $a, b > 0$  pequeños), es decir en un abierto del tipo  $|x| > \frac{1}{a}$ ,  $|y| > \frac{1}{b}$  que es un entorno del punto del infinito de  $\mathbb{R}^d$ . Si tomas el segundo o cuarto cuadrante, los dominios de convergencia

contienen abiertos del tipo  $|x| > \frac{1}{a}, |y| > b$  o  $|x| > a, |y| > \frac{1}{b}$  que son entornos de los puntos del infinito del eje  $x$  o del eje  $y$  respectivamente, en la compactificación del espacio proyectivo de  $\mathbb{R}^d$ . Estos cuatro tipos de abiertos si  $a, b$  son pequeños no llegan a cortarse y por consiguiente no se pueden sumar las funciones analíticas de conos de distintos cuadrantes. Pero la fórmula de Brion se basa en que, aunque las series converjan en abiertos dispares (entornos de distintos puntos en el origen o puntos del infinito) las funciones analíticas que definen se extienden a funciones racionales definidas en todo  $\mathbb{R}^d$ . Las funciones racionales están definidas en abiertos mucho más grandes, de hecho los complementarios de los conjuntos de ceros de los polinomios de los denominadores. Si tienes un número finito de tales funciones racionales (en la fórmula de Brion hay una por cada vértice), estas funciones tienen como abierto común el complementario de la unión del conjunto de ceros de los denominadores de todas ellas, en otras palabras el conjunto de ceros del producto de todos los denominadores. Este abierto (llamado abierto de Zariski) es denso en  $\mathbb{R}^d$ , entonces se pueden sumar, no como series convergentes, pero sí como funciones racionales. Por ello la convergencia no es necesaria para aplicar la fórmula.



## Capítulo 2

# Demostraciones

La prueba original de Brion es técnica y no elemental, se trata de aplicar “el teorema de Lefschetz-Riemann-Roch en K-teoría equivariante a variedades tóricas no singulares”. Afortunadamente, tanto la fórmula de Brion como la de Lawrence-Varchenko ahora tienen demostraciones más sencillas y serán detalladas a lo largo de este capítulo.

### 2.1. Cono simplicial

**Definición 2.1.1.** Un *cono simplicial racional* en  $\mathbb{R}^d$  tiene la forma

$$\mathcal{K} := \left\{ \mathbf{p} + \sum_{i=1}^d \lambda_i \mathbf{w}_i : \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\} = \mathbf{p} + \sum_{i=1}^d \mathbb{R}_{\geq 0} \mathbf{w}_i$$

donde  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_d \in \mathbb{Z}^d$  son linealmente independientes. Este cono es empaquetado por las  $(\mathbb{N}\mathbf{w}_1, \dots, \mathbb{N}\mathbf{w}_d)$ -traslaciones del paralelepípedo medio abierto

$$\mathcal{P} := \left\{ \mathbf{p} + \sum_{i=1}^d \lambda_i \mathbf{w}_i : 0 \leq \lambda_i < 1 \right\}$$

**Definición 2.1.2.** Un *paralelepípedo fundamental*  $\mathcal{P}$  es un conjunto de puntos tal que al ser desplazados estos por cada uno de los opuestos de los vectores directores primitivos de las aristas del cono se sale del mismo.

Es cierto también que si consideramos puntos reticulares contenidos en el paralelepípedo fundamental, y sucesivos desplazamientos de estos por sucesiones arbitrarias de vectores primitivos de las aristas del cono, obtenemos los puntos reticulares dentro del cono.

La función generadora para  $\mathcal{P}$  es la expresión polinomial

$$\sigma_{\mathcal{P}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d} \mathbf{x}^{\mathbf{m}},$$

así como la función generadora de  $\mathcal{K}$  es

$$\sigma_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}) = \sigma_{\mathcal{P}}(\mathbf{x}) \cdot \sum_{\alpha \in \mathbb{N}\mathbf{w}_1, \dots, \mathbb{N}\mathbf{w}_d} x^\alpha = \frac{\sigma_{\mathcal{P}}(\mathbf{x})}{(1 - x^{\mathbf{w}_1}) \dots (1 - x^{\mathbf{w}_d})} \quad (2.1)$$

que es una función racional. Esta fórmula y su demostración no requieren que el vértice  $\mathbf{p}$  sea racional, pero sí que los vectores generadores  $\mathbf{w}_i$  del cono sean linealmente independientes en  $\mathbb{Z}^d$ .

Un cono racional  $\mathcal{K}$  con vértice  $\mathbf{v}$  y generadores  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_d \in \mathbb{Z}^d$  tiene la forma

$$\mathcal{K} = \mathbf{v} + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{w}_1 + \dots + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{w}_d \quad (2.2)$$

**Ejemplo 2.1.1.** Tomamos el cono  $\mathcal{K} = (0, 0) + \mathbb{R}_{\geq 0}(0, 1) + \mathbb{R}_{\geq 0}(2, 1)$ . Los círculos abiertos de la izquierda en el dibujo Figura 2.1 representan el semigrupo  $\mathbb{N}(0, 1) + \mathbb{N}(2, 1)$ , el cual es un subsemigrupo de los puntos reticulares  $\mathcal{K} \cap \mathbb{Z}^2$  en  $\mathcal{K}$ . En Figura 2.1 el dibujo de la derecha muestra cómo trasladar el paralelepípedo fundamental medio abierto  $\mathcal{P}$  por este subsemigrupo cubriendo  $\mathcal{K}$ .

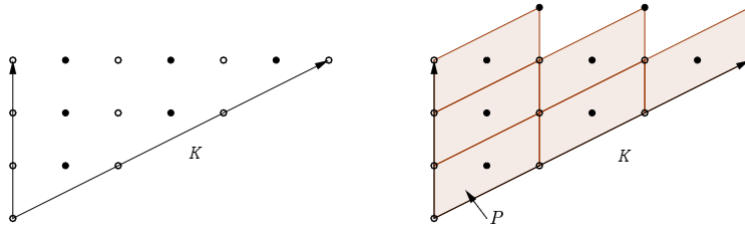


Figura 2.1: Traslado del paralelepípedo fundamental de  $\mathcal{K}$  por él mismo

Esto nos da la fórmula:

$$\sigma_{\mathcal{K}}(x) = \sigma_{\mathcal{P}}(x) \cdot \sum_{m,n \geq 0} x^m (x^2 y)^n = \frac{1 + xy}{(1 - x)(1 - x^2 y)}$$

ya que el paralelepípedo fundamental  $\mathcal{P}$  contiene los puntos reticulares  $(0, 0)$  y  $(1, 1)$  y  $\sigma_{\mathcal{P}}(x) = (1 + xy)$ .

**Definición 2.1.3.** Un cono es *fuertemente convexo* si existe un vector  $\xi \in \mathbb{R}^d$  con  $\xi \cdot \mathbf{w}_i > 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$

**Definición 2.1.4.** Un cono es *fuertemente convexo* si existen hiperplanos que dejan todo el cono excepto su vértice en el interior de uno de los semi-espacios determinado por el hiperplano.

Un cono fuertemente convexo se caracteriza por el hecho de que su vértice sólo lo forma un punto.

**Proposición 2.1.1.** *Todo cono  $\mathcal{K}$  cerrado fuertemente convexo poliédrico se descompone como unión de conos simpliciales.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{K}$  un cono fuertemente convexo poliédrico. Consideramos un vector director para cada arista del cono. Este conjunto de vectores  $\mathbf{W}$  es finito porque el cono es poliédrico. Tomamos un subconjunto maximal de  $\mathbf{W}$ , es decir, tomamos un subconjunto de vectores  $\mathbf{Z}$  que formen una base del espacio generado por los vectores directores de todas las aristas. Las aristas asociadas a este subconjunto de vectores  $\mathbf{Z}$  definen un cono simplicial. Si este cono simplicial fuese todo el cono original, entonces habríamos acabado. Si no fuera así, tomamos una arista externa al cono simplicial. Su vector director puede sustituirse por uno conveniente de la base anterior formando con los restantes otra base y, por tanto, las aristas correspondientes formarían otro cono simplicial. Estos conos tendrán en común una faceta. Si la unión de ambos conos simpliciales constituye el cono original, ya tenemos la descomposición, si no se toma una arista no contenida en esa unión y continuando en esta línea se acaban construyendo los conos simpliciales de la descomposición requerida.

□

Debido a la proposición anterior, es posible descomponer  $\mathcal{K}$  en conos simpliciales  $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_l$ . Cada par de conos simpliciales tienen como intersección una cara de cada uno de ellos. Así mismo, estos conos tienen interiores disjuntos dos a dos. El interior de un cono es el interior topológico, con la topología del mínimo espacio afín que contiene al cono. También se puede considerar el interior de un cono poliédrico al cono dado por las desigualdades estrictas de un número finito de semiespacios abiertos.

**Definición 2.1.5.** Sea  $\mathcal{K}$  un cono y  $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_l$  su descomposición en conos simpliciales. Decimos que esta descomposición es una *descomposición irracional* si alguno de los conos de la descomposición  $\mathcal{K}_i = \mathbf{p} + \mathbf{K}_i$ , o bien  $\mathbf{p}$  no tiene coordenadas enteras o bien las tiene, pero entonces el cono vectorial  $\mathbf{K}_i$  no es racional.

Nuestro objetivo es sumar las funciones generadoras de los  $\mathcal{K}_i$  y así obtener la función generadora de  $\mathcal{K}$ . Desafortunadamente, tenemos el inconveniente de que algunos conos pueden tener puntos reticulares en común, lo que conllevaría contar algún punto de más y la función generadora  $\sigma_{\mathcal{K}}(\mathbf{x})$  sería errónea. Una forma de evitar este problema es llevar a cabo la traslación de todos los conos. Expliquémoslo con precisión: Existe un vector  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^d$  tal que

$$\mathcal{K} \cap \mathbb{Z}^d = (\mathbf{s} + \mathcal{K}) \cap \mathbb{Z}^d \quad (2.3)$$

de esta forma las caras de los conos  $\mathbf{s} + \mathcal{K}_1, \dots, \mathbf{s} + \mathcal{K}_l$  no contienen ningún punto reticular. Esto proporciona la *descomposición irracional* disjunta

$$\mathcal{K} \cap \mathbb{Z}^d = (\mathbf{s} + \mathcal{K}_1) \cap \mathbb{Z}^d \sqcup \dots \sqcup (\mathbf{s} + \mathcal{K}_l) \cap \mathbb{Z}^d \quad (2.4)$$

y entonces es claro que

$$\sigma_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{K} \cap \mathbb{Z}^d} x^{\mathbf{m}} = \sum_{i=1}^l \sigma_{\mathbf{s} + \mathcal{K}_i}(\mathbf{x}) \quad (2.5)$$

es una función racional. La descomposición es irracional ya que, siendo  $\mathcal{K} = \mathbf{p} + \mathbf{K}$ , el cono se ha desplazado por un vector  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^d$  apropiado para que  $\mathbf{p}$  no sea racional.

**Ejemplo 2.1.2.** Supongamos que  $\mathcal{K}$  es el cono en  $\mathbb{R}^3$  con vértice el origen y generadores

$$\mathbf{w}_1 = (1, 0, 1), \quad \mathbf{w}_2 = (0, 1, 1), \quad \mathbf{w}_3 = (0, -1, 1), \quad \text{y} \quad \mathbf{w}_4 = (-1, 0, 1).$$

Sea  $\mathcal{K}_1$  el cono simplicial con generadores  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$  y  $\mathcal{K}_2$  el cono simplicial con generadores  $\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4$ , los cuales descomponen a  $\mathcal{K}$  en conos simpliciales. Estos conos son la envolvente convexa de semirrectas independientes con mismo origen, cuyas aristas son racionales con vectores primitivos linealmente independientes. Si tomamos  $\mathbf{s} = (\frac{1}{8}, 0, -\frac{1}{3})$ , entonces (2.3) se mantiene y ninguna cara de  $\mathbf{s} + \mathcal{K}_1$  o de  $\mathbf{s} + \mathcal{K}_2$  contiene puntos reticulares. Disponemos estos conos juntos mostrando los puntos reticulares que tienen la coordenada  $z$  valor 0 o 1 y están dentro de  $\mathbf{s} + \mathcal{K}$ .

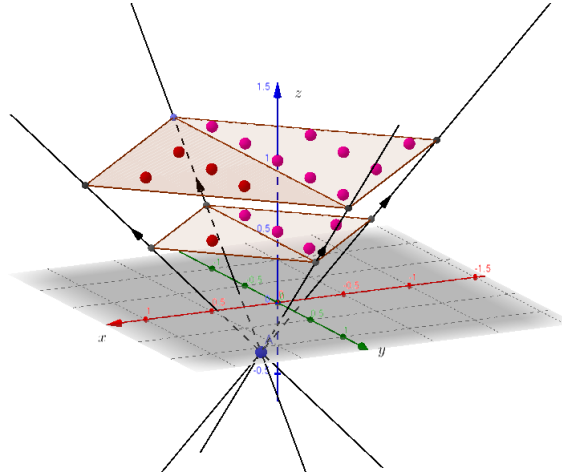


Figura 2.2:  $\mathbf{s} + \mathcal{K}_1$  y  $\mathbf{s} + \mathcal{K}_2$  no comparten puntos reticulares

El cono  $\mathbf{s} + \mathcal{K}_1$  contiene los 5 puntos rojos, mientras que  $\mathbf{s} + \mathcal{K}_2$  contiene al resto de puntos resaltados. El vértice de ambos conos es el punto  $\mathbf{s} = (\frac{1}{8}, 0, -\frac{1}{3})$ . Sus funciones generadoras son

$$\sigma_{\mathbf{s} + \mathcal{K}_1}(\mathbf{x}) = \frac{xz + xz^2}{(1 - yz)(1 - y^{-1}z)(1 - xz)},$$

$$\sigma_{\mathbf{s}+\mathcal{K}_2}(\mathbf{x}) = \frac{1+z}{(1-yz)(1-y^{-1}z)(1-x^{-1}z)},$$

$$\sigma_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}) = \frac{(1+z-z^2-z^3)}{(1-yz)(1-y^{-1}z)(1-xz)(1-x^{-1}z)}$$

Veamos de dónde provienen estas funciones racionales. Para conseguir la expresión de  $\sigma_{\mathbf{s}+\mathcal{K}_1}(x)$  primero necesitamos saber cuál es su paralelepípedo fundamental. En este caso  $\mathcal{P}_{\mathbf{s}+\mathcal{K}_1}$ , el paralelepípedo fundamental de  $\mathbf{s} + \mathcal{K}_1$ , es

$$\mathcal{P}_{\mathbf{s}+\mathcal{K}_1} = \{(a, b, c) \in \mathbf{s}+\mathcal{K}_1 : (a, b, c) - \mathbf{w}_1, (a, b, c) - \mathbf{w}_2, (a, b, c) - \mathbf{w}_3 \notin \mathbf{s}+\mathcal{K}_1\} =$$

$$= \left\{ \left( \frac{1}{8}, 0, -\frac{1}{3} \right) + v(1, 0, 1) + t(0, 1, 1) + u(0, -1, 1) \in \mathbb{Z} : v, t, u \in [0, 1) \right\}$$

Para calcular los puntos reticulares en el  $\mathcal{P}_{\mathbf{s}+\mathcal{K}_1}$  son condiciones necesarias que  $v = \frac{7}{8}$  (ya que para la primera coordenada de los puntos se tiene  $\frac{1}{8} + v \in \mathbb{Z}$  y  $v \in [0, 1)$ ) y que  $t = u$  (pues  $t - u \in \mathbb{Z}$  y  $t, u \in [0, 1)$ , es decir,  $t - u = 0$ ), luego  $-\frac{1}{3} + \frac{7}{8} + 2u = \frac{13}{24} + 2u \in \mathbb{Z}$ , así que  $13 + 48u \equiv 0 \pmod{24}$  y, para que esto ocurra solo tenemos dos posibilidades para  $u \in [0, 1)$ :  $u = \frac{11}{48}$  y  $u = \frac{35}{48}$ . Estas dos condiciones dan lugar a dos únicos puntos reticulares en el paralelepípedo fundamental:  $(1, 0, 1)$  y  $(1, 0, 2)$ . Finalmente haciendo uso de (2.1) conseguimos  $\sigma_{\mathbf{s}+\mathcal{K}_1}(x)$ . Para el caso de  $\sigma_{\mathbf{s}+\mathcal{K}_2}(\mathbf{x})$  se razona de forma análoga al anterior.

$$\mathcal{P}_{\mathbf{s}+\mathcal{K}_2} = \left\{ \left( \frac{1}{8}, 0, -\frac{1}{3} \right) + v(0, 1, 1) + t(0, -1, 1) + u(-1, 0, 1) \in \mathbb{Z} : v, t, u \in [0, 1) \right\}$$

Para calcular estos puntos reticulares son condiciones necesarias que  $u = \frac{1}{8}$ ,  $t = v$  y  $-\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + 2u = -\frac{5}{24} + 2u$  sea entero; por lo tanto hay de nuevo dos posibilidades para  $u$  en  $[0, 1)$ :  $u = \frac{5}{48}$  y  $u = \frac{29}{48}$ . Estas condiciones nos proporcionan los dos puntos reticulares del paralelepípedo fundamental:  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ . Por consiguiente, el numerador de  $\sigma_{\mathbf{s}+\mathcal{K}_2}(\mathbf{x})$  ha de ser  $1 + z$ . Finalmente,  $\sigma_{\mathcal{K}}(\mathbf{x})$  se obtiene como suma de las funciones racionales anteriores  $\sigma_{\mathbf{s}+\mathcal{K}_1} + \sigma_{\mathbf{s}+\mathcal{K}_2} = \sigma_{\mathcal{K}}(\mathbf{x})$

Mientras que los conos que aparecen en la fórmula de Lawrence-Varchenko son todos simpliciales y los de la fórmula de Brion convexos, nosotros vamos a usar conos más generales en nuestra demostración.

Dado un hiperplano  $H$  cualquiera  $H = \{(x_1, \dots, x_n) : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b\}$ , a partir de él tenemos dos semiespacios determinados, uno dado por

$$S_1 = \{(x_1, \dots, x_n) : a_1x_1 + \dots + a_nx_n \leq b\}$$

y otro dado por

$$S_2 = \{(x_1, \dots, x_n) : a_1x_1 + \dots + a_nx_n \geq b\}$$

El vértice de cada uno de los dos subespacios es el hiperplano afín  $H$ . Este vértice tiene como espacio de direcciones  $\mathbf{W}$  de  $H$  al hiperplano lineal  $\mathbf{H}$  dado por  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ . Los vectores de  $\mathbf{W}$  son exactamente los vectores tales que  $\mathbf{w} + S = S$  para cada uno de los dos subespacios que define  $H$ .

El vértice de  $\mathcal{K}$  es la intersección de estos hiperplanos, el cual es un subespacio lineal afín.

La función indicatriz para los puntos reticulares en  $\mathcal{K}$  es la serie formal de Laurent

$$S_{\mathcal{K}} := \sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{K}} \mathbf{x}^{\mathbf{m}} \quad (2.6)$$

## 2.2. Series de Laurent racionales

Relacionamos estas series formales de Laurent (2.6) con las funciones racionales. Sea  $L$  el módulo de series de Laurent sobre el anillo de polinomios de Laurent  $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ , es decir,  $\mathbb{C}[[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]]$ , entendiendo por  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ . Las series de Laurent no forman un anillo, ya que no está definida la multiplicación. Por ejemplo, no es posible multiplicar  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$  por  $1 + x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + \dots$ , puesto que para cada  $i \in \mathbb{Z}$  hay infinitos pares formados por un monomio de la primera serie y otro de la segunda cuyo producto es  $x^i$  (en concreto, todos los forma  $x^k \cdot x^{i-k}$  con  $k \geq \max(i, 0)$ , para los infinitos valores de  $k$  posibles). Lo que sí es posible es multiplicar un polinomio de Laurent por una serie de Laurent. Por citar un caso,  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$  puede multiplicarse por  $1 + x^{-1} + x^{-2} + x^{-3}$ . Por lo tanto, las series de Laurent no forman un anillo, si no un módulo sobre el anillo de polinomios de Laurent. Aquí las series de Laurent funcionan como vectores y los polinomios como escalares; módulo sobre un anillo es la misma noción que espacio vectorial sobre un cuerpo.

**Definición 2.2.1.** Una serie de Laurent  $s$  define una *serie de Laurent racional*, cuando existen dos polinomios ordinarios  $f, g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$  siendo  $g$  no nulo, tales que se tiene la igualdad  $g \cdot s = f$ .

Una serie de Laurent racional  $s$  se puede definir también a partir de dos polinomios de Laurent  $f$  y  $g$  no nulo, si  $g \cdot s = f$  y, multiplicando ambos miembros por un monomio de exponente suficientemente alto, logramos que los nuevos  $g'$  y  $f'$  sean polinomios ordinarios. Esto será utilizado más adelante en varias ocasiones, luego cabe destacar que usaremos esta notación. Por otro lado, el cuerpo de cocientes del anillo de polinomios de Laurent (también es un dominio de integridad) es el mismo  $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$ . En efecto, esto lo prueba el argumento anterior: si  $g, f$  son polinomios de Laurent,  $g$  no nulo, entonces  $f/g = f'/g'$  donde  $f'$  y  $g'$  son polinomios ordinarios con  $g'$  no nulo.

**Definición 2.2.2.** Sea  $RL$  el conjunto de las series de Laurent que son racionales.

**Proposición 2.2.1.** Sea  $RL$  el conjunto de las series de Laurent que son racionales. Se tiene que  $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}] \subset RL$ .

*Demostración.* Sea  $f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ ,  $f$  no nulo. Entonces existe un monomio  $\mathbf{x}^{\mathbf{m}}$ , con cada componente de  $\mathbf{m}$  suficientemente grande, tal que  $\mathbf{x}^{\mathbf{m}} \cdot f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ . Luego  $f$  pertenece a  $RL$  ya que es una serie de Laurent racional, pues  $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}] \subset \mathbb{C}[[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]]$ .  $\square$

**Proposición 2.2.2.**  $RL$  es un  $L$ -submódulo.

*Demostración.* Para que  $RL$  sea submódulo de  $L$

- (i)  $RL$  es un subgrupo aditivo de  $L$
- (ii) Para todo  $s \in RL$  y para todo  $h \in \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$  se tiene que  $s \cdot h \in RL$

Veámoslo

- (i)
  - $1 \in RL$ . Esto se debe a la proposición anterior, ya que  $1 \in \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}] \subset RL$ .
  - Sean  $s, s' \in RL$ , luego existen  $f, g, f', g'$  polinomios ordinarios con  $g, g'$  no nulos tales que  $g \cdot s = f$  y  $g' \cdot s' = f'$ . Luego multiplicando por  $g'$  y  $g$  respectivamente,  $(g'g) \cdot s = g' \cdot f$  y  $(g'g) \cdot s' = g \cdot f'$  y restando ambas ecuaciones obtenemos  $(gg') \cdot (s - s') = (g' \cdot f - g \cdot f')$ . Por tanto  $s - s'$  es una serie de Laurent racional, pues hemos encontrado  $gg'$  y  $(g' \cdot f - g \cdot f')$  polinomios ordinarios con  $gg'$  no nulo (ambos eran no nulos y  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  es un dominio de integridad).
- (ii) Sea  $s$  un elemento de  $RL$  y  $h$  un elemento de  $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ , entonces existen  $g$  no nulo y  $f$  polinomios ordinarios con  $g \cdot s = f$ . Si  $h = 0$  entonces  $h \cdot s = 0$  y el 0 pertenece a  $RL$ . Ahora supongamos que  $h$  es distinto de 0,  $g(h \cdot s) = h \cdot f$  es un polinomio de Laurent, entonces multiplicando ambos miembros por un monomio con exponente suficientemente grande tenemos que los nuevos  $(hf)'$ ,  $g'$  son polinomios ordinarios y satisfacen  $g'(h \cdot s) = (hf)'$ , luego  $h \cdot s$  pertenece a  $RL$ . De este modo para todo  $s$  elemento de  $RL$  y para todo  $h$  elemento de  $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$  se tiene que  $h \cdot s$  pertenece a  $RL$ .

$\square$

**Definición 2.2.3.** Sea  $PL$  el  $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ -módulo de las series poliédricas de Laurent generado por las series formales  $S_{\mathcal{K}}$  donde  $\mathcal{K}$  es un cono racional simplicial.

Pero  $PL$  no es el conjunto de tales series, ya que sus elementos son de la forma  $s = \sum_i f_i \cdot S_{\mathcal{K}_i}$ , donde los  $f_i$  son elementos de  $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ .

**Proposición 2.2.3.** *PL es un  $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ -submódulo de RL.*

*Demostración.* Probamos los apartados (i) y (ii) de la demostración anterior.

- (i) ■  $1 \in PL$ . Consideremos como el cono  $\mathcal{K}$  el primer hiperoctante, para el cual la serie  $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$  es la suma de todos los monomios con exponentes no negativos y todos ellos con coeficiente 1,  $\mathcal{S}_{\mathcal{K}} = 1 + \mathbf{x} + \mathbf{x}^2 + \mathbf{x}^3 + \dots = \frac{1}{1-\mathbf{x}}$ . La serie  $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$  es un elemento de PL, luego también lo es la serie de Laurent  $1 = (1-x_1) \cdot \dots \cdot (1-x_n) \cdot \mathcal{S}_{\mathcal{K}}$ , ya que PL es un  $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ -módulo y  $(1-x_1) \cdot \dots \cdot (1-x_n)$  es un elemento de  $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ .
- Sean  $s, s' \in PL$ , luego existen  $f_i, g_j$  elementos de  $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$  y  $\mathcal{S}_{\mathcal{K}_i}, \mathcal{S}_{\mathcal{K}_j}$  series de Laurent para  $i \in I, j \in J$  con  $\mathcal{K}_i$  y  $\mathcal{K}_j$  conos racionales, tales que

$$s = \sum_{i \in I} f_i \cdot \mathcal{S}_{\mathcal{K}_i} \quad s' = \sum_{j \in J} g_j \cdot \mathcal{S}_{\mathcal{K}_j}$$

Entonces, es claro que  $s - s' = \sum_{k \in I \cup J} h_k \mathcal{S}_{\mathcal{K}_k}$  es un elemento de PL. También es trivial ver que  $h_k = f_k$  para  $k \in I$  y  $h_k = -g_k$  para  $k \in J$ .

- (ii) Sea  $s \in PL$  y  $h \in \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ . Existen entonces  $f_i \in \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$  y  $\mathcal{S}_{\mathcal{K}_i}$  serie de Laurent con  $\mathcal{K}_i$  cono racional para  $i \in I$ , tal que  $s = \sum_{i \in I} f_i \cdot \mathcal{S}_{\mathcal{K}_i}$ . Luego,

$$h \cdot s = h \cdot \left( \sum_{i \in I} f_i \cdot \mathcal{S}_{\mathcal{K}_i} \right) = \sum_{i \in I} g_i \cdot \mathcal{S}_{\mathcal{K}_i}$$

$h \cdot s$  es un elemento de PL, siendo  $g_i = h \cdot f_i$  para cada  $i \in I$ .

□

**Corolario 2.2.4.** *PL contiene a todos los  $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$  y es el submódulo de L más pequeño con esta propiedad.*

*Demostración.* Es evidente que cualquier  $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$  pertenezca a PL, pues 1 es un elemento de  $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ . Para ver que es el más pequeño, supongamos que existe otro M submódulo de L con esta propiedad. Sea  $s$  un elemento de PL, veamos que pertenece a M. Como  $s$  es combinación de elementos de  $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$ , por contener M a estos elementos y ser un submódulo de L, entonces  $s$  ha de pertenecer a M. □

**Proposición 2.2.5.** *Entre las series de PL se encuentran todas las de los conos poliédricos fuertemente convexos, no necesariamente simpliciales.*



*Demostración.* Sea  $\mathcal{K}$  un cono poliédrico fuertemente convexo, como cualquier cono de esta forma puede descomponerse en conos simpliciales (Proposición 2.1.1) tenemos que  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{K}_l$ , unión con interiores disjuntos dos a dos. Por lo visto en el trabajo anteriormente (véase 2.4), existe  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^d$  tal que  $\mathcal{K} \cap \mathbb{Z}^d = (\mathbf{s} + \mathcal{K}) \cap \mathbb{Z}^d = (\mathbf{s} + \mathcal{K}_1) \cap \mathbb{Z}^d \sqcup \dots \sqcup (\mathbf{s} + \mathcal{K}_l) \cap \mathbb{Z}^d$ , luego  $\mathcal{S}_{\mathcal{K}} = \mathcal{S}_{\mathbf{s} + \mathcal{K}} = \mathcal{S}_{\mathbf{s} + \mathcal{K}_1} + \dots + \mathcal{S}_{\mathbf{s} + \mathcal{K}_l}$  pertenece a PL pues es combinación lineal de series indicatrices de los puntos reticulares de los conos simpliciales  $\mathbf{s} + \mathcal{K}_i$ .  $\square$

**Proposición 2.2.6.** *RL contiene las series  $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$  para  $\mathcal{K}$  un cono no fuertemente convexo*

*Demostración.* Debido a que los conos no fuertemente convexos se pueden descomponer como unión de conos simpliciales con interiores disjuntos, utilizando el razonamiento del apartado anterior y teniendo en cuenta que  $PL \subseteq RL$  se concluye tal afirmación.  $\square$

Sea  $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_d)$  el cuerpo de funciones racionales en  $\mathbb{C}^d$ , el cual es el cuerpo de cocientes del anillo  $\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_d^{\pm 1}]$ . El morfismo

$$\varphi : RL \longrightarrow \mathbb{C}(x_1, \dots, x_d)$$

envía a cada serie de Laurent racional a la función racional que define.

**Proposición 2.2.7.** *El morfismo  $\varphi : RL \longrightarrow \mathbb{C}(x_1, \dots, x_d)$  es un homomorfismo de  $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ -módulos*

*Demostración.* Veamos primero que  $\varphi$  está bien definido. Sea  $s$  una serie de Laurent racional en RL. Supongamos  $\varphi(s) = f/g$  y  $\varphi(s) = f'/g'$ , entonces  $g \cdot s = f$ ,  $g' \cdot s' = f'$ , luego  $(g'g) \cdot s = g'f$ ,  $(gg') \cdot s' = gf'$ . Como los términos de la izquierda son iguales  $g' \cdot f = g \cdot f'$  y ya que  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$  es un dominio de integridad,  $f/g$  y  $f'/g'$  son la misma función racional.

Probemos ahora que  $\varphi$  es un homomorfismo de  $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ -módulos. Sean  $r, s$  dos series de Laurent racionales de RL y  $p, q$  dos polinomios de  $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$ . Veamos que  $\varphi(p \cdot r + q \cdot s) = p \cdot \varphi(r) + q \cdot \varphi(s)$ . Como  $r, s$  son series de Laurent racionales existen  $f, g, k$  y  $h$  polinomios ordinarios,  $g$  y  $h$  no nulos, con  $g \cdot r = f$  y  $h \cdot s = k$ . Entonces

$$(gh)(p \cdot r + q \cdot s) = (hf) \cdot p + (gk) \cdot q$$

Multiplicando a ambos lados por  $\mathbf{x}^m$  y  $\mathbf{x}^n$ , monomios de grado suficientemente alto obtenemos

$$g'h'(p \cdot r + q \cdot s) = (h'f') \cdot p + (g'k') \cdot q$$

con

$$g' = g \cdot \mathbf{x}^m, h' = h \cdot \mathbf{x}^n, f' = f \cdot \mathbf{x}^m \text{ y } k' = k \cdot \mathbf{x}^n$$

siendo todos ellos polinomios ordinarios. Por este motivo,  $\varphi(p \cdot r + q \cdot s) = ((h'f') \cdot p + (g'k') \cdot q)/(h'g')$  y simplificando obtenemos que

$$\varphi(p \cdot r + q \cdot s) = p \cdot f/g + q \cdot k/h = p \cdot \varphi(r) + q \cdot \varphi(s)$$

□

De acuerdo con Ishida [7], la siguiente demostración se debe a Brion.

**Teorema 2.2.8.** *Hay un homomorfismo de  $L$ -módulos*

$$\varphi : PL \longrightarrow \mathbb{C}(x_1, \dots, x_d),$$

tal que  $\varphi(S_{\mathcal{K}}) = \sigma_{\mathcal{K}}$  para cada cono simplicial  $\mathcal{K}$  en  $\mathbb{R}^d$

Este teorema demuestra que hay una correspondencia entre las funciones racionales de  $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_d)$  y las series que cifran los puntos reticulares del cono  $\mathcal{K}$ .

*Demostración.* Debido a las Proposición 2.2.6 el homomorfismo  $\varphi$  es la restricción a PL del morfismo definido en la Proposición 2.2.7 .

Dado un cono racional simplicial  $\mathcal{K} = p + \langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_d \rangle$  con paralelepípedo fundamental  $\mathcal{P}$ , tenemos

$$\prod_{i=1}^d (1 - x^{\mathbf{w}_i}) \cdot S_{\mathcal{K}} = \sigma_{\mathcal{P}}(x)$$

Además, para cada  $s \in RL$  hay un polinomio de Laurent  $g$  no nulo, tal que  $g \cdot s = f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$ . Si definimos

$\varphi(S) := f/g \in \mathbb{C}(x_1, \dots, x_d)$ , entonces  $\varphi(S)$  es independiente de la elección de  $g$ . Debido a que el homomorfismo está bien definido

$$f/g = \frac{\sigma_{\mathcal{P}}(x)}{\prod_{i=1}^d (1 - x^{\mathbf{w}_i})}. \quad \square$$

El problema reside en lo siguiente; puede ocurrir que para dos series de Laurent diferentes  $s$  y  $s'$  existan dos polinomios  $g$  no nulo y  $f$ , tales que  $g \cdot s = f$ ,  $g \cdot s' = f$ , es decir ambas series de Laurent son racionales y dan lugar a la misma función racional  $f/g$ . Por ejemplo, las series  $s = 1 + x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + \dots$  y  $s' = -(x + x^2 + x^3 + \dots)$  son distintas y ambas satisfacen  $(1 - x) \cdot s = -x$  y  $(1 - x) \cdot s' = -x$ . Así que la función racional  $f/g$  no puede determinar a qué serie de Laurent racional está representando si no se da más información.

Sin embargo, dado un cono poliédrico que sea fuertemente convexo, si las series de Laurent racionales  $s$ ,  $s'$  tienen ambas su soporte en dicho cono, entonces  $g \cdot s = f$ ,  $g \cdot s' = f$  implica que  $s = s'$ . Por ejemplo, si  $s$ ,  $s'$  son series de potencias, ya que el primer hiperoctante es un cono fuertemente

convexo, en este caso la única  $s$  tal que  $g \cdot s = f$  es el desarrollo de Taylor en varias variables de la función racional  $f/h$ .

La aplicación  $\varphi$  tiene en cuenta la no convergencia de las series generadoras  $S_{\mathcal{K}}$  cuando  $\mathcal{K}$  no es fuertemente convexo.

**Proposición 2.2.9.** *Son equivalentes para el cono afín  $\mathcal{K} = p + \mathbf{K}$ :*

- (i)  $\mathcal{K}$  es fuertemente convexo.
- (ii)  $\mathbf{K}$  es fuertemente convexo como cono vectorial.
- (iii)  $\mathbf{K} \cap -\mathbf{K} = \{\mathbf{0}\}$ .
- (iv)  $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}' = \{p\}$ , siendo  $\mathcal{K}' = p - \mathbf{K}$ .

*Demostración.* Veamos (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii)  $\Rightarrow$  (iv)  $\Rightarrow$  (i)

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Basta considerar los hiperplanos vectoriales asociados a los hiperplanos afines que dejan a todo  $\mathcal{K}$ , excepto a su vértice, en uno de los semiespacios determinado por el hiperplano.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) La condición de que  $\mathbf{K}$  sea fuertemente convexo, implica que el vértice de  $\mathbf{K}$  sea  $\mathbf{0}$ . Pero el vértice de  $\mathbf{K}$  es la intersección de  $\mathbf{K}$  y  $-\mathbf{K}$ , luego se tiene que  $\mathbf{K} \cap -\mathbf{K} = \{\mathbf{0}\}$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) Si  $\mathbf{K} \cap -\mathbf{K} = \{\mathbf{0}\}$ , entonces  $\mathcal{K} \cap -\mathcal{K} = (p + \mathbf{K}) \cap (p - \mathbf{K}) = \{p\}$ .

(iv)  $\Rightarrow$  (i) Como la intersección de  $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}' = \{p\}$  es un único punto y esta intersección es el vértice del cono, se deduce que  $\mathcal{K}$  es fuertemente convexo.  $\square$

**Proposición 2.2.10.** *Son equivalentes para el cono afín  $\mathcal{K} = p + \mathbf{K}$ :*

- (i)  $\mathcal{K}$  no es fuertemente convexo.
- (ii)  $\mathbf{K}$  no es fuertemente convexo como cono vectorial.
- (iii)  $\mathbf{K} \cap -\mathbf{K} = \mathbf{T} \neq \{\mathbf{0}\}$ .
- (iv)  $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}'$  es una variedad lineal afín  $T$ , de dimensión estrictamente positiva, que contiene a  $p$  (en concreto  $T=p+\mathbf{T}$ ).

*Demostración.* Veamos (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii)  $\Rightarrow$  (iv)  $\Rightarrow$  (i)

(i)  $\Leftrightarrow$  (ii) Por la proposición anterior.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Haciendo uso de las definiciones 1.0.4 y 1.0.20  $\mathbf{K} \cap -\mathbf{K} = \mathbf{T}$ , pues es en esta intersección es donde se dan simultáneamente las dos parejas de desigualdades  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n \geq 0$  y  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n \leq 0$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (iv)  $\mathcal{K} \cap -\mathcal{K} = (p + \mathbf{K}) \cap (p - \mathbf{K}) = p + \mathbf{T} = \mathbf{T}$

(iv)  $\Rightarrow$  (i) Ya que el vértice de  $\mathcal{K}$  (es decir,  $T = \mathcal{K} \cap \mathcal{K}'$ ) tiene dimensión estrictamente positiva, entonces no es un punto y por tanto el cono no es fuertemente convexo.  $\square$

**Lema 2.2.11.** *Si un cono poliédrico racional  $\mathcal{K}$  no es fuertemente convexo, entonces  $\varphi(S_{\mathcal{K}}) = 0$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{K}$  un cono poliédrico racional que no es fuertemente convexo (es intersección finita de semiespacios cuyos vértices tienen al menos un punto en común). El vértice de  $\mathcal{K}$  se define como la intersección de los vértices de los semiespacios que se intersecan. Este vértice es una variedad lineal afín de direcciones  $W$ , debido a que el cono no es fuertemente convexo por la Proposición 2.2.10. A su vez, es la intersección de los hiperplanos de direcciones de los semiespacios que se intersecan. El espacio de direcciones  $\mathbf{W}$ , como anteriormente hemos comentado (véase pág. 16), es el espacio de los vectores  $\mathbf{w}$  tales que  $\mathbf{w} + \mathcal{K} = \mathcal{K}$ . Luego existe un vector no nulo  $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^d$  tal que  $\mathbf{w} + \mathcal{K} = \mathcal{K}$ , y entonces  $\mathbf{x}^{\mathbf{w}} \cdot S_{\mathcal{K}} = S_{\mathcal{K}}$ . Por tanto, ya que  $\varphi$  es homomorfismo,  $x^{\mathbf{w}} \cdot \varphi(S_{\mathcal{K}}) = \varphi(S_{\mathcal{K}})$ , es decir,  $(1 - x^{\mathbf{w}}) \cdot \varphi(S_{\mathcal{K}}) = 0$ . Y como  $(1 - x^{\mathbf{w}})$  no es un divisor de 0 en  $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_d)$ , concluimos que  $\varphi(S_{\mathcal{K}}) = 0$ .  $\square$

Para un cono  $\mathcal{K}$  no fuertemente convexo se tiene que  $S_{\mathcal{K}}$  es no nulo pero su imagen por  $\varphi$  sí.

## 2.3. Símplices

Ahora vamos a establecer la fórmula de Brion, primero para el caso de descomposición en conos simpliciales y luego usaremos la descomposición irracional para el caso general.

**Definición 2.3.1.** Un *símplice* es la intersección de  $d+1$  semiespacios, uno por cada cara. Es decir, es el politopo envolvente convexa de un número finito de puntos afinmente independientes en  $\mathbb{R}^d$  que se llaman vértices.

Un punto (envolvente convexa de un punto), segmento (envolvente convexa de dos puntos distintos), un triángulo (envolvente convexa de tres puntos no alineados), un tetraedro (envolvente convexa de cuatro puntos no coplanarios), entre otros son los símplices de dimensión (número de puntos afinmente independientes menos 1) 0, 1, 2 y 3 respectivamente.

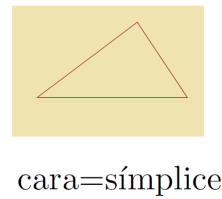
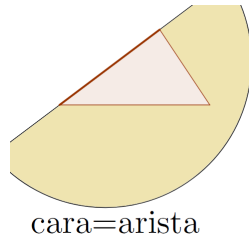
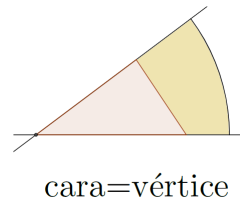
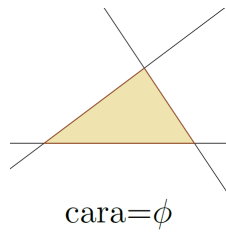
**Definición 2.3.2.** Las *caras de los símplices* son los símplices dados por los distintos subconjuntos del conjunto de vértices, entre ellas está la cara vacía (el vacío se considera el símplice de dimensión -1).

Para cada cara  $F$  del símplice  $\mathcal{P}$ , sea  $\mathcal{K}_F$  el cono tangente a  $F$ , el cual es la intersección de todos los semiespacios determinados por las facetas (caras codimensión 1 del símplice) que contienen a  $F$ . Determinados quiere decir que se toma el semiespacio que contiene a todo el símplice de los dos determinados por el hiperplano que contiene a la faceta. Sea  $\emptyset$  la cara vacía de  $\mathcal{P}$ , su cono tangente sería el propio símplice  $\mathcal{P}$  que es un politopo.

**Ejemplo 2.3.1.** Supongamos que nos encontramos en  $\mathbb{R}^3$ , veamos cuáles serían los conos tangentes a las diferentes caras del símlice  $\mathcal{P}$ .



Figura 2.3: Símlice  $\mathcal{P}$



**Teorema 2.3.1.** Si  $\mathcal{P}$  es un símlice, entonces

$$0 = \sum_G (-1)^{\dim(G)} \mathcal{S}_{\mathcal{K}_G}, \quad (2.7)$$

la suma sobre todas las caras de  $\mathcal{P}$ .

*Demostración.* Consideramos el coeficiente de  $\mathbf{x}^{\mathbf{m}}$  para algún  $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d$  de la suma de la derecha. Sea  $F$  la cara de menor dimensión en cuyo cono tangente está  $\mathbf{m}$ . Así mismo,  $\mathbf{m}$  está en el cono tangente de todas las caras  $G$  que contienen a  $F$ , de las cuales hay exactamente  $\binom{d-m}{k}$  de dimensión  $m+k$ , para  $k$  con  $0 \leq k \leq d-m$ . Entonces el coeficiente de  $\mathbf{x}^{\mathbf{m}}$  de la suma (salvo signo) es  $(1-1)^{d-m} = 0$ . Desarrollando la potencia  $(1-1)^{d-m}$  por la fórmula del binomio de Newton obtenemos la fórmula  $\sum_{i=0}^{d-m} \binom{d-m}{i} (-1)^i = 0$ .

Como en total hay  $d - m + 1$  caras de diferentes dimensiones y para cada dimensión  $k$  hay  $\binom{d-m}{k}$  caras que contienen a  $\mathbf{m}$ , se tiene que

$$0 = \sum_{i=0}^{d-m} \binom{d-m}{i} (-1)^i = \sum_{G \supseteq F} (-1)^{\dim(G)}$$

□

Ahora aplicamos la función  $\varphi$  del Teorema 2.2.8 a la fórmula (2.7). Por el Lema 2.2.11,  $\varphi(\mathcal{S}_{\mathcal{K}_F}) = 0$ , excepto cuando  $F = \phi$  o cuando  $F$  es un vértice, en cuyo caso  $\varphi(\mathcal{S}_{\mathcal{K}_F}) = \sigma_{\mathcal{K}_F}(x)$ . Esto nos lleva a que

$$0 = -\sigma_{\mathcal{P}}(x) + \sum_{\mathbf{v} \text{ vértice de } \mathcal{P}} \sigma_{\mathcal{K}_{\mathbf{v}}}(x),$$

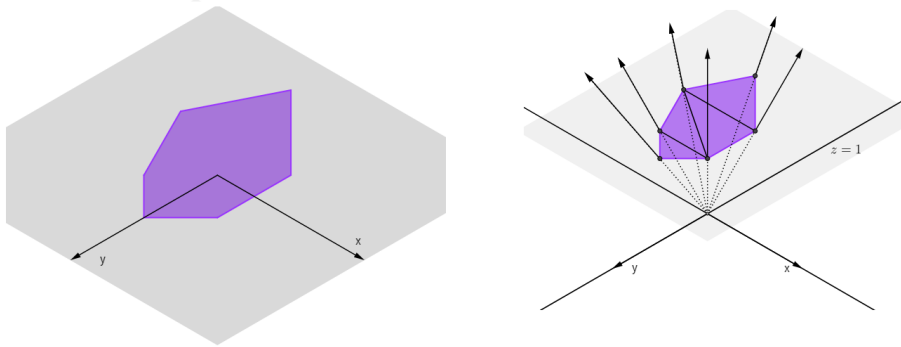
la cual es la fórmula de Brion para símlices.

## 2.4. Polítopos

**Proposición 2.4.1.** *Todo polítopo  $\mathcal{P}$  puede ser descompuesto en símlices teniendo estos interiores disjuntos dos a dos.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{P}$  un polítopo en  $\mathbb{R}^d$ . Aumentamos una unidad la dimensión añadiendo la variable  $z$  y colocamos el polítopo en  $z = 1$  obteniendo  $\mathcal{P}'$ . Ahora consideramos el cono generado al unir el origen  $\mathbf{0}$  con los vértices de  $\mathcal{P}'$ . Este cono es fuertemente convexo y puede descomponerse en conos simpliciales por la Proposición 2.1.1. □

**Ejemplo 2.4.1.** Veamos un sencillo ejemplo de esta descomposición.



$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \dots \cup \mathcal{P}_l.$$

Y de forma análoga a lo que ocurría para los conos racionales (véase pág. 13), existe un número real  $\epsilon > 0$  y un vector  $\mathbf{s}$ , tal que si definimos

$$\mathcal{P}' := \mathbf{s} + (1 + \epsilon) \cdot \mathcal{P} \text{ y } \mathcal{P}'_i := \mathbf{s} + (1 + \epsilon) \cdot \mathcal{P}_i \text{ para } i = 1, \dots, l,$$

entonces  $\mathcal{P}' \cap \mathbb{Z}^d = \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d$ , y no hay hiperplanos que contengan alguna cara de algún símlice  $\mathcal{P}'_i$  en  $\mathbb{Z}^d$ . Definimos por  $\mathcal{K}(\mathcal{Q})_{\mathbf{q}}$  al cono tangente de un politopo  $\mathcal{Q}$  con vértice  $\mathbf{q}$ . Para  $\mathbf{p}$  un vértice de  $\mathcal{P}$  con  $\mathbf{p}' = (1 + \epsilon)\mathbf{p} + \mathbf{s}$  el vértice correspondiente a  $\mathcal{P}'$ , tenemos que  $\mathcal{K}(\mathcal{P}')_{\mathbf{p}'} \cap \mathbb{Z}^d = \mathcal{K}(\mathcal{P})_{\mathbf{p}} \cap \mathbb{Z}^d$  y esto ya es una descomposición irracional. Luego

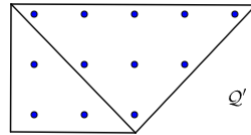
$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{p} \text{ vértice de } \mathcal{P}} \sigma_{\mathcal{K}(\mathcal{P})_{\mathbf{p}}}(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{p}' \text{ vértice de } \mathcal{P}'} \sigma_{\mathcal{K}(\mathcal{P}')_{\mathbf{p}'}}(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{i=1}^l \sum_{\mathbf{p}' \text{ vértice } \mathcal{P}'_i} \sigma_{\mathcal{K}(\mathcal{P}'_i)_{\mathbf{p}'}}(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{i=1}^l \sigma_{\mathcal{P}'_i}(\mathbf{x}) = \sigma_{\mathcal{P}'}(\mathbf{x}) = \sigma_{\mathcal{P}}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

La segunda igualdad se da porque los vértices de los conos  $\mathcal{K}(\mathcal{P}'_i)_{\mathbf{p}'}$  forman una descomposición irracional del vértice del cono  $\mathcal{K}(\mathcal{P}')_{\mathbf{p}'}$  y porque lo mismo es cierto para los politopos. Esto completa nuestra demostración de la fórmula de Brion.

**Ejemplo 2.4.2.** Consideramos el cuadrilátero  $\mathcal{Q}$  definido al inicio del trabajo (véase Figura 1.1), el cual puede ser triangulado añadiendo una arista entre los vértices  $(2, 0)$  y  $(0, 2)$ . Sea  $\epsilon = \frac{1}{4}$  y  $\mathbf{s} = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ . Luego  $(1 + \epsilon)\mathcal{Q} + \mathbf{s}$  tiene vértices

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right), \left(2, -\frac{1}{4}\right), \left(-\frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{4}\right), \left(4 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{4}\right).$$

Vemos el la descomposición irracional resultante.



## 2.5. Lawrence-Varchenko

Usaremos la aplicación  $\varphi$  para deducir la fórmula de Lawrence-Varchenko. Sea  $\mathcal{P}$  un politopo reticular simple de  $\mathbb{R}^d$  y elegimos un vector  $\xi_{\mathbf{p}}$  que no sea

perpendicular en cada vértice  $p$  a ninguna de las aristas que concurren en  $p$ . Entonces, asociado a  $\xi_p$  y a cada vértice  $p$  hay un cono  $\mathcal{K}_{\xi,p}$ . Este nuevo cono puede ser intersección de varios semiespacios abiertos y cerrados y por tanto, no ser cerrado. Debido a que vamos a trabajar en el vértice  $p$ , por simplificar la notación denotaremos  $\xi = \xi_p$  y  $\mathcal{K}_\xi = \mathcal{K}_{\xi,p}$ .

$$\sigma_{\mathcal{P}}(\mathbf{x}) = \sum_{p \text{ vértice de } \mathcal{P}} (-1)^{|E_p^-(\xi_p)|} \sigma_{\mathcal{K}_{\xi,p}}(\mathbf{x}). \quad (2.8)$$

Como vimos en la parte de Ejemplos de Lawrence-Varchenko, en la fórmula se asocia a cada vértice  $p$  el cono  $\mathcal{K}_{\xi,p}$  dado por desigualdades estrictas para aquellas aristas en  $p$  tales que el producto escalar de su vector director por  $\xi$  sea estrictamente negativo y por desigualdades no estrictas cuando este producto escalar es estrictamente positivo. La fórmula de Brion es un caso particular, ya que cada vector  $\xi_p$  apunta al interior del politopo.

**Teorema 2.5.1.** *La función racional  $(-1)^r \sigma_{\mathcal{K}_\xi}$  no depende del vector  $\xi$  elegido, siendo  $r = |E_v^-(\xi)|$ . En particular para todo  $\xi$  se tiene que la función racional  $(-1)^r \sigma_{\mathcal{K}_\xi}$  es igual a la función racional  $\sigma_{\mathcal{K}_p}$  de la fórmula de Brion.*

*Demostración.* Sean  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_d$  los vectores directores primitivos de las aristas que emanan de  $p$ . Dado que  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_d$  forman una base de  $\mathbb{R}^d$ , resulta que  $\xi$  puede estar en  $2^d$  regiones diferentes no vacías, estando cada una de ellas definida por los signos positivo o negativo de los productos escalares  $\xi \cdot \mathbf{w}_1, \dots, \xi \cdot \mathbf{w}_d$ . Por ejemplo, si consideramos la base dual de los  $\mathbf{w}_i$  con respecto del producto escalar de  $\mathbb{R}^d$ , es decir la base  $\mathbf{v}_j$  para  $j = 1, \dots, d$  definida por la propiedad  $\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{v}_j = \delta_{i,j}$  (Kronecker), las  $2^d$  regiones están formadas exactamente por los hiperoctantes con respecto a dicha base. Por tanto, para cada una de las  $2^d$  selecciones posibles de los signos  $+$  o  $-$ , la región que corresponde a estos signos es la formada por todos aquellos vectores cuya coordenada  $k$ -ésima con respecto a la base dual lleva el signo  $k$ -ésimo seleccionado. Si la base formada por los  $\mathbf{w}_i$  para  $i = 1, \dots, d$  fuera ortonormal (la canónica por ejemplo), ella misma sería su dual y entonces, las regiones son los hiperoctantes. Una selección particular de los signos sería que todos ellos fueran positivos, caso que se mencionará al final de la demostración.

Tomamos  $\xi$  y  $\xi'$  diferentes. Tenemos que probar que

$$(-1)^r \sigma_{\mathcal{K}_\xi}(\mathbf{x}) = (-1)^{r'} \sigma_{\mathcal{K}_{\xi'}}(\mathbf{x})$$

siendo  $r$  y  $r'$  los valores correspondientes de  $r$  para  $\xi$  y  $\xi'$ . Si  $\xi \cdot \mathbf{w}_i$  y  $\xi' \cdot \mathbf{w}_i$  tienen el mismo signo para cada  $i = 1, \dots, d$ , entonces están en la misma región. Luego es evidente que los conos de Varchenko  $\mathcal{K}_\xi$  y  $\mathcal{K}_{\xi'}$  son los mismos y, por tanto, lo son también sus funciones racionales  $\sigma_{\mathcal{K}_\xi}$  y  $\sigma_{\mathcal{K}_{\xi'}}$ . Si no están en la misma región, entonces los signos de  $\xi \cdot \mathbf{w}_i$  y  $\xi' \cdot \mathbf{w}_i$  difieren para  $s > 0$  índices y el problema pasa a demostrar que

$$\sigma_{\mathcal{K}_\xi} = (-1)^s \sigma_{\mathcal{K}_{\xi'}} \quad (2.9)$$



Para demostrar esta igualdad basta hacerlo para  $s = 1$ . En efecto, si  $s > 1$  denotamos  $\xi$  por  $\xi_0$  y a  $\xi'$  por  $\xi_s$  y tomamos otros vectores  $\xi_1, \dots, \xi_{s-1}$  tales que para cada  $\xi_k$  y  $\xi_{k+1}$  con  $0 \leq k < s$  de la sucesión  $\xi = \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{s-1}, \xi_s = \xi'$ ,  $\xi_k$  y  $\xi_{k+1}$  son dos vectores que están en regiones respectivas en los que todos los signos de los productos escalares por  $\mathbf{w}_i$  son iguales excepto para uno de ellos. Así  $\xi_k$  y  $\xi_{k+1}$  están en regiones para las que el valor  $s = 1$ . Así que probando (2.9) para  $s = 1$ , tomando la sucesión anterior y aplicando el resultado de  $s = 1$  en cada paso  $\xi_k, \xi_{k+1}$ , se deduce (2.9) está probado para todo  $s > 0$ . Falta probar (2.9) para  $s = 1$ . Sea  $\mathbf{m}$  el vector director primitivo de la única arista para la que  $\xi \cdot \mathbf{m}$  y  $\xi' \cdot \mathbf{m}$  tienen distinto signo. Denotamos por  $\mathcal{K} = \mathfrak{p} + \mathbf{K}$  al cono de Varchenko generado por todas las aristas que confluyen en  $\mathfrak{p}$ , pero ignorando la arista cuyo vector director es  $\mathbf{m}$ , es decir

$$\mathcal{K} = \mathfrak{p} + \sum_{\mathbf{w}_i \in E_{\mathfrak{v}}^+(\xi) \setminus \{\mathbf{m}\}} \mathbb{R}_{\geq 0} \mathbf{w}_i + \sum_{\mathbf{w}_i \in E_{\mathfrak{v}}^-(\xi) \setminus \{\mathbf{m}\}} \mathbb{R}_{< 0} \mathbf{w}_i$$

Este cono  $\mathcal{K}$  no es fuertemente convexo ya que el vector director no nulo  $\mathbf{m}$  está en  $\mathbf{K}$  y  $-\mathbf{K}$ , por lo que se tiene  $\sigma_{\mathcal{K}} = 0$ . Por otro lado, por la construcción de los conos es trivial probar que  $\mathcal{K}$  es la unión disjunta de  $\mathcal{K}_{\xi}$  y  $\mathcal{K}_{\xi'}$  ya que  $\xi \cdot \mathbf{w}_i$  y  $\xi' \cdot \mathbf{w}_i$  tienen distinto signo. Luego  $\mathcal{S}_{\mathcal{K}} = \mathcal{S}_{\mathcal{K}_{\xi}} + \mathcal{S}_{\mathcal{K}_{\xi'}}$ , aplicando  $\varphi$  tenemos  $0 = \varphi(\mathcal{S}_{\mathcal{K}}) = \varphi(\mathcal{S}_{\mathcal{K}_{\xi}} + \mathcal{S}_{\mathcal{K}_{\xi'}})$ , y concluimos finalmente  $\sigma_{\mathcal{K}_{\xi}} = -\sigma_{\mathcal{K}_{\xi'}}$ . Lo cual prueba la afirmación y la generalización de la fórmula de Lawrence-Varchenko.

Para la segunda parte del teorema, debido a que la región de aquellos  $\xi$  para los que  $\xi \cdot \mathbf{w}_i > 0$  para todo  $\mathbf{w}_i$  es el interior topológico del cono  $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}$  que se utiliza en la fórmula de Brion, en esta región es obvio que  $\mathcal{K}_{\xi} = \mathcal{K}_{\mathfrak{p}}$ . En otras palabras, el cono de Varchenko en esta región es el mismo que el de Brion y, por tanto la función racional de la fórmula de Varchenko  $\sigma_{\mathcal{K}_{\xi}}$  es la misma que la función  $\sigma_{\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}}$  de la fórmula de Brion. Finalmente debido a que siempre se puede elegir un  $\xi$  para el que  $\xi \cdot \mathbf{w}_i > 0$  para todo  $\mathbf{w}_i$  y que  $(-1)^r \sigma_{\mathcal{K}_{\xi}}$  no depende del  $\xi$  elegido, se concluye que  $(-1)^r \sigma_{\mathcal{K}_{\xi}} = \sigma_{\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}}$ .  $\square$

## 2.6. Teorema de Barvinok

La fórmula de Brion muestra ciertamente que un politopo (la lista de sus puntos reticulares cifrada mediante una función generadora) se puede reducir a conos. Hemos visto cómo construir la serie indicatriz  $\sigma_{\mathcal{K}}(x)$  para un cono simplicial  $\mathcal{K}$ . Los conos pueden ser descompuestos en conos simpliciales, en descomposición irracional o por el principio de inclusión-exclusión. Dado un politopo racional  $\mathcal{P}$ , la fórmula de Brion permite escribir un polinomio (seguramente enorme)  $\sigma_{\mathcal{P}}(x)$  como suma extendida a todos los vértices del politopo de las funciones racionales generadoras de los conos tangentes

al politopo desde dichos vértices. A priori no es claro que esta representación racional de  $\sigma_{\mathcal{P}}(x)$  sea más corta que la del polinomio original, pero esto es posible debido al Teorema de descomposición de Barvinok [1], que presentamos sin prueba pues el algoritmo no era un objetivo de este trabajo.

**Definición 2.6.1.** Un cono racional  $\mathcal{K} = \mathbf{v} + \sum_{i=1}^d \mathbb{R}_{\geq 0} \mathbf{w}_i$  decimos que es un *cono regular* si  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_d \in \mathbb{Z}^d$  generan el retículo de puntos enteros de  $\mathbb{Z}^d$ .

La importancia de los conos regulares  $\mathcal{K}$  es que su paralelepípedo fundamental contiene precisamente un solo punto entero,  $\mathbf{p}$ , y entonces la serie indicatriz de  $\mathcal{K}$  tiene una simple y corta forma

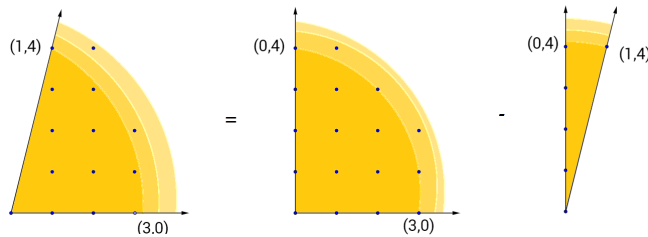
$$\sigma_{\mathcal{K}}(x) = \frac{x^{\mathbf{p}}}{(1 - x^{\mathbf{w}_1}) \cdots (1 - x^{\mathbf{w}_d})}$$

**Teorema 2.6.1** (Barvinok). *Fijando  $d$ , la función generadora racional  $\sigma_{\mathcal{K}}$  para cualquier cono racional  $\mathcal{K}$  en  $\mathbb{R}^d$  puede descomponerse en funciones generadoras asociadas a conos regulares en tiempo polinómico; esto es, hay un algoritmo polinómico y conos regulares  $\mathcal{K}_j$ , tal que*

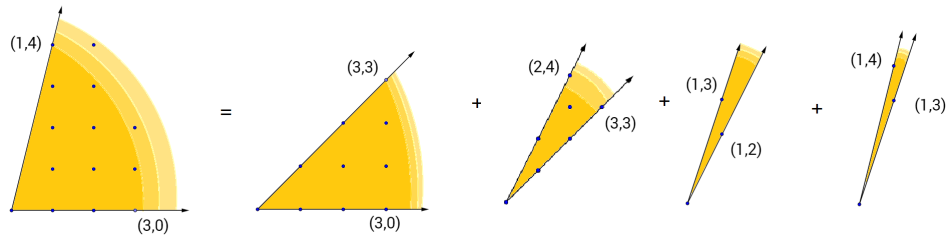
$$\sigma_{\mathcal{K}}(x) = \sum_j \epsilon_j \sigma_{\mathcal{K}_j}(x) : \epsilon_j \in \{\pm 1\}$$

Para  $d = 2$  esta descomposición se haría por fracciones continuas utilizando el algoritmo de Euclides.

**Ejemplo 2.6.1.** Vamos a ilustrar una descomposición de signos de Barvinok para el cono  $\mathcal{K} := (0, 0) + \mathbb{R}_{\geq 0}(1, 0) + \mathbb{R}_{\geq 0}(1, 4)$



Mientras  $\mathcal{K}$  es la diferencia de dos conos regulares, tiene una única descomposición como suma de cuatro conos regulares.



En general el cono  $(0, 0) + \mathbb{R}_{\geq 0}(1, 0) + \mathbb{R}_{\geq 0}(1, n)$  es la diferencia de dos conos regulares, pero tiene una única descomposición en  $n$  conos regulares.

La mayor consecuencia del Teorema de Barvinok se aplica a los polinomios de Ehrhart [3]. Si  $\mathcal{P}$  es un politopo reticular  $d$ -dimensional en  $\mathbb{R}^d$ , se  $t\mathcal{P}$  el politopo formado por la expansión de  $\mathcal{P}$  por el factor  $t \in \mathbb{N}$ , es decir

$$t\mathcal{P} = \{tx : x \in \mathcal{P}\}$$

entonces  $L_{\mathcal{P}}(t) := \#(t\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d)$ , es decir, el número de puntos reticulares de  $t\mathcal{P}$ .  $L_{\mathcal{P}}(t)$  es un polinomio de grado  $d$  en la variable entera y positiva  $t$ . El polinomio de Ehrhart muestra la relación entre el volumen euclídeo de un politopo y el número de coordenadas enteras que el politopo contiene.



# Bibliografía

- [1] A. I. Barvinok, *A polynomial time algorithm for counting integral points in polyhedra when the dimension is fixed*, Math. Oper. Res. **19** (1994), 769-779.
- [2] A. I. Barvinok, *The complexity of generating functions for integer points in polyhedra and beyond*, ICM 2006 Madrid, 2006, 764-785.
- [3] A. I. Barvinok, *Computing the Ehrhart quasi-polynomial of a rational simplex*, Math. Comput. **75** (2006), 1-4.
- [4] P. Baum, Wm. Fulton, and G. Quart, *Lefschetz-Riemann-Roch for singular varieties*, Acta Math. **143** (1979), no. 3-4, 193-211.
- [5] M. Beck, C. Haase y F. Sottile, *Formulas of Brion, Lawrence, and Varchenko on rational generating functions for cones*, 1-15, <http://www.math.tamu.edu/sottile/research/pdf/brion.pdf>
- [6] M. Brion, *Points entiers dans les polyèdres convexes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **21** (1988), no. 4, 653-663.
- [7] M.- N. Ishida, *Polyhedral Laurent series and Brion's equalities*, Internat. J. Math. **1** (1990), no. 3, 251-265.
- [8] J. Lawrence, *Valuations and polarity*, Discrete Comput. Geom. **3** (1998), no.4, 307-324.
- [9] A. N. Varchenko, *Combinatorics and topology of the arrangement of affine hyperplanes in the real space*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **21** (1987), no. 1,11-22.

