Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Grado en Economía

"El Equilibrio de Nash en Teoría de Juegos"

Presentado por:

Alejandro Valverde Carranza

Valladolid, 11 de Julio de 2016

Índice de contenido

1. INTRODUCCIÓN

En un mundo caracterizado por la existencia de numerosos conflictos, la Teoría de Juegos se ha distinguido por ser una de las disciplinas con un ámbito de aplicación de mayor amplitud, siendo las relaciones entre los seres humanos en la sociedad, su principal objeto de estudio desde un punto de vista estratégico.

La importancia que ha adquirido la Teoría de Juegos es enormemente significativa. Aplicándose en numerosos aspectos de la vida cotidiana donde las personas deben hacer frente a diversas situaciones, en las que es necesario tomar decisiones, bajo la influencia de las acciones llevadas a cabo por otras personas. La Teoría de Juegos, por tanto, se encarga de estudiar estos conflictos, llamados comúnmente juegos, de manera que cada persona ó jugador pueda conseguir el mejor resultado posible.

De entre los muchos matemáticos que han estudiado y tratado de desarrollar la Teoría de Juegos emergen, por encima de todas, las figuras de John Von Neumann, quien cuenta entre sus aportaciones más significativas con el Teorema Minimax, y John Forbes Nash Jr, matemático estadounidense de fama mundial al que se le atribuye el concepto de equilibrio conocido como "Equilibrio de Nash", el cual, junto con otras aportaciones a la teoría de los juegos no cooperativos, le valió la consecución del Premio Nobel de Economía en 1994, compartido con los también matemáticos Reinhard Selten y John Harsanyi, así como la medalla Abel[1] junto con Louis Nirenberg en el año 2015. Nash es, a día de hoy, el único matemático que ha recibido ambos galardones desde que comenzaron a otorgarse. Su contribución a las ciencias matemáticas va más allá de lo meramente teórico. Fue capaz de desarrollar un innovador estilo de modelización económica, manteniendo la sencillez y representando fielmente los aspectos principales de la situación que se analiza.

[1] La historia que rodea la creación de la medalla Abel ha sido objeto de múltiples conjeturas. Tras un primer intento fallido en 1897 como reacción a la negativa por parte de Alfred Nobel de otorgar un Nobel específico para la disciplina de matemáticas, no fue hasta 2002 cuando el gobierno noruego creó definitivamente el galardón.

2. LA TEORÍA DE JUEGOS

La Teoría de Juegos se encarga de analizar las consecuencias de la toma de decisiones, por parte de jugadores racionales que tratan de maximizar su función de utilidad, teniendo en consideración las posibles decisiones del resto de jugadores. Se aplica a numerosas áreas, tales como Economía, Sociología, Politología, Psicología, Filosofía, Biología, Ciencias de la Computación etc. con la finalidad de resolver situaciones diversas.

Su origen se remonta a los trabajos del matemático alemán de finales del siglo XIX, Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo, quién publicó en el año 1913 el artículo "On an application of set theory to the theory of the game of chess" ("Sobre una aplicación de la teoría de conjuntos a la teoría del ajedrez") acerca del juego del ajedrez, en el que trató de desarrollarlo formalmente. Dicho artículo contiene la demostración del conocido como "Teorema de Zermelo", el cual estipula que, en un juego bipersonal finito de información perfecta en el que no interviene el azar en la toma de decisiones, existen dos posibilidades: que los dos jugadores tengan una estrategia que les permita empatar o que un jugador tenga una estrategia ganadora.

Sin embargo, no fue hasta la publicación de la obra de John Von Neumann y Oskar Morgernstern "Theory of Games and Economic Behavior" (1944) ("Teoría de juegos y comportamiento económico") cuando se considera su nacimiento como un campo de estudio autónomo. Se trata de la primera obra donde se establece una clara división entre los juegos cooperativos y no cooperativos. Dentro de estos últimos, los autores desarrollan los llamados juegos de suma nula[1] ó de suma cero, en los que la ganancia de un jugador es exactamente igual a la perdida del otro. Partiendo de un juego $G = \{N = \{1,2\};\ S_1, S_2;\ u_1, u_2\}$ donde S_1 y S_2 son los conjuntos de estrategias puras del Jugador I y II respectivamente y $u_1(s_1, s_2)$[2] y $u_2(s_1, s_2)$[3] las funciones de utilidad de cada uno de los jugadores.

---

[1] También son conocidos como juegos de intereses contrapuestos.

[2] Pago recibido por el jugador I cuando juega la estrategia s_1 y el jugador II juega s_2.

[3] Pago recibido por el jugador II cuando juega la estrategia s_2 y el jugador I juega s_1.

Se define G como un juego de suma cero si para todo par de estrategias puras de ambos jugadores, la suma de los pagos que les corresponde es cero.

$$u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 0, \;\; \forall s_1 \in S_1 \;\; y \; \forall s_2 \in S_2.$$

Además, introducen los conceptos de maximin y minimax, comúnmente conocidos como pagos de seguridad de los jugadores, que permiten a cada jugador prever cuál va a ser el pago recibido si juegan una determinada estrategia independientemente de la estrategia que juegue el otro jugador.
De manera adicional, se recoge la formulación de los juegos de suma cero para n jugadores basándose en una generalización del juego para dos.

Como ya se ha comentado anteriormente, John Forbes Nash Jr. es mundialmente conocido por sus aportaciones a la Teoría de Juegos, desde la distinción entre juegos cooperativos y no cooperativos hasta el desarrollo de un concepto de equilibrio en juegos no cooperativos conocido como "Equilibrio de Nash". El concepto de equilibrio avanzado por Nash está basado en el equilibrio en los juegos de suma cero propuesto por John Von Neumann y Oskar Morgernstern. Se trata de una generalización del mismo para n jugadores. Nash considera una situación en la que cada jugador va a decidir la estrategia a seguir, independientemente de las estrategias del resto del jugadores, sin cooperación ni comunicación entre ellos. En este caso, el jugador posee información completa[1].

La modelización se lleva a cabo mediante un juego en forma normal, donde cada jugador elige la estrategia a seguir sin tener la oportunidad de modificar su decisión en un momento futuro.

En su trabajo "Non cooperative games" (1950) ("Juegos no cooperativos") Nash define y caracteriza los llamados puntos de equilibrio y demuestra que un juego no cooperativo finito siempre tiene al menos un punto de equilibrio. Además, demuestra la existencia de equilibrio con estrategias mixtas, siendo el Equilibrio de Nash, en este contexto, un perfil de estrategias (una por jugador), de modo que cada jugador maximiza su utilidad siempre y cuando los demás jugadores

[1] No se tiene conocimiento de la estrategia que van a seguir los otros jugadores pero se dispone de información acerca de sus posibles estrategias y preferencias.

elijan también la estrategia propuesta como equilibrio. En el equilibrio ningún jugador tiene incentivos a cambiar su estrategia mientras los demás tampoco lo hagan.

En su artículo "Two person cooperative-games" (1953) ("Juegos cooperativos de dos personas"), John Nash ofrece dos formas independientes de deducir la solución de los juegos cooperativos bipersonales. Una primera forma consiste en reducir el juego cooperativo a un juego no cooperativo, donde el proceso de negociación debe ser formalizado y restringido. En cuanto a la segunda, realiza una aproximación axiomática que no requiere el procedimiento de ofertas y contraofertas que se producen durante la negociación. Por ello, esta solución únicamente tiene interés si los axiomas son aceptados de tal manera que se equiparan a los principios de eficiencia y equidad requeridos por la solución.

El primero en considerar estrategias que no satisfacen a los jugadores fue Reinhard Selten. En su artículo "Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfrageträgheit" ("Juego de tratamiento teórico de un modelo de oligopolio con la inercia de la demanda"), publicado en 1965, introduce la noción de equilibrio perfecto. Para ello desarrolla el concepto de equilibro perfecto en subjuegos[1], a través del estudio de las acciones de los jugadores, con el fin de determinar los equilibrios no creíbles. Esto permite resolver juegos con interacciones dinámicas entre los jugadores, teniendo en cuenta que no pueden establecer de antemano la estrategia que van a seguir.

El concepto de Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos supone un refinamiento del concepto de Equilibrio de Nash que se había establecido previamente. Se trata de un nuevo concepto de solución más adecuado, ya que a partir del criterio de credibilidad, permite descartar aquellos Equilibrios de Nash que se basen en promesas o amenazas que no pueden ser cumplidas, es decir, soluciones poco razonables.

[1] Implica el principio de racionalidad secuencial, según el cual, cada jugador anticipa que sus oponentes van a tener una conducta racional por lo que su respuesta va a ser óptima para cada punto del juego.

En el caso de los juegos dinámicos finitos, Selten afirma que existe un Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. Además, introduce el llamado "equilibrio de la mano temblorosa" el cual supone que si un jugador duda y comete un error en la elección de las acciones, se reduce el conjunto de equilibrios perfectos aceptables.

John Charles Harsanyi fue capaz de encontrar una solución al supuesto de información completa, según el cual todos los jugadores conocen las reglas del juego y los pagos del resto, que ponía en duda la hipótesis del comportamiento racional. Harsanyi se vale de una aproximación bayesiana para hacer frente al problema de la información incompleta. De esta manera, el juego de información incompleta pasa a ser un juego de información imperfecta en el que la incertidumbre está cuantificada. Para llevar a cabo esta transformación, clasifica a los jugadores, siendo un tipo de los mismos el que desarrolla la distribución de probabilidad y toda la información que tiene del juego. Los jugadores toman decisiones de manera simultánea por lo que no pueden reaccionar a las acciones llevadas a cabo por los demás.
Siendo $G = \{N, S_1, S_2, \dots, S_n, T_1, T_2, \dots, T_n, p_1, p_2, \dots, p_n, u_1, u_2, \dots, u_n\}$ un juego de información incompleta de N jugadores, con S_i estrategias de cada jugador i.
T_i es el conjunto posible de tipos del jugador i y u_i los pagos de cada jugador i.
p_i es una suposición del tipo de los otros jugadores y por lo tanto es una probabilidad condicionada[1].

Las aportaciones citadas anteriormente, entre otras, permitieron que en 1994 John Nash, Reinhard Selten y John Harsanyi recibieran el premio Nobel de Economía por sus contribuciones a la Teoría de Juegos y su análisis en profundidad de los equilibrios en los juegos no cooperativos.

Posteriormente, en el año 2005 los investigadores, Robert J. Aumann y Thomas C. Schelling, fueron galardonados con el Premio Nobel de Economía

---

[1] Cada jugador hace su propia conjetura p_i en función del tipo t_i perteneciente al vector de tipos T_i que le ha sido asignado al azar de acuerdo con una distribución $p(i)$. Posteriormente, cada jugador toma simultáneamente su decisión y recibe los pagos en consecuencia.

por sus contribuciones al desarrollo de los juegos no cooperativos dentro del marco de la Teoría de Juegos. Utilizando diferentes enfoques, Aumann desde el punto de vista matemático y Schelling desde la perspectiva económica, trataron de analizar las interacciones humanas a partir del estudio de la Teoría de Juegos.

Robert J. Aumann llevó a cabo la formalización de los juegos repetidos infinitamente estableciendo las condiciones necesarias para mantener la cooperación en las relaciones de largo plazo. Demuestra que la cooperación en cada periodo de tiempo es un resultado en equilibrio [1]. Una de sus contribuciones más famosas es el concepto de "equilibrio correlacionado". Dicho concepto trata de ilustrar qué sucede en un juego cuando existen mecanismos que envían señales privadas o públicas. En un equilibrio correlacionado, cada observación de un jugador lleva asignada una acción, de manera que, un jugador no puede mejorar su utilidad desobedeciendo la recomendación de jugar una estrategia fijada a priori, si los otros jugadores obedecen sus respectivas recomendaciones.

Por otro lado, Thomas C. Schelling en su obra "The Strategy of Conflict" (1960) ("La estrategia del conflicto") basa su interés en el estudio de los problemas de decisión que afectan a un conjunto de personas. A lo largo de la publicación trata de analizar los puntos en común y los conflictos que surgen entre ellos, haciendo uso de la teoría de juegos no cooperativos para identificar las diferentes interacciones que se producen.

Partiendo del concepto de equilibrio desarrollado por John Nash, Schelling intenta averiguar hasta qué punto la Teoría de Juegos y los equilibrios pueden tener efecto en las relaciones económicas y sociales, deduciendo los equilibrios en varios tipos de juegos. En su análisis del comportamiento en negociaciones bilaterales, Schelling desarrolla las posibles tácticas de negociación que pueden ser usadas por los jugadores para cambiar el curso de la misma y conseguir un resultado favorable, poniendo especial atención en la

[1] Los jugadores tienen la posibilidad de, negándose a cooperar en el futuro, penalizar cualquier desviación del juego en el presente.

posibilidad de conseguir resultados ventajosos a partir de concesiones del oponente, previo empeoramiento de la propia posición.

En relación a los llamados juegos de coordinación pura[1], Schelling demuestra que los jugadores son capaces de coordinarse sin necesidad de comunicación, a pesar de que los juegos sean totalmente desconocidos y cuenten con varios Equilibrios de Nash.

Terminología básica

A continuación se presentan algunos de los conceptos más utilizados en teoría de juegos acompañados de una breve descripción.

Jugadores

Participantes del juego maximizan su utilidad tomando una serie de decisiones. El número de jugadores debe ser como mínimo dos.

Acciones de cada jugador

Decisiones llevadas a cabo por cada jugador cuando tiene que jugar. El conjunto de acciones de cada jugador puede ser finito o infinito para cada momento del juego.

Resultados del juego

Diferentes maneras en las que puede finalizar el juego. Cada resultado tiene unas consecuencias para los jugadores.

Pagos

Utilidad que el juego proporciona a cada uno de los jugadores. Cada uno recibe un pago cuando concluye el juego.

Estrategias

Conjunto de acciones con las que participa un jugador en el juego.

---

[1] Juegos en los que el conflicto de intereses entre las partes es mínimo o nulo.

Tipos de juegos

Se pueden distinguir principalmente dos clases de juegos, cooperativos y no cooperativos.

En los juegos cooperativos existe la posibilidad de que los jugadores acuerden las estrategias que van a jugar mientras que en los no cooperativos cada jugador pone en marcha su estrategia sin haber alcanzado ningún acuerdo previamente.

El ámbito de los juegos no cooperativos puede dividirse en dos bloques: juegos estáticos o dinámicos, y juegos con o sin información completa.

En los juegos estáticos los jugadores toman sus decisiones de manera simultánea, es decir, sin saber que decisión toma su contrincante.

En el caso de los juegos dinámicos un jugador puede conocer las decisiones de su oponente antes de decidir.

En los juegos con información completa, todos los jugadores tienen conocimiento de las consecuencias que llevan aparejadas el conjunto de decisiones que toman, tanto para ellos mismos como para el resto de jugadores, mientras que en los juegos con información incompleta, existen jugadores que desconocen alguna de esas consecuencias.

2.1. JUEGOS EN FORMA NORMAL

La forma estratégica o también llamada formal de un juego tiene como punto de referencia las estrategias de cada uno de los jugadores, siendo representadas generalmente en forma matricial.

Un juego en forma normal viene definido por un conjunto de jugadores, un conjunto de estrategias para cada jugador y unos pagos (o utilidades) que reciben los jugadores. Desde el punto de vista formal:

$$G = \{N, (S_i)_{i \in I}, (u_i)_{i \in I}\}.$$

Siendo N los jugadores que participan en el juego, S_i las estrategias disponibles para el jugador i y u_i los pagos que recibe el jugador i. En los juegos representados en forma normal se presupone que todos los jugadores actúan de manera simultánea sin conocer la decisión que toma el resto de jugadores.

Dilema del prisionero

Uno de los problemas más conocidos que estudia la Teoría de Juegos es el llamado "dilema del prisionero", cuya interpretación actual se atribuye a Albert William Tuckern[1]. El modelo básico en el que se basa el dilema del prisionero fue, sin embargo, planteado por Merrill Flood Meeks y Melvin Dresher tomando como patrón las relaciones de cooperación y conflicto acaecidas entre los jugadores.

El dilema del prisionero es un juego de suma no nula, es decir, no se anulan las utilidades o pagos de los jugadores entre sí. En el mismo, se produce el conflicto entre los intereses individuales y los colectivos de cada jugador, ya que tratan maximizar su utilidad independientemente de la decisión del contrincante.

La descripción clásica del juego es la siguiente: "Dos sospechosos de haber cometido un delito son interrogados por la policía, cada uno por separado. Se les pregunta sobre si el otro sospechoso es culpable. Dependiendo de su respuesta y de la respuesta del otro sospechoso a esta misma pregunta, se definen las penas de cárcel para cada uno de ellos. Si un sospechoso se confiesa autor del delito y su cómplice no, el cómplice será condenado a una pena de "x" años y él será puesto en libertad. Si ninguno de los dos confiesa, ambos son condenados a una pena de "y" años tal que $y < x$. Si los dos sospechosos confiesan, la codena que deberán cumplir asciende a "t" años tal que $y < t < x$. Expresando el juego en forma matricial:

		$Jugador\ II$	
		Confesar	Callar
$Jugador\ I$	Confesar	t, t	$0, x$
	Callar	$x, 0$	y, y

Tabla 2.1. Dilema del prisionero en forma normal usando pagos genéricos.

[1] Matemático estadounidense que dirigió la tesis de John Nash acerca de los juegos no cooperativos. Entre sus aportaciones más destacadas se encuentran las Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker, un resultado básico de programación no lineal.

La estrategia dominante para los dos jugadores es la de confesar ya que siempre van a obtener un pago superior (reducción de la pena de cárcel) con independencia de la decisión del otro. Pero esta solución solo es óptima desde el punto de vista de los intereses del conjunto de jugadores, mientras que la solución no es óptima desde el punto de vista individual, ya que ambos tendrán que estar una temporada en la cárcel. El Equilibrio de Nash sería (confesar, confesar). Aquí reside el principal punto de inflexión del dilema del prisionero, la contraposición entre los intereses individuales y colectivos.

Desde un punto de vista general, el dilema del prisionero pueden representar una posible imagen del mundo real en el que los seres humanos, lejos de actuar de manera conjunta, priorizan su interés obteniendo resultados menos beneficiosos.

Estrategias puras

Una vez definido el concepto de estrategia corresponde diferenciar varias clases de la misma. A continuación se va a desarrollar el concepto de estrategia pura, llevando a cabo su formalización e ilustrándolo mediante ejemplos.

Una estrategia pura es aquella en la que un jugador toma una decisión, o lo que es equivalente, lleva a cabo una acción, con el 100% de probabilidad, es decir, existe una total certeza sobre la decisión. Se denota por S al conjunto de perfiles de las estrategias del juego tal que, $S = S_1 \, x \, S_2 \, x \dots S_n$. Además, se define como $u_i(s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ a la utilidad o pago que recibe el jugador i cuando el resto de jugadores llevan a cabo el conjunto de estrategias puras $(s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$. Por lo tanto, un juego finito en forma normal puede ser representado mediante la siguiente terna: $\{N, (S_i)_{i \in I}, (u_i)_{i \in I}\}$.
En lo referente a la representación matricial de los juegos finitos de dos jugadores, las filas se corresponden con las estrategias del jugador I y las columnas con las estrategias del jugador II.

Por ejemplo, en un juego matricial de dos jugadores con conjuntos de estrategias finitos tal que:

Conjunto de estrategias puras del Jugador I: $S_1 = \{s_1, s_2, \dots s_n\}$.

Conjunto de estrategias puras del Jugador II: $S_2 = \{s'_1, s'_2, \dots s'_m\}$.

Se define la siguiente matriz, llamada comúnmente matriz de pagos:

		$Jugador\ II$			
		s'_1	s'_2	$\dots$	s'_m
$Jugador\ I$	s_1	$u_1(s_1, s'_1), u_2(s_1, s'_1)$	$u_1(s_1, s'_2), u_2(s_1, s'_2)$	$\dots$	$u_1(s_1, s'_m), u_2(s_1, s'_m)$
	s_2	$u_1(s_2, s'_1), u_2(s_2, s'_1)$	$u_1(s_2, s'_2), u_2(s_2, s'_2)$	$\dots$	$u_1(s_2, s'_m), u_2(s_2, s'_m)$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	s_n	$u_1(s_n, s'_1), u_2(s_n, s'_1)$	$u_1(s_n, s'_2), u_2(s_n, s'_2)$	$\dots$	$u_1(s_n, s'_m), u_2(s_n, s'_m)$

Tabla 2.2. Juego matricial de dos jugadores con conjuntos de estrategias finitos.

Estrategias mixtas

Tal y como se ha especificado en el apartado anterior, en una estrategia pura los individuos elegían acciones con total certeza, es decir, un 100% de probabilidad. En relación a las estrategias mixtas, se lleva a cabo una extensión de la definición de estrategia pura que va a permitir que los jugadores también puedan elegir acciones aleatorias, es decir, sin certeza total, siendo asignadas distintas probabilidades a las estrategias puras. En consecuencia se puede afirmar que una estrategia pura es también mixta.

Desde el punto de vista formal, se parte de un juego finito $G = \{N, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I}\}$ con $S_i = (s_1, s_2, s_3, \dots, s_n)$ estrategias puras del jugador i.

Una estrategia mixta del jugador i es la distribución de probabilidad $\sigma_i(s_i)$ sobre las estrategias de S_i tal que $\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$.

Resulta indispensable especificar sobre que subconjunto de estrategias puras han sido definidas las estrategias mixtas, es decir, a cuales de las estrategias puras se les ha otorgado una probabilidad positiva. A dicho subconjunto de estrategias puras con una probabilidad positiva se le denomina soporte de una estrategia mixta. Formalmente:

$$sop(\sigma_i) = \{s_i \in S_i \ / \ \sigma_i(s_i) > 0\}.$$

En el supuesto de que el soporte de una estrategia mixta coincida con el conjunto de estrategias puras de un jugador tal que: $sop(\sigma_i) = S_i = (s_1, s_2, s_3, \dots, s_n)$, se considera que dicha estrategia mixta es completa. Por otro lado, a aquellas estrategias mixtas que no son puras se las conoce como estrategias mixtas propias.

En cuanto a los pagos que recibe cada uno de los jugadores, se utilizan funciones de pago esperado[1], ya que a cada una de las estrategias puras se le está otorgando una probabilidad aleatoria. Formalmente:

$$E_i(\sigma_{1,}\sigma_{2,} \dots, \sigma_n) = \sum_{(s_1,\dots,s_n) \in S} \sigma_1(s_1) \dots \sigma_n(s_n)\, u_i(s_{1,}s_{2,} \dots, s_n).$$

Partiendo de un juego finito: $G = \{N, (S_i)_{i \in I}, (u_i)_{i \in I}\}$, se define como extensión mixta de G al juego $\Delta G = \{N, (\Delta(S_i))_{i \in I}, (E_i)_{i \in I}\}$, siendo relevante el hecho de que dicho conjunto sea convexo y compacto. Además, las funciones de pago esperadas son cóncavas en ΔG.

Conceptos de solución

En lo relativo a la solución de esta clase de juegos es necesario hacer dos aclaraciones al respecto: En primer lugar, el concepto de solución debe definirse de una manera apropiada, entendido como el procedimiento utilizado para alcanzar con exactitud la solución del juego. En segundo lugar, se entiende por solución el conjunto de combinaciones de estrategias en las que es de suponer que los jugadores tomaran sus decisiones.

A continuación se describen algunos conceptos de solución basados en la dominación y en el equilibrio.

Estrategias dominantes y dominadas

Una estrategia dominante de un jugador es aquella que es tan buena o mejor que otra, llamada dominada, para cada uno de los posibles perfiles de

[1] Combinación convexa de los pagos esperados para las estrategias del soporte.

estrategias que elijan el resto de jugadores. Es de suponer que todos los jugadores tienen un comportamiento racional por lo que no llevarán a cabo estrategias dominadas. Desde el punto de vista formal y siguiendo con el ejemplo expuesto anteriormente (Tabla 2.2). Para el jugador I, la estrategia s_1, es dominante si:

$$u_1(s_1, s_1') \geq u_1(s_2, s_1'),$$
$$u_1(s_1, s_2') \geq u_1(s_2, s_2').$$

Si la desigualdad se cumple de manera estricta, la estrategia s_1 será estrictamente dominante.

En el caso anterior, la solución está formada por la combinación de estrategias en las que cada uno de los jugadores tiene una estrategia dominante (o estrictamente dominante). Por lo general, en la mayoría de los juegos no se suelen dar las condiciones anteriores, es decir, cada jugador no tiene una estrategia dominante.

Eliminación iterativa

Desde el punto de vista formal, existen dos procesos matemáticos, la eliminación iterativa estricta y la débil, basados en la eliminación de manera sucesiva de estrategias teniendo en cuenta el argumento de dominación expuesto anteriormente.

Eliminación iterativa estricta

Para un juego: $G = \{N, (S_i)_{i \in I}, (u_i)_{i \in I}\}$ conforman la solución del juego los perfiles de estrategias que no son eliminados en el proceso de eliminación iterativa estricta que consta de dos etapas:

1º Etapa: Se eliminan simultáneamente para cada uno de los jugadores las estrategias estrictamente dominadas, resultando un juego reducido G_{red} .

2º Etapa: Se realiza la misma operación que en la etapa anterior hasta que queda el perfil de estrategias que corresponde a la solución.

En el caso de los juegos finitos como el que se ha tomado de ejemplo anteriormente, el orden de eliminación de estrategias es indiferente.

Eliminación iterativa débil

En este caso, la solución del juego esta formada por los perfiles de estrategias que no se eliminan en el proceso de eliminación iterativa débil, consistente en eliminar las estrategias dominadas a diferencia del proceso estricto.

Equilibrio de Nash en estrategias puras

Partiendo de un juego finito $G = \{N, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I}\}$, cada jugador va a elegir la opción más conveniente desde el punto de vista personal, es decir, aquella que le proporcione una mayor utilidad suponiendo dadas las estrategias del resto de jugadores. Desde el punto de vista formal se dice que un perfil de estrategias puras s^*=($s_1^*, s_2^*, s_3^*, \dots s_n^*$), es un Equilibrio de Nash si:

$$u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_i^*) \qquad \forall\, s_i \in S_i,$$
$$\forall\, i = 1, \dots, n.$$

Por lo tanto s_i^* es solución del juego tal que:

$$\max_{s_i \in S_i} \; u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*).$$

Además, el teorema de la existencia del Equilibrio de Nash establece que para un conjunto de estrategias, S_i, compacto y convexo y una función de pagos, u_i, continua y cóncava, el juego G tiene al menos un Equilibrio de Nash.

En el juego finito de dos jugadores $G = \{N = \{1{,}2\};\ S_1, S_2;\ u_1, u_2\}$ se dice que el par de estrategias (s_1^*, s_2^*) forman un equilibrio de Nash si:

$$u_1(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s_1, s_2^*) \quad \forall s_1 \in S_1,$$
$$u_2(s_1^*, s_2^*) \geq u_2(s_1^*, s_2) \quad \forall s_2 \in S_2.$$

Siendo la solución del juego para cada jugador:

$$\max_{s_1 \in S_1} u_1(s_1, s_2^*),$$
$$\max_{s_2 \in S_2} u_2(s_1^*, s_2)\,.$$

Es decir, la estrategia de cada jugador debe ser su mejor respuesta a las estrategias del resto de jugadores, conocida como correspondencia de respuesta óptima:

$$R_i(s_{-i}) \ \forall s_i \in S_i.$$

Todos los jugadores van a elegir estrategias de equilibrio y ninguno saldrá favorecido si se desvía de la misma. Si existiera una desviación que favorezca al menos a un jugador no habría Equilibrio de Nash.

Existe la posibilidad de que un juego no tenga ningún Equilibrio de Nash, este el es caso del conocido como “Juego de las monedas”[1], cuya matriz de pagos es:

		$Jugador\ II$	
		Cara	Cruz
$Jugador\ I$	Cara	$\underline{1}, -1$	$-1, \underline{1}$
	Cruz	$-1, \underline{1}$	$\underline{1}, -1$

Tabla 2.3. Juego de las monedas en forma normal.

Si el $Jugador\ II$ juega “Cara”, se comparan los pagos 1 y -1 del $Jugador\ I$ y su respuesta óptima será “Cara”. Cuando el $Jugador\ II$ juega Cruz, se comparan los pagos -1 y 1 del $Jugador\ I$, y su respuesta óptima será “Cruz”. Operando de la misma manera con los pagos del $Jugador\ II$, se llega a la conclusión de que no existen EN ya que ningún perfil cuenta con los dos componentes de su vector de pagos subrayados.

Otro tipo de juegos como el “Juego de la gallina”[2] tienen más de un Equilibrio de Nash. Su representación matricial es:

		$Jugador\ II$	
		Girar	Aguantar
$Jugador\ I$	Girar	$2,2$	$-\underline{1}, \underline{5}$
	Aguantar	$\underline{5}, -\underline{1}$	$-4, -4$

Tabla 2.4. Juego de la gallina en forma normal.

Si el $Jugador\ II$ juega “Girar”, se comparan los pagos 2 y 5 del $Jugador\ I$, y se subraya el máximo que es 5 , indicando que la respuesta óptima es “Aguantar”.

[1] Dos jugadores lanzan una moneda cada uno de manera simultánea. Si salen dos caras o dos cruces, el $jugador\ I$ recoge las dos monedas, mientras que si hay una cara y una cruz, es el $jugador\ II$ el que se lleva las monedas.

[2] Dos jugadores en sus respectivos coches se encuentran en un mismo camino frente a frente, ambos aceleran. El jugador que gire, pierde.

Cuando el $Jugador\ II$ juega “Aguantar”, se comparan los pagos -1 y -4 del $Jugador\ I$, y se subraya el máximo que es -1, indicando que la respuesta óptima es “Girar”. Operando de la misma manera con los pagos del $Jugador\ II$, se llega a la conclusión de que existen dos EN, los perfiles (Aguantar, Girar) y (Girar, Aguantar) ya que ambos cuentan con los dos componentes de su vector de pagos subrayados.

Equilibrio de Nash en estrategias mixtas

Para un juego finito $G = \{N, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I}\}$, un perfil σ^* será un Equilibrio de Nash en estrategias mixtas si y sólo si, σ^* es un Equilibrio de Nash de la extensión mixta del juego G: $\Delta G = \{N, (\Delta(S_i))_{i\in I}, (E_i)_{i\in I}\}$. Desde el punto de vista formal se dice que un perfil de estrategias mixtas σ^*=$(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*, \dots, \sigma_n^*)$ es un Equilibrio de Nash si:

$$E_i(\sigma_1^*, \dots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i^*, \sigma_{i+1}^*, \dots, \sigma_n^*) \geq E_i(\sigma_1^*, \dots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, \dots, \sigma_n^*) \qquad \forall\ \sigma_i\ \in \Delta(S_i),\ \forall\ i = 1, \dots, n.$$

Siendo σ_i^* la solución del juego tal que:

$$\max_{\sigma_i \in \Delta(S_i)} E_i(\sigma_1^*, \dots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, \dots, \sigma_n^*).$$

En el juego finito de dos jugadores $G = \{N = \{1,2\};\ S_1, S_2;\ u_1, u_2\}$ se dice que el par de estrategias mixtas (σ_1^*, σ_2^*) forman un equilibrio de Nash si:

$$E_1(s_1, \sigma_2^*) \geq E_1(s_1', \sigma_2^*) \quad \forall s_1 \in sop(\sigma_1^*), \forall s_1' \in\ S_1,$$
$$E_2(\sigma_1^*, s_2) \geq E(\sigma_1^*, s_2') \quad \forall s_2 \in sop(\sigma_2^*), \forall s_2' \in\ S_2.$$

Se puede afirmar por tanto que en un juego finito en forma normal, un equilibrio de Nash en estrategias puras lo es también en estrategias mixtas. Sin embargo, existen juegos que no tienen Equilibrio de Nash en estrategias puras y sí lo tienen en estrategias mixtas. Al ser $\Delta G = \{N, (\Delta(S_i))_{i\in I}, (E_i)_{i\in I}\}$ convexo y compacto y las funciones de pago esperadas cóncavas (cuasi cóncavas) en sus argumentos, se cumple el teorema de la existencia de Equilibrio de Nash descrito anteriormente, por lo que se puede concluir que todo juego en forma normal tiene al menos un Equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

Juegos de suma nula

Los juegos bipersonales de suma nula reflejan situaciones estrictamente competitivas entre jugadores. En ellos, lo que gana un jugador es exactamente igual a lo que pierde el otro jugador.

Partiendo de un juego $G = \{S_1, S_2, u_1, u_2\}$ bipersonal y finito. Dicho juego G, será de suma nula si y sólo si la suma de los pagos de ambos jugadores es 0 tal que:

$$u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 0, \qquad \forall s_1 \in S_1 \text{ y } \forall s_2 \in S_2.$$

Tomando la matriz de pagos del Jugador I, A, de orden $n\,x\,m$ con $S_1 = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ y $S_2 = (s'_1, s'_2, \dots, s'_m)$ estrategias puras de cada jugador. Las filas de A corresponden a las estrategias puras del Jugador I y las columnas a las estrategias puras del Jugador II. Se define el término a_{ij} como un pago cualquiera $u_1(s_i, s_j)$ de la matriz A, el cual permite introducir conceptos de maximin, minimax y punto de silla.

El valor maximin denotado como $\underline{m}$, corresponde al valor máximo de los valores mínimos de todas las filas de A tal que $\underline{m} = \max_{1\le i\le m}\{\min_{1\le j\le n} a_{ij}\}$.

El valor minimax denotado como $\overline{m}$, corresponde al valor mínimo de los valores máximos de todas las filas de A tal que $\overline{m} = \min_{1\le j\le n}\{\max_{1\le i\le m} a_{ij}\}$.

El término a_{i0j0} de A_1 es un punto de silla si es el valor máximo de su columna y el valor mínimo de su fila, tal que $a_{i0j0} = \underset{1\le i\le m}{max}\, a_{ij0} = \underset{1\le j\le n}{min}\, a_{i0j}$.

Por lo tanto, si $\underline{m} = \overline{m}$ existe un punto de silla en la matriz.
Partiendo de la extensión mixta del juego podemos definir los valores maximin y minimax de la función de pagos $\mathrm{E}_1(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 \mathrm{A} \sigma_2^{\mathrm{t}}$, tal que:

$$\underline{v} = \max_{\sigma_1\in\Delta(S_1)}\{\min_{\sigma_2\in\Delta(S_2)}\{\sigma_1 \mathrm{A} \sigma_2^{\mathrm{t}}\}\},$$

$$\overline{v} = \min_{\sigma_2\in\Delta(S_2)}\{\max_{\sigma_1\in\Delta(S_1)}\{\sigma_1 \mathrm{A} \sigma_2^{\mathrm{t}}\}\}.$$

De modo que un punto de silla de la función de pagos es un par (σ_1^*, σ_2^*) tal que: $\min_{\sigma_2 \in \Delta(S_2)} \mathrm{E}_1(\sigma_1^*, \sigma_2)$= $\mathrm{E}_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \max_{\sigma_1 \in \Delta(S_1)} \mathrm{E}_1(\sigma_1, \sigma_2^*)$.

En un juego bipersonal de suma cero G, se denota como v al valor del juego de manera que según el Teorema minimax: $\underline{v} = \overline{v} = v$.

2.2. JUEGOS EN FORMA EXTENSIVA

Constituye la forma de representación natural de los juegos dinámicos. Desde el punto de vista formal podemos definir un juego en forma extensiva de la siguiente manera:

$$G = \{N, (X, \sigma), (A, \alpha), \{X_i\}_{i \in N}, \{H_i\}_{i \in N}, \rho, \{u_i\}_{i \in N}\}.$$

Donde:

N= conjunto de los jugadores,

$N = \{0,1,2, \dots n\}$ y 0 representa al azar.

$N = \{1,2, \dots n\}$ si no hay azar.

X = conjunto de nodos.
$\sigma(x)$ = nodo que precede a x.

A = acciones posibles.

$\sigma(x), x \neq 0$, acción que lleva $\sigma(x)$ en x.

$A(x)$ = acciones posibles desde x.

X_i = nodos en los que i tiene que jugar.

$T(X)$ = nodos terminales, $X = \cup X_i \cup T(X), y\ X_i \cap X_j = \emptyset$.

H_i= conjuntos de información para i. Partición de X_i.

Si x, $x' \in h \in H_i$, entonces $A(x)$ = $A(x')$.

$A(h)$ = $A(x)$ = acciones posibles desde un conjunto de información.

ρ: distribución de probabilidades entre las acciones en cada conjunto de información donde juega la naturaleza.

u_i: función de pagos para el jugador i, definida sobre $T(X)$.

Una estrategia pura para el jugador i es una función:

$$s_i: H_i \to A,$$
$$h \to s_i(h) \in A(h).$$

El desarrollo o trayectoria del juego es todo camino que, siguiendo el árbol, conduce desde el nodo inicial a un nodo terminal.

Un juego en forma normal puede ser representado en forma extensiva, por ejemplo, en el dilema del prisionero desarrollado anteriormente donde los jugadores solo tienen dos estrategias, confesar(con) o callar(ca).

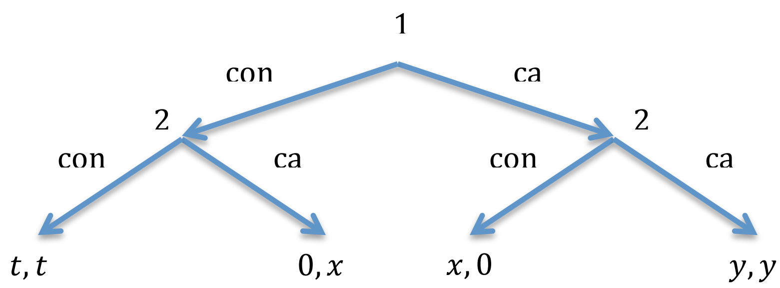

Gráfico 2.1. Dilema del prisionero en forma extensiva con pagos genéricos. Siendo $y < t < x$.

Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos

Se trata de un concepto de equilibrio que constituye una mejora con respecto al Equilibrio de Nash, en el marco de los juegos dinámicos de información completa, ya que tiene en consideración la veracidad de las amenazas sobre decisiones futuras que condicionan el comportamiento presente de los jugadores. Desde el punto de vista teórico, un subjuego puede ser definido como aquella parte del juego que puede considerarse de manera racional como un juego en si misma. Así, si G es un juego dinámico con información completa en forma extensiva y x un nodo de decisión, se dice que G_x es un subjuego de G con inicio en el nodo x si contiene al nodo x que pertenece a un conjunto de información unitario y contiene a un nodo z y, por lo tanto, a todos los elementos del conjunto de información al que pertenece. Además, se considera que un subjuego es propio si x no comienza en el nodo inicial de G, y minimal si no contiene ningún subjuego propio. Si G es un juego dinámico finito, existe un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos de G[1].

Algoritmo: Inducción hacia atrás

Los Equilibrios de Nash perfectos en subjuegos descritos en el apartado anterior se pueden hallar sistemáticamente a través de un algoritmo conocido como "inducción hacia atrás", el cual se aplica en la resolución de los juegos dinámicos con información completa y perfecta. Partiendo de un juego finito en forma extensiva con información completa y perfecta G, la inducción hacia atrás se desarrolla en base a las siguientes etapas:

En primer lugar, se identifican los subjuegos que comiencen en nodos de decisión que únicamente precedan a nodos terminales. El Equilibrio de Nash en estos subjuegos, con un único jugador, es la acción óptima de ese jugador. Posteriormente se eliminan dichos subjuegos, excepto el nodo en el que empiezan, considerando ese nodo como el terminal y atribuyendo a ese nodo los pagos resultantes de haber llevado a cabo las acciones óptimas que corresponden a dicho nodo. De este modo, se eliminan las últimas ramas del árbol del juego global inicial. En segundo lugar, se lleva a cabo la misma operación con el árbol resultante de la etapa anterior hasta alcanzar el nodo inicial del juego global inicial. En los juegos de horizonte finito con información perfecta, el conjunto de perfiles de estrategias que se obtienen en el procedimiento de inducción hacia atrás coincide con el conjunto de Equilibrios de Nash perfectos en subjuegos.

En el supuesto que ningún jugador tenga más de una acción óptima en cada nodo de decisión, el Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos es único.

En el "juego de la gallina" descrito anteriormente, cuya forma extensiva es la siguiente:

[1] Teorema de la existencia de Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos: Si G es un Juego dinámico finito (número finito de jugadores, cada uno de ellos con un conjunto finito de estrategias), existe un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos de G. (Reinhard Selten,1965).

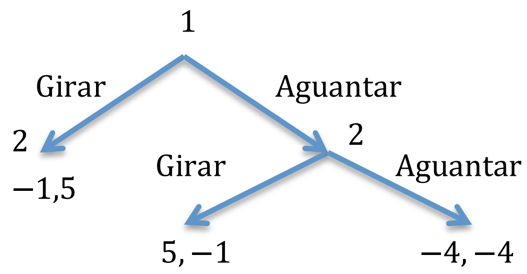

Gráfico 2.2. Juego de la gallina en forma extensiva.

Aplicando el algoritmo de inducción hacia atrás, se resuelve el último subjuego donde la elección óptima del $Jugador\ II$ será "Girar" (ya que el pago que recibe es superior al de "Aguantar"). A continuación se resuelve el juego resultante de eliminar este subjuego, de manera que el $Jugador\ I$ elegirá "Aguantar" (recibe un pago superior al que recibe al jugar la estrategia "Girar"). Por lo tanto, la estrategia óptima del $Jugador\ I$ es "Aguantar" y la estrategia óptima del $Jugador\ II$ es "Girar". El Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos es (Aguantar, Girar).

En el caso de los juegos de información imperfecta, en cuya forma extensiva existe algún conjunto de información no unitario, el procedimiento de inducción hacia atrás no se puede aplicar como regla general, ya que al llevar a cabo dicho proceso se puede encontrar un nodo de decisión que pertenece a un conjunto de información no unitario.

Juegos repetidos

En muchas situaciones se puede observar un conjunto de jugadores que interaccionan repetidamente a lo largo del tiempo. Suponiendo que las condiciones en las que operan se mantienen invariables, es posible plantear dos clases de juegos repetidos en función del horizonte temporal del juego, ya sea finito o infinito.

Juegos repetidos finitos

Como su propio nombre indica, un juego repetido finito es aquel juego básico G, en forma estratégica, en el que participan un número de jugadores n y que se repite un número finito de veces, establecidas previamente, a lo largo del tiempo. El horizonte temporal es común para todos los jugadores, es decir, el número de jugadores se mantiene constante a lo largo del horizonte temporal de interacción y adicionalmente todos los jugadores conservan las mismas funciones de utilidad en cada momento de tiempo.

Sea $G = \{A_1, \dots, A_n; u_1, \dots, u_n\}$ un juego básico y δ un vector de factores de descuento, se denotará como $G^T(\delta)$ a un juego repetido un número finito de veces siempre que, previamente al comienzo del juego, los jugadores dispongan de información acerca del factor de descuento de cada jugador, el número de veces T que se repite G y las funciones de pagos de $G^T(\delta)$ para un factor de descuento δ de cada jugador i.
Además, se deben conocer todas las jugadas que han llevado a cabo los jugadores en las etapas anteriores.

Siendo $G^T(\delta)$ un juego repetido finito, a cada repetición del juego G se la denota como $G^t(\delta)$. En cada repetición t se supone que todos los jugadores observan y recuerdan las acciones efectuadas por si mismo y por los demás en las $t-1$ etapas anteriores, de modo que, se define como a_i^k a la acción llevada a cabo por el jugador i en la etapa k.
Las historias del juego, h_t , recogen la experiencia del juego hasta el momento t , siendo H_t el conjunto de todas las t-historias h_t tal que:

$$H_t = \left\{ \{a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k\right\}_{k=1,2,\dots,t-1} / a_i^k \in A_i\}.$$

De este modo se puede definir una estrategia σ_i del jugador i en $G^T(\delta)$ como el plan que determina qué acción realizará dicho jugador en cada etapa para cada posible historia hasta ese momento. Se trata de un conjunto de T aplicaciones $a_i^k(.)$, una por cada etapa k, de modo que $a_i^k(.)$ asigna a cada k-

historia (donde $1 \leq k \leq T$) una acción de A_{i}, tal que:

$$\sigma_i = (a_i^1(h_1), a_i^2(h_2), \dots, a_i^T(h_T)).$$

Juegos repetidos infinitamente

En el supuesto que el juego se repita infinitamente puede haber Equilibrios de Nash perfectos en subjuegos en los que los jugadores cooperen. De este modo, mediante la repetición del juego es posible conciliar los intereses individuales y colectivos.

Sea $G = \{A_1, \dots, A_n; u_1, \dots, u_n\}$ un juego básico, en forma estratégica, con pagos acotados y $\delta < 1$ un factor de descuento, se denotará como $G^{\infty}(\delta)$ a un juego repetido un número infinito de veces siempre que, previamente al comienzo del juego, los jugadores dispongan de información acerca de (1) el factor de descuento, (2) la continuación del juego tras cada etapa, y (3) las funciones de pago de $G^{\infty}(\delta)$ en base al factor de descuento para cada jugador i. Además, se deben conocer todas las jugadas que han llevado a cabo los jugadores en las etapas anteriores.

Tanto las historias, h_t, como las estrategias σ_i, se definen de la misma manera que en los juegos repetidos finitos, de manera que: Siendo $G^{\infty}(\delta)$ un juego repetido infinito, a cada repetición del juego G se la denota como $G^t(\delta)$. En cada repetición t se supone que todos los jugadores observan y recuerdan las acciones efectuadas por si mismo y por los demás en las $t-1$ etapas anteriores, de modo que, se puede definir como a_i^k a la acción llevada a cabo por el jugador i en la etapa k.

Las historias del juego, h_t , recogen la experiencia del juego hasta el momento t , siendo H_t el conjunto de todas las t-historias h_t tal que:

$$H_t = \{\{a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k\}_{k=1,2,\dots,t-1} / a_i^k \in A_i\}.$$

Las estrategias σ_i del jugador i en $\mathrm{G}^{\infty}(\delta)$ son planes de acción que determinan qué acción realizará dicho jugador en cada etapa para cada posible historia hasta ese momento, tal que:

$$\sigma_i = (a_i^1(h_1), a_i^2(h_2), \dots, a_i^k(h_k)).$$

Existen diferentes estrategias que pueden llevar a cabo los jugadores. Un tipo de ellas es la llamada estrategia “ojo por ojo” (“tic for tac”) consistente en que “si un jugador coopera, el otro también. Si es un traidor, el otro jugador también será un traidor". Este tipo de estrategia es un Equilibrio de Nash cuando el factor de descuento δ es suficientemente elevado, pero no es un Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. Otro tipo de estrategia es la estrategia “del disparador” (“trigger strategy”) consistente en empezar cooperando hasta que la cooperación se rompa, momento a partir del cual no se coopera más. En este caso si que existe un Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos para un δ elevado.

3. APLICACIONES DEL EQUILIBRIO DE NASH

3.1. DUOPOLIO DE COURNOT

El estudio de la estructura de los mercados ha sido una de las muchas aplicaciones que ha tenido la Teoría de Juegos, haciendo especial hincapié en los modelos de mercado en los que el número de empresas que intervienen es reducido.

En el caso del Duopolio de Cournot intervienen dos empresas, $E_1 \; y \; E_2$, que producen cantidades $q_1 \; y \; q_2$ respectivamente de un bien homogéneo y compiten en cantidades entre si. Ambas empresas toman sus decisiones de producción de manera simultánea, siendo esta la principal diferencia con el modelo de Duopolio de Stackelberg. Suponiendo una función de demanda inversa decreciente y lineal en el intervalo [0, a/b], costes marginales respectivos c_1 y c_2 , la no existencia de costes fijos y la venta de toda la cantidad del bien que se produce.

$$P(Q) = \begin{cases} a - bQ & bQ < a \\ 0 & bQ \geq a \end{cases} \quad (donde\ b > 0\ y\ Q = \ q_1 + \ q_2),$$

es la función de demanda inversa.

Las funciones de costes: $C_1(q_1) = c_1 q_1 \ y \ C_2(q_2) = c_2 q_2 \ \ donde \ c_1, c_2 < a$.

Las funciones de pagos serán:

$$\pi_1(q_1, q_2) = \ q_1(a - bq_1 - bq_2) - \ c_1 q_1 = \ q_1(a - bq_1 - bq_2 - c_1),$$
$$\pi_2(q_1, q_2) = \ q_2(a - bq_1 - bq_2) - \ c_2 q_2 = \ q_2(a - bq_1 - bq_2 - c_2).$$

Para obtener la respuesta óptima de la empresa E_1 ante una cantidad producida q_2 de E_2, se resuelve el siguiente problema de maximización:

$$\text{Max}_{q_1} \pi_1(q_1, q_2) = \text{Max} \, q_1(a - \ bq_1 - bq_2 - c_1).$$
$$s.a{:}\, 0 \leq q_1 \leq \ a/b$$

Se obtiene la condición necesaria:

$$\frac{\partial \pi_1(q_1,q_2)}{\partial q_1} = a - \ 2bq_1 - bq_2 - c_1 = 0;\ q_1 = (a - bq_2 - c_1)/2b.$$

En cuanto a la condición suficiente:

$$\frac{\partial^2 \pi_1(q_1,q_2)}{\partial {q_1}^2} = -2b < 0;$$ Se confirma la condición de máximo.

De manera que la respuesta óptima de la empresa E_1 es:

$$R_1(q_2) = \frac{(a - bq_2 - c_1)}{2b}.$$

Del mismo modo, la respuesta óptima de la empresa E_2 ante una cantidad producida q_1 de E_1se obtiene resolviendo:

$$\text{Max}_{q_2} \pi_2(q_1, q_2) = \text{Max} \, q_2(a - \ bq_1 - bq_2 - c_2).$$
$$s.a{:}\, 0 \leq q_2 \leq \ a/b$$

Llevando a cabo el mismo procedimiento utilizado para calcular la respuesta óptima de la empresa E_1, se calculan las condiciones necesaria y suficiente de la empresa E_2, obteniendo la siguiente respuesta óptima:

$$R_2(q_1) = \frac{(a - bq_1 - c_2)}{2b}.$$

Una vez se calculan las respuestas óptimas de ambos jugadores, $R_1(q_2)$ hace referencia a la cantidad producida por E_1 en el equilibrio y $R_2(q_1)$ a la cantidad producida por E_2. De modo que (q_1^*, q_2^*) es un Equilibrio de Nash donde:

$$q_1^*= \frac{(a-bq_2^*-c_1)}{2b}\ ,\ q_2^* = \frac{(a-bq_1^*-c_2)}{2b}\ .$$

Resolviendo el sistema:

$$q_1^*= \frac{\left(a-b\frac{(a-bq_1^*-c_2)}{2b}-c_1\right)}{2b}\ ;\ q_1^* = \frac{a-\frac{(a-bq_1^*-c_2)}{2}-c_1}{2b}\ ;\ 4bq_1^* = 2a-a+bq_1^*+c_2-2c_1\ ;$$

$$q_1^* = \frac{(a-2c_1+c_2)}{3b}\ .$$

Análogamente,

$$q_2^* = \frac{(a-2c_2+c_1)}{3b}.$$

Despejando en la función de demanda inversa se calcula la cantidad, en el Equilibrio, producida Q y el precio P, ambos .

$$Q^* = \frac{(2a-c_1-c_2)}{3b}\ ,$$

$$P^* = a - bQ^*= \frac{3a-2a-c_1-c_2}{3} = \frac{a-c_1-c_2}{3}.$$

Finalmente los pagos en el equilibrio serán:

$$\pi_1^*(q_1^*, q_2^*) = q_1(a-bq_1-bq_2-c_1)= \frac{(a-2c_1+c_2)^2}{9b},$$

$$\pi_2^*(q_1^*, q_2^*) = q_2(a-bq_1-bq_2-c_2)=\frac{(a-2c_2+c_1)^2}{9b}.$$

Gráficamente:

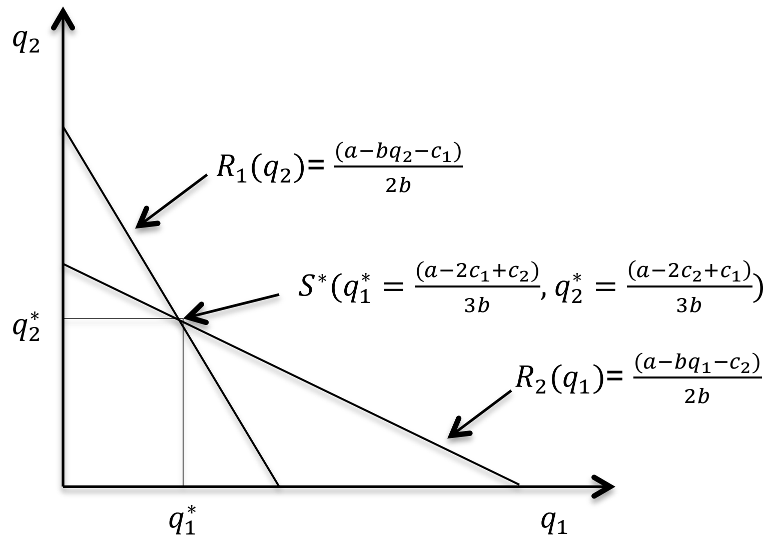

Gráfico 3.1. Duopolio de Cournot.

Una aplicación alternativa de la teoría de juegos es el modelo de oligopolio de Bertrand que se caracteriza por la existencia de competencia en precios entre las empresas, comprometiéndose a servir al precio que deciden, toda la cantidad demandada por los consumidores de un producto homogéneo.

3.2. DUOPOLIO DE STACKELBERG

Consiste en un mercado formado por dos empresas, $E_1 \, y \, E_2$, las cuales producen cantidades $q_1 \, y \, q_2$ respectivamente de un bien homogéneo y compiten en cantidades entre si. Suponiendo una función de demanda inversa decreciente y lineal en el intervalo $[0, a]$, costes marginales respectivos c_1 y c_2, la no existencia de costes fijos y la venta de toda la cantidad del bien que se produce.

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & Q < a \\ 0 & Q \geq a \end{cases} \quad (donde \; a > 0 \; y \; Q = \; q_1 + \; q_2),$$

es la función de demanda inversa.

Las funciones de costes: $C_1(q_1) = c_1 q_1 \; y \; C_2(q_2) = c_2 q_2 \;\; donde \; c_1, c_2 < a$.

Las funciones de beneficio serán:

$$\pi_1(q_1, q_2) = \; q_1(a - q_1 - q_2) - \; c_1 q_1 = \; q_1(a - q_1 - q_2 - c_1),$$
$$\pi_2(q_1, q_2) = \; q_2(a - q_1 - q_2) - \; c_2 q_2 = \; q_2(a - q_1 - q_2 - c_2).$$

La diferencia con el Duopolio de Cournot reside en el desarrollo del juego. En primer lugar es la empresa E_1(líder) la que fija la cantidad q_1 que va a producir y en consecuencia E_2 (seguidora) decide que cantidad q_2 producir.

La solución del juego se puede obtener aplicando el algoritmo de inducción hacia atrás.
Una vez E_1 decide la cantidad q_1 que produce, E_2 responderá maximizando su utilidad tal que:

$$\text{Max}_{q_2} \, \pi_2(q_1, q_2) = q_2(a - \; q_1 - q_2 - c_2).$$

Se calculan las condiciones necesaria y suficiente:

$$\frac{\partial \pi_2(q_1,q_2)}{\partial q_2} = a - \ q_1 - 2q_2 - c_2 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \pi_2(q_1,q_2)}{\partial {q_2}^2} = -2 < 0.$$ Se confirma la condición de máximo.

Obteniendo así la función de respuesta óptima $R_2(q_1)$ de E_2 a E_1.

$$R_2(q_1) = \frac{a-q_1-c_2}{2}.$$

E_1 puede, por tanto, anticiparse a la respuesta de E_2 resolviendo el siguiente problema:

$$\mathrm{Max}_{q_1}\, \pi_1(q_1, R_2(q_1)\,) = q_1(a - \ q_1 - R_2(q_1) \ - c_1).$$

Sustituyendo $R_2(q_1) = \frac{a-q_1-c_2}{2}$, se calculan las condiciones necesaria y suficiente:

$$\frac{\partial \pi_1(q_1,q_2)}{\partial q_1} = \frac{a-\ 2q_1+c_2-2c_1}{2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \pi_1(q_1,q_2)}{\partial {q_1}^2} = -2 < 0.$$ Se confirma la condición de máximo.

De este modo se obtiene la cantidad producida $q_1 = \frac{a+c_2-2c_1}{2}$.

El resultado por inducción hacia atrás de este juego es:

$$q_1^* = \frac{a+c_2-2c_1}{2},\ R_2(q_1^*) = \frac{a-q_1^*-c_2}{2} = \frac{a-3c_2+2c_1}{4}.$$

En consecuencia, el juego se desarrolla de la siguiente manera: E_1 produce q_1^* y E_2 reacciona produciendo $R_2(q_1^*)$.

En este caso, el Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos será el perfil de estratégicas $(s_1^* = q_1^*, s_2^* = R_2(q_1^*))$. Se aprecia como la cantidad producida por la empresa E_1 en el duopolio de Stackelberg es superior a la que produce en el duopolio de Cournot como consecuencia de su liderazgo.

3.3. CAMBIO CLIMÁTICO

A finales del año 2015, se celebró en París la llamada “Cumbre del Clima” con la asistencia de representantes de cerca de 200 países, los cuales llegaron al primer acuerdo global para frenar el calentamiento ocasionado por las emisiones de gases del efecto invernadero. Los países firmantes se comprometieron a reducir sus emisiones, siendo los países desarrollados los que deberán aplicar en una mayor medida dicho acuerdo.

Sin embargo, al igual que ha ocurrido con acuerdos anteriores, cada país individualmente tiene incentivos a no reducir sus emisiones. En consecuencia, se trata de un juego del tipo “dilema del prisionero” donde la solución para los países será la de “no cooperar” ya que la estrategia dominante es precisamente la no reducción de las emisiones.

La matriz de pagos para el juego será la siguiente:

		Resto de Países	
		Reducir	No reducir
País 1	Reducir	$4,4$	$-1,5$
	No Reducir	$5,-1$	$0,0$

Tabla 3.1. Dilema del prisionero en forma normal aplicado a la reducción de emisiones, cuando no existe ninguna penalización por contaminar.

La reducción de las emisiones va a suponer un coste para el país que la lleve a cabo ya que deberá reducir su producción, restringir determinadas prácticas altamente beneficiosas o establecer costosos filtros para reducir el nivel de contaminación. Al mismo tiempo, dicha reducción supondrá un beneficio tanto para el país que la realiza, en términos de reducción de costes asociados al tratamiento de enfermedades o procesos de producción agrícola, como para el resto de países.

En el supuesto que todos los países decidieran reducir, deberían hacer frente al coste que ello implica, pero al mismo tiempo se verían beneficiados por su propia reducción y la reducción de emisiones del resto de países. Evidentemente, esta sería la solución óptima a nivel mundial pero desde el punto de vista de cada país, pueden obtener un mayor beneficio si mantienen su nivel de emisiones. El Equilibrio de Nash será (No Reducir, No Reducir). Por lo tanto, la estrategia no reducir va a ser dominante para el país 1 ya que independientemente de la decisión tomada por el resto de países siempre obtendrá un beneficio superior. Una vez más, el dilema del prisionero muestra la contraposición entre los intereses individuales y grupales.

Existe la posibilidad de que los organismos internacionales, ante la desorbitada emisión de sustancias nocivas, decidan interponer una multa a los países que no reduzcan sus emisiones. De este modo, para una multa con valor -3, la matriz de pagos sería la siguiente:

		Resto de Países	
		Reducir	No reducir
País 1	Reducir	$4,4$	$-1,2$
	No Reducir	$2,-1$	$-3,-3$

Tabla 3.2. Dilema del prisionero en forma normal aplicado a la reducción de emisiones, cuando existe ninguna penalización por contaminar.

En este caso, los países no van a tener incentivos para no reducir las emisiones y el Equilibrio de Nash será la estrategia (Reducir, Reducir). De este modo se consigue evitar la confrontación entre intereses individuales y colectivos.

3.4. PACTOS POST- ELECTORALES EN ESPAÑA

El pasado 20 de Diciembre de 2015 se celebraron en España las elecciones generales más mediáticas desde el comienzo de la etapa democrática. Se trataba de la primera vez en la que cuatro partidos políticos tenían oportunidad de hacerse con el poder. Una vez conocidos los resultados, comenzaron las negociaciones para formar gobierno, siendo posible analizar dichas negociaciones desde el punto de vista de la teoría de juegos.

Centrando el estudio en dos de los partidos políticos, el Partido Socialista Obrero Español (PSOE) y Podemos, cuyos resultados fueron 90 escaños y 69 escaños respectivamente, se puede contrastar que la negociación que han llevado a cabo ambos partidos se identifica con un juego del tipo “dilema del prisionero”. Cada partido tiene un conjunto de estrategias compuesto por 2 estrategias, pactar o no pactar.

Se define la siguiente matriz de pagos:

		PODEMOS	
		Pactar	No pactar
PSOE	Pactar	$3{,}3$	$-2{,}4$
	No Pactar	$4,-2$	$0{,}0$

Tabla 3.3. Dilema del prisionero en forma normal aplicado a una negociación política.

Desde la perspectiva de los votantes de izquierda, lo más beneficioso para ambos partidos sería pactar. De esta manera se sumarían apoyos suficientes para superar al partido que ganó las elecciones, el Partido Popular (123 escaños).

Sin embargo, analizando la situación desde el punto de vista individual, el PSOE obtendrá un mayor beneficio si decide no pactar, ya que sus votantes considerarán que Podemos es una fuerza política demasiado radical y podrían retirarle su apoyo en futuros comicios.

En cuanto a Podemos, la decisión de no pactar es la que mayor beneficio le reportaría ya que, de llegar a unas nuevas elecciones, estaría en condiciones de sorpassar al Partido Socialista debido a la mayor movilización de su electorado y sus distintas confluencias electorales.

Por lo tanto, la estrategia dominante para ambos partidos políticos va a ser no pactar, primando el interés individual al colectivo. El Equilibrio de Nash, en este supuesto, será (No pactar, No pactar).

4. CONCLUSIONES

La Teoría de Juegos se basa en el estudio de los comportamientos estratégicos de los jugadores. A lo largo de la historia, la Teoría de Juegos ha ido alcanzando paulatinamente un mayor grado de especialización matemática ofreciendo una gran variedad de soluciones para los diferentes problemas. Existen diferentes conceptos de solución para alcanzar la solución de un juego. Por un lado los que utilizan argumentos de dominación y por otro los basados en argumentos de equilibrio.

En lo relativo a la dominación entre estrategias, se sitúan fuera del ámbito de estudio aquellas estrategias que no son racionales. Mediante este concepto de solución se trata de identificar aquellas estrategias que no van a ser implementadas por los jugadores, ya que si las ponen en marcha, los pagos recibidos en el juego serán inferiores con independencia de lo elegido por el resto de jugadores.

Por otro lado, se encuentran los conceptos de solución basados en argumentos de equilibrio, que plantean una visión totalmente distinta del juego. Por su parte, tratan de averiguar las propiedades que deben tener los perfiles de estrategias que corresponden a la solución del juego. De modo que, ninguno de los jugadores tiene incentivos a cambiar la decisión que ha tomado dadas las estrategias del resto.

En los juegos estáticos que siguen el modelo del dilema del prisionero, la cooperación es la decisión más beneficiosa para el conjunto de jugadores pero la estrategia dominante desde el punto de vista de los individuos es la no cooperación, por lo que no parece probable que vayan a cooperar en el futuro. La excepción aparece cuando el juego se repite, provocando que la confrontación entre los intereses individuales y colectivos pueda desaparecer, por medio de la existencia de un equilibrio en el que todos lo jugadores cooperen en cada etapa del juego repetido.

En el caso de los juegos repetidos un número finito de veces que tengan solamente un Equilibrio de Nash de etapa, no se va a producir tal cooperación ya que cada jugador actúa en función de su interés personal.

Cuando hablamos de juegos repetidos infinitamente, pueden aparecer nuevos Equilibrios de Nash y Equilibrios de Nash perfectos en subjuegos en los que los jugadores cooperan. De este modo, se consiguen conciliar los intereses individuales y colectivos.

5. BIBLIOGRAFÍA

1. Bilbao, J. M. y Fernández, F. R. (editores) (1999): *Avances en teoría de juegos con aplicaciones económicas y sociales*. Secretariado de

publicaciones de la Universidad de Sevilla. Sevilla.

2. Blázquez Vallejo, M. y Gámez Jiménez, C.V. (2006): «Teoría de Juegos y Aplicaciones: El Dilema del Prisionero», *Inteligencia en Redes de Comunicaciones*. Madrid: Universidad Carlos III.

3. Cerdá Tena, E.; Pérez Navarro, J. y Jimeno Pastor, J. L. (2004): *Teoría de Juegos*. Pearson Educación, S.A., Madrid.

4. Fernández Rodríguez, F. (2005): «Teoría de Juegos: Análisis matemático de conflictos», *Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas 2005.* Las Palmas de Gran Canaria.

5. Fernández Ruiz, J. (2006): «El Premio Nobel de Economía y la Teoría de juegos: Un encuentro más», *Análisis Económico*, 21, pp. 84-87.

6. Krause, M. (1999): «La Teoría de los Juegos y el origen de las instituciones», *Libertas*, 31, pp. 3-9.

7. Nash, J. F. Jr. (1950): «The Bargaining Problem», *Econometrica*, Volume 18, Issue 2, pp. 155-162.

8. Nash, J. F. Jr. (1951): «Non-Cooperative Games», *The Annals of Mathematics*, Seconde Series, Volume 54, Issue 2, pp. 286-295.

9. Nash, J. F. Jr. (1953): «Two-person Cooperative Games», *Econometrica*, Volume 21, Issue 1, pp. 128-140.

10. Real Academia de las Ciencias de Suecia. (2005): «Las contribuciones de Robert Aumann y Thomas Schelling a la Teoría de Juegos: Análisis del conflicto y de la cooperación», (Grijalva, D. Trad.). Ecuador: Banco Central de Ecuador (Obra original publicada en 2005).

11. Ricart , J.E. (1988): «Una introducción a la Teoría de los Juegos», *IESE Business School-Universidad de Navarra*, DI-38, pp. 19-24.

12. Ricart , J.E. (1988): «Juegos con información incompleta», *IESE Business School-Universidad de Navarra*, DI-39, pp. 5-9.

13. Roux, D. (2006): *Los premios Nobel de Economía*. Ediciones Akal, S.A., Madrid.

14. Salas Fumás, V. (1994): «Los premios Nobel de Economía Harsanyi, Nash y Selten: el funcionamiento de los mercados desde la teoría de los juegos», *El Premi Catalunya D'Economia*. Barcelona.

15. Scheling, T.C. (1960):*The Strategy of Conflict.* Harvard University Press. Cambridge.

16. Von Neumann, J. y Morgenstern, O. (1944): *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press, Princeton, NJ.

17. Zermelo, E. (1913): «On an application of set theory to the theory of the game of chess», *Cambridge University Press*, pp. 501-504.