Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

La Ecuación Hipergeométrica de Gauss

Autor: Santiago Navazo Esteban

Tutor/es: Jorge Mozo Fernández

A mi madre,
por la motivación que me ha dado.

Resumen

En este trabajo se estudiarán las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior a 1 con coeficientes holomorfos en la esfera de Riemann, en especial la ecuación hipergeométrica de Gauss. En la primera parte se compararán los teoremas de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales no lineales y ecuaciones diferenciales lineales donde los coeficientes son funciones holomorfas, abordando también la prolongación analítica de las soluciones a lo largo de curvas y el teorema de monodromía. En la segunda parte clasificaremos las singularidades de las ecuaciones diferenciales lineales en singularidades de primer y segundo tipo, regulares e irregulares; y se hará un estudio más exhaustivo de las ecuaciones de orden 2 con coeficientes funciones racionales. En la tercera parte se estudiará como caso particular la ecuación hipergeométrica de Gauss y finalmente se darán aplicaciones prácticas de las ecuaciones diferenciales lineales, así como ideas sobre su implementación computacional.

Palabras clave:
holomorfa, ecuación diferencial, singularidad, monodromía, lineal, homogénea, fuchsiana...

Abstract

In this report linear differential equations of order greater than 1 with holomorphic coefficients in the Riemann sphere will be treated, especially the Gauss hypergeometric equation. In the first part we will compare existence and unicity theorems in both linear and non-linear differential equations where coefficients are holomorphic functions, and analytic continuation of solutions along curves and monodromy theorem are also treated. In the second part we will classify singularities in linear differential equations into first kind and second kind, regular and irregular; and a more comprehensive study of equations of order 2 whose coefficients are rational functions will be done. In the third part the Gauss hypergeometric equation will be studied as a particular case and finally practical applications of linear differential equations as well as a few ideas about computational implementation will be given.

Key words:
holomorphic, differential equation, singularity, monodromy, linear, homogeneus, fuchsian...

Índice

Introducción

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden: Las ecuaciones diferenciales de primer orden son expresiones de la forma:

$$H(t, f(t), f'(t)) = 0.$$

Cuyas soluciones son funciones holomorfas,

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Aunque no existe un procedimiento general para resolver estas ecuaciones se tienen varios casos particulares que facilitan su resolución especialmente cuando tratamos **ecuaciones diferenciales lineales**.

• Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas:

$$f'(t) + A(t)f(t) = 0.$$

Su solución general se puede escribir de la forma ($C \in \mathbb{C}$):

$$f(x) = C \exp\left(-\int_{t_0}^{t} A(x)dx\right).$$

• Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas:

$$f'(t) + A(t)f(t) = b(t).$$

Su solución general es la solución general de las ecuaciones diferenciales homogéneas mas una solución particular. Se resuelven por el método de variación de las constantes, esto es, sea una $Y_0(t)$ solución fija de la ecuación homogénea (por ejemplo, que $Y_0(t_0) = 1$), veamos como se calcula $c(t)$ para que $c(t)Y_0(t)$ sea una solución particular de la no homogénea:

$$c(t)Y_0'(t) + c'(t)Y_0(t) + c(t)A(t)Y_0(t) = b(t).$$

Hay que tener en cuenta que $Y_0'(t) + A(t)Y_0(t) = 0$, luego:

$$c'(t)Y_0(t) = b(t),$$

es decir,

$$c'(t) = \frac{b(t)}{Y_0(t)}.$$

Y de aquí se deduce que:

$$c(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{b(x)}{Y_0(x)}dx.$$

De aquí se deduce la expresión general de la solución de una ecuación diferencial no homogénea $Z(t)$:

$$Z(t) = DY_0(t) + c(t)Y_0(t) = (c(t) + D)Y_0(t) =$$

$$= \left(D + \int_{t_0}^{t} b(x) \exp \left(\int_{t_0}^{x} A(s)ds \right) dx \right) \exp \left(- \int_{t_0}^{t} A(x)dx \right).$$

En lo que sigue, se trabajará con ecuaciones diferenciales homogéneas, salvo que se especifique lo contrario.

Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior a 1: Su expresión general es de la forma $H(t, f(t), f'(t), f''(t), ..., f^{(n)}(t)) = 0$, con $n \in \mathbb{N}$. Al igual que en el caso anterior, no existe un procedimiento general para resolver estas ecuaciones. Sin embargo, si consideramos el caso de ecuaciones diferenciales lineales, tampoco existe un procedimiento general para resolverlas, excepto en el caso de ecuaciones lineales con coeficientes constantes:

• Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + ... + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0.$$

Su polinomio característico es:

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0.$$

Por el teorema fundamental del álgebra se tienen raíces λ_1,...,λ_m, con multiplicidades α_1,...,α_m, donde $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = n$. Dadas estas raíces se obtiene la solución general de la ecuación:

$$Y(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 t \exp(\lambda_1 t) + ... + C_n t^{\alpha_m - 1} \exp(\lambda_m t).$$

El problema es que si el orden de la ecuación es superior a 4, la ecuación característica no se podrá resolver en general mediante procedimientos algebraicos, debiendo recurrir a métodos numéricos.

• Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes no constantes:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0.$$

Como se había comentado anteriormente, no existe un procedimiento general para resolver estas ecuaciones. Por ejemplo:

$$y''(t) + ty(t) = 0. \qquad \text{(Ecuación de Airy)}$$

NOTA: Las soluciones de esta ecuación linealmente independientes son dos funciones no elementales conocidas como funciones de Airy, $Ai(t)$ es la función de Airy de primer tipo y $Bi(t)$ es la función de Airy de segundo tipo:

$$Ai(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \left(\frac{x^3}{3} + tx \right) dx \ ;$$

$$Bi(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp \left(-\frac{x^3}{3} + tx \right) + \sin \left(\frac{x^3}{3} + tx \right) dx.$$

En particular, la función $Ai(t)$ se caracteriza por tener un punto donde se pasa de un comportamiento oscilatorio a un decrecimiento exponencial. Esta función tiene aplicaciones en la física cuántica a la hora de expresar el movimiento de una partícula.
Queda clara, entonces, la imposibilidad de encontrar un método general para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales si su orden es superior a 1. Sin embargo, no hemos planteado ni siquiera la existencia y/o unicidad de este tipo de ecuaciones. Cabe preguntarse entonces: ¿Tienen una solución estas ecuaciones? ¿Bajo qué condiciones esta solución es única? ¿Cuál es el máximo dominio posible de definición de las soluciones de este tipo de ecuaciones?

Breve reseña histórica: Las ecuaciones diferenciales empezaron a definirse rigurosamente con Isaac Newton (1642-1727) y con Gottfried Withelm Leibnitz (1646-1716). En particular, con Leibnitz se introdujo el símbolo $\int$ de integración (Similar a la S, pero más alargada, denotando "suma") y la notación $\frac{d}{dx}$ para la derivación.
Más tarde, Leonard Euler (1707-1783), popularizo la notación actual para números como π, i, e, y empezó a emplearse el método de variación de las constantes para ecuaciones diferenciales de primer orden, aunque también resolvió casos particulares de ecuaciones de segundo orden (como la ecuación de Euler).
Johann Karl Friedrich Gauss (1777-1855), en su trabajo *Disquisitiones generales circa seriem infinitam* (1812), en el que se hace un riguroso estudio de las series de potencias, y citó por primera vez la función hipergeométrica, empleando la notación $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$, en este trabajo se abordó también la integración de ecuaciones diferenciales.
El estudio de las ecuaciones diferenciales mostró un gran avance en 1890, cuando Charles Émile Picard (1856-1941) presentó una demostración rigurosa del teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales, empleando el procedimiento de las aproximaciones sucesivas que ya fue planteado por Cauchy en 1824, pero en este caso de forma mucho más rigurosa (de ahí los iterantes que llevan su nombre).
Lazarus Immanuel Fuchs (1833–1902), fue otro importante matemático que destacó por el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales, más concretamente, hizo un estudio en el que diferenció las singularidades de estas ecuaciones, clasificándolas en singularidades regulares e irregulares, destacando por sus trabajos en las décadas de 1880 y 1890.
Uno de los últimos grandes avances en el estudio de las soluciones de las ecuaciones diferenciales, aplicando resultados de topología algebraica, fue la demostración del teorema de monodromía, lo que permitió extender de forma rigurosa las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales en abiertos simplemente conexos de forma más general.
Finalmente, conviene destacar que el estudio de la ecuación hipergeométrica supuso el desarrollo de herramientas matemáticas que han sido de aplicación en la resolución de otros tipos de ecuaciones diferenciales lineales, como la ecuación de Kummer, así como en el estudio de las funciones especiales, destacando por sus aplicaciones en otras ramas del conocimiento, como la física.

Capítulo 1: Teoremas de existencia y unicidad en ecuaciones diferenciales lineales

De ahora en adelante, se consideran ecuaciones diferenciales lineales ordinarias homogéneas de orden mayor que 1,

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t)+...+a_1(t)y'(t)+a_0(t)y(t)=0, \tag{1.1}$$

definidas en un abierto A del plano complejo $\mathbb{C}$, y cuyos coeficientes son funciones **holomorfas**. Por otra parte, también se trabajará con sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes holomorfos:

$$\mathbf{y}'(t)=A(t)\mathbf{y}(t) \quad A(t)=[a_{jk}(t)]_{1\leq j,k\leq n} \quad a_{jk}(t) \text{ holomorfa } \forall 1\leq j,k\leq n.$$

A diferencia de lo que ocurre en caso general de ecuaciones diferenciales ordinarias, las ecuaciones diferenciales lineales se pueden escribir en forma matricial con un cambio de variable ($y_0=y$, $y_1=y'$, $y_2=y_1'=y''$,...,$y_{n-1}=y_{n-2}'=y^{(n-1)}$). La expresión matricial de la ecuación diferencial queda entonces del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_{n-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & ... & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

De este modo se tiene un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con n incógnitas, con lo que se pueden aplicar los resultados específicos a este tipo de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.
Por otra parte, aunque trataremos usualmente con ecuaciones diferenciales homogéneas, conviene saber que las ecuaciones diferenciales no homogéneas se pueden reducir al caso homogéneo aumentando el orden de la ecuación en 1.
Lema 1.1: *La ecuación diferencial no homogénea:*

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t)+...+a_1(t)y'(t)+a_0(t)y(t)=b(t) \tag{1.3}$$

puede reescribirse como una ecuación diferencial de orden $n+1$ *no homogénea, cuyo espacio de soluciones contenga al de* (1.3),

$$y^{(n+1)}(t)+c_n(t)y^{(n)}(t)+...+c_1(t)y'(t)+c_0(t)y(t)=0. \tag{1.4}$$

Demostración:
En los puntos donde $b\neq 0$ se tiene que

$$\frac{1}{b(t)}y^{(n)}(t)+\frac{a_{n-1}(t)}{b(t)}y^{(n-1)}(t)+...+\frac{a_1(t)}{b(t)}y'(t)+\frac{a_0(t)}{b(t)}y(t)=1$$

(donde b se anule, se considerará en los apartados siguientes la existencia de una singularidad). Haciendo $g_k(t) = \frac{a_k(t)}{b(t)}$ cuando $k = 1, 2, ..., n-1$, $g_n(t) = (b(t))^{-1}$ y derivando la expresión obtenida, se tiene que

$$g_n(t)y^{(n+1)}(t) + g_n'(t)y^{(n)}(t) + g_{n-1}(t)y^{(n)}(t) + g_{n-1}'(t)y^{(n-1)}(t) + ... + g_0(t)y'(t) + g_0'(t)y(t) = 0.$$

Dividiendo entre $g_n(t)$ y renombrando adecuadamente los coeficientes se obtiene entonces la ecuación homogénea de orden $n+1$ (1.4).

$\blacksquare$

Por otra parte, se tiene también el análogo para el caso de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden:
Lema 1.2: *El sistema de ecuaciones diferenciales no homogéneo* $n \times n$

$$\mathbf{y}'(t) = A(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t)$$

se puede reescribir como un sistema de ecuaciones homogéneo $(n+1) \times (n+1)$ *de la forma:*

$$\mathbf{y}_0'(t) = A^*(t)\mathbf{y}_0(t).$$

Demostración: Más concretamente, si consideramos:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) & ... & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) & ... & a_{2n}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) & ... & a_{3n}(t) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & a_{n3}(t) & ... & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \\ ... \\ b_n(t) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ ... \\ y_n \\ \omega_{n+1} \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) & ... & a_{1n}(t) & b_1(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) & ... & a_{2n}(t) & b_2(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) & ... & a_{3n}(t) & b_3(t) \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & a_{n3}(t) & ... & a_{nn}(t) & b_n(t) \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y si se impone que $\omega_{n+1} = 1$, entonces las soluciones del sistema no homogéneo se corresponden con las soluciones del siguiente sistema homogéneo:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ ... \\ y_n \\ \omega_{n+1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) & ... & a_{1n}(t) & b_1(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) & ... & a_{2n}(t) & b_2(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) & ... & a_{3n}(t) & b_3(t) \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & a_{n3}(t) & ... & a_{nn}(t) & b_n(t) \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ ... \\ y_n \\ \omega_{n+1} \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

$\blacksquare$

En el siguiente apartado se enunciarán y demostrarán los principales teoremas de sistemas lineales. No obstante, también se abordarán a veces el caso de sistemas no lineales y el de ecuaciones diferenciales lineales de orden n.

1.1: Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Los problemas de valor inicial de Cauchy para sistemas de ecuaciones diferenciales (de primer orden) son de la forma

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0\end{array}\right\} \tag{1.6}$$

donde $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, $t \in A \subset \mathbb{C}$, con A un abierto.
Más concretamente, para sistemas lineales de primer orden (homogéneos o no):

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{y}' = \mathrm{A}(t) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0\end{array}\right\}. \tag{1.7}$$

Lema 1.3 (Desigualdad de Gronwall): *Sea $t_0 \in A \subset \mathbb{C}$, con A un abierto estrellado respecto de t_0. Sea $\gamma_t(s) = (1-s)t_0 + st$, donde $s \in [0, 1]$. Sea $\Gamma = sop(\gamma[0, 1])$.*
(Es decir, $\Gamma = \Gamma(t_0, t)$ es el segmento que une t_0 y t)
*Y sean $u, v : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ funciones **continuas** con $v(t)$ no negativa tales que*

$$u(t) \leq c + \left| \int_{\Gamma(t_0,t)} v(s)u(s)ds \right|$$

para cierta constante $c \in \mathbb{R}$, para todo $t \in A$. Entonces:

$$u(t) \leq c \exp\left(\left| \int_{\Gamma(t_0,t)} v(s)u(s)ds \right| \right).$$

NOTAS:
1. A diferencia de lo que ocurre en variable real, donde todas las funciones continuas admiten una única integral entre dos puntos, en el caso complejo integrales que coinciden en los puntos inicial y final, pero se diferencian en el camino escogido, pueden arrojar valores diferentes, lo que también ocurre, por ejemplo en Análisis Vectorial con funciones vectoriales definidas en un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, en cuyo caso se habla de campos no conservativos.
Por ejemplo, si consideramos la función $f(t) = \bar{t}$, y tomamos las siguientes curvas: $\Gamma_1(s) = \cos(s) + i\sin(s)$; con $s \in [0, \pi]$ y Γ_2 definida como $\Gamma_2(s) = 1 - s$, donde $s \in [0, 2]$, entonces

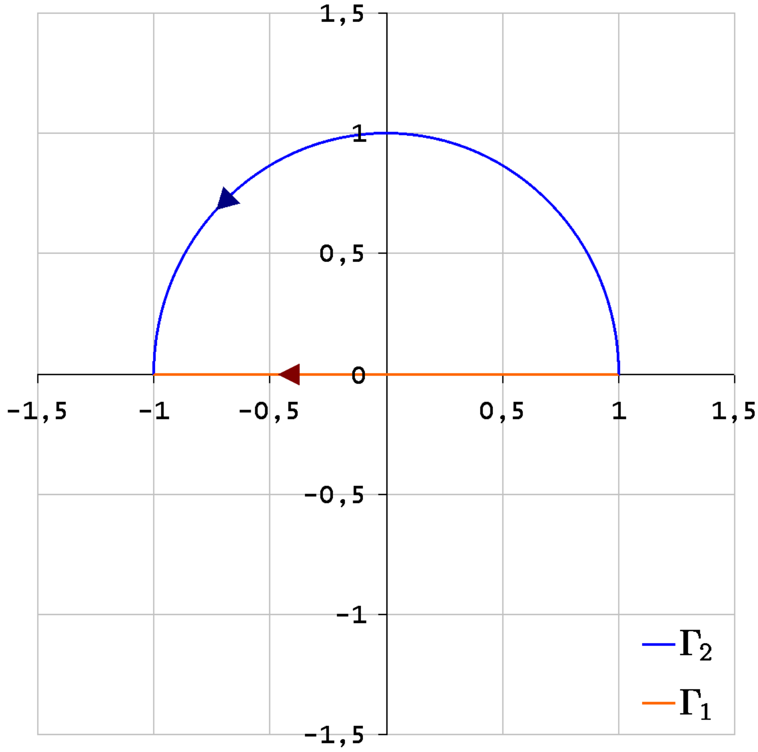
$$\int_{\Gamma_1} f(t)dt = \pi i \neq 0 = \int_{\Gamma_2} f(t)dt$$

a pesar de que en ambos casos el punto inicial es el 1 y el punto final es el -1.
De hecho, una integral siguiendo una curva con idéntico punto inicial y final puede tener un valor no nulo. Si consideramos $\Gamma(s) = \cos(s) + i\sin(s)$; con $s \in [0, 2\pi]$, las curvas

concatenadas $\Gamma_1 - \Gamma_2$ (sentido antihorario), $\Gamma_2 - \Gamma_1$ (sentido horario) y $\Lambda(t) = 1 \quad \forall t \in [0,1]$ la curva constante en 1, entonces se tiene que:

$$\oint_{\Lambda} f(t)dt = 0 \neq \oint_{\Gamma_1 - \Gamma_2} f(t)dt = \pi i \neq \oint_{\Gamma_2 - \Gamma_1} f(t)dt = -\pi i \neq \oint_{\Gamma} f(t)dt = 2\pi i.$$

Por esta razón, que es consecuencia del teorema de Cauchy-Riemann, se exige que las funciones sean **holomorfas**.



Trayectorias de las curvas Γ_1 y Γ_2.

2. Aunque no lo abordaremos, en las ecuaciones diferenciales lineales donde los coeficientes solamente son funciones **continuas**, se puede probar la existencia de solución, pero no la unicidad de la misma.
3. De ahora en adelante, si A es un abierto de $\mathbb{C}$, $H(A)$ denotará el conjunto de funciones holomorfas en A, y $H(A, \mathbb{C}^n)$, serán las funciones holomorfas con llegada en $\mathbb{C}^n$ (holomorfas componente a componente). La definición de funciones holomorfas en varias variables no es tan trivial y se basa en la propiedad de las funciones analíticas. Si $A \in \mathbb{C}^n$ es abierto, se dice que la aplicación $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ es analítica en $\mathbf{x}_0 = (x_1, ..., x_n)^T \in A \subset \mathbb{C}^n$ si existe $h > 0$ tal que si $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq h$, con $\mathbf{x} = (t_1, ..., t_n)^T$, entonces:

$$\mathbb{C} \ni f(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j_1+...+j_n=k} \alpha_{j_1,..,j_n} (t_1 - x_1)^{j_1} \cdots (t_n - x_n)^{j_n}.$$

Y se dice que f es holomorfa en A si es analítica en cada punto de A. Para el caso de aplicaciones de la forma $\mathbf{f} : A \to \mathbb{C}^m$, con A abierto de $\mathbb{C}^n$, se dice que $\mathbf{f}$ es holomorfa si lo es cada una de sus componentes.

Proposición 1.4: *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ *un subconjunto abierto y simplemente conexo y sea* $\mathbf{f} \in H(\Omega, \mathbb{C}^n)$. *Sea* $(t_0, \mathbf{y}_0) \in \Omega$ *tal que* $t_0 \in A \subset \mathbb{C}$, *para un abierto simplemente conexo* A. *Sea* $\mathbf{u} \in H(A, \mathbb{C}^n)$ *tal que* $(t, \mathbf{u}(t)) \in \Omega$, *para todo* $t \in A$. *Entonces* $\mathbf{u}$ *es solución de* (1.6) *si, y solo si es solución de la ecuación integral:*

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \mathbf{y}(s))ds. \tag{1.8}$$

Demostración: Supongamos que $\mathbf{u} : A \to \mathbb{C}^n$ es solución de (1.6). Integrando, se tiene entonces que:

$$\mathbf{u}(t) - \mathbf{y}_0 = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{u}'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s, \mathbf{u}(s))ds,$$

con lo que $\mathbf{u}$ es solución de (1.8).
Recíprocamente, supongamos que $\mathbf{u}$ es solución de (1.8). Al ser $\mathbf{f}$ continua, el integrando también es continuo por ser composición de funciones continuas. Por el teorema fundamental del Cálculo, el término derecho es derivable, y por tanto $\mathbf{u}$ es derivable. Derivando, obtenemos que $\mathbf{u}$ verifica la ecuación diferencial (1.6). La condición inicial se verifica al ser el conjunto simplemente conexo, lo que garantiza que el valor de la integral de línea no depende del camino escogido.

■

Teorema 1.5 (De existencia y unicidad locales): *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ *un subconjunto abierto y sea* $\mathbf{f}$ *una función **holomorfa** (y por tanto* $\mathbf{f} \in C^{0,1-}(\Omega, \mathbb{C}^n)$, *es decir,* $\mathbf{f}$ *es localmente lipschitziana en todo el abierto* Ω*). Sea* $(t_0, \mathbf{y}_0) \in \Omega$. *Entonces existe un número* $\varepsilon > 0$ *tal que el problema de valor inicial* (1.6) *tiene una única solución definida en el disco cerrado* $\overline{D}(t_0, \varepsilon)$.
Demostración:
PASO 1: Existencia de la solución
Veamos que la ecuación tiene solución. Se usará la técnica de los iterantes de Picard, pero hay que buscar un entorno de $(t_0, \mathbf{y}_0)$ lo suficientemente "pequeño". Para ello, sean $a, b > 0$ tales que:

$$R_1 = \overline{D}(t_0, a) \times \overline{B}(\mathbf{y}_0, b) \subset \Omega,$$

donde:

$$\overline{D}(t_0, a) = \{t \in \mathbb{C} : |t - t_0| \leq a\};$$
$$\overline{B}(\mathbf{y}_0, b) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n : \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| \leq b\}.$$

y, como R es compacto y $\mathbf{f}$ es continua en $R \subset \Omega$, sea entonces:

$$M = \max_{(t,\mathbf{y}) \in R} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| < \infty.$$

Tomamos entonces:

$$h = \min\{a, b/M\}. \tag{1.9}$$

Y consideramos un entorno todavía más reducido:

$$R_0 = \overline{D}(t_0, h) \times \overline{B}(y_0, b) \subset R_1 \subset \Omega.$$

Definimos el conjunto de funciones:

$$S = \{\mathbf{u} \in C^\infty(\overline{D}(t_0, h), \mathbb{C}^n) : \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{y}_0, (t, \mathbf{u}(t)) \in R_0, \forall t \in \overline{D}(t_0, h)\}.$$

Supongamos que $\mathbf{u} \in S$. Entonces la función definida por:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds, \quad t \in \overline{B}(t_0, h)$$

vuelve a ser un elemento de S, por la holomorfía de $\mathbf{v}$ y por que $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{y}_0$. Además, se tiene que:

$$\|\mathbf{v}(t) - \mathbf{y}_0\| = \|\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(t_0)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}'(s)ds \right\| =$$

$$= \left\| \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s))ds \right\| \leq \left| \int_{\Gamma(t_0,t)} \|\mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s))\| ds \right| \leq$$

$$\leq M|t - t_0| \leq Mh \leq b$$

de modo que $(t, \mathbf{v}(t)) \in R_0$ si $t \in \overline{D}(t_0, h)$.
Sea entonces la función constante

$$\mathbf{u}_0(t) = \mathbf{y}_0, \quad t \in \overline{D}(t_0, h).$$

Obviamente $\mathbf{y}_0 \in S$, y por tanto, los iterantes de Picard definidos como:

$$\mathbf{u}_{j+1}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{u}_j(s))ds \tag{1.10}$$

están bien definidos para $j \geq 0$ y pertenecen todos ellos a S. Veamos que convergen uniformemente. Nótese que si $t \in \overline{D}(t_0, h)$:

$$\|\mathbf{u}_2(t) - \mathbf{u}_1(t)\| \leq \left| \int_{\Gamma(t_0,t)} \|\mathbf{f}(s, \mathbf{u}_1(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{u}_0(s))\| ds \right|$$

$$\leq L \left| \int_{\Gamma(t_0,t)} \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_0(s)\| ds \right| \leq CL|t - t_0|$$

donde:

$$C = \max_{|t-t_0|\leq h} \|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{y}_0\|$$

y L es la constante de Lipschitz de f en el compacto R_0.
Se demuestra entonces por inducción para $j \geq 1$:

$$\|\mathbf{u}_{j+1}(t) - \mathbf{u}_j(t)\| \leq \frac{L^j C}{j!} |t - t_0|^j.$$

Y se deduce que:

$$\max_{|t-t_0|\leq h} \|\mathbf{u}_{j+1}(t) - \mathbf{u}_j(t)\| \leq \frac{(Lh)^j C}{j!}.$$

Sean $j, k \in \mathbb{N}$, entonces si $|t - t_0| \leq h$:

$$\|\mathbf{u}_j(t) - \mathbf{u}_k(t)\| \leq \sum_{m=j}^{k-1} \|\mathbf{u}_{m+1}(t) - \mathbf{u}_m(t)\| \leq$$

$$\leq \sum_{m=j}^{k-1} \frac{(Lh)^m C}{m!} \leq \sum_{m=j}^{\infty} \frac{(Lh)^m C}{m!}.$$

Puesto que la acotación anterior es válida para cualquier $t \in \overline{D}(t_0, h)$ y el término derecho es el resto de la serie numérica convergente de la función **analítica** Ce^{Lh}, deducimos que $\{\mathbf{u}_j\}_{j=0}^{\infty} \in S$ es una sucesión de Cauchy para la convergencia uniforme y por tanto converge uniformemente hacia una función $\mathbf{u} : \overline{D}(t_0, h) \to \mathbb{C}^n$, que será continua, pero además, **por el teorema de Weierstrass en variable compleja**, el límite uniforme de funciones holomorfas es una función holomorfa. Es obvio que $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{y}_0$ y además, si $s \in \overline{D}(t_0, h)$,

$$\mathbf{u}(s) = \lim_{j\to\infty} \mathbf{u}_j(s).$$

Puesto que $\mathbf{u}_j(s) \in \overline{B}(\mathbf{y}_0, b)$ para cualquier $j \geq 0$, deducimos que $\mathbf{u}(s) \in \overline{B}(\mathbf{y}_0, b)$ por ser $\overline{B}(\mathbf{y}_0, b)$ un conjunto cerrado. Es decir, $\mathbf{u} \in S$.
De la convergencia uniforme de $\{\mathbf{u}_j\}_{j=0}^{\infty}$ a $\mathbf{u}$ y del hecho de que $\mathbf{f} \in H(R_0, \mathbb{C}^n)$, se deduce que $\{\mathbf{f}(s, \mathbf{u}_j(s))\}_{j=0}^{\infty}$ convergen uniformemente a $\mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s))$ cuando $s \in \overline{D}(t_0, h)$. Por tanto, se pueden intercambiar límites con integrales en (1.10) y deducir que:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s))ds. \qquad \text{(Existencia de solución)}$$

PASO 2: Unicidad de la solución
Veamos que en el entorno definido de t_0, $\overline{D}(t_0, h)$, la solución así definida es única. Veamos en primer lugar que si $\mathbf{y}$ es solución de (1.6) en $\overline{D}(t_0, h)$, debe estar en S. Para ello, basta comprobar que toma valores en $\overline{B}(\mathbf{y}_0, b)$, pues evidentemente $\mathbf{y}$ debe ser holomorfa y verificar la condición inicial $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$.
Supongamos por reducción al absurdo que existe un $\bar{t} \in \overline{D}(t_0, h)$ tal que $\|\mathbf{y}(\bar{t}) - \mathbf{x}_0\| > b$. Como $\mathbf{y}(t)$ es continua, al ser holomorfa, también es continua $\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0\|$, y por tanto, existe $t_1 \in D(t_0, h)$ tal que:

$$\|\mathbf{y}(t_1) - \mathbf{y}_0\| = b. \tag{1.11}$$

Podemos suponer además que:

$$\|t_1 - t_0\| = \inf\{t \in \overline{D}(t_0, h) : \|\mathbf{y}(t_1) - \mathbf{y}_0\| = b\}$$

de manera que t_1 es el punto más próximo a t_0 que verifica esa propiedad (puede no ser el único). Por tanto, se tiene que:

$$\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0\| < b \qquad \forall t \in D(t_0, |t_1 - t_0|)$$

.
Y por ser $\mathbf{y}(t)$ solución, entonces:

$$\|\mathbf{y}(t_1) - \mathbf{y}_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) ds \right\| \leq M|t_1 - t_0| < Mh \leq b,$$

lo que está en contradicción con (1.11).
Supongamos entonces que $\mathbf{z}$ e $\mathbf{y} \in S$ son dos soluciones de (1.6). Entonces, los valores $(t, \mathbf{z}(t))$, $(t, \mathbf{y}(t)) \in R_0$ para $|t - t_0| \leq h$, y por ser $\mathbf{f}$ holomorfa, es decir, lipschitziana respecto de $\mathbf{y}$ de constante L en este conjunto, entonces:

$$\|\mathbf{z}(t) - \mathbf{y}(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{z}(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) ds \right\| \leq$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{f}(s, \mathbf{z}(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s))\| ds \right| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{z}(s) - \mathbf{y}(s)\| ds \right| + 0.$$

Y se concluye aplicando la desigualdad de Gronwall (para $c = 0$, $v = 1$), luego $\mathbf{z}(t) = \mathbf{y}(t)$. ■

Teorema 1.6 (De Peano): *Sea $\Omega \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ abierto simplemente conexo y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}^n$* ***holomorfa****. Sea $(t_0, \mathbf{y}_0) \in \Omega$. Entonces existe un número $h > 0$ tal que el problema de valor inicial* (1.6) *tiene alguna solución en un entorno $\overline{D}(t_0, \varepsilon)$ para cierto $\varepsilon > 0$.*

La demostración del teorema de existencia y unicidad es válida para sistemas de ecuaciones con coeficientes holomorfos en general, sin embargo, en el caso real basta con que los coeficientes sean simplemente funciones continuas y localmente lipschitzianas. En el caso de sistemas lineales (y por consiguiente, de ecuaciones lineales de orden n), en los que los coeficientes sean funciones holomorfas, este resultado admite una versión más fuerte, que permite extender el dominio de definición local hasta un disco que llegue a la frontera del abierto A.

Teorema 1.7 (De existencia y unicidad para sistemas lineales): *Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales* (1.7)*, se considera A un abierto de $\mathbb{C}$ donde esté definida la solución de* (1.7)*, el abierto producto $\Omega = A \times \mathbb{C}^n \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ donde los coeficientes de la matriz A y el vector* $\mathbf{b}$ *sean funciones holomorfas. Sea $(t_0, \mathbf{y}_0) \in \Omega$. Entonces el problema de valor inicial* (1.7) *tiene una única solución definida en la bola $\overline{B}(\mathbf{y}_0, R)$, donde:*

$$R = d(t_0, Fr(A)).$$

Demostración:
PASO 1: Existencia de la solución y definición en todo el disco
Para probar la existencia, al igual que en el caso general, emplearemos iterantes de Picard. Sin embargo, en este caso las acotaciones no dependerán de las condiciones de valor inicial impuestas (salvo casos triviales).

Definimos:

$$\mathbf{y}_0(t) := \mathbf{y}_0; \quad \mathbf{y}_{k+1}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)\mathbf{y}_k(s) + \mathbf{b}(s)ds.$$

Por el teorema fundamental del cálculo en variable compleja, $\mathbf{y}_k(t)$ son funciones holomorfas en el abierto A. Sea r tal que $0 < r < R$:

$$M = \max\{\|A(s)\mathbf{y}_0 + \mathbf{b}(s)\|;\ s \in \overline{D(t_0, r)}\};$$
$$L = \sup\{\|A(s)\|;\ s \in \overline{D(t_0, r)}\}.$$

Entonces:

$$\|\mathbf{y}_1(t) - \mathbf{y}_0(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} A(s)\mathbf{y}_0 + \mathbf{b}(s)ds \right\| \leq \left| \int_{\Gamma(t_0,t)} \|A(s)\mathbf{y}_0 + \mathbf{b}(s)\|ds \right| \leq M|t - t_0|.$$

Supongamos que, si $k' < k$, se tiene que:

$$\|\mathbf{y}_{k'+1}(t) - \mathbf{y}_k(t)\| \leq M\frac{L^{k'}|x - x_0|^{k'+1}}{(k'+1)!}.$$

Entonces:

$$\|\mathbf{y}_{k+1}(t) - \mathbf{y}_k(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} A(s)(\mathbf{y}_k(s) - \mathbf{y}_{k-1}(s)ds) \right\| \leq$$
$$\leq |t - t_0|L \int_0^1 M\frac{L^{k-1}s^k|t - t_0|^k}{k!}ds = M\frac{L^k|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!}. \tag{1.12}$$

Con lo que por el principio de inducción se tiene la desigualdad (1.12) de forma general Para $|t - t_0| \leq r$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\mathbf{y}_{k+1}(t) - \mathbf{y}_k(t)\| \leq \frac{M}{L}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Lr)^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{M}{L}(\exp(Lr) - 1) < \infty.$$

Por tanto, la sucesión $\{\mathbf{y}_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ converge uniformemente en los compactos de A, más concretamente, si $r < R$, lo hace en $\overline{D(t_0, r)}$ en virtud de la convergencia uniforme, la función holomorfa $\mathbf{y}$ satisface la igualdad

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)\mathbf{y}(s) + \mathbf{b}(s)ds$$

y aplicando la proposición 1.4, se comprueba que $\mathbf{y}$ es solución del problema de valor inicial (1.7) en todos los compactos $\overline{D}(t_0, r)$, luego también lo es en el abierto unión de todos ellos:

$$D(t_0, R) = \bigcup_{n=2}^{\infty} \overline{D}\left(t_0, R\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right).$$

PASO 2: Unicidad de la solución

Para probar la unicidad (y de paso describir como es la solución en el disco) emplearemos series de potencias, más concretamente, fijado un punto t_0, consideramos en $\overline{D}(t_0, \varepsilon)$:
Por otra parte, nos restringiremos a la resolución de ecuaciones diferenciales **lineales** de orden n (1.1) (y de los sistemas de orden 1 asociados) (1.2), imponiendo valores a la función y a sus $n-1$ primeras derivadas, así como de los sistemas de ecuaciones lineales de primer orden:

Para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden:
En este caso, para considerar la expresión en serie de potencias se pueden considerar sistemas **no homogéneos**. Fijando un punto $t_0 \in \mathbb{C}$:
$\mathbf{y}'(t) = A(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t)$;
$\mathbf{y}'(t_0) = A(t_0)\mathbf{y}(t_0) + \mathbf{b}(t_0)$;
$\mathbf{y}''(t_0) = \frac{d}{dt}\left(A(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t)\right|_{t=t_0} = A'(t_0)\mathbf{y}(t_0) + A(t_0)\mathbf{y}'(t_0) + \mathbf{b}'(t_0)$...
Y más en general, si $k > 1$, vemos como cada derivada del vector $\mathbf{y}$ puede ser expresada en función de las anteriores:

$$\mathbf{y}^{(1+k)}(t_0) = \sum_{r=0}^{k} \left(\binom{k}{r} A^{(r)}(t_0)\mathbf{y}^{(k-r)}(t_0) \right) + \mathbf{b}^{(k)}(t_0). \tag{1.13}$$

Al ser $\mathbf{y}$ un vector de funciones holomorfas, entonces se puede expresar su solución como serie de potencias en un entorno adecuado de t_0:

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{y}^{(k)}(t_0) \quad \forall t \in \overline{D}(t_0, \varepsilon)$$

para cierto valor de $\varepsilon > 0$.

Para ecuaciones lineales de orden n:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) + b(t) = 0;$$
$$y(t_0) = b_0, y'(t_0) = b_1, ..., y^{(n-1)}(t_0) = b_{n-1}.$$

Sea y la función obtenida como serie de potencias al resolver el sistema asociado, esto es:

$$y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}y''(t_0)(t-t_0)^2 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t-t_0)^k.$$

Veamos que el radio de convergencia de esta serie de potencias es no nulo, es decir, que el crecimiento de los coeficientes está acotado por una serie geométrica.
Suponiendo probado el **PASO 1** de la demostración anterior (mediante iterantes de Picard), basta ver que el sistema de ecuaciones planteado al expresar la función como serie de Taylor centrada en el punto t_0 tiene solución única.
Dicho sistema de ecuaciones tiene como incógnitas $f^{(m)}$, donde $m \geq n$.
Pasando todos los sumandos, excepto el término con la derivada de mayor orden a la derecha, (1.1) se convierte en:

$$y^{(n)}(t) = -a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) - ... - a_1(t)y'(t) - a_0(t)y(t) - b(t). \tag{1.14}$$

Evaluando en t_0, se obtiene el valor de $y^{(n)}(t_0)$:

$$y^{(n)}(t_0) = -a_{n-1}(t_0)y^{(n-1)}(t_0) - ... - a_1(t_0)y'(t_0) - a_0(t_0)y(t_0) - b(t_0) =$$

$$= -a_{n-1}(t_0)c_{n-1} - ... - a_1(t_0)c_1 - a_0(t_0)c_0 - b(t_0) = -\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k(t_0)c_k\right) - b(t_0).$$

Si derivamos la expresión (1.14), podremos obtener el valor de $y^{(n+1)}$:

$$y^{(n+1)}(t_0) = -\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)y^{(k)}(t)\right)_{t=t_0} - b'(t_0) =$$

$$= -\left(\sum_{k=0}^{n-1} a'_k(t_0)y^{(k)}(t_0)\right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k(t_0)y^{(k+1)}(t_0)\right) - b'(t_0).$$

Es decir, que $y^{(n+1)}(t_0)$ se puede expresar en términos de todas las derivadas anteriores (esto es, de $y(t_0), y'(t_0), y''(t_0), ..., y^{(n)}(t_0)$).
Más en general, aplicando la fórmula de Leibnitz, se obtiene una expresión de $f^{(n+k)}(t_0)$, que depende únicamente de los coeficientes $a_k(t)$ de la ecuación diferencial (y de sus derivadas hasta el orden k), y de las derivadas ya conocidas de y hasta el orden $n+k-1$:

$$y^{(n+m)}(t_0) = -\frac{d^m}{dt^m}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)y^{(k)}(t)\right)_{t=t_0} - b^{(m)}(t_0) =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}a_k^{(m-l)}(t)y^{(k+l)}(t)\right)_{t=t_0} - b^{(m)}(t_0) =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}a_k^{(m-l)}(t_0)y^{(k+l)}(t_0)\right) - b^{(m)}(t_0). \tag{1.15}$$

Como en estas sumas, el valor máximo de $k+l$ es igual a $n-1+m$, entonces resulta obvio que $f^{(n+m)}(t_0)$ se puede escribir como combinación **lineal** de $f(t_0)$, $f'(t_0)$,..., $f^{(n+m-1)}(t_0)$.
Como esta expresión así obtenida está unívocamente determinada, el sistema (1.1) admite una única solución formal como serie de potencias centrada en el punto t_0. Como además, en el **PASO 1** de la demostración anterior se vio que la ecuación tenía al menos una solución en un entorno de $\overline{D}(t_0, R)$ de t_0, entonces necesariamente la solución mediante serie de potencias formal es la única solución que verifica ser límite de los iterantes de Picard de la demostración anterior.

■

Inciso 1.8: ¿Por qué los coeficientes de serie de potencias se pueden acotar por una progresión geométrica ?
Veamos que, en efecto, es posible encontrar un valor explícito $R > 0$ para el cuál es posible aplicar el teorema de existencia y unicidad para sistemas lineales. Este valor es, de hecho,

$R = d(t_0, \mathbb{C} \setminus A)$, donde A es el abierto de definición de los coeficientes de la matriz A y el vector $\mathbf{b}$.

Para sistemas lineales de primer orden: Veamos que la solución del sistema lineal (1.7) tiene radio de convergencia no nulo:

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} \mathbf{y}^{(k)}(t_0) = \sum_{k=0}^{\infty} (t-t_0)^k \mathbf{f}_{(k)}.$$

Obviamente, según (1.13) se tiene que

$$\mathbf{y}^{(1+k)}(t_0) = \sum_{r=0}^{k} \left(\binom{k}{r} A^{(r)}(t_0) \mathbf{y}^{(k-r)}(t_0) \right) + \mathbf{b}^{(k)}(t_0)$$

donde $A = [a_{ij}]_{1 \le i,j \le n}$, $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_n)^T$.

Como la matriz A y el vector $\mathbf{b}$ tienen entradas holomorfas en un entorno de t_0, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que el mínimo radio de convergencia de los coeficientes de la matriz A y del vector $\mathbf{b}$ es justamente ε.

Si tenemos en cuenta las igualdades entre vectores en un entorno adecuado de t_0, $D(t_0, \varepsilon)$:

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} \mathbf{b}^{(k)}(t_0) = \sum_{k=0}^{\infty} (t-t_0)^k \mathbf{g}_{(k)}; \quad A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} A^{(k)}(t_0) = \sum_{k=0}^{\infty} (t-t_0)^k H_{(k)}$$

Más concretamente, componente a componente:

$$b_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} b_i^{(k)}(t_0) = \sum_{k=0}^{\infty} (t-t_0)^k g_{(k)i}; \;\; a_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} a_{ij}^{(k)}(t_0) = \sum_{k=0}^{\infty} (t-t_0)^k h_{(k)ij}$$

Teniendo en cuenta estas igualdades, (1.13) puede reescribirse como:

$$(k+1)! \mathbf{f}_{(k+1)} = \sum_{r=0}^{k} \left(\frac{k!}{r!(k-r)!} r! H_{(r)} \cdot (k-r)! \mathbf{f}_{(n-r)} \right) + k! \mathbf{g}_{(k)},$$

es decir,

$$(k+1) \mathbf{f}_{(k+1)} = \sum_{r=0}^{k} H_{(r)} \cdot \mathbf{f}_{(n-r)} + \mathbf{g}_{(k)}. \tag{1.16}$$

O componente a componente:

$$(k+1) f_{(k+1)l} = \sum_{r=0}^{k} \sum_{s=1}^{n} H_{(r)ls} \cdot f_{(n-r)s} + g_{(k)l} \quad l = 1, 2..., n; k \in \{0, 1, 2, ...\}. \tag{1.17}$$

Si ε es el radio de convergencia, sea x un punto tal que $|x - t_0| < \varepsilon$, y sea
$R = (\varepsilon + |x - t_0|)/2 < \varepsilon$.

Entonces, las series de potencias asociadas a la matriz A y al vector $\mathbf{b}$ son absolutamente convergentes en x, más concretamente, lo son cuando $|t-t_0| \leq R$, entonces existe $M>0$ tal que:

$$|h_{(k)ij}|R^k < M;\ |g_{(k)j}|R^k < M \qquad i,j \in 1,2,...,n.$$

Sustituyendo en (1.17), se obtienen las desigualdades:

$$(k+1)|f_{(k+1)l}| \leq MR^{-k}\left[\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=1}^{n} R^r|f_{(r)s}|+1\right].$$

Si consideramos la suma de los valores absolutos $p_k := \sum_{s=1}^{n}|f_{(k)s}|$, entonces se reescribe la desigualdad como:

$$(k+1)p_{k+1} \leq nMR^{-k}\left[\sum_{r=0}^{k} R^r p_r + 1\right]$$

y obtenemos dos series de potencias mayorantes que acotan a la original:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_{(k)l}(t-t_0)^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t-t_0)^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t-t_0)^k.$$

Lo que se cumple si hacemos $P_0 = p_0$ y tomamos los términos siguientes del siguiente modo:

$$(k+1)P_{k+1} = nMR^{-k}\left[\sum_{r=0}^{k} R^r P_r + 1\right],$$

pero esto implica, aplicando el principio de inducción, que:

$$(k+1)P_{k+1} = nMP_k + R^{-1}kP_k.$$

Y de aquí se deduce que:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{P_{k+1}}{P_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{k+nMR}{(k+1)R} = \frac{1}{R} \tag{1.18}$$

Con lo que se deduce que la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t-t_0)^k$ converge absolutamente si $|t-t_0| < R$. Como esta serie de potencias acota superiormente a cualquiera de las series de potencias asociadas al vector solución $\mathbf{y}$, se tiene necesariamente que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_{(k)l} < \infty \text{ si } |t-t_0| < r = \frac{\varepsilon + |x-t_0|}{2} \text{ para todo } l \in \{1,..,n\}.$$

Al ser válido el carácter finito para todo $R = (\varepsilon + |x-t_0|)/2$, con $|x-t_0| < \varepsilon$ entonces se tiene el radio de convergencia de la serie de potencias del vector $\mathbf{y}$ es al menos $\varepsilon > 0$.

Para ecuaciones diferenciales lineales:
Ya hemos visto, según (1.15) que:

$$y^{(n+m)}(t_0) = -\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}a_k^{(m-l)}(t_0)y^{(k+l)}(t_0)\right) - b^{(m)}(t_0).$$

Hay que tener en cuenta que tanto las funciones $a_k(t)$ como $b(t)$ son holomorfas, con lo que se pueden desarrollar en forma de serie de potencias **cuyo radio de convergencia sea no nulo.** Es decir, existen $C > 0; M \geq 1$ tales que si:

$$a_k(t) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{a_k^{(l)}(t_0)}{l!}(t-t_0)^l = \sum_{l=0}^{\infty}\alpha_{k,l}(t-t_0)^l$$

$$b(t) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{b^{(l)}(t_0)}{l!}(t-t_0)^l = \sum_{l=0}^{\infty}\beta_l(t-t_0)^l$$

entonces $|\alpha_{k,l}| \leq CM^l$ y $|\beta_l| \leq CM^l$ para todo $k = 0, ..., n-1$ y para todo $l \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.
Con lo que se observa que el radio de convergencia de los coeficientes de la matriz A y el vector $\mathbf{b}$ es al menos $1/M$. Acotamos entonces en la expresión (1.15):

$$|f_{n+m}|\cdot(n+m)! = |y^{(n+m)}(t_0)| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}a_k^{(m-l)}(t_0)y^{(k+l)}(t_0)\right) + b^{(m)}(t_0)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}|a_k^{(m-l)}(t_0)||y^{(k+l)}(t_0)|\right) + |b^{(m)}(t_0)| =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}|\alpha_{m-l}\cdot(m-l)!\cdot f_{k+l}(k+l)!|\right) + |\beta_m|m! \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}(m-l)!\cdot CM^{m-l}\cdot(k+l)!|y_{k+l}| + m!CM^m. \tag{1.19}$$

Definimos entonces los coeficientes c_j del siguiente modo:
$c_0 = |y_0|$, $c_1 = |y_1|$,..., $c_{n-1} = |y_{n-1}|$,
y para $k \geq n$:

$$(n+m)!c_{n+m} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}(m-l)!CM^{m-l}(k+l)!\cdot c_{k+l} + m!CM^m.$$

Se considera entonces la siguiente serie de potencias:

$$R(z) = \sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-t_0)^k$$

Así definida, esta serie de potencias es solución de la ecuación diferencial:

$$R^{(n)}(z) - A_{n-1}R^{(n-1)}(z) - ... - A_0(z)R(z) - B(z) = 0 \text{ , donde:}$$

$$A_k(z) = C\sum_{l=0}^{\infty} M^l (z-t_0)^l = \frac{C}{1-M(z-t_0)};$$

$$B(z) = C\sum_{l=0}^{\infty} M^l (z-t_0)^l = \frac{C}{1-M(z-t_0)}.$$

Con lo que la ecuación diferencial puede reescribirse del modo siguiente:

$$(1-M(z-z_0))\cdot R^{(n)}(z) = CR^{(n-1)}(z)+...+CR(z)+C.$$

Igualando coeficientes:

$$c_{n+m}\cdot\frac{(n+m)!}{m!} - M\cdot c_{n+m-1}\cdot\frac{(n+m-1)!}{(m-1)!} + = Cc_{n+m-1}\frac{(n+m-1)!}{m!}+...+Cc_m,$$

es decir,

$$c_{n+m}\cdot(n+m)! = (C+Mm)(n+m-1)! + Cc_{n+m-2}(n+m-2)!+...+Cc_m m!.$$

Dividiendo cada término entre el anterior, obtenemos:

$$\frac{c_{n+m}}{c_{n+m-1}} = \frac{C+Mm}{n+m} + \sum_{k=0}^{n-2}\frac{Cc_{m+k}(m+k)!}{c_{n+m-1}(n+m)!}.$$

Se tiene que la sucesión $\{c_{n+m}\}_{m=0}^{\infty}$ es creciente. En particular, se tiene que $c_{n+m+1} \geq c_{m+k}$ para todo $k \in \{0,1,..,n-2\}$.
Tomando límites:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{c_{n+m}}{c_{n+m-1}} = M. \tag{1.20}$$

Por lo tanto, $R(z)$ tiene radio de convergencia $1/M$. Por otra parte, como por inducción se tiene que $|f_{n+m}| \leq c_{n+m}$, $\forall m > 0$, con lo que la serie de potencias tiene radio de convergencia al menos $1/M$. Como $1/M$ se puede tomar arbitrariamente próximo al mínimo radio de convergencia de los coeficientes de la matriz A y el vector **b**, entonces el radio de convergencia de las soluciones de la ecuación diferencial es, al menos, el mínimo radio de convergencia de los coeficientes de la matriz A y el vector **b**.

■

Comparación entre las demostraciones para sistemas lineales y no lineales:
Consideremos la ecuación $y'(t) = y^2$, con $y(t_0) = A$. Entonces es obvio que sus soluciones son de la forma:

$$y(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{C} \text{ si } A = 0$$

$$y(t) = \frac{-A}{A(t-t_0)-1} \ \forall t \in \mathbb{C}\setminus\{t_0+1/A\} \text{ si } A \neq 0$$

en este ejemplo queda claro que el entorno donde está definida la solución depende de la condición inicial. Esto queda reflejado en la demostración del teorema de existencia y unicidad

para el caso general, donde el valor de h tomado depende del valor inicial (Véase (1.9)); mientras en el caso de ecuaciones y sistemas lineales la solución se puede extender a un disco maximal donde estén bien definidos los coeficientes de la ecuación o del sistema.
Por otra parte, la familia de soluciones de una ecuación no lineal o un sistema no lineal podría no tener estructura de espacio vectorial ni de espacio afín (por ejemplo, la ecuación diferencial $y' = y^2$ tiene como solución a $f(t) = -1/t$ y a $g(t) = 0$, pero no a $-f(t) = 1/t$)

Proposición 1.9: *Sea $n \in \mathbb{N}$. Las soluciones de un sistema lineal homogéneo de n ecuaciones diferenciales de primer orden (y las de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n) forman un espacio vectorial de dimensión n. En el caso no homogéneo las soluciones se pueden expresar como la suma de una solución del sistema homogéneo mas una solución particular del no homogéneo.*
Demostración: Sean $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ dos vectores de funciones holomorfas que satisfacen el sistema diferencial homogéneo de orden n:

$$\mathbf{y}'(t) - A(t)\mathbf{y}(t) = 0.$$

Entonces, si λ, $\mu \in \mathbb{C}$, entonces:

$$(\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g})' - A(\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g}) = \lambda(\mathbf{f}' - A\mathbf{f}) + \mu(\mathbf{g}' - A\mathbf{g}) = 0.$$

Para ver que es de dimensión n, basta tomar un punto $t_0 \in \mathbb{C}$ donde se pueda aplicar el teorema de existencia y unicidad, y en ese punto se escogen como **base** de soluciones las funciones $\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_n$ tales que si $\mathbf{e}_1, .., \mathbf{e}_n$ son los vectores de la base canónica, entonces:

$$\mathbf{f}_i(t_0) = \mathbf{e}_i \quad \forall i \in \{1, ..., n\}.$$

La demostración para ecuaciones diferenciales lineales de orden n es muy similar, aplicando la linealidad de las derivadas y la propiedad distributiva para probar que es espacio vectorial y dar condiciones iniciales de la forma $f_i^{(j)}(t_0) = \delta_{ij}$ (con $i, j \in \{0, ..., n-1\}$) para probar que es de dimensión n.
Para el caso no homogéneo, si $\mathbf{y}_h(t)$ es cualquier solución del sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneo $\mathbf{y}'(t) = A(t)\mathbf{y}(t)$ y $\mathbf{y}_p(t)$ una solución particular del sistema no homogéneo $\mathbf{y}'(t) = A(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t)$, entonces:

$$(\mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p)'(t) = \mathbf{y}_h'(t) + \mathbf{y}_p'(t) = A(t)\mathbf{y}_h(t) + (A(t)\mathbf{y}_p(t) + \mathbf{b}(t)) = A(t)(\mathbf{y}_h(t) + \mathbf{y}_p(t)) + \mathbf{b}(t).$$

Con lo que $(\mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p)(t)$ es una solución del sistema no homogéneo. Para el caso de ecuaciones lineales de orden n no homogéneas la demostración es similar.

$\blacksquare$

1.2: Prolongación analítica de soluciones

Como ya se ha visto, se tiene la existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales lineales, donde los coeficientes con coeficientes funciones **holomorfas**. Sin embargo, no se ha dado aún ningún resultado que permita extender la existencia y unicidad de soluciones más allá de discos maximales donde estén definidos los coeficientes de la ecuación diferencial. En el siguiente apartado trataremos la extensión de funciones holomorfas más allá de discos.

Definición 1.10: Sea D un disco abierto, supongamos que $f \in H(D)$, y consideremos $t_1 \in Fr(D)$. Se dice que t_1 es un **punto regular** si existe un disco D_1 centrado en β_1 y una función $g \in H(D_1)$ tal que $g(t) = f(t)$ para todo $t \in D \cap D_1$. Si un punto de D no satisface esta condición, se dice que es un **punto singular** de *f*.
Ejemplo: Para la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

los puntos de $D(0,1)$ son todos regulares, excepto el 1, ya que se puede considerar la función holomorfa $g(t) = \frac{1}{1-t}$.
Teorema 1.11: *Supongamos que $f \in H(U)$, para un determinado abierto U, y que la serie de potencias:*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n \quad (t, t_0 \in U) \tag{1.21}$$

tiene un radio de convergencia igual a $C > 0$. Entonces f tiene al menos un punto singular en la circunferencia de centro t_0 y radio C.
Demostración:
Sea $T := D(t_0, C)$. Supongamos por reducción al absurdo que todo punto de T es un punto regular de f. La compacidad de T implica entonces que existen discos abiertos $D_1, ..., D_n$ y funciones $g_j \in H(D_j)$ tales que el centro de cada D_j está en T, tales que $T \subset D_1 \cup ... \cup D_n$, y tales que $g_j(z) = f(z)$ en $D_j \cap U$.
Si $D_i \cap D_j \neq \emptyset$ y $V_{ij} = D_i \cap D_j \cap U$, entonces $V_{ij} \neq \emptyset$ (puesto que los centros de los D_j están en T), y $g_i = f = g_j$ en V_{ij}. Como $D_i \cap D_j$ es conexo, y g_i, g_j son funciones holomorfas, entonces $g_i = g_j$ en $D_i \cap D_j$. Por tanto, podemos definir una función h en $\Omega = U \cup D_1 \cup ... \cup D_n$ mediante:

$$h(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in U \\ g_i(z) & \text{si } z \in D_i \end{cases}$$

Como $\Omega \supset \overline{U}$ y Ω es abierto, existe un $\varepsilon > 0$ tal que el disco $D(0, 1+\varepsilon) \subset \Omega$. Pero como $h \in H(\Omega)$, $h(z)$ viene dado por la serie de potencias en U, y aplicando un teorema que garantiza que toda función holomorfa puede representarse mediante serie de potencias en un disco que esté contenido en el dominio de definición de la función, se tiene ahora que el radio de convergencia de la serie (1.21) es al menos $1 + \varepsilon$, en contradicción a nuestra hipótesis.

$\blacksquare$

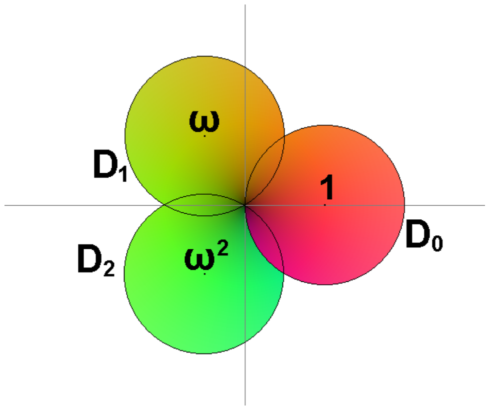
Definiciones 1.12:
Un elemento de función o germen de función es un par ordenado (f, D), donde D es un disco abierto y $f \in H(D)$. Dos gérmenes de función (f_0, D_0) y (f_1, D_1) son prolongaciones directas uno del otro si se verifican estas dos condiciones: $D_0 \cap D_1 \neq \emptyset$, y $f_0(z) = f_1(z)$, para todo $z \in D_0 \cap D_1$. En este caso se escribe:

$$(f_0, D_0) \sim (f_1, D_1). \tag{1.22}$$

Una cadena es una sucesión finita de discos C, por ejemplo, $C = \{D_0, D_1, ..., D_n\}$, tal que $D_{i-1} \cap D_i \neq \emptyset$ para cada $i = 1, ..., n$. Si se da (f_0, D_0) y si existen elementos (f_i, D_i) tales que $(f_{i-1}, D_{i-1}) \sim (f_i, D_i)$ para cada $i = 1, ..., n$, entonces (f_n, D_n) se llama la prolongación analítica de (f_0, D_0) a lo largo de C. Notemos que f_n está determinada de manera única por f_0 y por C (si existe). Para verlo, supongamos que se verifica la relación de equivalencia (1.22) también con g_1 en lugar de f_1. Entonces $g_1 = f_0 = f_1$ en $D_0 \cap D_1$; y como D_1 es un conjunto conexo, tenemos $g_1 = f_1$ en D_1. La unicidad de f_n se deduce por inducción sobre el número de términos de la cadena C.

Si (f_n, D_n) es la prolongación de (f_0, D_0) a lo largo de C, y si $D_n \cap D_0 = \emptyset$, no es necesariamente cierto que $(f_0, D_0) \sim (f_n, D_n)$; es decir, la relación $\sim$ **no es transitiva**. Un ejemplo es la raíz cuadrada de una función: Si tomamos $D_1, D_\omega, D_{\overline{\omega}}$ discos de radio 1 y con centro en 1, ω y $\omega^2 = \overline{\omega}$, con ω la raíz cúbica de 1 con la parte imaginaria positiva, sea $f_j \in H(D_j)$ de manera que $f_j^2(t) = t$, y de modo que $(f_0, D_0) \sim (f_1, D_1)$ y que $(f_1, D_1) \sim (f_2, D_2)$.

Entonces, en $D_0 \cap D_2$ se tiene que $f_0 = -f_2 \neq f_0$, luego $(f_0, D_0) \nsim (f_2, D_2)$.



La raíz cuadrada no se puede definir de forma continua en el plano complejo.

Una cadena $C = D_0, ..., D_n$ se dice que recubre una curva γ con $[0, 1]$ como intervalo de parámetro si existen números $0 = s_0 < s_1 < ... < s_n = 1$, tales que $\gamma(0)$ es el centro de D_0, $\gamma(1)$ es el centro de D_n y:

$$\gamma([s_i, s_{i+1}]) \subset D_i \qquad (i = 0, 1, ..., n-1).$$

Si (f_0, D_0) puede prolongarse a lo largo de esta curva C hasta (f_n, D_n), llamamos a (f_n, D_n) una prolongación analítica de (f_0, D_0) a lo largo de γ (En un teorema posterior se probará la unicidad); se dirá entonces que (f_0, D_0) admite una prolongación analítica a lo largo de γ.

Lema 1.13: *Supongamos que $D_0 \cap D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, con $(f_0, D_0) \sim (f_1, D_1)$ y $(f_1, D_1) \sim (f_2, D_2)$. Entonces, $(f_0, D_0) \sim (f_2, D_2)$.*

Demostración:

Se tiene que $f_0 = f_1$ en $D_0 \cap D_1$ y que $f_1 = f_2$ en $D_1 \cap D_2$, luego $f_0 = f_1 = f_2$ en $D_0 \cap D_1 \cap D_2$. Se tiene que $\emptyset \neq D_0 \cap D_1 \cap D_2 \subset D_0 \cap D_2$. Como $D_0 \cap D_1 \cap D_2$ es un abierto no vacío de $\mathbb{C}$, y $D_0 \cap D_2$ es un conjunto conexo que lo contiene, por la extensión analítica de funciones holomorfas, se tiene que $f_0 = f_2$ en $D_0 \cap D_2$.

$\blacksquare$

Teorema 1.14: *Si (f, D) es un germen de función y si γ es una curva que comienza en el centro del disco D, entonces (f, D) admite a lo sumo una única prolongación analítica a lo largo de la curva γ.*
Demostración:
Sean C_1 y C_2 dos cadenas. Entonces existen números:

$$0 = s_0 < s_1 < ... < s_m = s_{m+1} = 1$$

y $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < ... < \sigma_n = \sigma_{n+1} = 1$ tales que:

$$\gamma([s_i, s_{i+1}]) \subset A_i \qquad \gamma([\sigma_j, \sigma_{j+1}]) \subset B_j \qquad (0 \leq i \leq m \ , \ 0 \leq j \leq n).$$

Entonces existen gérmenes de función $(g_i, A_i) \sim (g_{i+1}, A_{i+1})$ y $(h_j, B_j) \sim (h_{j+1}, B_{j+1})$, para $0 \leq i \leq m-1$ y $0 \leq j \leq n-1$. Aquí $g_0 = h_0 = f$.
Pretendemos probar que si $0 \leq i \leq m$ y $0 \leq j \leq n$, y si $[s_i, s_{i+1}]$ interseca $[\sigma_j, \sigma_{j+1}]$, entonces $(g_i, A_i) \sim (h_j, B_j)$.
Supongamos por reducción al absurdo que existen pares (i, j) para los que esto es falso. Entre ellos existe un par (i_0, j_0) para el cual se $i_0 + j_0 \leq i_1 + j_1$ si tampoco se verifica la condición para (i_1, j_1). Obviamente, se tiene que $i + j > 0$. Supongamos también que $s_j \leq \sigma_j$. Entonces $i \geq 1$, y como $[s_i, s_{i+1}]$ corta al segmento $[\sigma_j, \sigma_{j+1}]$, entonces se tiene que:

$$\gamma(s_i) \in A_{i-1} \cap A_i \cap B_j.$$

La minimalidad de $i + j$ muestra que $(g_{i-1}, A_{i-1}) \sim (h_j, B_j)$; y como $(g_{i-1}, A_{i-1}) \sim (g_i, A_i)$, siendo la intersección no vacía, aplicando el lema 1.13, se tiene que $(g_i, A_i) \sim (h_j, B_j)$, lo que está en contradicción con nuestra hipótesis.
Análogamente, se excluye la posibilidad $s_j \leq \sigma_j$.
Por tanto, necesariamente la prolongación analítica de una curva debe ser única.

■

Definición 1.15: Supongamos que α y β son puntos de un espacio topológico X y ϕ es una aplicación **continua** de I^2 en X tal que $\phi(0, t) = \alpha$ y $\phi(1, t) = \beta$ para todo $t \in I$. Las curvas γ_t definidas por:

$$\gamma_t(s) = \phi(s, t) \qquad (s \in I, t \in I)$$

se dice que son una familia uniparamétrica $\{\gamma_t\}$ de curvas desde α hasta β en X.

Teorema 1.16: *Supongamos que $\{\gamma_t\}$ $(0 \leq t \leq 1)$ es una familia uniparamétrica de α a β en el plano, que D es un disco abierto con centro en α, y que el germen de función (f, D) admite una prolongación analítica a lo largo de cada curva γ_t, hasta un elemento (g_t, d_t). Entonces $g_0 = g_1$.*
Demostración:
Sea $I = [0, 1]$. Sea $t \in I$. Existe una cadena $C = \{A_0, ..., A_n\}$ que recubre γ_t, con $A_0 = D$, tal que (g_t, D_t) se obtiene por prolongación de (f, D) a lo largo de D. Entonces existen números $0 = s_0 < s_1 < ... < s_n = 1$ tales que:

$$E_i := \gamma_i([s_i, s_{i+1}]) \subset A_i \quad (i = 0, 1, ..., n-1).$$

Entonces existe un $\varepsilon > 0$, pero menor que la distancia de cualquiera de los conjuntos compactos E_i al complementario del correspondiente disco abierto A_i. La continuidad uniforme de ϕ en I^2 (véase definición 1.15) muestra que existe un $\delta > 0$ tal que:

$$|\gamma_t(s) - \gamma_u(s)| < \varepsilon \text{ si } s \in I, u \in I, |u - t| < \delta. \tag{1.23}$$

Supongamos que u satisface estas condiciones. Entonces, (1.23) muestra que C recubre γ_u, y en consecuencia del teorema 1.14 se deduce que tanto g_t como g_u se obtienen por prolongación de (f, D) a lo largo de la misma cadena.
Por tanto, $g_t = g_u$.
Por tanto, cada $t \in I$ está recubierto por un segmento J_t tal que $g_u = g_t$ para cada $u \in I \cap J_t$. Como I es compacto, I puede recubrirse por un número finito de J_t; y como I es conexo, se ve que en un número finito de pasos que $g_1 = g_0$.

∎

Teorema 1.17: *Supongamos que Γ_0 y Γ_1 son curvas en un espacio topológico X, con un punto inicial común α y un punto final común β. Si X es* ***simplemente conexo****, entonces existe una familia uniparamétrica $\{\gamma_t\}$, con $0 \leq t \leq 1$, de curvas de α a β en X, tal que $\gamma_0 = \Gamma_0$ y $\gamma_1 = \Gamma_1$.*
Demostración:
Sea $[0, \pi]$ el intervalo del parámetro de Γ_0 y Γ_1. Entonces:

$$\Gamma(s) = \begin{cases} \Gamma_0(s) & \text{si } 0 \leq s \leq \pi \\ \Gamma_1(2\pi - s) & \text{si } \pi \leq s \leq 2\pi \end{cases} \tag{1.24}$$

define una curva cerrada en X. Como X es simplemente conexo, Γ es homotópicamente equivalente a un punto. En consecuencia, existe una función continua $H : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to X$ tal que:

$$H(s, 0) = \Gamma(s), \qquad H(s, 1) = c \in X, H(0, t) = H(2\pi, t)\ .$$

Si $\Phi : \overline{U} \longrightarrow X$ se define mediante:

$$\Phi(re^{i\zeta}) = H(\zeta, 1 - r) \qquad (0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \zeta \leq 2\pi),$$

Entonces se tiene que Φ es continua por las propiedades de la función H. Sea entonces:

$$\gamma_r(\zeta) = \Phi[(1 - t)e^{i\zeta} + te^{-i\zeta}] \qquad (0 \leq t \leq 1,\ 0 \leq \zeta \leq \pi).$$

Como $\Phi(e^{i\zeta} = H(\zeta, 0) = \Gamma(\zeta)$, se deduce que:
$\gamma_t(0) = \Phi(1) = \Gamma(0) = \alpha \qquad (0 \leq t \leq 1)$,
$\gamma_t(\pi) = \Phi(-1) = \Gamma(\pi) = \beta \qquad (0 \leq t \leq 1)$,
$\gamma_0(\zeta) = \Phi(e^{i\zeta}) = \Gamma(\zeta) = \Gamma_0(\zeta) \qquad (0 \leq \zeta \leq \pi)$ y por tanto,

$$\gamma_1(\zeta) = \Phi(e^{-i\zeta}) = \Phi(i(2\pi - \zeta)) = \Gamma(2\pi - \zeta) = \Gamma_1(\zeta) \quad (0 \leq \zeta \leq \pi)$$

lo cual completa la demostración.

∎

Teorema 1.18: *Supongamos que $A \subset \mathbb{C}$ es un abierto en el cuál está definido el problema de valor inicial* (1.7)*. Sea $t_0 \in A$, y sea Γ una curva parametrizable, más concretamente por la aplicación γ:*

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow A \subset \mathbb{C}; \quad \Gamma = sop(\gamma[0,1]); \quad long(\Gamma) = M < \infty$$

Entonces, la solución definida en el disco $D(f, d(Fr(A), t_0))$ es prolongable a un abierto $B \subset A$ tal que $\Gamma \subset B$.

Demostración:

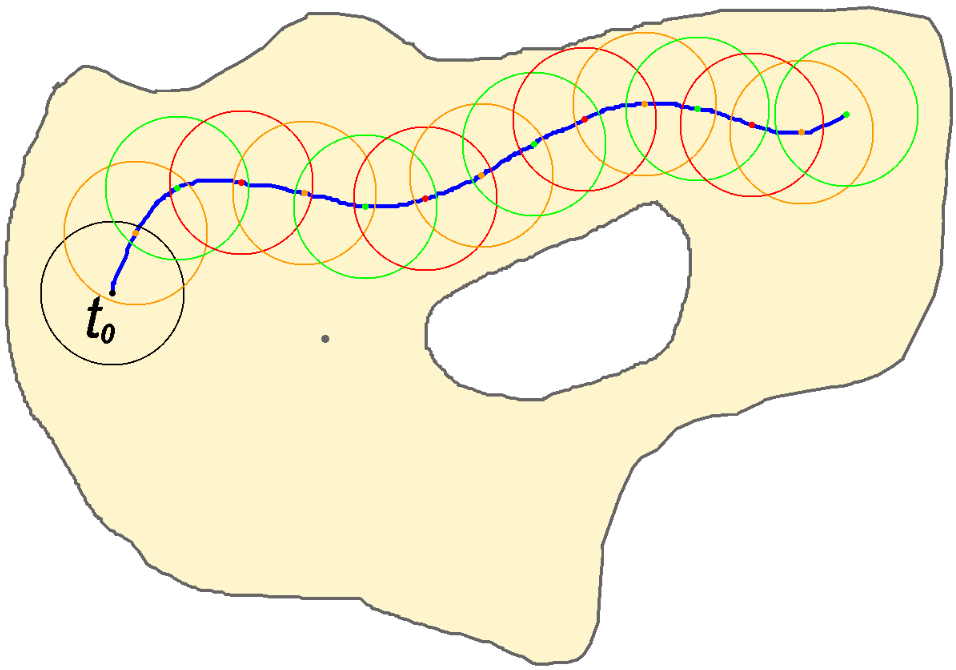
Como Γ es un subconjunto compacto y $\mathbb{C} \setminus A$ es un conjunto cerrado (de $\mathbb{C}$), entonces $d(\Gamma, \mathbb{C} \setminus A) = \varepsilon > 0$. Más concretamente, para todo $t \in \Gamma$ se tiene que $D(t_0, \varepsilon) \subset A$.

Aplicando los teoremas de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales lineales, se tiene una única solución en $D(t_0, \varepsilon)$. Entonces tomamos $t_1 \in D(t_0, \varepsilon)$, con $t_1 = \gamma(s_1)$ $(s_1 > 0)$. (Podemos exigir, si es posible, que la distancia a t_0 sea mayor que $\varepsilon/2$). Se tiene que $D(t_1, \varepsilon) \subset A$. Se aplica el teorema de existencia y unicidad con los valores obtenidos evaluando la solución obtenida en el primer paso en el punto t_1. Además está solución coincide con la obtenida en el primer paso en $D(t_1, \varepsilon) \cap D(t_0, \varepsilon)$.

En la siguiente iteración, consideramos $t_2 \in D(t_1, \varepsilon)$, (Podemos exigir, si es posible, que la distancia a t_0 sea mayor que $\varepsilon/2$), tomándose de modo que $t_2 = \gamma(s_2)$, con $(s_2 > s_1)$, y considerando como valor inicial la solución obtenida en $D(t_1, \varepsilon)$, obtenemos por el teorema de existencia y unicidad una única solución definida en $D(t_1, \varepsilon)$, que coincide con la solución anterior en $D(t_2, \varepsilon) \cap D(t_1, \varepsilon)$.

La iteración solamente tiene lugar un número finito de veces, ya que $long(\Gamma) = M < \infty$ y $|t_k - t_{k-1}| > \frac{\varepsilon}{2}$. Más concretamente, de la desigualdad triangular, se deduce que el número de iteraciones no puede ser superior a $1 + \lfloor 2M/\varepsilon \rfloor$, donde $\lfloor m \rfloor$ representa la parte entera de un número real m.

■



Prolongación mediante circunferencias de la solución de una ecuación diferencial lineal.

Teorema de Monodromía 1.19: *Supongamos que Ω es un abierto simplemente conexo, $D = D(t_0, R) \subset \Omega$ un disco abierto y (f, D) un germen de función de Ω, con $f : D \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Si f admite prolongación analítica a lo largo de cualquier camino en Ω, entonces existe una función g holomorfa en Ω, tal que $g(z) = f(z) \quad \forall t \in D(t_0, R)$.*

Demostración:

Sean Γ_0 y Γ_1 dos curvas de Ω desde el centro del disco D (sea por ejemplo t_0 el centro de dicho disco). De los teoremas 1.16 y 1.17 se deduce que las prolongaciones analíticas de (f, D) a lo largo de Γ_0 y Γ_1 conducen al mismo elemento (g_β, D_β), donde D_β es un disco con centro en $\beta \in \mathbb{C}$. Si D_η es un disco que corta a D_β, entonces (g_η, D_η) puede obtenerse prolongando en primer lugar (f, D) hasta β, y luego a lo largo de una línea recta que una β y η. Esto prueba que $g_\beta = g_\eta$ en el conjunto $D_\beta \cap D_\eta$

La definición de la función g como:

$$g(t) = g_\beta(t)$$

es en consecuencia consistente y proporciona la extensión holomorfa de f buscada.

■

Observación: Por supuesto, el teorema no se cumple si el dominio de definición de una función no es un conjunto simplemente conexo. Por ejemplo, no se puede dar una definición del logaritmo en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ que sea una función holomorfa, ni siquiera continua, en este conjunto. Tampoco lo cumplen las funciones holomorfas en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ que sean composición de logaritmos, aunque estén definidas en 0, como sería el caso de la raíz cuadrada.

Homografías

Recordemos que una aplicación definida en la esfera de Riemann es una homografía si es una aplicación lineal **biyectiva** de la forma $\phi : \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \longleftrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$ tal que:
$\phi([t_0, t_1]) = [\alpha_0 t_0 + \alpha_1 t_1, \beta_0 t_0 + \beta_1 t_1]$, o equivalentemente:

$$\phi(t) = \frac{\beta_0 + \beta_1 t}{\alpha_0 + \alpha_1 t}; \qquad \phi(\infty) = \frac{\beta_1}{\alpha_1}.$$

Estas transformaciones serán de gran utilidad para llevar a cabo los cambios de variable que permitirán resolver las ecuaciones de segundo orden con coeficientes no constantes.
A las homografías de la esfera de Riemann también se las llama transformaciones de Moebius.
NOTA: Aunque se puede exigir que
$ad - bc = det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$,
en realidad basta con considerar que el determinante sea no nulo.
Por otra parte, en la esfera de Riemann se puede adoptar como convenio $\frac{x}{0} = \infty$ si $x \neq 0$.

Capítulo 2: Clasificación de singularidades de las ecuaciones diferenciales lineales

Empezaremos definiendo qué es una singularidad:
Definición 2.1: Sea A un abierto de $\mathbb{C}$. Se considera la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0, \tag{2.1}$$

donde los coeficientes $a_j(t)$, $j \in \{0, 1, ..., n-1\}$ son funciones holomorfas en A. Se dice que la ecuación (2.1) presenta una singularidad en un punto $t_0 \in \mathbb{C}$ si existe $j \in \{0, 1, ..., n-1\}$ tal que la función $a_j(t)$ presenta una singularidad aislada en el punto t_0.
Por otra parte, se dice que la ecuación (2.1) presenta una singularidad en ∞, si al hacer el cambio de variables $w = 1/t$, se tiene que la ecuación transformada por dicho cambio de variable,

$$\frac{d^n y}{dw^n} + c_{n-1}(w)\frac{d^{n-1}y}{dw^{n-1}} + ... + c_1(w)\frac{dy}{dw} + c_0(w)y(w) = 0,$$

presenta una singularidad en 0.

Definición 2.2: Sea U un abierto de $\mathbb{C}$. Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de orden 1:

$$\mathbf{y}'(t) - A(t)\mathbf{y}(t) = 0, \tag{2.2}$$

donde los coeficientes de la matriz A son funciones holomorfas ($A = [A_{jk}(t)]_{\{1 \leq j,k \leq n\}}$). Se dice que la ecuación (2.2) presenta una singularidad en un punto $t_0 \in \mathbb{C}$ si existen $j, k \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que la función $a_{jk}(t)$ presenta una singularidad en el punto t_0.
Por otra parte, se dice que la ecuación (2.2) presenta una singularidad en ∞, si al hacer el cambio de variables $w = 1/t$, se tiene que la ecuación transformada por dicho cambio de variable,

$$\frac{d\mathbf{y}(w)}{dw} + C(w)\mathbf{y}(w) = 0,$$

presenta una singularidad en 0.

Para resaltar la importancia de los puntos singulares de las ecuaciones diferenciales, veamos qué puede ocurrir si intentamos buscar soluciones con condiciones iniciales en uno de estos puntos.
Ejemplo 2.3:

$$t^2 y''(t) - y(t) = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0.$$

Consideramos una serie de potencias centrada en 0 como solución del problema:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k t^k; \quad y''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) y_k t^{k-2}.$$

Entonces, la ecuación diferencial queda reescrita como:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k^2 - k - 1) y_k t^k = 0.$$

Si imponemos la igualdad para los términos independientes, obtenemos que $y_0 = y(0) = 0$, lo que está en contradicción con las condiciones iniciales del problema. Por tanto, no existe una solución que esté definida en un entorno de 0 de esta esta ecuación diferencial con el problema de valor inicial dado.

Otro problema es que exista una serie de potencias formal que satisfaga la ecuación diferencial, pero cuyo radio de convergencia sea 0.
Ejemplo 2.4: Se considera el siguiente problema de valor inicial, que presenta una singularidad en 0:

$$t^2 y'(t) + y(t) = t; \quad y(0) = 0. \tag{2.3}$$

Esta ecuación de primer orden es no homogénea, pero de acuerdo al lema 1.1 se puede reescribir como la ecuación diferencial homogénea de segundo orden siguiente:

$$t^3 y''(t) + (t^2 + t) y'(t) - y(t) = 0. \tag{2.4}$$

Buscamos entonces una serie de potencias formal (centrada en 0) que sea solución del problema de valor inicial dado:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k; \; y'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k f_k t^{k-1}; \; y''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) f_k t^{k-2}.$$

Sustituyendo en la ecuación de segundo orden homogénea, obtenemos que:

$$0 = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) f_k t^{k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} k f_k t^{k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} k f_k t^k - \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k =$$

$$= \sum_{k=3}^{\infty} (k-1)(k-2) f_{k-1} t^k + \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) f_{k-1} t^k + \sum_{k=1}^{\infty} k f_k t^k - \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k.$$

Veamos qué valores toman los coeficientes f_k al evaluar la expresión obtenida para los distintos valores de k:
- Para $k = 0$, obtenemos que $f_0 = 0$.
- Para $k = 1$, la expresión evaluada toma el valor 0, independientemente del valor que asignemos a f_1, sin embargo, el único valor de f_1 para el que se verifica la ecuación no homogénea (2.3) es para $f_1 = 1$, con lo que escogeremos este valor para f_1.
- Para $k = 2$, se obtiene la igualdad $(f_1 + 2f_2 - f_2)t^2 = 0$, con lo que deducimos que $f_2 = -f_1 = -1$.

- Para $k \geq 3$, se obtiene la igualdad siguiente:

$$0 = (k-1)^2 f_{k-1} + (k-1) f_k = 0 \ ,$$

es decir, $f_k = -(k-1)f_{k-1}$. De forma inductiva deducimos entonces que $f_k = (-1)^{k-1}(k-1)!$ si $k \geq 1$. Entonces, la siguiente serie de potencias formal es solución de la ecuación diferencial en 0:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}(k-1)! t^k.$$

Sin embargo, esta serie de potencias diverge para todo $t \neq 0$, con lo que el radio de convergencia de la serie de potencias formal es 0, es decir, no existe ninguna función holomorfa definida en un entorno de 0 que satisfaga la ecuación diferencial (2.4) ni tampoco la (2.3).

Otro problema que puede darse al manejar puntos singulares es que podría no poder definirse de forma unívoca una solución en ningún disco punteado que contuviera a la singularidad.
Ejemplo 2.5. Se considera la ecuación:

$$t^2 y''(t) + \frac{1}{4} y(t) = 0 \ , \text{ con las condiciones iniciales:}$$

$$y(1) = 1, \ y'(1) = 0.5 \ .$$

Entonces la solución local de esta ecuación es $y(t) = \sqrt{t}$ en un entorno adecuado de 1, pero la raíz cuadrada no se puede extender de modo holomorfo a todo el plano complejo.

Finalmente, otro problema que puede tener lugar al intentar dar condiciones iniciales en puntos singulares es que exista una única solución y sea holomorfa en un disco centrado en la singularidad, pero que el número de condiciones iniciales dadas en la singularidad no se corresponda con el orden de la ecuación.
Ejemplo 2.6: Sean α, β, $\gamma \in \mathbb{C}$. La ecuación siguiente:

$$t(1-t)y''(t) + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)t)y'(t) - \alpha\beta y(t) = 0$$

se denomina la **ecuación hipergeométrica de Gauss** con parámetros α, β y γ.
Aunque lo abordaremos en el capítulo 3, esta ecuación presenta una única solución holomorfa definida en $D(0,1)$ si imponemos la condición inicial $y(0) = f_0$, cuando en un punto regular habría que dar el valor de la función y el de su primera derivada, al ser de segundo orden.

2.1: Singularidades de primer y segundo tipo, regulares e irregulares

En primer lugar, clasificaremos las singularidades de las ecuaciones diferenciales lineales de orden $n \in \mathbb{N}$ (y de los sistemas lineales $n \times n$) en singularidades de primer tipo y en singularidades de segundo tipo. También las clasificaremos en singularidades regulares y en singularidades irregulares. Aunque probaremos que las singularidades regulares son justamente las singularidades de primer tipo en las ecuaciones diferenciales lineales de orden n, esta propiedad es falsa para el caso de sistemas.
Definición 2.7: Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales homogéneo (2.2).

Se dice que el sistema (2.2) presenta una singularidad de primer tipo en $t_0 \in \mathbb{C}$ si la matriz $A = [a_{ij}(t)]_{1\leq i,j\leq n}$ tiene al menos un coeficiente a_{ij} con una singularidad en el punto t_0 y existe una matriz G de funciones holomorfas tal que:

$$G(t) = tA(t). \tag{2.5}$$

Si la matriz A presenta una singularidad en alguno de los coeficientes a_{ij} en el punto t_0, pero no puede ser escrita en la forma anterior (2.5), entonces se dice que el sistema (2.2) presenta una singularidad de segundo tipo en el punto t_0.
La definición de singularidades de primer y segundo tipo en ecuaciones diferenciales lineales es ligeramente distinta, sin embargo se puede establecer una relación entre las singularidades de primer tipo en ecuaciones diferenciales lineales y en sistemas, que detallaremos más adelante.

Definición 2.8: Se considera la ecuación diferencial lineal homogénea (2.1). Entonces se dice que la ecuación diferencial homogénea (2.1) presenta un punto singular de primer tipo en $t_0 \in \mathbb{C}$ si t_0 es un punto singular para la ecuación y existen funciones holomorfas $f_{n-1}(t), ..., f_0(t)$ tales que:
$t \cdot a_{n-1}(t) = f_{n-1}(t);$
$t^2 \cdot a_{n-2}(t) = f_{n-2}(t);$
...
$t^k \cdot a_{n-k}(t) = f_{n-k}(t);$
...
$t^n \cdot a_0(t) = f_0(t).$
Si la ecuación diferencial (2.1) presenta una singularidad en alguno de los coeficientes a_j en el punto t_0, pero no puede ser escrita en la forma anterior, entonces se dice que la ecuación (2.1) presenta una singularidad de segundo tipo en el punto t_0.

Definición 2.9 Se dice que una matriz T con entradas en el cuerpo de gérmenes de funciones meromorfas en un entorno de t_0 es una matriz de cambio de coordenadas si la matriz T es inversible en dicho cuerpo.
Si definimos el cambio de coordenadas asociado a la matriz T:

$$\mathbf{z}(t) = T(t)\mathbf{y}(t) \tag{2.6}$$

entonces se tiene que:

$$\mathbf{z}'(t) = T'(t)\mathbf{y}(t) + T(t)\mathbf{y}'(t) = T'(t) \cdot T^{-1}(t)\mathbf{z}(t) + T(t)A(t)T^{-1}(t)\mathbf{z}(t) =$$

$$= (T'(t)T^{-1}(t) + T(t)A(t)T^{-1}(t))\mathbf{z}(t). \tag{2.7}$$

Denotamos por $B(t)$ a la matriz $B(t) = T'(t)T^{-1}(t) + T(t)A(t)T^{-1}(t)$, con lo que la matriz T satisface la ecuación diferencial:

$$T'(t) = B(t)T(t) - T(t)A(t).$$

Para el vector $\mathbf{z}$ y la matriz B, diremos que el sistema $\mathbf{z}'(t) - B(t)\mathbf{z}(t) = 0$ se obtiene a partir del sistema $\mathbf{y}'(t) - A(t)\mathbf{y}(t) = 0$ por un cambio de coordenadas.

En ocasiones, mediante un cambio de coordenadas, es posible transformar un punto singular de segundo tipo en un punto singular de primer tipo en sistemas.

Ejemplo 2.10: Si consideramos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{t^2} & -\frac{1}{t} \end{pmatrix} \mathbf{y}(t).$$

Vemos que para $t = 0$ se tiene una singularidad de segundo tipo. Consideramos el cambio de coordenadas siguiente:

$$\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \mathbf{y}(t).$$

Entonces, según (2.7), se obtiene la matriz B siguiente:

$$B(t) = T'(t)T^{-1}(t) + T(t)A(t)T^{-1}(t) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{t^2} & -\frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{t} \\ -\frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix}$$

con lo que B es la matriz de un sistema que presenta una singularidad de primer tipo en el punto $t_0 = 0$.

Definición 2.11: Se dice que los sistemas $\mathbf{y}'(t) - A(t)\mathbf{y}(t) = 0$ y $\mathbf{z}'(t) - B(t)\mathbf{z}(t) = 0$ **son equivalentes** si se puede obtener uno de los dos sistemas por cambio de coordenadas del otro.
Obsérvese que se tiene una relación de equivalencia, ya que las matrices de cambio de coordenadas son invertibles en un entorno del punto t_0 a tratar (que puede ser regular o singular).
Aunque las singularidades de los sistemas lineales de primer orden se pueden clasificar en singularidades de primer y segundo tipo, también se pueden clasificar en singularidades regulares e irregulares, atendiendo a la posibilidad de reescribirlas como singularidades de primer tipo mediante cambios de coordenadas.
Definición 2.12: Se dice que la singularidad del sistema de ecuaciones (2.2) es regular si existe una matriz de cambio de coordenadas T tal que:

$$\mathbf{z}(t) = T(t)\mathbf{y}(t); \mathbf{z}'(t) = B(t)\mathbf{z}(t)$$

presenta una singularidad de primer tipo en t_0; con el vector $\mathbf{z}$ y la matriz B definidas como antes. En caso contrario, se dice que la singularidad es irregular. Es decir, t_0 es una singularidad regular para el sistema dado si este sistema es equivalente a un sistema en el que t_0 es una singularidad de primer tipo. En particular, las singularidades de primer tipo son singularidades regulares.
En este caso, sí que existe relación directa entre el caso de sistemas lineales $n \times n$ y el de ecuaciones diferenciales lineales de orden n. Más concretamente:

Definición 2.13: Se considera la ecuación diferencial lineal homogénea (2.1). Se dice que la ecuación presenta una singularidad regular (resp. irregular) en un punto $t_0 \in \mathbb{C}$ si el sistema $n \times n$ asociado a dicha ecuación presenta una singularidad regular (resp. irregular) en t_0.

Las singularidades de primer tipo en las ecuaciones de segundo orden están asociadas a soluciones de tipo potencial o logarítmico, mientras las singularidades de segundo tipo están asociadas a funciones de tipo exponencial, lo que también engloba a funciones trigonométricas, hiperbólicas...
Lema 2.14: *Sea d el operador de diferenciación usual ($df(t) = f'(t)$). Definimos el operador δ del modo siguiente:*

$$\delta = t \cdot d$$
$$\delta(y)(t) = t \cdot y'(t) \ .$$

Entonces, se tiene que:

$$d^k = \frac{1}{t^k}\delta(\delta - 1)\cdots(\delta - (k-1)) \tag{2.8}$$

(donde 1 denota al operador identidad).
Demostración: La demostración se hará por inducción sobre k.
Para $k = 1$, la propiedad es cierta, ya que $d^1 = \frac{1}{t}(\delta - (1-1))$.
Veamos que la propiedad es cierta para $j = k+1$ si se verifica para cada $j \leq k$:

$$d^{k+1} = d \cdot d^k = d\left(\frac{1}{t^k}\delta(\delta - 1)\cdots(\delta - (k-1))\right) =$$

$$= -\frac{k}{t^{k+1}}\delta(\delta - 1)\cdots(\delta - (k-1)) + \frac{1}{t^k} \cdot d[\delta(\delta - 1)\cdots(\delta - (k-1))] =$$

$$= -\frac{k}{t^{k+1}}\delta(\delta - 1)\cdots(\delta - (k-1)) + \frac{1}{t^k} \cdot \frac{1}{t}\delta[\delta(\delta - 1)\cdots(\delta - (k-1))] =$$

$$= \frac{1}{t^{k+1}}(\delta - k)[\delta(\delta - 1)\cdots(\delta - (k-1))] = \frac{1}{t^{k+1}}\delta(\delta - 1)\cdots(\delta - (k-1))(\delta - k),$$

con lo que queda probada por inducción la fórmula (2.8).

■

Veamos como actúa el operador d^n en una ecuación diferencial lineal de orden n con singularidad de primer tipo en 0:

$$0 = t^n y^{(n)}(t) + t^{n-1}b_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + b_1(t)ty'(t) + b_0(t)y(t) =$$

$$= (\delta(\delta - 1)\cdots(\delta - n + 1) + b_{n-1}(t)\delta(\delta - 1)\cdots(\delta - n + 2) + ... + b_1(t)\delta + b_0(t))y.$$

Es decir, reescribiendo los coeficientes, tenemos:

$$\delta^{(n)}(y) + c_{n-1}(t)\delta^{(n-1)}(y) + ... + c_1(t)\delta(y) + c_0(t)y = 0,$$

donde las funciones $c_i(t)$ son holomorfas en un entorno de 0. Renombrando y y sus 'derivadas' obtenidas mediante el operador δ del modo siguiente:
$y_1 = y$, $y_2 = \delta y = \delta y_1$,..., $y_n = \delta^{n-1}y = \delta y_{n-1}$.
El sistema asociado, obtenido mediante este cambio de variable, es:

$$\delta \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -c_0(t) & -c_1(t) & -c_2(t) & ... & -c_{n-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

O lo que es lo mismo:

$$t \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ ... \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -c_0(t) & -c_1(t) & -c_2(t) & ... & -c_{n-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

Es decir, el sistema asociado a una ecuación diferencial lineal de orden n con una singularidad de primer tipo en 0 obtenido con el operador δ presenta una singularidad de primer tipo en 0. (Para un punto $t_0 \in \mathbb{C}$ arbitrario se consideraría el operador $\delta_{t_0} = (t - t_0)d$).

Teorema 2.15 (de Fuchs): *Se considera la ecuación diferencial lineal homogénea* (2.1). *Entonces se tiene un punto singular regular en $t_0 \in \mathbb{C}$ si y solo si t_0 es un punto singular para la ecuación y existen funciones holomorfas $f_{n-1}(t), ..., f_0(t)$ tales que:*
$t \cdot a_{n-1}(t) = f_{n-1}(t);$
$t^2 \cdot a_{n-2}(t) = f_{n-2}(t);$
...
$t^k \cdot a_{n-k}(t) = f_{n-k}(t);$
...
$t^n \cdot a_0(t) = f_0(t).$
Es decir, la ecuación diferencial homogénea (2.1) *presenta una singularidad regular en t_0 si y solo si la singularidad es de primer tipo.*

Corolario 2.16: *Se considera la ecuación diferencial lineal homogénea de orden 2:*

$$y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0. \tag{2.9}$$

Entonces se tiene un punto singular regular en $t_0 \in \mathbb{C}$ si y solo si t_0 es un punto singular para la ecuación y existen funciones holomorfas f, g definidas en un entorno de t_0 tales que:

$$a_1(t) = \frac{f(t)}{t}; \quad a_0(t) = \frac{g(t)}{t^2},$$

Es decir, se obtiene la ecuación:

$$y''(t) + \frac{f(t)}{t}y'(t) + \frac{g(t)}{t^2}y(t) = 0. \tag{2.10}$$

Demostración: Ya hemos visto que las singularidades de primer tipo en ecuaciones lineales de orden n se pueden expresar como singularidades de primer tipo en algún sistema de ecuaciones diferenciales asociado a la ecuación de orden n.

Aunque no probaremos el recíproco, señalaremos que consiste en hacer la demostración mediante inducción sobre el orden de la ecuación. Una demostración se puede encontrar en el capítulo 4, sección 15 del siguiente libro: Poole, E.G.C. *Introduction to the theory of linear differential equations.* Oxford (1936).

Las singularidades regulares e irregulares en las ecuaciones diferenciales lineales (y también en los sistemas) se diferencian por la expresión de la solución dada. En particular, las singularidades irregulares en las ecuaciones diferenciales (o en los sistemas) se corresponden con singularidades de tipo esencial para las soluciones de la ecuación (en el caso de sistemas, para la matriz fundamental de soluciones).
Ejemplo 2.17: Se considera la ecuación diferencial lineal de orden 2 siguiente:

$$y''(t) - y(t) = 0; \qquad y(t) = a_1 e^t + a_2 e^{-t}\ ;\ a_1, a_2 \in \mathbb{C},$$

cuyas soluciones (salvo la solución trivial) presentan una singularidad esencial en ∞. Veamos que en efecto, la singularidad es de segundo tipo (es decir, irregular). Sea $x = \frac{1}{t}$. Entonces, aplicando la regla de la cadena, se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{-1}{x^2} \cdot \frac{dy}{dt} \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = -x^2 \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2t}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{x^4} - x^2 \frac{dy}{dx} \cdot \frac{2}{x^3}$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = x^4 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x^3 \frac{dy}{dx}.$$

Y se obtiene por tanto, la siguiente ecuación diferencial transformada:

$$x^4 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x^3 \frac{dy}{dx} - y = 0; \qquad y(x) = a_1 e^{\frac{1}{x}} + a_2 e^{\frac{-1}{x}}$$

que tiene una singularidad de segundo tipo en 0.
El comportamiento de las soluciones en el entorno de singularidades regulares para ecuaciones lineales es de la forma $(t-t_0)^\alpha$ o bien de la forma $(t-t_0)^\alpha \log(t-t_0)$. Aunque no demostraremos las propiedades de las soluciones en los entornos de las singularidades de segundo tipo (para las de primer tipo se hará en la parte de exponentes característicos), una prueba de ellas se puede encontrar en el siguiente libro: Ince, E.L. *Ordinary Differential Equations.* Dover publications (1956)(capítulos XV, XVII, XX). También en el capítulo 9 del libro Henrici, Peter. *Applied and computational complex analysis vol 2.* John Willey and sons (1977).

2.2: Ecuaciones de tipo Fuchsiano

Definición 2.18: Se dice que la ecuación diferencial lineal (2.1) es fuchsiana o de tipo fuchsiano si presenta un número finito de singularidades en la esfera de Riemann y todas ellas son singularidades de primer tipo.

Aunque hemos dado una definición rigurosa de las ecuaciones fuchsianas, aún no las hemos caracterizado, ya que aunque sabemos identificar las singularidades de primer y segundo tipo en el plano complejo, no hemos dado un criterio análogo en ∞. ¿Como se identifica una singularidad en ∞? ¿Cómo se sabe si la singularidad es de primer o de segundo tipo?

Teorema 2.19 (Condición de Fuchs en ∞, sistemas): *Se considera el sistema lineal homogéneo $\mathbf{y}'(t) = A(t)\mathbf{y}(t)$. Entonces, el sistema presenta, a lo más, una singularidad de primer tipo en ∞ si y solo si A es una matriz analítica en ∞ y $A(\infty) = 0$.*

Demostración: Se considera el cambio de variable $x = \frac{1}{t}$. Entonces, aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \frac{d\mathbf{y}}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \mathbf{y}'(x^{-1}) \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{x^2} \cdot A(x^{-1})\mathbf{y}(x^{-1}).$$

Como la ecuación original debe presentar una singularidad de primer tipo en $t = \infty$, en particular la ecuación transformada debe presentar a lo más una singularidad de primer tipo en $x = 0$, lo cual ocurre si y solo si A presenta un cero de orden al menos 1 para $x = 0$ (es decir, en $t = \infty$ la matriz es analítica y $A(\infty) = 0$).

■

Teorema 2.20 (Condición de Fuchs en ∞ para ecuaciones lineales): *Se considera la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n* (2.1). *Entonces, la ecuación* (2.1) *presenta, a lo más, una singularidad en ∞ de primer tipo si, y solo si, cada coeficiente $a_k(t)$, con $0 \leq k \leq n-1$ presenta un cero de orden al menos $n-k$ en ∞.*

Demostración:

Se considera el operador δ ya definido antes ($\delta = t \cdot d$), con d el operador de diferenciación usual. Aplicando el lema 2.14, la ecuación diferencial lineal:

$$d^n y(t) + \frac{a_{n-1}(t)}{t} d^{n-1} y(t) + ... + \frac{a_1(t)}{t^{n-1}} dy(t) + \frac{a_0(t)}{t^n} y(t) = 0.$$

De acuerdo con el lema 2.14, esta ecuación diferencial lineal se puede reescribir como:

$$(\delta^n y)(t) + Q_{n-1}(t)(\delta^{n-1} y)(t) + \cdots + Q_0(t) y(t) = 0.$$

Si hacemos el cambio de variable $t = \frac{1}{w}$, y llamamos $Y(w) := y\left(\frac{1}{w}\right)$, entonces, se obtiene la expresión siguiente:

$$\delta(Y(w)) = \delta(y(w^{-1})) = w \cdot y'(w^{-1}) \cdot \frac{-1}{w^2} = -\frac{1}{w} y'(w^{-1}) = -(\delta y)(w^{-1}).$$

Así, por recurrencia, obtenemos inductivamente la expresión siguiente:

$$\delta^k(Y(w)) = (-1)^k (\delta^k y)(w^{-1}).$$

La ecuación, tras este cambio de variable, es

$$(\delta^n Y)(w) - Q_{n-1}(w^{-1})(\delta^{n-1} Y)(w) + \cdots + (-1)^n Q_0(w^{-1}) Y(w) = 0.$$

El punto del infinito es, a lo más, una singularidad de primer tipo si lo es 0 en esta última ecuación, es decir, si los $Q_i\left(\frac{1}{w}\right)$ no tienen polos en 0 (o bien, $\lim_{t\to\infty} Q_i(t)$ existe y es finito). Si se escribe la ecuación en la forma habitual, esto significa que

$$tp_{n-1}(t),\ t^2p_{n-2}(t),\ldots,t^np_0(t)$$

tienen límite en el infinito y es finito. Si cada $p_i(t) = \dfrac{a_i(t)}{b_i(t)}$ es una fracción racional, la condición anterior se traduce en que

$$\begin{gathered}\deg a_{n-1} + 1 \leq \deg b_{n-1},\\ \deg a_{n-2} + 2 \leq \deg b_{n-2},\\ \ldots\\ \deg a_0 + n \leq \deg b_0.\end{gathered}$$

Lo que prueba el teorema, al haberse probado ambas implicaciones.

■

Proposición 2.21 (Regularidad de ∞ en ecuaciones de orden 2): *Se considera la ecuación diferencial lineal de orden 2:*

$$y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0.$$

Se tiene que ∞ es un punto regular si y solo si $a_1(t) - 2t$ presenta un cero de orden al menos 2 y $a_0(t)$ presenta un cero de orden al menos 4 en ∞.

Demostración: Si consideramos el cambio de variable $x = 1/t$, y aplicamos la regla de la cadena, obtenemos que:

$$\frac{dy}{dt} = -x^2\frac{dy}{dx}; \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = x^4\frac{d^2y}{dx^2} + 2x^3\frac{dy}{dx}.$$

Con lo que obtenemos la ecuación transformada siguiente:

$$x^4\frac{d^2y}{dx^2} + 2x^3\frac{dy}{dx} - a_1(x^{-1})x^2\frac{dy}{dx} + a_0(x^{-1})y = 0.$$

O lo que es lo mismo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{2}{x} - \frac{a_1(x^{-1})}{x^2}\right)\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x^{-1})}{x^4}y = 0.$$

Con lo que $x = 0$ (o $t = \infty$) es un punto regular si y solo si $a_1(x^{-1}) - 2x$ presenta un cero doble en 0 y $a_0(x^{-1})$ presenta un cero de orden 4 en 0.

■

2.3: Singularidades de primer tipo

Sea A un abierto de $\mathbb{C}$. Se consideran ecuaciones diferenciales de orden 2 con coeficientes que sean funciones racionales:

$$y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0; \quad a_0, a_1 \in \mathbb{C}(t).$$

O equivalentemente, si P, Q y R son polinomios:

$$P(t)y''(t) + Q(t)y'(t) + R(t)y(t) = 0. \tag{2.11}$$

A continuación, veremos resultados sobre ecuaciones de segundo orden en función de su número de singularidades que nos permitirán obtener expresiones más simples de este tipo de ecuaciones:
- Proposición 2.22: *Todas las ecuaciones de segundo orden tienen al menos un punto singular.*
Demostración: Supongamos por reducción al absurdo que existe una ecuación de segundo orden lineal que no presenta puntos singulares en el plano complejo ni en el infinito:

$$y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0.$$

Sea $w = 1/t$. Entonces:

$$\frac{dy}{dw} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dw} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{-1}{w^2} \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = -w^2 \frac{dy}{dw}$$

$$\frac{d^2y}{dw^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{dw}\right)^2 + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2t}{dw^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{w^4} - w^2 \frac{dy}{dw} \cdot \frac{2}{w^3}.$$

Luego:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = w^4 \left(\frac{d^2y}{dw^2} + \frac{2}{w}\frac{dy}{dw}\right) = w^4 \frac{d^2y}{dw^2} + 2w^3 \frac{dy}{dw}.$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la ecuación, se llega a que:

$$0 = w^4 \frac{d^2y}{dw^2} + 2w^3 \frac{dy}{dw} - a_1(w^{-1}) \left(w^2 \frac{dy}{dw}\right) + a_0(w^{-1})y =$$

$$= w^4 \frac{d^2y}{dw^2} + (2w^3 - a_1(w^{-1})w^2) \frac{dy}{dw} + a_0(w^{-1})y.$$

O lo que es lo mismo:

$$\frac{d^2y}{dw^2} + \left(\frac{2}{w} - \frac{a_1(w^{-1})}{w^2}\right) \frac{dy}{dw} + \frac{a_0(w^{-1})}{w^4} y = 0. \tag{2.12}$$

Evaluando esta expresión en 0, para que no haya singularidades, llegamos a que a_0 presenta un cero de orden al menos 4 en ∞, como dicha función no puede presentar singularidades en el plano complejo, la función es acotada y por un teorema de variable compleja, una función holomorfa y acotada es constante, luego $a_0 = 0$.
Por otra parte, si evaluamos el coeficiente que acompaña a dy/dw deducimos que:

$$\lim_{w \to 0} 2 - \frac{a_1(w^{-1})}{w} = 0.$$

Con lo que se comprueba que la función a_1 presenta un cero de orden 1 en infinito. Como a_1 no puede presentar singularidades en el plano complejo, debe estar acotada, luego $a_1 = 0$. De este modo, se obtiene la ecuación:

$$\frac{d^2y}{dw^2} + \frac{2}{w}\frac{dy}{dw} = 0. \tag{2.13}$$

Absurdo, ya que esta ecuación presenta una singularidad en 0.

■

- Corolario 2.23: *La única ecuación con un único punto singular de primer tipo, si está fijado en el infinito, es $y'' = 0$.*

Demostración: Ya hemos visto que si una ecuación lineal de segundo orden no presenta puntos singulares en el plano complejo, necesariamente debe ser de la forma (2.12). Para que la singularidad sea de primer tipo, debe cumplirse necesariamente que a_1 presente un cero de orden al menos 1 en ∞, y que a_0 presente un cero de orden al menos 2 en ∞. Como estas funciones deben estar definidas en el plano complejo (no puede haber singularidades salvo en infinito), deducimos que $a_0 = a_1 = 0$ y obtenemos la ecuación (2.13). Es decir $y''(t) = 0$. ■

- Proposición 2.24: *Cuando se imponen 2 puntos singulares, fijados en 0 y en infinito, se obtienen las ecuaciones de Euler, que dependen de 2 parámetros.*

Demostración: Supongamos que las singularidades de la ecuación están situadas en 0 y en ∞. Exigiendo que las singularidades sean de primer tipo, se tiene entonces una expresión de la forma:

$$y''(t) + \frac{p_1(t)}{t}y'(t) + \frac{p_0(t)}{t^2}y(t) = 0.$$

Haciendo el cambio de variable $w = 1/t$ y sustituyendo en la ecuación, se obtiene que:

$$\frac{d^2y}{dw^2} + \left(\frac{2}{w} - \frac{p_1(w^{-1})}{w}\right)\frac{dy}{dw} + \frac{p_0(w^{-1})}{w^2}y = 0.$$

Donde, nuevamente, las singularidades están en 0 y en ∞.

De aquí deducimos que las funciones p_0 y p_1 tampoco pueden tener singularidades polares en infinito, ya que de lo contrario, la ecuación diferencial presentaría una singularidad de segundo tipo en infinito. Como p_0 y p_1 no pueden tener singularidades en la esfera de Riemann, deducimos que deben ser constantes.

Haciendo $p_1(t) = \alpha$ y $p_0(t) = \beta$, obtenemos la ecuación de Euler:

$$t^2y''(t) + \alpha t y'(t) + \beta y(t) = 0 \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

■

-Cuando se imponen 3 puntos singulares, fijados en 0, 1 e infinito, se obtiene la **ecuación hipergeométrica de Gauss**, que depende de 3 parámetros.

$$t(1-t)y''(t) + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)t)y'(t) - \alpha\beta y(t) = 0.$$

La obtención y resolución de esta ecuación se abordará en el siguiente tema.

2.4: Clasificación en función del número de singularidades

Supongamos que una ecuación diferencial de segundo orden lineal y homogénea:

$$y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0$$

presenta únicamente singularidades de primer tipo. Veamos como se clasifican estas ecuaciones en función del número de singularidades.

• **Un único punto singular**.

Si el único punto singular está en el infinito, se obtiene entonces:

$$y''(t) = 0; \qquad y(t) = \alpha + \beta t \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Para hallar todas las ecuaciones de segundo orden con una única singularidad, y por consiguiente reducibles al caso anterior, haremos el cambio de variable $t = \frac{1}{x-x_0}$. (La singularidad se sitúa en el punto x_0).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{(x-x_0)^2} \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{dy}{dx} \cdot (x-x_0)^2;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2t}{dx^2} = -\frac{dy}{dx} \cdot \frac{2}{x-x_0}.$$

Entonces, obtenemos la ecuación:

$$(x-x_0)y''(x) + 2y'(x) = 0; \qquad y(x) = \alpha + \frac{\beta}{x-x_0} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

NOTA: Estas ecuaciones se pueden resolver como EDOs de primer orden si hacemos $w = y'$.

• **Dos puntos singulares**.

Si los dos puntos singulares están en el 0 y en el infinito, entonces se obtiene una familia de ecuaciones conocidas como ecuaciones de Euler:

$$t^2y''(t) + \alpha t y'(t) + \beta y(t) = 0 \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Hacemos el cambio de variable $t = e^s$:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot e^s \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = e^{-s}\frac{dy}{ds}$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2t}{ds^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot e^{2s} + \frac{dy}{dt} \cdot e^s = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot e^{2s} + \frac{dy}{ds}$$

Entonces:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = e^{-2s}\left(\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\right).$$

Sustituyendo las expresiones de dy/dt y d^2y/dt^2 se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden **con coeficientes constantes**.

$$0 = t^2y''(t) + \alpha ty'(t) + \beta y(t) = e^{2s}(e^{-2s}(y''(s) - y'(s))) + \alpha e^s \cdot e^{-s}y'(s) + \beta y(s).$$

Es decir:

$$y''(s) + (\alpha - 1)y'(s) + \beta y(s) = 0.$$

Las raíces del polinomio característico asociado a esta ecuación son:

$$\lambda = \frac{1 - \alpha + \sqrt{(\alpha - 1)^2 - 4\beta}}{2} \ ; \ \mu = \frac{1 - \alpha - \sqrt{(\alpha - 1)^2 - 4\beta}}{2}.$$

Pueden darse entonces 2 casos:
- Las raíces son distintas.
Entonces, las soluciones de la ecuación son de la forma:

$$y(s) = a_1e^{\lambda s} + a_2e^{\mu s}.$$

Luego, deshaciendo el cambio de variable $s = \log(t)$ (¡OJO! se supone que se coge una rama de un logaritmo en un conjunto **simplemente conexo**):

$$y(t) = a_1e^{\lambda \log(t)} + a_2e^{\mu \log(t)} = a_1t^\lambda + a_2t^\mu; \quad a_1, a_2 \in \mathbb{C}.$$

- Se tiene una raíz doble, lo cual ocurre cuando el radiando es 0, es decir, $\lambda = \mu = (1 - \alpha)/2$.
Entonces, las soluciones son de la forma:

$$y(s) = a_1e^{\lambda s} + a_2se^{\lambda s} = a_1e^{\frac{1-\alpha}{2}s} + a_2se^{\frac{1-\alpha}{2}s}.$$

Nuevamente, deshaciendo el cambio de variable y tomando la precaución de escoger un conjunto **simplemente conexo**, se obtiene la solución:

$$y(t) = a_1e^{\lambda \log(t)} + a_2 \log(t)e^{\lambda log(t)} = a_1t^\lambda + a_2 \log(t)t^\lambda.$$

O bien:

$$y(t) = a_1e^{\frac{1-\alpha}{2}\log(t)} + a_2 \log(t)e^{\frac{1-\alpha}{2}\log(t)} = a_1t^{\frac{1-\alpha}{2}} + a_2 \log(t)t^{\frac{1-\alpha}{2}}.$$

Veamos finalmente que formas pueden tomar estas ecuaciones si desplazamos las singularidades, que están ubicadas en los puntos 0 e ∞. Consideramos la homografía:

$$t = \frac{x - x_0}{x - x_1}$$

que envía el 0 a x_0 y el ∞ a x_1.
Entonces, aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{x_0 - x_1}{(x-x_1)^2} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{(x-x_1)^2}{x_0 - x_1} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2t}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{(x_0-x_1)^2}{(x-x_1)^4} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{2(x_0-x_1)}{(x-x_1)^3} =$$

$$= \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{(x_0-x_1)^2}{(x-x_1)^4} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{2}{x-x_1}$$

Luego:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{(x-x_1)^4}{(x_0-x_1)^2} + \frac{(x-x_1)^4}{(x_0-x_1)^2} \frac{2}{x-x_1} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{(x-x_1)^4}{(x_0-x_1)^2} + \frac{dy}{dx} \frac{2(x-x_1)^3}{(x_0-x_1)^2}.$$

Y se obtiene la siguiente ecuación de segundo orden:

$$0 = t^2 y''(t) + \alpha t y'(t) + \beta y(t) =$$

$$= \frac{(x-x_0)^2}{(x-x_1)^2} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{(x-x_1)^4}{(x_0-x_1)^2} + \frac{dy}{dx} \frac{2(x-x_1)^3}{(x_0-x_1)^2} \right) + \alpha \frac{x-x_0}{x-x_1} \left(\frac{(x-x_1)^2}{x_0-x_1} \cdot \frac{dy}{dx} \right) + \beta y =$$

$$\frac{(x-x_0)^2(x-x_1)^2}{(x_0-x_1)^2} \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{2(x-x_0)^2(x-x_1)}{(x_0-x_1)^2} + \frac{\alpha(x-x_0)(x-x_1)}{x_0-x_1} \right) \frac{dy}{dx} + \beta y = 0,$$

cuyas soluciones son, dadas constantes $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$:

$$y(x) = a_0 \left(\frac{x-x_0}{x-x_1} \right)^{\lambda} + a_1 \left(\frac{x-x_0}{x-x_1} \right)^{\mu}.$$

O bien, en caso de que haya una raíz doble:

$$y(x) = a_0 \left(\frac{x-x_0}{x-x_1} \right)^{\lambda} + a_1 \log \left(\frac{x-x_0}{x-x_1} \right) \left(\frac{x-x_0}{x-x_1} \right)^{\lambda} =$$

$$= a_0 \left(\frac{x-x_0}{x-x_1} \right)^{\frac{1-\alpha}{2}} + a_1 \log \left(\frac{x-x_0}{x-x_1} \right) \left(\frac{x-x_0}{x-x_1} \right)^{\frac{1-\alpha}{2}}.$$

- **Tres puntos singulares**.

Si fijamos los puntos singulares en 0,1, e infinito, entonces obtenemos la ecuación hipergeométrica de Gauss:

$$t(1-t)y''(t) + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)t)y'(t) - \alpha\beta y(t) = 0.$$

La resolución de este tipo de ecuaciones no es tan trivial como en los dos casos anteriores y se abordará en el siguiente capítulo.

- **Cuatro o más puntos singulares**:

La resolución de este tipo de ecuaciones es mucho más complicada que en los casos anteriores y no se abordará en el presente trabajo.

No obstante, citaremos una importante dificultad que este tipo de ecuaciones presentan frente al resto de casos: La razón doble de 4 números complejos permanece invariante por homografías, mas concretamente:
Razón doble de 4 elementos de la esfera de Riemann: La razón doble tiene la siguiente expresión:

$$[a, b : c, d] := \frac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(c-b)}.$$

Si consideramos que $a, b, c, d \in \overline{\mathbb{C}}$, entonces su razón doble es el valor $T(a)$, donde T es la única homografía que verifica $T(b) = 0$, $T(c) = 1$, $T(d) = \infty$.
Si S es otra homografía, entonces la aplicación $P = T \circ S^{-1}$ verifica que $P(S(b)) = 0$, $P(S(c)) = 1$ y que $P(S(d)) = \infty$, con lo que se tiene que:

$$[S(a), S(b); S(c), S(d)] = P(S(a)) = (T \circ S^{-1})(S(a)) = T(a) = [a, b; c, d].$$

Lo que prueba la invarianza de la razón doble por homografías.

■

Por tanto, la razón doble de 4 números complejos es invariante por homografías. Esto significa que solamente se pueden fijar mediante homografías un máximo de 3 puntos singulares, o equivalentemente, si se quieren hacer transformaciones biyectivas de la esfera de Riemann en ella misma que permitan reubicar los puntos singulares en ubicaciones elegidas, estas transformaciones no pueden ser homografías.
La relevancia de este hecho reside en que las homografías son las únicas aplicaciones que conservan el orden de los ceros y de los polos, lo que se analizará con más detalle en el siguiente capítulo. De hecho, esta propiedad se puede generalizar para exponentes complejos arbitrarios, que denominaremos exponentes característicos cuando estudiemos el comportamiento de las soluciones en entornos de las singularidades.

Capítulo 3: La ecuación hipergeométrica de Gauss

El aspecto general de la ecuación hipergeométrica de Gauss es de la forma:

$$\boxed{t(1-t)y''(t) + (\gamma - (\alpha+\beta+1)t)y'(t) - \alpha\beta y(t) = 0}$$

NOTA: Así definida, la ecuación hipergeométrica de Gauss es el caso particular de una ecuación diferencial lineal de segundo orden con singularidades en 0,1 e ∞.
Empezaremos viendo como se obtiene esta expresión:

Obtención de la ecuación hipergeométrica de Gauss:
Supongamos que una ecuación diferencial de segundo orden presenta singularidades de primer tipo en 0,1 e ∞. Razonando de forma similar que en el caso de la ecuación de Euler, deducimos que la ecuación debe ser de la forma:

$$y''(t) + \frac{p_1(t)}{t(t-1)}y'(t) + \frac{p_0(t)}{t^2(t-1)^2}y(t) = 0\ , \tag{3.1}$$

donde p_0 y p_1 son polinomios. Aplicando la condición de Fuchs en ∞, comprobamos como p_1 debe ser un polinomio de grado como máximo 1, y a_0 debe ser un polinomio de grado a lo sumo 2. Es decir, obtenemos una expresión dependiente de 5 parámetros.

$$y''(t) + \frac{p_{10} + p_{11}t}{t(t-1)}y'(t) + \frac{p_{00} + p_{01}t + p_{02}t^2}{t^2(t-1)^2}y(t) = 0\ . \tag{3.2}$$

Haciendo el cambio de variable $w = 1/t$ y sustituyendo en la expresión (3.2), comprobamos entonces que se tiene una singularidad de primer tipo en $w = 0$:

$$\frac{dy}{dt} = -w^2\frac{dy}{dw}; \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = w^4\frac{d^2y}{dw^2} + 2w^3\frac{dy}{dw}$$

$$\frac{d^2y}{dw^2} + \left(\frac{2}{w} - \frac{p_{10} + p_{11}w^{-1}}{1-w}\right)\frac{dy}{dw} + \frac{p_{00} + p_{01}w^{-1} + p_{02}w^{-2}}{(1-w)^2}y = 0.$$

Si solamente suponemos que hay singularidades de primer tipo en 0,1 e ∞, entonces se obtiene una expresión dependiente de 5 parámetros. Hay que imponer condiciones adicionales en los puntos singulares que nos permitan deducir la expresión de la ecuación hipergeométrica de Gauss.

3.1: Exponentes característicos de la ecuación hipergeométrica

Empezaremos definiendo lo que son los exponentes característicos de una ecuación diferencial lineal. Consideramos entonces la siguiente ecuación diferencial:

$$t^n y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)t^{n-1}y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)ty'(t) + a_0(t)y(t) = 0$$

donde $t = 0$ es una singularidad de primer tipo. (Es decir, a_j es holomorfa en 0 para todo j). Se considera el operador diferencial $\delta = t \cdot d$ definido en el lema 2.14. De acuerdo con ese mismo lema,

$$d^k = \frac{1}{t^k}\delta(\delta - 1)\cdots(\delta - (k-1)).$$

Esto garantiza que la ecuación puede reescribirse como:

$$\delta^n y + b_{n-1}(t)\delta_{n-1}y + ... + b_1(t)\delta y + b_0(t)y = 0.$$

En este apartado nos centraremos en ecuaciones de segundo orden fuchsianas con coeficientes fracciones polinómicas. Para el caso de ecuaciones de orden 2, se tiene que:

$$t^2 y''(t) + a_1(t)ty'(t) + a_0(t)y(t) = 0.$$

Esta ecuación puede reescribirse entonces como:

$$0 = t^2 d^2 y + a_1(t)tdy + a_0(t)y = \delta(\delta - 1)y + a_1(t)\delta y + a_0(t)y =$$

$$= \delta^2 y + (a_1(t) - 1)\delta y + a_0(t)y = \delta^2 y + b_1(t)\delta y + b_0(t)y = 0.$$

Como las funciones $b_1(t)$ y $b_0(t)$ son analíticas en 0, pueden expresarse como serie de potencias en un entorno adecuado del 0:

$$b_1(t) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{1j}t^j; \quad b_0(t) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{0j}t^j.$$

Y construimos las funciones G del modo siguiente:

$$G_0(\delta) = \delta^2 + b_{10}\delta + b_{00};$$

$$G_j(\delta) = b_{1j}\delta + b_{0j} \qquad \forall j \geq 1.$$

La ecuación diferencial puede entonces reescribirse como:

$$\sum_{j=0}^{\infty} t^j G_j(\delta)y = 0. \tag{3.3}$$

Supongamos entonces que la función y es de la forma

$$y = t^\alpha(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ...) = \sum_{k=0}^{\infty} t^{\alpha+k}c_k, \tag{3.4}$$

y por consiguiente, la ecuación diferencial puede reescribirse como:

$$0 = (\delta^2 + (a_1(t) - 1)\delta + a_0(t))y = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} t^j G_j(\delta)c_k t^{\alpha+k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} t^{\alpha+k+j} G_j(\alpha+k) c_k =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} t^{\alpha+j} \left(\sum_{k=0}^{j} G_{j-k}(\alpha+k) c_k \right) = 0.$$

En particular, α debe ser solución de la ecuación:

$$G_0(\alpha) = \alpha^2 + b_{10}\alpha + b_{00} = 0. \tag{3.5}$$

Se tienen entonces las siguientes definiciones:
Definiciones 3.1: Llamamos ecuación indicial de la singularidad 0 a la ecuación (3.5). A las raíces α de dicha ecuación las llamamos exponentes característicos de la ecuación en 0.
Si $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un punto singular de la ecuación diferencial de orden 2 (2.9), entonces llamamos ecuación indicial de la singularidad a a la ecuación indicial obtenida al tratar la ecuación transformada:

$$y''(t+a) + a_1(t+a)y'(t+a) + a_0(t+a)y(t+a) = 0.$$

en el punto $t = 0$. Análogamente, llamaremos exponentes característicos de la ecuación en a a las raíces de la ecuación indicial de a.
Si ∞ es un punto singular de la ecuación (2.9), entonces haciendo el cambio de variable $t = 1/w$, obtenemos la ecuación transformada siguiente:

$$\frac{d^2y}{dw^2} + \left(\frac{2}{w} - \frac{a_1(w^{-1})}{w^2} \right) \frac{dy}{dw} + \frac{a_0(w^{-1})}{w^4} y = 0.$$

Entonces diremos que la ecuación indicial en ∞ es la ecuación indicial en 0 de la ecuación transformada dada, y las raíces de esta ecuación se denominan los exponentes característicos de la ecuación en ∞.

En el caso particular en el que 0 presente una singularidad de primer tipo, los exponentes característicos de la ecuación en 0 son justamente las raíces de la ecuación:

$$\alpha^2 + b_{10}\alpha + b_{00} = \alpha^2 + (a_1(0) - 1)\alpha + a_0(0) = 0.$$

Si α_1 y α_2 son las raíces de la ecuación, entonces $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - a_1(0) = b_{10}$. El resultado es similar para otros puntos de $\mathbb{C}$ que sean singularidades de primer tipo, mientras que si ∞ es una singularidad de primer tipo, el resultado se tiene para la ecuación transformada.
(Ya hemos visto, según la proposición 2.21, que la una ecuación diferencial de segundo orden se transforma mediante el cambio de variable $t = 1/x$ en una expresión de la forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{2}{x} - \frac{a_1(x^{-1})}{x^2} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x^{-1})}{x^4} y = 0 \text{ .)}$$

Proposición 3.2 (Relación de Fuchs): *Si α_j, β_j son los exponentes característicos de la singularidad $t_j \in \mathbb{C}$ en una ecuación de segundo orden fuchsiana con ∞ un punto regular de la ecuación, entonces estos coeficientes satisfacen la propiedad:*

$$\sum_{j=1}^{m}(\alpha_j+\beta_j)=m-2,$$

donde m es el número de singularidades de la ecuación. Más en particular, en el caso $m=3$, que abarca, entre otras, a la ecuación hipergeométrica, se tiene que
$\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1$.
Demostración: Ya hemos visto, según la proposición 2.21 que para que ∞ sea un punto regular de la ecuación la ecuación transformada,

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{2}{x}-\frac{a_1(x^{-1})}{x^2}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{a_0(x^{-1})}{x^4}y=0\ ,$$

no debe presentar una singularidad en $x=0$. Sin embargo, debe presentar singularidades de primer tipo en los puntos $t=t_1$,..., $t=t_m$. Más concretamente, la ecuación debe ser de la forma:

$$y''(t)+Q_1(t)y'(t)+Q_0(t)y(t)=$$

$$=y''(t)+\frac{P_1(t)}{(t-t_1)\cdots(t-t_m)}y'(t)+\frac{P_0(t)}{(t-t_1)^2\cdots(t-t_m)^2}y(t)=0,$$

donde $P_0(t)$ tiene grado a lo sumo $m-4$ (y no presenta ceros dobles en las singularidades). Por otra parte, comprobamos como $Q_1(t)$ debe tener un cero de orden al menos 2 en ∞.
Si ahora hacemos la descomposición en fracciones simples, obtenemos:

$$\frac{P_1(t)}{(t-t_1)\cdots(t-t_m)}=\sum_{k=1}^{m}\frac{A_k}{t-t_k}$$

$$\frac{P_0(t)}{(t-t_1)^2\cdots(t-t_m)^2}=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{B_k}{(t-t_k)^2}+\frac{C_k}{t-t_k}\right). \tag{3.6}$$

Se tiene la relación

$$\sum_{k=1}^{m}C_k=0$$

ya que la segunda fracción polinómica tiene un cero de orden al menos 2 (de hecho, es un cero de orden al menos 4) en ∞.
Por otra parte, se tiene que:

$$p(t^{-1})=\sum_{k=1}^{m}\frac{A_kt}{1-tt_k}=t\sum_{k=1}^{m}A_k+O(t^2);$$

$$q(t^{-1})=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{B_kt^2}{(1-t_kt)^2}+\frac{C_kt}{1-t_kt}\right)=$$

$$= t^2 \sum_{k=1}^{m} (B_k + t_k C_k) + t^3 \sum_{k=1}^{m} (2B_k t_k + C_k t_k^2) + O(t^4).$$

Para que la primera fracción polinómica restando $2t$ tenga un cero de orden 2, y la segunda fracción un cero de orden 4 en $t^{-1} = 0$, debe verificarse entonces que:

$$\sum_{k=1}^{m} A_k = 2;$$

$$\sum_{k=1}^{m} (B_k + C_k t_k) = 0; \qquad \sum_{k=1}^{m} (2B_k t_k + C_k t_k^2) = 0. \tag{3.7}$$

De este modo, podemos expresar el polinomio indicial en la singularidad t_k de un modo más sencillo. De hecho, la ecuación indicial es de la forma:

$$\alpha(\alpha - 1) + A_k \alpha + B_k = 0.$$

Si denotamos por α_k y por β_k a las raíces de este polinomio, entonces se satisfacen las fórmulas de Cardano-Vieta:

$$A_k = 1 - \alpha_k - \beta_k, \qquad B_k = \alpha_k \cdot \beta_k \qquad \forall k \in \{1, .., m\}.$$

Luego:

$$\sum_{k=1}^{m} A_k = m - \sum_{k=1}^{m} (\alpha_k + \beta_k) = 2,$$

y por tanto:

$$\sum_{k=1}^{m} (\alpha_k + \beta_k) = m - 2,$$

lo que prueba la fórmula.

■

Veamos ahora lo que ocurre suponiendo que a, b, $c \in \mathbb{C}$ son los 3 puntos singulares de una ecuación diferencial fuchsiana de segundo orden (es decir, ∞ es un punto regular de la ecuación). Sean α, α' los exponentes característicos de a; β, β' los exponentes característicos de b; y γ, γ' los exponentes característicos de c. Entonces obtenemos:

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1. \tag{3.8}$$

Veamos ahora que ecuaciones satisfacen los coeficientes C_k ($k \in \{1, 2, 3\}$):

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

$$aC_1 + bC_2 + cC_3 = -B_1 - B_2 - B_3$$

$$a^2 C_1 + b^2 C_2 + c^2 C_3 = -2(t_1 B_1 + t_2 B_2 + t_3 B_3)$$

El determinante del sistema es el determinante de Vandermonde:

$$\Delta = (b-a)(c-a)(c-b) \neq 0.$$

Si expresamos la solución para las ecuaciones dadas, entonces obtenemos la siguiente ecuación, que es la ecuación hipergeométrica general:

$$y''(t) + \left(\frac{1-\alpha-\alpha'}{t-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{t-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{t-c}\right) y'(t) -$$

$$-\left(\frac{\alpha\alpha'}{(t-a)(b-c)} + \frac{\beta\beta'}{(t-b)(c-a)} + \frac{\gamma\gamma'}{(t-c)(a-b)}\right) \cdot \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(t-a)(t-b)(t-c)} y(t) = 0. \quad (3.9)$$

Donde los valores α, α', β, β', γ, γ' deben satisfacer la relación de Fuchs: $\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma' = 1$

Si suponemos que $\gamma = \infty$, obtenemos la siguiente variante de la ecuación:

$$y''(t) + \left(\frac{1-\alpha-\alpha'}{t-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{t-b}\right) y'(t) +$$

$$+\left(\frac{\alpha\alpha'}{t-a} - \frac{\beta\beta'}{t-b} + \frac{\gamma\gamma'}{a-b}\right) \cdot \frac{a-b}{(t-a)(t-b)} y(t) = 0. \quad (3.10)$$

Veamos que el número de parámetros puede ser reducido a 3 mediante transformaciones admisibles, y que para cualquier punto de la esfera de Riemann se puede construir una solución prolongable analíticamente evitando los puntos singulares.

Notación 3.3: El conjunto de todas las soluciones de la ecuación (3.9) dado lo denotamos mediante el **símbolo P de Riemann**:

$$P\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & t \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\}. \quad (3.11)$$

Es obvio que las tres primeras columnas pueden ser intercambiadas entre sí. Además, también se pueden intercambiar las dos filas en las que están los exponentes característicos.

Para representar una función v tal que $v = u \circ g$, donde u es una función de (3.11), lo representamos mediante la notación:

$$P\left\{\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & g(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{matrix}\right\}.$$

De forma análoga, con la siguiente notación significa que $g = hu$, donde u es una función de (3.11)

$$g \in h(t) P\left\{\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & t \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{matrix}\right\}.$$

En lo que sigue, sea (L_0) una ecuación diferencial lineal con t_0 una singularidad de primer tipo, con exponentes característicos α_1,..., α_m. Sea g analítica en t_0 con $g'(t_0) \neq 0$, o meromorfa con un polo simple. Entonces, cualquier solución u de (L_0) puede representarse localmente como $u = v \circ g$, con v que satisface una ecuación diferencial (L_1) que tiene en $g(t_0)$ una singularidad de primer tipo con los mismos exponentes característicos (en el caso de que g tenga un polo simple, el punto singular es ∞). Por otra parte, la aplicación g también transforma puntos regulares de la ecuación (L_0) en puntos regulares de la ecuación (L_1).
Si (L_0) es una ecuación fuchsiana, se puede probar que las únicas aplicaciones que transforman la ecuación (L_0) en otra ecuación fuchsiana son justamente las homografías de la esfera de Riemann. Aplicando las propiedades de estas funciones, tenemos:
Teorema 3.4: *Sean a, b, c tres puntos distintos de la esfera de Riemann, y sean α, β, γ, α', β', γ' 6 números complejos satisfaciendo la relación de Fuchs. Entonces para cualquier homografía x:*

$$P\left\{\begin{array}{cccc} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & t \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{array}\right\} = P\left\{\begin{array}{cccc} x(a) & x(b) & x(c) & \\ \alpha & \beta & \gamma & x(t) \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{array}\right\}.$$

Trasformaremos la variable dependiente. Si (L_0) es una ecuación diferencial lineal que en el punto singular t_0 tiene exponentes característicos α_1,..., α_m ; y sea h una función log-holomorfa en t_0 de la forma $h(t) = (t-t_0)^\beta h_0(t)$, con h_0 analítica en t_0, con $h_0(t_0) \neq 0$. Entonces se tiene que si u es una solución de (L_0), con $u = hv$, entonces v satisface una ecuación diferencial (L_2), donde t_0 es un punto singular con los exponentes $\alpha_1 - \beta$,..., $\alpha_m - \beta$. Si $t_0 = \infty$ y $h(t) = t^\beta h_0(t)$, con h_0 es analítico en ∞, $h_0(\infty) \neq 0$, entonces los exponentes característicos serán $\alpha_1 + \beta$,..., $\alpha_m + \beta$.
Sea (L_0) una ecuación fuchsiana. Veamos para qué funciones h la ecuación transformada sigue siendo fuchsiana, y con los mismos puntos singulares. Si los puntos singulares t_1,..., t_k son números complejos, entonces h será, a lo más, una singularidad de la forma $(t - t_j)^{\beta_j}$; con lo que la función multiplicadora h será de la forma:

$$h(t) = \prod_{j=1}^{k} (t - t_j)^{\beta_j} h_0(t),$$

donde h_0 es una función entera. Sin embargo, como h debe ser analítica en ∞, necesariamente h_0 debe ser constante. Además, como los exponentes característicos modificados deben satisfacer la relación de Fuchs, entonces la suma de los β_j debe ser 0.
La forma general de esta función h es:

$$h(t) = \prod_{j=1}^{k} (t - t_j)^{\beta_j}, \qquad \sum_{j=1}^{k} \beta_j = 0. \tag{3.12}$$

Si $t_k = \infty$, h se puede tomar como:

$$h(t) = \prod_{j=1}^{k-1} (t - t_j)^{\beta_j},$$

donde los exponentes β_j son arbitrarios.
Aplicándolo al caso de la ecuación hipergeométrica ($k = 3$), obtenemos el siguiente resultado:
Teorema 3.5: *Si a, b, c son puntos distintos dos a dos del plano complejo, entonces para exponentes arbitrarios satisfaciendo* (3.8)*, y para cualquier valor complejo de δ y ϵ, se tiene que:*

$$P\left\{\begin{array}{cccc} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & t \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{array}\right\} := \left(\frac{t-a}{t-b}\right)^{\delta}\left(\frac{t-b}{t-c}\right)^{\epsilon} P\left\{\begin{array}{cccc} a & b & c & \\ \alpha-\delta & \beta+\delta-\epsilon & \gamma+\epsilon & t \\ \alpha'-\delta & \beta'+\delta-\epsilon & \gamma'+\epsilon & \end{array}\right\};$$

$$P\left\{\begin{array}{cccc} a & \infty & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & t \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{array}\right\} = (t-a)^{\delta}(t-c)^{\epsilon} P\left\{\begin{array}{cccc} a & \infty & c & \\ \alpha-\delta & \beta+\delta+\epsilon & \gamma-\epsilon & t \\ \alpha'-\delta & \beta'+\delta+\epsilon & \gamma'-\epsilon & \end{array}\right\}.$$

Estos teoremas se utilizan para simplificar la expresión de la ecuación hipergeométrica. Como en una homografía (o transformación de Moebius) se pueden escoger arbitrariamente tres valores, podemos escoger una homografía x tal que $x(a) = 0$, $x(b) = \infty$, y que $x(c) = 1$.
Si $a, b, c \in \mathbb{C}$, la forma explícita de la función x es:

$$x(t) = \frac{(t-a)(c-b)}{(c-a)(t-b)}.$$

Se tiene entonces la identidad:

$$P\left\{\begin{array}{cccc} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & t \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{array}\right\} := P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & \infty & 1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & \frac{(t-a)(c-b)}{(c-a)(t-b)} \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{array}\right\}.$$

Siguiendo la notación de Riemann, definimos:

$$P\left\{\begin{array}{cccc} \alpha & \beta & \gamma & t \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{array}\right\} := P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & \infty & 1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & t \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{array}\right\}.$$

El conjunto de soluciones se puede reescribir como:

$$P\left\{\begin{array}{cccc} \alpha & \beta & \gamma & t \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{array}\right\} t^{\alpha}(1-t)^{\gamma} = P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & \alpha+\beta+\gamma & 0 & t \\ \alpha'-\alpha & \alpha+\beta'+\gamma & \gamma'-\gamma & \end{array}\right\},$$

que es un caso especial del teorema 3.5. Hemos probado entonces:
Teorema 3.6: *Si $a, b, c \in \mathbb{C}$, toda solución u de* (3.9) *puede representarse mediante la forma $u = hv \circ x$, donde x viene dado por $x(t) = \frac{(t-a)(c-b)}{(c-a)(t-b)}$, $h(t) := t^{\alpha}(1-t)^{\gamma}$, y además:*

$$v \in P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & \alpha+\beta+\gamma & 0 & t \\ \alpha'-\alpha & \alpha+\beta'+\gamma & \gamma'-\gamma & \end{array}\right\}.$$

Esto significa que todas las soluciones de la ecuación (3.9) pueden obtenerse mediante homografías que transformen las soluciones de la ecuación con puntos singulares en 0,1 e ∞, y con uno de los exponentes, tanto en 0 como en 1, igual a 0. Como los parámetros obtenidos deben satisfacer la relación de Fuchs, entonces se puede reducir a 3 el número de parámetros. Como

convenio, se toman los parámetros α y β como los dos exponentes en ∞, y el tercer parámetro γ como 1 menos el exponente no nulo en el punto 0.
Tras el cambio de variable correspondiente, el conjunto reducido P viene entonces dado por:

$$P\left\{\begin{matrix} 0 & \alpha & 0 & \\ 1-\gamma & \beta & \gamma-\alpha-\beta & t \end{matrix}\right\}.$$

Este conjunto es, por definición, el conjunto de las soluciones de la siguiente ecuación:

$$y''(t) + \left(\frac{\gamma}{t} + \frac{1-\gamma+\alpha+\beta}{t-1}\right) y'(t) + \frac{\alpha\beta}{t(t-1)} y(t) = 0. \tag{3.13}$$

Es decir, son soluciones de la ecuación hipergeométrica de Gauss:

$$t(1-t)y''(t) + (\gamma - (\alpha+\beta+1)t)y'(t) - \alpha\beta y(t) = 0. \tag{3.14}$$

3.2: Soluciones de la ecuación hipergeométrica

Resolución de la ecuación hipergeométrica:

En primer lugar, debe tenerse en cuenta el máximo dominio posible en el cual sea posible definir una solución de esta ecuación que sea continua.
En el caso de la ecuación hipergeométrica, es posible definir una solución en cualquier abierto del plano complejo que no contenga a ninguna de las 3 singularidades (por ejemplo, en el caso de que sean 0,1 e ∞, se puede tomar el abierto: $A = \overline{\mathbb{C}} \setminus (\infty \cup \{t \in \mathbb{R} : t \leq 1\})$), obteniéndose entonces un subconjunto abierto y conexo cuya adherencia es toda la esfera de Riemann

Soluciones formales en entornos de 0

Aunque en general no está garantizada la existencia de soluciones formales en serie de potencias o que estas tengan un radio de convergencia no nulo, podemos plantear el problema de buscar una serie de potencias formal, centrada en 0, que satisfaga la ecuación hipergeométrica. Se considera la ecuación hipergeométrica, con singularidades en 0,1 e ∞:

$$t(1-t)y''(t) + (\gamma - (\alpha+\beta+1)t)y'(t) - \alpha\beta y(t) = 0.$$

Y buscamos series de potencias de la forma:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k \tag{3.15}$$

que verifiquen la ecuación en el disco abierto $D(0,1)$.
Entonces, sustituyendo en la expresión de la ecuación diferencial obtenemos:

$$t(1-t)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)f_k t^{k-2} + (\gamma - (\alpha+\beta+1)t)\sum_{k=1}^{\infty} k f_k t^{k-1} - \alpha\beta \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k = 0,$$

es decir,

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)f_k t^{k-1} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)f_k t^k + \gamma \sum_{k=1}^{\infty} k f_k t^{k-1} - (\alpha+\beta+1)\sum_{k=1}^{\infty} k f_k t^k - \alpha\beta \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k = 0.$$

Reescribiendo los subíndices, obtenemos:

$$0=\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)kf_{k+1}t^k-\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)f_kt^k+\gamma\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)f_{k+1}t^k-(\alpha+\beta+1)\sum_{k=1}^{\infty}kf_kt^k-\alpha\beta\sum_{k=0}^{\infty}f_kt^k=$$

$$=-\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)f_kt^k+\sum_{k=1}^{\infty}((k+1)kf_{k+1}-(\alpha+\beta+1)kf_k)t^k+\sum_{k=0}^{\infty}(\gamma(k+1)f_{k+1}-\alpha\beta f_k)t^k=$$

$$=(\gamma f_1-\alpha\beta f_0)+(2\gamma f_2-\alpha\beta f_1+2f_2-(\alpha+\beta+1)f_1)t+$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}[-k(k-1)f_k+(k+1)kf_{k+1}-(\alpha+\beta+1)kf_k+\gamma(k+1)f_{k+1}-\alpha\beta f_k]t^k.$$

Igualando a 0 el término independiente, se obtiene que:

$$f_1=\frac{\alpha\beta}{\gamma}f_0.$$

De esta expresión se deduce que la ecuación hipergeométrica de Gauss necesita únicamente una única condición inicial (a pesar de ser de segundo orden) si se trata el problema en discos centrados en 0.Si igualamos a 0 el término de grado 1, se tiene que:

$$f_2=\frac{\alpha+\alpha\beta+\beta+1}{2(\gamma+1)}f_1=\frac{\alpha\beta(\alpha+\alpha\beta+\beta+1)}{2\gamma(\gamma+1)}f_0=\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}f_0.$$

Si igualamos a 0 los términos de grado superior a 2, obtenemos que:

$$-(k(k-1)+(\alpha k+\alpha\beta+\beta k+k))f_k+(k+1)(\gamma+k)f_{k+1}=0,$$

luego:

$$f_{k+1}=\frac{k(k-1)+(\alpha k+\alpha\beta+\beta k+k)}{(k+1)(\gamma+k)}f_k=\frac{(\alpha+k)(\beta+k)}{(k+1)(\gamma+k)}f_k. \tag{3.16}$$

Teniendo en cuenta que la serie de potencias es de la forma (3.15) y aplicando la recurrencia (3.16), se tiene que:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f_{k+1}t^{k+1}}{f_kt^k}=\lim_{k\to\infty}t\frac{(\alpha+k)(\beta+k)}{(k+1)(\gamma+k)}=t.$$

Aplicando el criterio del cociente, se deduce que el radio de convergencia de la serie de potencias es no nulo, más concretamente, es igual a 1. Esto significa que, aunque en 0 no se verifiquen las condiciones del teorema de existencia y unicidad, es posible tomar el disco abierto $D(0,1)$ en el cuál existe una única solución holomorfa de la ecuación hipergeométrica. Si aplicamos los teoremas de prolongación analítica y de monodromía, veremos como se puede extender la solución a cualquier abierto simplemente conexo del plano complejo (de la esfera de Riemann no, ya que ∞ es un punto singular) que no contenga al 1.

Entonces, se tiene el siguiente resultado, con el que se da la definición de **función hipergeométrica**

Teorema 3.7 y Definición 3.8: *La función compleja definida en* $D(0,1)$ *por:*

$$F(\alpha,\beta,\gamma;t)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\gamma+k)}t^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{k!(\gamma)_k}$$

es la solución de la ecuación hipergeométrica de Gauss que verifica $F(\alpha,\beta,\gamma;0)=1$. Esta función recibe el nombre de **función hipergeométrica** con parámetros α, β y γ. En el caso en el que no estén definidos los valores $\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(\beta)$, $\Gamma(\gamma)$, (por ser enteros negativos o 0) entonces entenderemos que $F(0)=1$.

Propiedades 3.9: *Si* α *o* β *son números enteros negativos, entonces* $F(\alpha,\beta,\gamma;t)$ *es un polinomio, y entonces, se puede extender a toda la esfera de Riemann.*

Demostración: Obviamente, por como se ha definido la función F, se tiene que $F(0)=f_0=1$. Supongamos sin pérdida de generalidad (pues el papel de α y β es simétrico) que $\alpha=-m$, con $m\in\mathbb{N}$, $m\geq 1$. La recurrencia (3.16) implica que:

$$f_{m+1}=\frac{(\alpha+m)(\beta+m)}{(m+1)(\gamma+m)}f_m=0,$$

y por tanto, $f_n=0$, $\forall n>m$. Es decir, la serie de potencias tiene un número finito de términos no nulos, con lo que necesariamente F es un polinomio.

■

Propiedades 3.10: *Si* γ *es un número entero negativo o nulo* ($\gamma=-m$, *con* $m\in\mathbb{N}$, *incluyendo el 0), entonces* $F(\alpha,\beta,\gamma;t)$ *es un serie de la forma:*

$$\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k k!}. \tag{3.17}$$

Demostración: Se tiene la recurrencia siguiente:

$$-(k(k-1)+(\alpha k+\alpha\beta+\beta k+k))f_k+(k+1)(\gamma+k)f_{k+1}=0$$

que afirma para $k=-\gamma=m$ que:

$$-(m(m-1)+(\alpha m+\alpha\beta+\beta m+m))f_m+(m+1)=0.$$

Por tanto, salvo que $m(m-1)+(\alpha m+\alpha\beta+\beta m+m)=0$, entonces se verifica que $f_m=0$, y aplicando esta relación de recurrencia (de forma inversa), entonces $f_k=0$, para todo $k\leq m$. Como el valor f_{m+1} queda sin determinar, entonces la función hipergeométrica es de la forma (3.17).

■

Análisis de las soluciones en 1

Falta por ver si es posible extender a 1 la solución de la ecuación hipergeométrica. No obstante, se tiene que:

$$\frac{f_{k+1}}{f_k}=\frac{(\alpha+k)(\beta+k)}{(k+1)(\gamma+k)}f_k.$$

Ya hemos visto que en el caso de que α o β sean enteros negativos, la solución es de tipo polinómico, lo que garantiza su posibilidad de ser extendida a todo el plano complejo. En los casos en los que no sean enteros negativos, se tiene el siguiente resultado:
Proposición 3.11: *La serie hipergeométrica converge en 1 si,* $Re(\gamma) > Re(\alpha) + Re(\beta)$.
Demostración: Para la demostración, aplicaremos el criterio de Raabe a $g_k = |f_k|$:
NOTA: El criterio de Raabe afirma que si $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de términos positivos y existe el límite $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \dfrac{g_{n+1}}{g_n}\right) = \lambda$, entonces la serie converge si $\lambda > 1$ y diverge si $\lambda < 1$.

$$\lim_{k\to\infty} k\left(1 - \frac{g_{k+1}}{g_k}\right) = \lim_{k\to\infty} k\left(1 - \frac{|\alpha+k||\beta+k|}{(k+1)|\gamma+k|}\right) = \lim_{k\to\infty} k\frac{(k+1)|\gamma+k| - |\alpha+k||\beta+k|}{(k+1)|\gamma+k|} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} k\frac{(k+1)\sqrt{|\gamma|^2+|k|^2+2\mathrm{Re}(\gamma\overline{k})} - \sqrt{|\alpha|^2+|k|^2+2\mathrm{Re}(\alpha\overline{k})}\sqrt{|\beta|^2+|k|^2+2\mathrm{Re}(\beta\overline{k})}}{(k+1)|\gamma+k|} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)\sqrt{|\gamma|^2+k^2+2k\mathrm{Re}(\gamma)} - \sqrt{|\alpha|^2+k^2+2k\mathrm{Re}(\alpha)}\sqrt{|\beta|^2+k^2+2k\mathrm{Re}(\beta)}}{\sqrt{|\gamma|^2+k^2+2k\mathrm{Re}(\gamma)}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2(|\gamma|^2+k^2+2k\mathrm{Re}(\gamma)) - (|\alpha|^2+k^2+2k\mathrm{Re}(\alpha))(|\beta|^2+k^2+2k\mathrm{Re}(\beta))}{\sqrt{|\gamma|^2+k^2+2k\mathrm{Re}(\gamma)}A(k)} = [*].$$

Donde:

$$A(k) = (k+1)\sqrt{|\gamma|^2+k^2+2k\mathrm{Re}(\gamma)} + \sqrt{|\alpha|^2+k^2+2k\mathrm{Re}(\alpha)}\sqrt{|\beta|^2+k^2+2k\mathrm{Re}(\beta)}\ .$$

Es decir, $A(k) \sim 2k^2$. O lo que es lo mismo, $\sqrt{|\gamma|^2+k^2+2k\mathrm{Re}(\gamma)}A(k) \sim 2k^3$.
Sustituyendo en el límite, tenemos:

$$[*] = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2(|\gamma|^2+k^2+2k\mathrm{Re}(\gamma)) - (|\alpha|^2+k^2+2k\mathrm{Re}(\alpha))(|\beta|^2+k^2+2k\mathrm{Re}(\beta))}{2k^3} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k^4+2k^3\mathrm{Re}(\gamma)+2k^3+4k^2\mathrm{Re}(\gamma)-k^4-2k^3\mathrm{Re}(\beta)-2k^3\mathrm{Re}(\alpha)-4k^2\mathrm{Re}(\alpha)\mathrm{Re}(\beta)}{2k^3} =$$

$$= 1 + \mathrm{Re}(\gamma) - \mathrm{Re}(\alpha) - \mathrm{Re}(\beta) = \lambda,$$

con lo que deducimos que la serie converge absolutamente si $\mathrm{Re}(\gamma) > \mathrm{Re}(\alpha) + \mathrm{Re}(\beta)$.

$\blacksquare$

Prolongación analítica de la función hipergeométrica
En el siguiente apartado, se citarán propiedades de la función hipergeométrica que permitirán extender su dominio de definición a un conjunto maximal de forma holomorfa. Aunque no demostraremos las siguientes propiedades de la función hipergeométrica, una prueba de las mismas se puede encontrar en siguiente libro:
Henrici, Peter. *Applied and computational complex analysis vol 2.* John Willey and sons (1977), Capítulo 9.
Proposición 3.12 (Primera identidad de Euler)

$$F(\alpha,\beta,\gamma,t) = (1-t)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma;t).$$

Proposición 3.13 (Segunda identidad de Euler)

$$F(\alpha,\beta,\gamma,t) = (1-t)^{-\alpha}F\left(\alpha,\gamma-\beta,\gamma;\frac{t}{t-1}\right).$$

Proposición 3.14

$$F(\alpha,\beta,\gamma,t) =$$

$$\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}F(\alpha,\beta,1+\alpha+\beta-\gamma;1-t)+$$

$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-t)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,1+\gamma-\alpha-\beta;1-t).$$

Aplicando las proposiciones previas, la función hipergeométrica se puede reescribir como:

$$F(\alpha,\beta,\gamma;t) =$$

$$=\frac{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\beta)}(-t)^{-\alpha}F(\alpha,1+\alpha-\gamma,1+\alpha-\beta;1/t)+$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha)}(-t)^{-\beta}F(\beta,1+\beta-\gamma,1+\beta-\alpha;1/t) =$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}F(\alpha,\beta,1+\alpha+\beta-\gamma;1-t)+$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-t)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,1+\gamma-\alpha-\beta;1-t) =$$

$$=(1-t)^{-\alpha}F\left(\alpha,\gamma-\beta,\gamma;\frac{t}{t-1}\right)$$

$$=\frac{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\beta)}(1-t)^{-\alpha}F\left(\alpha,\gamma-\beta,1+\alpha-\beta;\frac{1}{1-t}\right)+$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha)}(1-t)^{-\beta}F\left(\beta,\gamma-\alpha,1+\beta-\alpha;\frac{1}{1-t}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} t^{-\alpha} F\left(\alpha, 1-\gamma+\alpha, 1+\alpha+\beta-\gamma; 1-\frac{1}{t}\right) +$$
$$+ \frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{\alpha-\gamma}(1-t)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(\gamma-\alpha, 1-\alpha, 1+\gamma-\alpha-\beta; 1-\frac{1}{t}\right).$$

Observemos las transformaciones que experimenta el disco $D(0,1)$ por los cambios de variable arriba citados (más concretamente, son homografías):

$$\varphi_1(t) = 1-t \Longrightarrow \varphi_1(D(0,1)) = D(1,1);$$

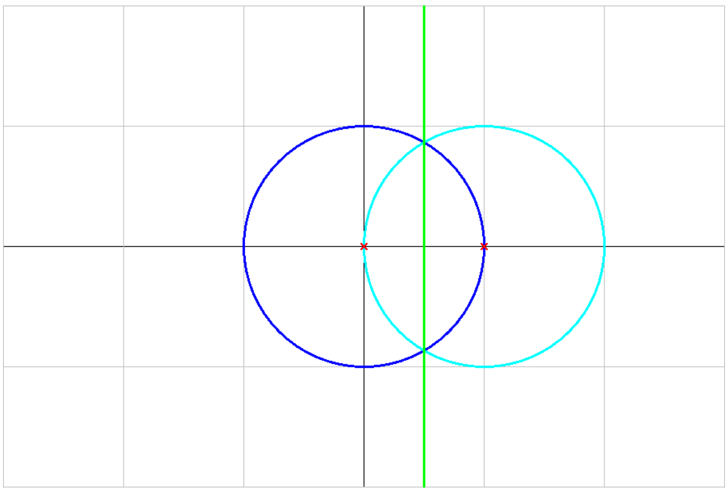
$$\varphi_2(t) = \frac{1}{t} \Longrightarrow \varphi_2(D(0,1)) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}(0,1);$$

$$\varphi_3(t) = \frac{t}{t-1} \Longrightarrow \varphi_3(D(0,1)) = \{\mathrm{Re}(t) < 1/2\};$$

$$\varphi_4(t) = \frac{1}{1-t} \Longrightarrow \varphi_4(D(0,1)) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}(1,1);$$

$$\varphi_5(t) = 1-\frac{1}{t} \Longrightarrow \varphi_5(D(0,1)) = \{\mathrm{Re}(t) > 1/2\}.$$

Mediante las transformaciones dadas por cambios de variable de la función hipergeométrica del disco $D(0,1)$ se cubre todo el plano complejo, excepto los puntos $x = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\overline{x} = \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. No obstante, estos puntos son puntos regulares para la ecuación hipergeométrica, con lo que se puede prolongar la función de forma holomorfa a estos puntos. Por otra parte, conviene recordar que aunque se pueda definir la función hipergeométrica de forma holomorfa en un disco que sea entorno de **una** de las singularidades, esto no significa que se pueda prolongar de forma holomorfa a toda la esfera de Riemann, pudiendo haber diferentes ramas de dicha función.



Mediante estos cambios de variable, se puede transformar el disco $D(0,1)$ para abarcar todo el plano complejo, excepto los puntos $x = 1/2 + i\sqrt{3}/2$ y $\overline{x} = 1/2 - i\sqrt{3}/2$.

3.3: Transformación por homografías

Mediante la siguiente homografía:

$$t = \frac{x-a}{x-c} \cdot \frac{b-c}{b-a}; \qquad x = \frac{c(b-a)t - a(b-c)}{(b-a)t-(b-c)}$$

se identifica $x = a$ con $t = 0$, $x = b$ con $t = 1$ y $x = c$ con $t = \infty$.
Veamos cuál es la expresión de las dos primeras derivadas de t respecto de x:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{(b-c)(a-c)}{(b-a)} \cdot \frac{1}{(x-c)^2};$$

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{-2(b-c)(a-c)}{(b-a)} \cdot \frac{1}{(x-c)^3}.$$

Empleando estas expresiones y aplicando la regla de la cadena, calculamos las derivadas de la función y:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{(b-c)(a-c)}{(b-a)} \cdot \frac{1}{(x-c)^2} \rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{(b-a)}{(b-c)(a-c)}(x-c)^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{{}^dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2t}{dx^2} =$$

$$= \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{(b-c)^2(a-c)^2}{(b-a)^2} \cdot \frac{1}{(x-c)^4} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{(b-a)(x-c)^2}{(b-c)(a-c)} \cdot \frac{-2(b-c)(a-c)}{(b-a)(x-c)^3} =$$

$$= \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{(b-c)^2(a-c)^2}{(b-a)^2} \cdot \frac{1}{(x-c)^4} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{2}{x-c}.$$

Luego:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{(b-a)^2(x-c)^4}{(b-c)^2(a-c)^2} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{2(b-a)^2(x-c)^3}{(b-c)^2(a-c)^2}.$$

Entonces, sustituyendo en la ecuación hipergeométrica de Gauss, obtenemos la ecuación transformada por dicha homografía:

$$0 = t(1-t)y''(t) + (\gamma - (\alpha+\beta+1)t)y'(t) - \alpha\beta y(t) =$$

$$= \frac{x-a}{x-c} \cdot \frac{b-c}{b-a}\left(1 - \frac{x-a}{x-c} \cdot \frac{b-c}{b-a}\right) \cdot \frac{(b-a)^2}{(b-c)^2(a-c)^2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}(x-c)^4 + 2\frac{dy}{dx}(x-c)^3\right) +$$

$$+\left(\gamma - (\alpha+\beta+1)\frac{x-a}{x-c} \cdot \frac{b-c}{b-a}\right) \cdot \frac{dy}{dx}\frac{(b-a)}{(b-c)(a-c)}(x-c)^2 - \alpha\beta y =$$

$$= \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{1}{(b-c)(a-c)^2}((b-a)(x-c) + (x-a)(b-c))\right)(x-c)^2(x-a)+$$

$$+\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{(b-c)(a-c)^2}((b-a)(x-c)+(b-c)(x-a))(x-c)(x-a)\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma(b-a)}{(b-c)(a-c)}-(\alpha+\beta+1)\frac{x-a}{(a-c)(x-c)}\right)-\alpha\beta y.$$

Por tanto, la expresión general de la ecuación hipergeométrica de Gauss, con parámetros α, β, γ y singularidades en a, b y c es de la forma:

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}\left(\frac{1}{(b-c)(a-c)^2}((b-a)(x-c)+(x-a)(b-c))\right)(x-c)^3(x-a)+$$
$$+\frac{dy(x)}{dx}\left(\frac{1}{(b-c)(a-c)^2}((b-a)(x-c)+(b-c)(x-a))(x-c)^2(x-a)\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma(b-a)}{(b-c)(a-c)}(x-c)-(\alpha+\beta+1)\frac{x-a}{(a-c)}\right)-\alpha\beta(x-c)y(x)=0.$$

Obviamente, el conjunto dado por

$$P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & \alpha & 0 & \frac{(x-a)(b-c)}{(x-c)(b-a)} \\ 1-\gamma & \beta & \gamma-\alpha-\beta & \end{array}\right\} = P\left\{\begin{array}{cccc} a & c & b & \\ 0 & \alpha & 0 & x \\ 1-\gamma & \beta & \gamma-\alpha-\beta & \end{array}\right\}.$$

es el conjunto de todas las soluciones de la ecuación hipergeométrica transformadas por la homografía dada.

Capítulo 4: Aplicaciones

En los apartados anteriores hemos descrito las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden superior a 1, centrándonos más concretamente en las ecuaciones de orden 2 con coeficientes polinómicos, y, en especial, en la ecuación hipergeométrica de Gauss. Sin embargo, estas ecuaciones han tenido una gran utilidad en ciertos ámbitos, como en la física.

Ecuación de Airy: Como ya vimos, esta ecuación es de la forma:

$$y''(t) + ty(t) = 0.$$

Cuyas soluciones son las funciones $Ai(t)$ y $Bi(t)$, definidas mediante las siguientes integrales paramétricas:

$$Ai(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos\left(\frac{x^3}{3} + tx\right) dx;$$

$$Bi(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x^3}{3} + tx\right) + \sin\left(\frac{x^3}{3} + tx\right) dx.$$

Esta ecuación presenta únicamente un punto singular en $t = \infty$. Sin embargo, aplicando la condición de Fuchs en ∞ deducimos que es una singularidad de segundo tipo, y por tanto, las soluciones de dicha ecuación presentan una singularidad esencial en ∞. Sin embargo, al ser todos los puntos del plano complejo puntos regulares de la ecuación, por el teorema de existencia y unicidad garantiza que las funciones $Ai(t)$ y $Bi(t)$ son enteras, es decir, se pueden expresar en forma de serie de potencias centrada en 0 para cualquier $t \in \mathbb{C}$.
Esta ecuación se caracteriza por tener aplicaciones en óptica y en física cuántica, más concretamente, la función de Airy es la solución de la ecuación de Schrödinger para una partícula confinada en un pozo gravitatorio triangular. La ecuación de Schrödinger es la siguiente:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r}, t) = \hat{H}\Psi(\mathbf{r}, t),$$

donde $h = 6,626 \cdot 10^{-34} J \cdot s$ es la constante de Planck (J es la energía en julios y s el tiempo en segundos) ; $\hbar$ es la misma constante dividida por 2π, $\mathbf{r}$ el vector de posición, ψ la función de onda del sistema a analizar y $\hat{H}$ es el operador Hamiltoniano, que en mecánica cuántica representa la energía total del sistema en un momento dado.
La ecuación de Airy también tiene aplicaciones en óptica, ya que sirve para estudiar las perturbaciones que ocasionan los fenómenos físicos de interferencias y de difracción en ondas luminosas. (Las interferencias resultan de sumar las funciones de onda de dos ondas luminosas, y la difracción, la propagación de una onda al alcanzar un obstáculo.

Ecuación de Kummer: Consideramos una ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$$t^2u''(t) + tp(t)u'(t) + q(t)u(t) = 0$$

donde las funciones p y q son enteras. Esta ecuación presenta una singularidad de primer tipo en 0, salvo que p presente un cero de orden al menos 1 y q presente un cero de orden al menos 2. La otra singlaridad está en ∞, esta singularidad es de segundo tipo, salvo que p y q sean constantes; en ese caso tendríamos la ecuación de Euler. El polinomio característico de la ecuación es:

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + p(0)\lambda + q(0) = 0.$$

Un caso particular es la ecuación diferencial de Kummer,

$$z^2u''(z) + (\gamma - z)u'(z) - \alpha u(z) = 0.$$

Esta ecuación sirve, por ejemplo, para explicar los fenómenos de física cuántica en el átomo de hidrógeno y en el estudio de la difracción de ondas electromagnéticas en una superficie parabólica.
Aunque la ecuación no es fuchsiana, tiene sentido hablar del polinomio indicial y de los exponentes característicos en 0. La ecuación indicial en 0 es:

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + \gamma\lambda = \lambda(\lambda - 1 + \gamma) = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación también se pueden escribir de forma similar a las de la ecuación hipergeométrica de Gauss; si consideramos una solución formal en 0,

$$U = z^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

entonces podemos suponer que $a_0 = 1$, ya que es un parámetro libre. Entonces, se tiene la siguiente relación de recurrencia:

$$\pi(\lambda + m)c_m = (\lambda + m - 1 + \alpha)c_{m-1}.$$

Entonces, si $\gamma \notin \mathbb{Z}$, se tiene la siguiente función como solución de la ecuación de Kummer, que denotamos por ${}_1F_1$, y otra solución, vinculada al otro exponente característico de la ecuación:

$$u_1(z) = {}_1F_1(\alpha; \gamma; z);$$

$$u_2(z) = z^{1-\gamma}\,{}_1F_1(1 - \gamma + \alpha; 2 - \gamma; z).$$

El análisis si $\gamma \in \mathbb{Z}$ es más complicado y se puede encontrar en el libro de Henrici, Peter *Applied and computational complex analysis vol 2.* John Willey and sons (1977).
Finalizaremos viendo una interesante propiedad de esta ecuación:
Si $u(z) := {}_1F_1(\gamma - \alpha; \gamma; z)$ es solución de la ecuación $zu''(z) + (\gamma - z)u'(z) - (\gamma - \alpha)u(z) = 0$, entonces se tiene que $v(z) = -u(z)$ satisface la ecuación $zv''(z) + (\gamma + z)v'(z) + (\gamma - \alpha)v(z) = 0$. Haciendo $w(z) = e^z v(z) = e^z u(-z)$, entonces w satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$zw'' + (-2z + \gamma + z)w'(z) + [z - (\gamma + z) + (\gamma - \alpha)]w(z) = 0.$$

De esta ecuación se deduce la primera identidad de Kummer:

$${}_1F_1(\alpha; \gamma; z) = e^z\,{}_1F_1(\gamma - \alpha; \gamma; -z).$$

Ecuación de Bessel: La ecuación de Bessel es una ecuación diferencial lineal de segundo orden de la forma siguiente: si $\nu \in \mathbb{C}$ se tiene la ecuación

$$u''(z) + \frac{1}{z}u'(z) + \left(1 - \frac{\nu}{z^2}\right)u(z) = 0.$$

NOTA: esta ecuación presenta 2 puntos singulares, 0 e ∞. Sin embargo, a diferencia del caso de la ecuación de Euler, el punto del infinito es una singularidad de segundo tipo.
Mediante el cambio de variable $u(z) = z^\nu e^{iz} w(z)$, la ecuación de Bessel puede ser reducida a la ecuación de Kummer. Con el cambio de variable se obtiene:

$$w''(z) + \left(\frac{2\nu + 1}{x} + 2i\right) w'(z) + \frac{(2\nu + 1)i}{z} w(z) = 0.$$

Si ahora hacemos el cambio de variable $v(t) = w(z)$, con $z = -t/2i$ entonces obtenemos la ecuación de Kummer con parámetros $\gamma = 2\nu + 1$ y $\alpha = \nu + 1/2$:

$$v''(t) + \left(\frac{2\nu + 1}{t} - 1\right) v'(t) - \frac{\nu + \frac{1}{2}}{t} v(t) = 0.$$

Si $2\nu+1$ no es un número entero, entonces se tienen dos soluciones linealmente independientes:

$$v_1(t) =_1 F_1(\nu + 1/2; 2\nu + 1; t);$$

$$v_2(t) = t_1^{-2\nu} F_1(-\nu + 1/2; -2\nu + 1; t).$$

Deshaciendo el cambio de variable y aplicando la primera identidad de Kummer:

$$u_1(z) = z^\nu e^{iz} {}_1F_1(\nu + 1/2; 2\nu + 1; -2iz) = z^\nu e^{-iz} {}_1F_1(\nu + 1/2; 2\nu + 1; 2iz);$$

$$u_2(z) = z^{-\nu} e^{iz} {}_1F_1(-\nu + 1/2; -2\nu + 1; -2iz) = z^{-\nu} e^{-iz} {}_1F_1(-\nu + 1/2; -2\nu + 1; 2iz).$$

No obstante, también se puede buscar una solución formal de esta ecuación mediante series de potencias, y entonces se obtienen las funciones de Bessel de primera y segunda especie:
Las funciones de Bessel de primera especie se denotan como J_ν y se definen como:

$$J_\nu(z) := \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{-z^2}{4})^k}{\Gamma(\nu + 1 + k)k!}.$$

Teniendo en cuenta que la serie de potencias converge en cualquier número complejo, dicha serie define una función entera en $\mathbb{C}$. Sin embargo, al multiplicar por el factor $(z/2)^\nu$ se pierde esta propiedad, al aparecer varias ramas de la función de Bessel (salvo que ν sea entero). En el caso de que $\nu \notin \mathbb{Z}$, entonces J_ν y $J_{-\nu}$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel, y por tanto, forman una base en el espacio de soluciones.
La situación es distinta para el caso de números enteros negativos o 0 es distinta, ya que $1/\Gamma(m) = 0$ si $m \in \mathbb{Z}$; $m \leq 0$. Para estos casos se tiene que:

$$J_m(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^k}{k!\Gamma(m-k+1)} = (-1)^{-m}\left(\frac{z}{2}\right)^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^k}{k!(m+k)!}.$$

Y por tanto, para todo $m \in \mathbb{Z}$ se tiene que $J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z)$.
Las funciones de Bessel son especialmente relevantes en física matemática, ya que sirven para resolver la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas.

Hay muchos más tipos de ecuaciones diferenciales lineales que se pueden estudiar con las técnicas empleadas para el estudio de ecuación hipergeométrica: ecuación de Lamé, ecuación de Mathieu... Sin embargo, ello queda enmarcado en una teoría más general: en el estudio de las funciones especiales.
Terminaremos viendo una breve idea sobre la implementación en programas informáticos de la función hipergeométrica.

4.1: Función hipergeométrica en programas informáticos

Algunos programas informáticos pueden trabajar con la función hipergeométrica, incluso con la función hipergeométrica generalizada; la función hipergeométrica generalizada es:

$$F(\alpha_1, ..., \alpha_m; \beta_1, ..., \beta_n; t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k \cdots (\alpha_m)_k}{k!(\beta_1)_k \cdots (\beta_n)_k} t^k.$$

Representación en Maple: Maple destaca por su amplia biblioteca donde aparecen un gran número de funciones especiales. Conviene recordar que la unidad imaginaria se denota por `I` (mayúscula). En Maple, la función hipergeométrica generalizada se representa mediante:

```
hypergeom([alpha1, alpha2, ...  ], [beta1, beta2, ...  ], t)
Hypergeom([alpha1, alpha2, ...  ], [beta1, beta2, ...  ], t)
```

La primera expresión sirve para evaluar directamente la función hipergeométrica en un determinado punto t, mientras que la segunda genera una expresión formal de dicha función. Para evaluar la segunda expresión en un determinado punto, se emplea el comando `evalf`. Un ejemplo es el siguiente:

```
> hypergeom([I, 2.3], [.25], .41);

                    -4.302749128 + 6.022490164 I

> Hypergeom([I, 2.3], [.25], .41);

                  Hypergeom([I, 2.3], [0.25], 0.41)

> evalf(Hypergeom([I, 2.3], [.25], .41), 20);

          -4.3027491283810717388 + 6.0224901638734997962 I
```

Bibliografía

[1] Hazewinkel, Michiel. *Airy functions.* Encyclopedia of Mathematics, Springer (2001).

[2] Henrici, Peter. *Applied and computational complex analysis vol 2.* John Willey and sons (1977).

[3] Ince, E.L. *Ordinary Differential Equations.* Dover publications (1956).

[4] Iwasaki, K; Kimura, H.; Shimomura, S.; Yoshida, M. *From Gauss to Painlevé: A modern theory of special functions.* Vieweg (1991).

[5] Poole, E.G.C. *Introduction to the theory of linear differential equations.* Oxford (1936).

[6] Sadri Hassani, *Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations.* Springer International Publishing (1999).

[7] Walter Rudin, *Real and Complex Analysis.* International Edition (1966).

[8] Wang, Z.X.; Guo, D.R. *Special functions.* Vieweg (1989).

[9] https://www.maplesoft.com/support/help/maple/view.aspx?path=hypergeom