Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en MATEMÁTICAS

Estudio de propiedades retrohereditarias en algunos problemas secuenciales de Optimización Estocástica

Autor: Adrián Esteban Pérez

Tutor/es: Jesús Sáez Aguado y Juan García Laguna

Índice general

Resumen (Abstract)

Resumen

De un modo muy general, puede decirse que el objetivo de la Optimización Estocástica es encontrar soluciones óptimas en problemas de optimización que involucran incertidumbre en los datos.

Un problema que con cierta frecuencia aparece en el mundo empresarial es el que se presenta al gestor de un sistema en el cual se deben tomar decisiones de un modo secuencial de forma que entre cada dos decisiones consecutivas tiene lugar un fenómeno aleatorio. Cada decisión que toma el gestor origina un coste que viene definido por la situación del sistema antes de tomar la decisión y la situación posterior. Adicionalmente, se origina otro coste que viene definido por la situación del sistema inmediatamente antes del fenómeno aleatorio y el resultado del mismo. Evidentemente, el objetivo del gestor es tomar aquellas decisiones que minimicen el coste total esperado.

En este trabajo se formula con detalle el problema anterior y se analizan propiedades retrohereditarias que nos facilitan la obtención de soluciones óptimas. Más concretamente, se han obtenido resultados novedosos, proporcionando teoremas bajo hipótesis más débiles que los existentes en la literatura. En particular, se pide que la función $G_n(y)$ sea semicontinua inferiormente y K-convexa con $0 \leqslant K \leqslant K_n - \alpha K_{n+1}$ en X, y esto representa una notable mejora con respecto al teorema existente en Denardo (1982, 2013), pues allí se exige que $G_n(y)$ sea continua y convexa en X, una condición más fuerte y exigente. Además, permitimos que la función de valor terminal sea semicontinua inferiormente, una mejora respecto a lo expuesto en Denardo (1982, 2013), pues allí se exige que sea continua.También se ha extendido el modelo a situaciones donde existe deterioro en el stock. Los resultados que presentamos en este trabajo mejoran notablemente los existentes en una buena parte de la literatura.

Para el cálculo explícito de las políticas (s, S) y para analizar las soluciones óptimas hemos desarrollado e implementado dos programas en AMPL. Con ellos se estudian diversos aspectos computacionales, como el análisis de la sensibilidad y la rentabilidad de los sistemas de inventario.

Abstract

In a very general way, we can say that the goal of Stochastic Optimization is to find optimal solutions in optimization problems that involve uncertainty in the data.

A problem that frequently appear in the business world is presented to the manager of a system in which decisions must be made in a sequential manner so that between every two consecutive decisions a random phenomenon occurs. Every decision the manager creates a cost that is defined by the status of the system before making the decision and the subsequent situation. In addition, another cost that is defined by the state of the system immediately before random phenomenon and the result of it originates. Obviously, the manager's objective is to take decisions that minimize the expected total cost.

This project is formulated in detail the above problem and retro-hereditary properties that facilitate us to obtain optimal solutions are analyzed. More specifically, new results have been obtained, providing theorems under weaker than those in the literature hypothesis. In particular, it requires that $G_n(y)$ is lower semicontinuous and K-convex with $0 \leqslant K \leqslant K_n - \alpha K_{n+1}$ in X, and this represents a significant improvement over the theorem existing in Denardo (1982, 2013), as there requires $G_n(y)$ is continuous and convex on X, a stronger and more demanding condition. Moreover, we allow terminal value function is lower semicontinuous, an improvement over the above in Denardo (1982, 2013), because there is required to be continuous. It has also extended the model to situations where there is deterioration in the stock. The results presented in this project significantly improve existing in much of the literature.

For the explicit calculation of (s, S) policies and analyze the optimal solutions we developed and implemented two programs in AMPL. With them are studied computational aspects, such as a sensitivity analysis and profitability of inventory systems.

Introducción

En los últimos años el tamaño y la complejidad de las empresas han aumentado considerablemente. Es por ello, que una *mala* decisión repercute muy gravemente en los objetivos empresariales. Por tanto, es necesario *tomar las mejores decisiones*. Casi la totalidad de las empresas actualmente hacen uso de la Investigación Operativa para hallar soluciones óptimas a problemas que se presentan en el mundo empresarial y, en general, éstos presentan un carácter aleatorio.

La globalización ha llevado a la deslocalización de las empresas de una manera universal. Es muy común que existan plantas en Europa o EE.UU con proveedores en China, Sudamérica ó África para minimizar costes. Con la crisis del petróleo de 1973 se observó que las empresas que (como Toyota) habían hecho un buen uso de la gestión de stocks, caracterizando bien los costes, sortearon de una manera mucho mejor la crisis. Si bien anteriormente tener un gran volumen de stock era sinónimo de *abundancia, riqueza o poder* empresarial, se vio que tener gran nivel de stock es sinónimo de ineficiencia y mala calidad del proceso de producción.

En la década de 1990, se empezó a incrementar muy rápidamente la competitividad de los mercados, caracterizada por productos con ciclos de vida útil muy cortos, o productos de tecnología con alto grado de obsolescencia, demanda incierta y necesidad de una respuesta rápida y eficaz al cliente. En pleno siglo XXI, el mercado textil proporciona un buen ejemplo de ello: multinacionales textiles como ZARA o H&M basan su éxito en usar técnicas de Optimización Estocástica para aumentar beneficios y minimizar costes, pues es predominante la llamada *fast fashion*, que se basa en introducir varias colecciones de ropa siguiendo las últimas tendencias del mundo de la moda, pero producidas de una forma muy rápida y barata. Esto conlleva manejar un gran volumen de stock y es por ello, que es necesario optimizar la gestión de los inventarios. Otro ejemplo también, se tiene en las empresas tecnológicas tales como Hewlett-Packard (HP), donde los productos presentan un alto nivel de obsolescencia. Otro ejemplo, se presenta en la industria farmacéutica, o en las aerolíneas o en cualquier cadena de suministro de una gran empresa. Por tanto, es necesario un adecuado y eficiente análisis de la gestión de los inventarios.

La Optimización Estocástica tiene el objetivo de encontrar soluciones óptimas en problemas de optimización que involucran incertidumbre en los datos. Teniendo en cuenta lo ambicioso de este objetivo, no es de extrañar que, al contrario de lo que sucede con otras partes de la Investigación Operativa, no exista un único modelo que englobe todos los posibles problemas de Optimización Estocástica.

En realidad cada problema determinístico de Investigación Operativa genera uno o varios problemas de Optimización Estocástica y, además, frecuentemente un mismo problema de Optimización Estocástica es formulado con distinta notación y/o hipótesis circunstanciales según los autores que lo traten.

Un problema que con cierta frecuencia aparece en el mundo empresarial es el que se presenta al gestor de un sistema en el cual se deben tomar decisiones de un modo secuencial de modo que entre cada dos decisiones consecutivas tiene lugar un fenómeno aleatorio. Cada decisión que toma el gestor origina un coste que viene definido por la situación del sistema antes de tomar la decisión y la situación posterior. Adicionalmente, se origina otro coste que viene definido por la situación del sistema inmediatamente antes del fenómeno aleatorio y el resultado del mismo. Evidentemente, el objetivo del gestor es tomar aquellas decisiones que minimicen el coste total esperado a lo largo del horizonte de planificación.

Para hallar la solución óptima en problemas de Optimización Estocástica, estudiaremos y hallaremos *propiedades retrohereditarias*, que son aquellas propiedades asociadas a las funciones de un periodo del horizonte de planificación y que se trasladan a las del periodo anterior, de modo que tales propiedades se repitan y faciliten la elaboración de algoritmos que permitan la obtención de la solución óptima.

El Capítulo 1 tiene el objetivo de presentar unas nociones básicas en Control de Inventarios que sirvan como conceptos básicos. Posteriormente se incluye una sección dedicada al problema del *Newsboy* de un solo periodo, ya que es la base para entender el caso multiperiodo. Al final del capítulo se incluyen unas pequeñas notas históricas del problema de este Trabajo Fin de Grado que sirven para contextualizarlo históricamente.

En Capítulo 2 está dedicado a los fundamentos matemáticos necesarios para este trabajo. Más concretamente, se estudian tres generalizaciones de la convexidad: *la* K*-convexidad, la cuasiconvexidad, y la* K*-cuasiconvexidad*. Además, se incluye una sección dedicada a los fundamentos y propiedades básicas de las *funciones semicontinuas*.

El Capítulo 3 es el cuerpo central del trabajo, y está dedicado a las *políticas* (s, S) y al desarrollo de un modelo de control de inventarios teniendo como hilo conductor de todo el trabajo el problema del *Newsboy*. Además, se establecen condiciones suficientes de optimalidad novedosas.

En el Capítulo 4 nos dedicamos a estudiar algunos casos particulares y variaciones sobre el modelo expuesto en el Capítulo anterior así como otras políticas de inventario.

Para estudiar los aspectos computacionales del trabajo, hemos desarrollado dos programas escritos en AMPL que se encuentran disponibles en el apéndice. Es por ello, que el Capítulo 5 se dedica a realizar un *análisis de la sensibilidad* y a estudiar la *rentabilidad del sistema*.

Al final, se incluyen las conclusiones y una relación con las referencias bibliográficas empleadas en este trabajo.

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a Jesús Sáez Aguado, que aceptó codirigir este trabajo, y en especial, a Juan García Laguna, por la infinita paciencia que ha tenido conmigo a lo largo de todo el año. Gracias a ellos he podido profundizar en Investigación Operativa, y a ambos les doy las gracias por compartir conmigo su visión personal de la misma. Estoy en deuda personal con ellos, pues me han dado valiosos consejos. No quiero olvidarme de Clara, Mario y Paula, que sin ellos este camino habría sido muy diferente. Finalmente, dar las gracias a mis padres y a mi hermana por confiar en mí.

CAPÍTULO 1

Optimización en sistemas estocásticos de Inventarios

1.1. Conceptos básicos

El concepto de **stock** (término que proviene del inglés británico) es equivalente al de **inventario** (proveniente de *inventory*, en inglés americano), y también al término castellano de **existencias**. Es por ello, que en adelante se usarán todos ellos como sinónimos.

Según Fernández Suárez *et al.* (1999), **stock** es "*todo conjunto de recursos **útiles** que se encuentran **ociosos** en algún momento dado y que están a la espera de una demanda para su uso. Decimos que son* útiles *porque son capaces de satisfacer una necesidad. Con* ociosos *entendemos que en el momento considerado no se están usando para satisfacer la necesidad que motivó su compra o elaboración.*"

El objetivo del Control de Inventarios es *minimizar los gastos y aumentar los beneficios ocasionados por el almacenamiento de existencias*.

1.1.1. Introducción

Un aspecto importante en la gestión de stocks es la *demanda*. Según las circunstancias puede ser:

- **Demanda determinística**: Es aquella que en cada periodo de tiempo considerado se conoce con exactitud. Si la demanda varía de un periodo a otro se dice que es *dinámica*, en caso contrario, se dice que es *estática*.
- **Demanda probabilística**: Es aquella que es desconocida en cada periodo de tiempo, pero es expresable a través de una distribución de probabilidad. Se dice que la demanda es *estática* si una misma distribución de probabilidad expresa la demanda en todos los periodos de tiempo considerados. En caso contrario, se dice que es *dinámica*.

- **Demanda desconocida**: Es aquella que es desconocida en cada periodo de tiempo y no se puede conocer la distribución de probabilidad.

Otro aspecto relevante es el **plazo de entrega** o **de reposición** (*lead time*, en inglés) que cuantifica el tiempo que transcurre desde el momento en el que se lanza un pedido hasta el momento en que se recibe. Además, dado que es una medida del tiempo de respuesta del sistema, también es importante determinar si el plazo de entrega se conoce con precisión o presenta un carácter aleatorio.

1.1.2. Clases de almacenes

Podemos distinguir dos clases de almacenes atendiendo al origen de la demanda. Si ésta proviene del mercado se dice que el almacén es de tipo comercial. En cambio, si la demanda proviene de la propia empresa se dice que el almacén es de tipo fabril o de manufactura.

- **Almacenes comerciales:** Son característicos de productos ya elaborados disponibles para su venta.
- **Almacenes fabriles o de manufactura:** Son característicos de productos semielaborados y materias primas en proceso de fabricación.

1.1.3. Métodos de revisión

Un aspecto de gran importancia en la gestión de stocks, es conocer de forma precisa la cantidad de artículos en el almacén. Para ello, es posible realizar el control de las existencias de dos modos que dan a lugar a dos métodos: el *método de revisión continua* y el *método de revisión periódica*.

- **Método de revisión continua:** En cada instante se dispone de la información exacta sobre el número real de artículos en el inventario. Cada vez que se lanza o recibe un pedido, se registra el movimiento (habitualmente haciendo uso de medios informáticos). Lo mismo se hace cuando se recibe una demanda pueda satisfacerse o no.
- **Método de revisión periódica:** Se realiza un recuento del stock cada cierto periodo de tiempo. No se dispone *continuamente* del nivel del inventario, pues o no es fácil o no es necesario (ya sea por las características del artículo o bien por el modo en el que se realizan los pedidos).

Nótese que en los sistemas con método de revisión continua se pueden realizar pedidos en cualquier instante, mientras que en los sistemas con método de revisión periódica, sólo es posible hacer pedidos al inicio de cada periodo.

1.1.4. Costes

Dado que el objetivo es minimizar los costes, es necesario conocer el tipo de costes que son relevantes. Podemos distinguir varios tipos de costes:

- **Costes de compra** (*purchasing cost, en inglés*): Son los costes asociados a la adquisición o compra de existencias. Se originan por tanto varias situaciones, teniendo en cuenta si el coste unitario de compra es independiente o no de la cantidad adquirida. Por tanto, también hay que determinar si existen descuentos que afectan a todo el pedido o lote de producto o es incremental con respecto al tamaño del lote.

- **Costes de pedir o de preparación** (*ordering cost o set-up cost*): Son los costes asociados al lanzamiento de un pedido o a la preparación que se necesita para realizar un lote de producción. Es frecuente suponer que este coste es una cantidad constante.

- **Costes de mantenimiento del inventario, posesión o almacenamiento** (*holding cost o carrying cost*): Son los costes vinculados a la propia existencia física de los stocks, es decir, son los costes inevitables para el mantenimiento *ocioso* de los productos hasta que se venden o hasta que pasan a formar parte del proceso de producción. Dentro de este tipo de costes podemos distinguir:

    - *Costes financieros*: Son los costes ocasionados por poseer *ocioso* un capital.
    - *Costes de control*: Son los costes asociados a la recepción, registro y posterior envío de la mercancía y los costes relativos a impuestos, seguros, deterioro y robo de la mercancía.
    - *Costes de almacenamiento físico*: Son los costes asociados al uso del espacio físico (bien sea alquilado o en propiedad) usado para el almacenemiento de la mercancía.

    Cuando, como sucedió hace unos años, las tasas de interés son elevadas, la mayoría de las empresas estiman que los costes de posesión varían entre el 20 % y el 40 % del coste de compra o adquisición.

- **Costes de escasez, ruptura o rotura** (*shortage cost*): Son los costes que se originan en el momento en el que un cliente pide un producto y no es posible satisfacer su demanda en ese momento. Si los clientes aceptan esperar un tiempo para recibir el artículo estamos ante el caso de *demanda acumulable*, pero si no están dispuestos a esperar y no aceptan entregas retrasadas o deciden ir a otro sistema a satisfacer su demanda, diremos que estamos en el caso de *pérdida de ventas*. En realidad, en la práctica existe una *mixtura* de demanda acumulable y pérdida de ventas.

1.2. El problema del *Newsboy*

Esta sección esta dedicada al estudio y revisión del problema del *Newsboy* de un solo periodo, ya que es el modelo base de los modelos estocásticos de inventario. Además, es fundamental para comprender el caso de modelos estocásticos de varios periodos (modelos *newsboy multiperiodo*), ya que son el objeto de estudio de capítulos posteriores.

El *paradigma* por excelencia de la Optimización Estocástica de Inventarios es el **problema del *Newsboy*** (también llamado *el problema del vendedor de periódicos (newspaperboy problem)*, o también conocido como *el problema del árbol de Navidad (Christmas tree problem)*). Aparece en el momento en el que un vendedor debe realizar un pedido antes del inicio de la temporada de ventas de un determinado producto y no puede volver a pedir en el caso de que necesite más artículos.

Según señala Pando (2014) en su tesis doctoral, "*el problema del* newsboy *es probablemente el modelo estocástico de inventario más estudiado y el que ha tenido un mayor número de extensiones durante los últimos 50 años. Este problema aparece en muchas situaciones de la vida real y con mucha frecuencia se utiliza como herramienta para la toma de decisiones en la fabricación y distribución de todo tipo productos comerciales. Es particularmente importante cuando se da un alto grado de incertidumbre en la demanda o cuando los costes derivados del exceso o la falta de stock son relevantes para la economía de las empresas.*"

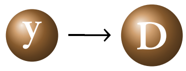
Tabla 1.1: Eje cronológico sobre el desarrollo del problema del *Newsboy*.

1888	EDGEWORTH, F. (1888). "The mathematical theory of banking". *Journal of the Royal Statistical Society*, 51, 113-127. Antecedente del modelo del *Newsboy*. Modelo con demanda de distribución de tipo Normal.
1928	FRY, T.C. (1928) *Probability and its engineering uses*. Van Nostrand Reinhold. Princeton, New Jersey. Aplicación, por primera vez, de la Teoría de la Probabilidad a la Gestión de stocks. Modelo con demanda de distribución de tipo Poisson.
1951	MORSE, P.M., KIMBEL, G.E. (1951). *Methods in Operations Research*. John Wiley and Sons: New York. Primer resumen publicado del problema del *Newsboy* de un solo periodo.
1951	ARROW, K.J., HARRIS, T., MARSCHAK, J. (1951). "Optimal inventory policy". *Econometrica*, Vol. 19, No. 3, 250-272. Primera solución e introducción de las políticas (s, S). El comienzo de *La Era Dorada de Stanford*.
1951-actualidad	Desarrollo y extensiones .

1.2.1. El problema del *Newsboy* con demanda acumulable

1.2.1.1. Modelo sin inventario previo ni coste de preparación

1. **Esquema:**



2. **Notación.**

Notación
c = coste unitario de compra (> 0).
v = precio unitario de venta ($v > c$).
h = coste unitario por sobrante, eventualmente negativo ($c > h > -c$).
p = coste unitario por faltante ($p > c$).
y = variable de decisión que expresa el nivel del pedido (> 0).

3. **El modelo.**

El gestor debe decidir hasta que cantidad y debe elevar el nivel de existencias; ésta operación supone un coste dado por cy. A continuación, se produce el fenómeno aleatorio; en este caso se produce la demanda dada por la variable aleatoria D. Suponiendo que D toma el valor d se originan:

- *gastos por compra* dados por cy.
- *ingresos por venta* dados por $v \min(y, d)$.
- *gastos por sobrantes* dados por $h(y-d)^+$, donde $x^+ = \max(x, 0)$.
- *gastos por faltantes* dados por $p(d-y)^+$.
- *ingresos por venta de la demanda acumulada* dados por $v(d-y)^+$.

Se considera que $v > c > 0$, $h > 0$, $p > 0$.

a) Costes asociados a una demanda concreta d.

$$\begin{aligned} g(y) &= cy - v \min(y,d) + h(y-d)^+ + p(d-y)^+ - v(d-y)^+ \\ &= cy - vd + h(y-d)^+ + p(d-y)^+. \end{aligned}$$

b) Tomando la esperanza matemática y suprimiendo el termino constante $vE[D]$ (*virtualmente* esto equivale a suponer que toda la demanda se sirve) se tiene

$$G(y) = E[g(y)] = cy + hE[(y-d)^+] + pE[(d-y)^+] = cy + L(y).$$

c) **Formulación del modelo.**

$$\begin{array}{ll} Minimizar & M(y) = cy + L(y) \\ s.a. & y > 0 \end{array}$$

d) **Solución** (Hillier (1991)).
En el caso continuo

$$F(y^*) = \frac{p-c}{p+h}$$

En el caso discreto

$$y^* = \text{mín}\left\{y \Big/ F(y) \geqslant \frac{p-c}{p+h}\right\}$$

1.2.1.2. Modelo con inventario previo y sin coste de preparación

1. **Esquema:**

$$x \longrightarrow y \longrightarrow D$$

2. **Notación.** La misma que en el apartado anterior añadiendo el nivel inicial del inventario $x \geq 0$.

3. **El modelo.**

   a) Costes asociados a una demanda concreta d.

$$\begin{aligned} g(y) &= c(y-x) - v\,\text{mín}(y,d) + h(y-d)^+ + p(d-y)^+ - v(d-y)^+ \\ &= c(y-x) - vd + h(y-d)^+ + p(d-y)^+. \end{aligned}$$

   b) Tomando la esperanza matemática y suprimiendo el termino constante $vE[D]$ se tiene

$$G(y) = E[g(y)] = c(y-x) + hE[(y-d)^+] + pE[(d-y)^+] = c(y-x) + L(y).$$

   c) **Formulación del modelo.**

$$\begin{array}{ll} Minimizar & M(y) = c(y-x) + L(y) \\ s.a. & y \geq x \geq 0 \end{array}$$

   d) **Solución** (Hillier (1991)).
   En el caso continuo

$$F(y^*) = \frac{p-c}{p+h}$$

   En el caso discreto

$$y^* = \text{mín}\left\{y \Big/ F(y) \geqslant \frac{p-c}{p+h}\right\}$$

   1) Si $x < y^*$, se pide $y^* - x$ para alcanzar el nivel y^*.
   2) Si $x \geq y^*$, no se pide.

   Por la anterior regla, a $S = y^*$ se denomina *nivel básico de referencia*.

1.2.1.3. Modelo con inventario previo y con coste de preparación

1. **Esquema:**

$$x \longrightarrow y \longrightarrow D$$

2. **Notación.** La misma que en el apartado anterior añadiendo el coste fijo de producción K, si $y > x$.

3. **El modelo.**

   a) Razonando como en los apartados anteriores se tiene:

$$M(y) = \begin{cases} K + c(y - x) + L(y) & \text{si} \quad y > x \\ L(y) & \text{si} \quad y = x \end{cases}$$

   b) **Formulación del modelo.**

$$\begin{array}{cc} Minimizar & M(y) \\ s.a. & y \geq x \geq 0 \end{array}$$

   c) **Solución** (Hillier (1991)).
   Sea S el valor de y que minimiza la función $cy + L(y)$, es decir, en el caso continuo

$$F(S) = \frac{p - c}{p + h},$$

   y en el caso discreto

$$S = \text{mín}\left\{ y \;\middle/\; F(y) \geqslant \frac{p - c}{p + h}. \right\}$$

   Además, sea $s = \text{mín}\left\{ y \geq 0 \;\middle/\; c(y) + L(y) \leq K + c(S) + L(S) \right\}$.
   Entonces:

   1) Si $x < s$, se pide $S - x$ para alcanzar el nivel S.
   2) Si $x \geq s$, no se pide.

   Por la anterior regla, al par (s, S) se denomina *niveles básicos de referencia*.

1.2.2. El problema del *Newsboy* con pérdida de ventas

1.2.2.1. Modelo sin inventario previo ni coste de preparación

1. **Esquema:**

$$y \longrightarrow D$$

2. **Notación.**

Notación
c = coste unitario de compra (> 0).
v = precio unitario de venta ($v > c$).
h = coste unitario por sobrante, eventualmente negativo ($c > h > -c$).
p = coste unitario por faltante o de pérdida de confianza *(goodwill cost)* ($p \geq 0$).
y = variable de decisión que expresa el nivel del pedido (> 0).

3. **El modelo.**

El gestor debe decidir hasta que cantidad y debe elevar el nivel de existencias; ésta operación supone un coste dado por cy. A continuación, se produce el fenómeno aleatorio; en este caso se produce la demanda dada por la variable aleatoria D. Suponiendo que D toma el valor d se originan:

- *gastos por compra* dados por cy.
- *ingresos por venta* dados por $v \min(y, d)$.
- *gastos por sobrantes* dados por $h(y-d)^+$, donde $x^+ = \max(x, 0)$.
- *gastos por faltantes* dados por $p(d-y)^+$.

Los sobrantes no son aprovechables para satisfacer la demanda. Si $h \geqslant 0$, este valor puede representar el coste unitario de deshacerse del artículo; si $h < 0$, entonces $-h$ puede representar el ingreso unitario por la venta del artículo. Vamos a suponer que $c > -h$; ya que lo que se ingresa por un artículo vendido como saldo debe ser inferior a lo que cuesta adquirir dicho artículo inicialmente (en caso contrario se compraría ∞). Los faltantes se consideran ventas perdidas. Se considera que $v > c > 0$, $p > 0$.

a) Costes asociados a una demanda concreta d.

$$\begin{aligned} g(y) &= cy - v \min(y, d) + h(y-d)^+ + p(d-y)^+ \\ &= cy - vd + h(y-d)^+ + (p+v)(d-y)^+. \end{aligned}$$

b) Tomando la esperanza matemática y suprimiendo el termino constante $vE[D]$ (*virtualmente* esto equivale a suponer que toda la demanda se sirve) se tiene

$$G(y) = E[g(y)] = cy + hE[(y-d)^+] + (p+v)E[(d-y)^+] = cy + L(y).$$

c) **Formulación del modelo.**

$$\begin{array}{ll} Minimizar & M(y) = cy + L(y) \\ s.a. & y > 0 \end{array}$$

d) **Solución** (Hillier (1991)).
En el caso continuo

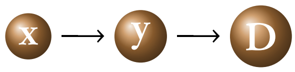
$$F(y^*) = \frac{p+v-c}{p+v+h}$$

En el caso discreto

$$y^* = \min\left\{ y \;\Big/\; F(y) \geqslant \frac{p+v-c}{p+v+h} \right\}$$

1.2.2.2. Modelo con inventario previo y sin coste de preparación

1. **Esquema:**



2. **Notación.** La misma que en el apartado anterior añadiendo el nivel inicial del inventario $x \geq 0$.

3. **El modelo.**

a) Costes asociados a una demanda concreta d.

$$\begin{aligned} g(y) &= c(y-x) - v\min(y,d) + h(y-d)^+ + p(d-y)^+ \\ &= c(y-x) - vd + h(y-d)^+ + (p+v)(d-y)^+. \end{aligned}$$

b) Tomando la esperanza matemática y suprimiendo el termino constante $vE[D]$ se tiene

$$G(y) = E[g(y)] = c(y-x)+hE[(y-d)^+]+(p+v)E[(d-y)^+] = c(y-x)+L(y).$$

c) **Formulación del modelo.**

$$\begin{array}{ll} Minimizar & M(y) = c(y-x) + L(y) \\ s.a. & y \geq x \geq 0 \end{array}$$

d) **Solución** (Hillier (1991)).
En el caso continuo

$$F(y^*) = \frac{p+v-c}{p+v+h}$$

En el caso discreto

$$y^* = \min\left\{ y \;\Big/\; F(y) \geqslant \frac{p+v-c}{p+v+h} \right\}.$$

1) Si $x < y^*$, se pide $y^* - x$ para alcanzar el nivel y^*.
2) Si $x \geq y^*$, no se pide.

Por la anterior regla, a $S = y^*$ se denomina *nivel básico de referencia*.

1.2.2.3. Modelo con inventario previo y con coste de preparación

1. **Esquema:**

$$x \longrightarrow y \longrightarrow D$$

2. **Notación.** La misma que en el apartado anterior añadiendo el coste fijo de producción K, si $y > x$.

3. **El modelo.**

   a) Razonando como en los apartados anteriores se tiene:

$$M(y) = \begin{cases} K + c(y - x) + L(y) & \text{si} \quad y > x \\ L(y) & \text{si} \quad y = x \end{cases}$$

   b) **Formulación del modelo.**

$$\begin{array}{cc} Minimizar & M(y) \\ s.a. & y \geq x \geq 0 \end{array}$$

   c) **Solución** (Hillier (1991)).

   Sea S el valor de y que minimiza la función $cy + L(y)$, es decir, en el caso continuo

$$F(S) = \frac{p + v - c}{p + v + h},$$

   y en el caso discreto

$$S = \text{mín}\left\{ y \;\middle/\; F(y) \geqslant \frac{p + v - c}{p + v + h}. \right\}$$

   Además, sea $s = \text{mín}\left\{ y \geq 0 \;\middle/\; c(y) + L(y) \leq K + c(S) + L(S) \right\}$.
   Entonces:

   1) Si $x < s$, se pide $S - x$ para alcanzar el nivel S.
   2) Si $x \geq s$, no se pide.

   Por la anterior regla, al par (s, S) se denomina *niveles básicos de referencia*.

► *Nota:* El factor $(p + v)$, que aparece tan frecuentemente, tiene una interptretación sencilla en relación con la frase antes incluida: *virtualmente* esto equivale a suponer que toda la demanda se sirve.

1.3. La *Era Dorada de Stanford*

El entorno geográfico donde se inició el desarrollo de los fundamentos matemáticos de la Optimización Estocástica de Inventarios fue California, a través del contacto entre la RAND Corporation, la Office of Naval Research y la Universidad de Stanford. El contacto de varios matemáticos en Stanford en la década de 1950 permite el inicio y desarrollo matemático riguroso de la Optimización Estocástica de Inventarios, durante la llamada *Era Dorada de Stanford*. El impulso y relevancia que adquirió la Investigación Operativa (fundamentalmente debido a la irrupción del *método símplex* alrededor de 1947 por George B. DANTZIG) y de nuevas técnicas matemáticas favorecieron el avance de la Teoría de Inventarios.

1.3.1. Inicios de la Optimización Estocástica de Inventarios: *El comienzo de la Era Dorada de Stanford*

Durante varios años, alrededor de 1950, K.J. ARROW[1] visitó la RAND Corporation, y la Office of Naval Research estaba organizando un grupo de investigación dedicado al Control de Inventarios, pues la Armada estadounidense tenía bastante interés en minimizar los costes asociados a la gestión de stocks.

Durante la *Era Dorada de Stanford*, el *leitmotiv* era el **problema del *Newsboy***, y dicho problema (en sus diversas variantes y extensiones), seguía patente pues las necesidades de optimización de gestión de stocks en el ámbito militar estadounidense aumentaban considerablemente.

En aquella época, K.J. ARROW junto con J. MARSCHAK desarrollaron dos modelos de inventario: uno dinámico pero determinístico y otro estocástico pero de un solo periodo. Los dos modelos no resolvían el problema planteado, pues se necesitaba un modelo para optimizar la gestión de existencias que tuviera en cuenta el horizonte de planificación y el carácter estocástico.

Hasta esa fecha, los modelos de inventario más básicos, no conseguían resolver el problema pero se dieron cuenta que la solución era la combinación del carácter dinámico del primer modelo junto con el carácter estocástico del segundo modelo. Así, se llegó al *modelo newsboy multiperiodo* y a las denominadas *políticas* (s, S).

[1]K.J. ARROW, economista, PREMIO NOBEL DE ECONOMÍA en 1972 y Presidente de Honor de la INTERNATIONAL SOCIETY FOR INVENTORY RESEARCH (ISIR). Fue galardonado con el premio JOHN VON NEUMANN THEORY PRIZE en 1986, el cual es otorgado por el *Institute for Operations Research and Management Science (INFORMS)*, el máximo galardón en el campo de Investigación Operativa (el primero en recibir dicho galardón fue George B. DANTZIG por sus trabajos en Programación Lineal) que premia contribuciones teóricas fundamentales en dicho campo.

Recordemos que en el contexto del estudio que estamos haciendo se entiende por **política** una *regla que nos permite obtener la solución de un problema de inventarios*.

Además,

Políticas (s, S).

*Una **política** (s, S), es una regla de decisión en el sentido siguiente:*

Si x es el nivel inicial del inventario, entonces

1. *Si $x < s$, se pide $S - x$ para alcanzar el nivel S.*
2. *Si $x \geq s$, **no** se pide.*

El carácter estocástico dificultaba el análisis del modelo, pero K.J. Arrow junto con J. Marschak, a través del contacto con T. Harris (que trabajaba en la RAND Corporation y había estado en la Universidad de Princeton con W. Feller), en el verano de 1950 durante la *Logistics Conference of the RAND Corporation* (Santa Monica), presentaron un artículo (Arrow *et al.* (1951)) dedicado a las políticas (s, S), pero no resolvieron el problema en su totalidad, pues no lograron demostrar la optimalidad de dichas políticas. También, seguía siendo una problema abierto si existían unas políticas mejores de un tipo diferente a las políticas (s, S); pero en 1952, A. Dvoretsky, J. Kiefer y J. Wolfowitz mostraron varios ejemplos donde una política óptima no es del tipo (s, S) (véase Dvoretzky *et al.* (1952)).

En aquella época y en plena Guerra Fría, H.E. Scarf[2] formaba parte de la RAND Corporation (anteriormente había estado trabajando en los Labotarios BELL donde conoció a C. Shannon, el padre de la Teoría de la Información), fue primero asignado al Departamento de Matemáticas, donde conoció a G. Dantzig, R. Bellman (el padre de la Programación Dinámica), R. Fulkerson y L. Ford, pero al año fue trasladado al Departamento de Logística.

El traslado de H.E. Scarf al Departamento de Logística fue *trascendental*, pues fue allí, donde conoció a S. Karlin y a K. J. Arrow y empezó a introducirse en el campo de la Teoría de Inventarios y además, fue invitado por ambos en 1956 al Departamento de Estadística de la Universidad de Stanford.

[2]H.E. Scarf (1930-2015), economista formado en la Universidad de Princeton galardonado con el premio Frederick W. Lanchester Prize en 1973, el cual es otorgado por el *Institute for Operations Research and Management Science (INFORMS)* y premia la mejor contribución en Investigación Operativa publicada en inglés en los últimos tres años. Diez años más tarde, fue galardonado con el premio John von Neumann Theory Prize. Era profesor emérito de la Universidad de Yale desde 2010. Falleció el 15 de Noviembre de 2015.

1.3.2. Optimalidad de las políticas (s, S). *De La solución de H.E. Scarf a la actualidad*

El problema de la optimalidad de las políticas (s, S) seguía sin resolverse, pero en 1960, H.E. Scarf resolvió por primera vez el problema introduciendo el concepto de función K-convexa. Años más tarde, A.F. Veinott Jr. en 1966 desarrolló otro método de optimalidad que era incompleto. En 1971 E. Porteus introdujo el concepto de K-cuasiconvexidad. Posteriormente, en 1976 M. Schäl encontró nuevas condiciones para la optimalidad de las políticas (s, S) que unificaban los resultados de H.E. Scarf y A.F. Veinott Jr. . Finalmente, E.V. Denardo a través de varios trabajos, y fundamentalmente en Denardo (1982, 2013) establece condiciones para la obtención de políticas (s, S) óptimas, desarrollando un modelo de Control de Inventarios y obteniendo resultados novedosos.

Sirva como colofón de este capítulo, un mensaje de K.J. Arrow como presidente de la International Society for Inventory Research (ISIR) a sus miembros (Arrow (1983)):

"*The process of inventory accumulation, holding, and decumulation is in itself a significant economic problem [...] it manifests elements of some of the deeper concern of all life: the presence of uncertainty, the need for flexibility in facing an uncertain future.*"

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

Es bien conocido que la noción de convexidad es importante en el ámbito de la Optimización pues presenta propiedades muy deseables para la búsqueda de la solución óptima. A lo largo de la historia se han hecho múltiples generalizaciones del concepto de función convexa. En la práctica, las funciones no suelen ser convexas y, es por ello que cabe preguntarse si dichas funciones aun no siendo convexas presentan *buenas propiedades* al optimizar. Si bien existen bastantes generalizaciones del concepto de convexidad, aquí incluiremos tres de ellas que son necesarias para el desarrollo del cuerpo central de este trabajo: *la K-convexidad, la cuasiconvexidad, y la K-cuasiconvexidad*. Además, incluimos una sección dedicada a los fundamentos básicos de las *funciones semicontinuas* y sus propiedades.

Sin embargo, debemos señalar que el objetivo de este capítulo no es el de hacer un estudio exhaustivo de las funciones antes citadas. Sería absurdo, ya que en la literatura matemática existen multitud de libros que lo hacen. Aquí nos limitaremos a dar una relación de resultados que son necesarios para el estudio central de este trabajo, o bien que ayudan a tener una mejor visión del mismo.

2.1. Funciones K-convexas

Esta sección esta dedicada al estudio de las funciones K-convexas, una herramienta analítica necesaria para un buen desarrollo de los capítulos posteriores. Al contrario que otras generalizaciones de la noción de convexidad que surgieron en ámbitos ajenos a la Teoría de Inventarios (tales como la *pseudoconvexidad o la cuasiconvexidad*), la K-convexidad fue introducida por Herbert E. SCARF en 1960 para tratar cuestiones de optimalidad en Control de Inventarios sobre las llamadas políticas (s, S).

La definición original de función K-convexa introducida por Scarf (1960) se estableció para funciones cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$ o un intervalo de $\mathbb{R}$. En Scarf (1960), Porteus (2002) o Snyder y Max (2011) se observa la dependencia del carácter *continuo* del dominio de las funciones K-convexas (que es toda la recta real o un intervalo de $\mathbb{R}$), y esto conlleva una notable simplicidad en el estudio de las mismas. Sin embargo, en Optimización son de uso frecuente funciones cuyo dominio no es todo $\mathbb{R}$ (como, por ejemplo, un subconjunto discreto de $\mathbb{R}$) lo que conlleva la necesidad de la extensión del concepto de función K-convexa a un conjunto que no sea necesariamente toda la recta real.

En Denardo (1982, 2013) se da una definición más general, para funciones cuyo dominio es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$. Esta es la definición que seguiremos en este trabajo, si bien la cambiaremos ligeramente para hacerla más intuitiva.

Además, en esta sección añadimos un resumen de propiedades con su demostración, pues en la literatura no siempre se encuentran tales demostraciones.

2.1.1. Funciones K-convexas sobre un subconjunto de $\mathbb{R}$ con al menos tres elementos

Definición 2.1

- *Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}$ con al menos tres elementos y $K \in \mathbb{R}$, con $K \geq 0$. Se dice que una función $L : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es $K-$convexa en X si para toda terna $a, b, c \in X$, con $a < b < c$, se tiene*

$$\frac{L(b) - L(a)}{b - a} \leqslant \frac{L(c) + K - L(b)}{c - b} \tag{2.1}$$

- *Si $K = 0$ diremos simplemente que L es convexa.*

Proposición 2.2

Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}$ con al menos tres elementos. Entonces, una función $L : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es K-convexa en X si, y sólo si para cada terna x, a, b, con $x \in X$ y $a, b > 0$ tales que $x - b, x + a \in X$ se tiene

$$L(x) + \frac{a}{b}\Big[L(x) - L(x-b)\Big] \leqslant K + L(x+a).$$

Demostración

Basta escribir la definición 2.1 de K-convexidad para $x - b < x < x + a$ (nótese que $x - b, x$ y $x + a$ juegan aquí el papel de a, b y c, respectivamente, en la definición 2.1).

■

2.1.2. Propiedades de las funciones K-convexas

Proposición 2.3

Sean X un subconjunto de $\mathbb{R}$ con al menos tres elementos y $L : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función.

(a) *Si L es K-convexa en X, entonces L es M-convexa en X para todo $M \geqslant K$.*

(b) *Si L es K-convexa en X, y $\beta > 0$, entonces βL es βK-convexa en X.*

(c) *Si L_1 es K-convexa en X y L_2 es M-convexa en X, entonces $L_1 + L_2$ es $(K + M)$-convexa en X.*

(d) *Sea $L_d : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función K-convexa en X para cada valor d de la v.a. D. Entonces $E_D\left[L_d(y)\right]$ es también una función K-convexa en X siempre que la esperanza sea finita.*

(e) *Si en X la función L es K-convexa, $a, b, c \in X$, con $a < b < c$, y $L(a) = K + L(c)$, entonces $L(b) \leqslant L(a)$.*

Demostración

(a) Es inmediata.

(b) Al ser L una función K-convexa se cumple (2.1) y, multiplicando ambos miembros por β se tiene

$$\left(\frac{\beta L(b) - \beta L(a)}{b - a}\right) \leqslant \left(\frac{\beta L(c) + (\beta K) - \beta L(b)}{c - b}\right).$$

Luego, βL es βK-convexa en X.

(c) Sean $a, b, c \in X$, con $a < b < c$. Al ser L_1 K-convexa, se verifica
$$\frac{L_1(b) - L_1(a)}{b-a} \leqslant \frac{L_1(c) + K - L_1(b)}{c-b}$$
Como L_2 es M-convexa, se tiene
$$\frac{L_2(b) - L_2(a)}{b-a} \leqslant \frac{L_2(c) + M - L_2(b)}{c-b}$$

Sumando miembro a miembro ambas expresiones se tiene

$$\frac{(L_1(b) + L_2(b)) - (L_1(a) + L_2(a))}{b-a} \leqslant \frac{(L_1(c) + L_2(c)) + (K+M) - (L_1(b) + L_2(b))}{c-b}$$

lo que muestra que la función $L_1 + L_2$ es $(K+M)$-convexa.

(d) Sean $a, b, c \in X$, con $a < b < c$ y sea d un valor concreto de la v.a. D. Se tiene

$$\frac{L_d(b) - L_d(a)}{b-a} \leqslant \frac{L_d(c) + K - L_d(b)}{c-b}$$

Tomando esperanzas a ambos lados de la desigualdad se tiene

$$\frac{E[L_d(b)] - E[L_d(a)]}{b-a} \leqslant \frac{E[L_d(c)] + K - E[L_d(b)]}{c-b}$$
Luego $E_D\,[L_d(y)]$ es K-convexa en X.

(e) Sean $a, b, c \in X$, con $a < b < c$. Al ser L K-convexa, se verifica que

$$\frac{L(b) - L(a)}{b-a} \leqslant \frac{L(c) + K - L(b)}{c-b}$$
Como por hipótesis, $L(a) = K + L(c)$, es claro que

$$\frac{L(b) - L(a)}{b-a} \leqslant \frac{L(a) - L(b)}{c-b},$$
de donde se deduce
$$\left[\frac{1}{b-a} + \frac{1}{c-b}\right] L(b) \leqslant \left[\frac{1}{b-a} + \frac{1}{c-b}\right] L(a).$$
Luego, $L(b) \leqslant L(a)$.

■

2.1.3. Funciones K-convexas sobre un intervalo de $\mathbb{R}$

Proposición 2.4

Sea X un intevalo de $\mathbb{R}$. Entonces, una función $L : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es $K-$convexa en X si, y sólo si para todo todo par $a, c \in X$, con $a < c$ y todo $\lambda \in (0, 1)$, se tiene

$$L\Big[\lambda a + (1-\lambda)c\Big] \leq \lambda L(a) + (1-\lambda)\Big[L(c) + K\Big]$$

Demostración

La equivalencia se obtiene escribiendo $b = \lambda a + (1-\lambda)c$, con $0 < \lambda < 1$, en la definición 2.1.

■

Proposición 2.5

Sean X un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y $L : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en X. Entonces, L es K-convexa en X si, y sólo si para todo par a, c, con $a, c \in X$ y $a < c$, se tiene

$$L(a) + L'(a)(c-a) \leqslant K + L(c).$$

Demostración

Si en (2.1), con $a < b < c$, hacemos $b \to a$ se tiene $L'(a) \leqslant \dfrac{L(c) + K - L(a)}{c - a}$, de donde $L(a) + L'(a)(c-a) \leqslant K + L(c)$.

■

Proposición 2.6

Si en $X = \mathbb{R}$ la función $L : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es K-convexa y D es una variable aleatoria no negativa, entonces la función $E\left[L\left((y-D)^+\right)\right]$ es K-convexa en X, siempre que las esperanzas sean finitas para todo $y \in X$.

DEMOSTRACIÓN

Sean $a, b, c \in X$, con $a < b < c$ y sea d un valor concreto de la v.a. D. Entonces $a-d, b-d, c-d \in X$, con $a-d < b-d < c-d$.

Si $b-d \leqslant 0$, se tiene $0 = (a-d)^+ = (b-d)^+ \leqslant (c-d)^+$y, por tanto

$$0 = \frac{L((b-d)^+) - L((a-d)^+)}{b-a} \leqslant \frac{L((c-d)^+) + K - L((b-d)^+)}{c-b}$$

Si $b-d > 0$, se tiene $(a-d)^+ < (b-d)^+ < (c-d)^+$y al ser L una función K-convexa

$$\frac{L((b-d)^+) - L((a-d)^+)}{b-a} \leqslant \frac{L((c-d)^+) + K - L((b-d)^+)}{c-b}$$

En ambos casos se tiene

$$\frac{L((b-d)^+) - L((a-d)^+)}{b-a} \leqslant \frac{L((c-d)^+) + K - L((b-d)^+)}{c-b}$$

Tomando esperanzas a ambos lados de la desigualdad se tiene

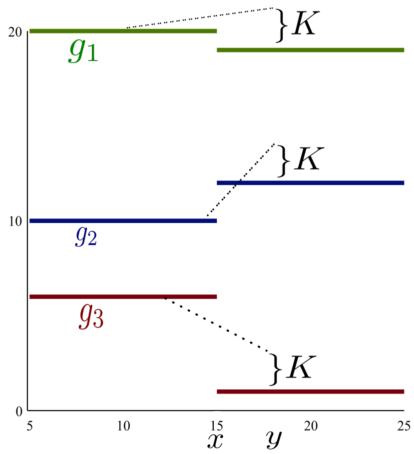
$$\frac{E\left[L((b-d)^+)\right] - E[L((a-d)^+)]}{b-a} \leqslant \frac{E[L((c-d)^+)] + K - E[L((b-d)^+)]}{c-b}$$

Luego $E\left[L\left((y-D)^+\right)\right]$ es K-convexa.

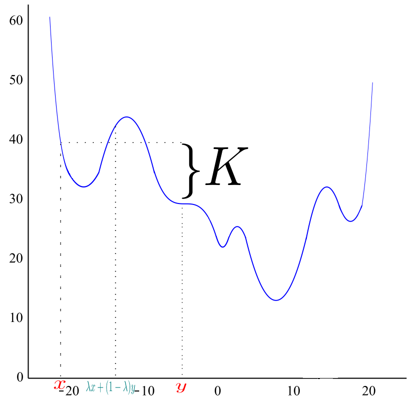
$\blacksquare$

2.1.4. Interpretaciones geométricas de la K-convexidad

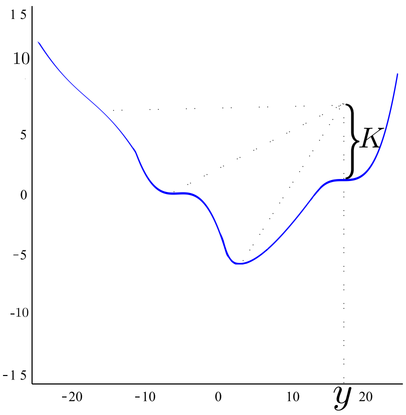
Podemos dar diversas *interpretaciones geométricas* al concepto de K-convexidad de una función (véase la figura 2.1).



(a) g_1 es K-convexa pero g_2 y g_3 no son K-convexas.



(b) Una función que no es K-convexa.



(c) Una función que sí es K-convexa.

Figura 2.1

- *Una función L es K-convexa si, y sólo si el punto $(x, L(x))$ es* visible *desde el punto $(y, L(y) + K)$, para todo $y > x$.*

- *No es necesario que una función K-convexa sea continua.*

- *Si una función decreciente es K-convexa con discontinuidades de salto finito, entonces los saltos deben ser de longitud menor o igual que K.*

- *Si una función es K-convexa , entonces no puede presentar saltos positivos en puntos de discontinuidad.*

► *Para funciones continuas, de acuerdo con la propiedad (e) de la proposición 2.3, si una función L es K-convexa entonces para cada número real y, L puede cruzar el valor $K + L(y)$ a lo sumo una vez en $(-\infty, y)$.*

2.2. Funciones Cuasiconvexas

En problemas secuenciales de Optimización Estocástica, es deseable que las funciones posean propiedades *estables* frente a operaciones de suma, producto o esperanza matemática por ejemplo. En esto es en lo que radica la principal diferencia con las funciones K-convexas. Veremos que, a pesar de ello, poseen propiedades muy interesantes en Optimización y que son útiles a lo largo de este trabajo.

2.2.1. Definición. Primeras propiedades.

En principio, aquí la noción de función cuasiconvexa se establece sobre funciones con dominio en un conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. Veremos que, en el caso de la recta real, se puede debilitar para obtener una caracterización equivalente muy útil que será la que usaremos a lo largo de este trabajo.

Definición 2.7

Sea X un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. Se dice que una función $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es cuasiconvexa en X si para cualesquiera $x, y \in X$ y todo θ, con $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, se tiene

$$g(\theta x + (1-\theta)y) \leqslant \max\{g(x), g(y)\}.$$

► *Nótese que, en general, la suma o la esperanza de funciones cuasiconvexas **no** es cuasiconvexa.*

► *Toda función convexa es cuasiconvexa.*

Teorema 2.8

Sea X un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. Entonces, una función $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es cuasiconvexa en X si, y sólo si el conjunto

$$L_\alpha(g) = \left\{c \in X \;\middle/\; g(c) \leqslant \alpha\right\}$$

es convexo cualquiera que sea $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.2.2. Cuasiconvexidad en una variable real.

Como mencionábamos anteriormente, la cuasiconvexidad en la recta real se traduce en la siguiente caracterización bastante útil, donde no hace falta que el conjunto donde una función es cuasiconvexa sea un conjunto convexo.

Proposición 2.9

Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}$ con al menos tres elementos. Entonces, una función $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es cuasiconvexa en X si no existe una terna $a, b, c \in X$ con $a < b < c$ tales que $g(a) < g(b) > g(c)$.

- ***Interpretación geométrica en una variable real:*** *Una función cuasiconvexa **no** puede crecer y luego decrecer.*

2.2.3. Propiedades. Aplicaciones a la Optimización.

Del mismo modo que las funciones convexas ocupan un papel predominante en la Optimización por poseer propiedades relativas a extremos, las funciones cuasiconvexas comparten en cierto modo dichas propiedades. Los teoremas siguientes resultarán naturales al lector por su analogía con los relativos a funciones convexas.

Teorema 2.10

Toda función cuasiconvexa en un conjunto convexo verifica que todo mínimo local estricto es un mínimo global estricto.

► *NOTA: el resultado anterior no es cierto si el mínimo local* ***no*** *es estricto.*

2.2.4. Composición de funciones cuasiconvexas.

A continuación enunciamos un teorema relativo a la composición de funciones cuasiconvexas.

Teorema 2.11

Sean X un subconjunto de $\mathbb{R}$ con al menos tres elementos, $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función cuasiconvexa en X y $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función creciente. Entonces, la función $\psi \circ g$ es cuasiconvexa en X.

2.3. Funciones K-cuasiconvexas

En esta sección presentamos los conceptos básicos relativos a la K-cuasiconvexidad, una generalización de la cuasiconvexidad. Las funciones K-cuasiconvexas fueron introducidas por E. L. PORTEUS en el año 1971 en el ámbito de la Teoría de Inventarios.

2.3.1. Definición. Propiedades

Definición 2.12

Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}$ con al menos tres elementos y $K \in \mathbb{R}$, con $K \geq 0$. Se dice que una función $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es K-cuasiconvexa en X si no existe una terna $a, b, c \in X$, con $a < b < c$, tal que

$$g(a) < g(b) > g(c) + K.$$

En el caso en que el subconjunto donde una función es K-cuasiconvexa sea un conjunto convexo, se puede obtener una caracterización bastante interesante. El teorema siguiente va enfocado en esta línea.

Teorema 2.13

Sea X un subconjunto convexo de $\mathbb{R}$. Entonces, una función $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es K-cuasiconvexa en X, con $K \geqslant 0$, si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \leqslant y$ y $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ se tiene que

$$g(\theta x + (1-\theta)y) \leqslant \max\{g(x), K + g(y)\}$$

► ***Interpretación geométrica en una variable real:*** *Un incremento en una función K-cuasiconvexa* ***no*** *puede ser seguido por un decrecimiento que exceda la cantidad $K \geqslant 0$.*

A continuación se resumen algunas propiedades básicas de las funciones K-cuasiconvexas.

Nótese que, en general, al igual que ocurre con las funciones cuasiconvexas, la suma o la esperanza de funciones K-cuasiconvexas **no** es K-cuasiconvexa.

Lema 2.14

Toda función K-convexa en X es K-cuasiconvexa en X.

Propiedades 2.15

1. *Una función es cuasiconvexa si, y sólo si es 0-cuasiconvexa.*
2. *Si g es K-cuasiconvexa y $\beta > 0$ entonces βg es (βK)-cuasiconvexa.*

2.4. Funciones Semicontinuas

A pesar de que el concepto de función semicontinua frecuentemente se define en el contexto de un espacio topológico arbitrario, aquí nos limitaremos al caso de $\mathbb{R}$.

2.4.1. Definición. Primeras propiedades

En este trabajo nos centraremos en las funciones semicontinuas inferiormente. Además, muchas propiedades tienen su correspondiente versión *dual* para el caso de funciones semicontinuas superiormente.

Definición 2.16

Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}$. Se dice que una función $L : X \to \mathbb{R}$ es semicontinua inferiormente en $a \in X$ si se cumple que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - a| < \delta \Longrightarrow L(x) > L(a) - \varepsilon.$$

- *Diremos que una función $L : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es semicontinua inferiormente en X, si lo es en todo punto de X. Equivalentemente, si para cada número real c, el conjunto $\left\{y \in X \;\middle/\; L(y) \leqslant c\right\}$ es cerrado.*

- *Diremos que una función h es semicontinua superiormente si $-h$ es semicontinua inferiormente.*

- *La función de* Heaviside *dada por*

$$H(z) = \begin{cases} 0 & si \quad z \leq 0 \\ 1 & si \quad z > 0 \end{cases}$$

  es semicontinua inferiormente.

- *Una función real es continua si, y sólo si es a la vez semicontinua inferiormente y semicontinua superiormente.*

A continuación vamos a ver algunas propiedades básicas, útiles a lo largo de este trabajo.

Propiedades 2.17

1. *La suma de funciones semicontinuas inferiormente es semicontinua inferiormente.*
2. *Si* $\left\{g_j\right\}_{j\in J}$ *es una familia de funciones semicontinuas inferiormente, entonces* $\sup_{j\in J} g_j$ *es semicontinua inferiormente.*
3. *Si* $\left\{g_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ *es una sucesión de funciones no negativas y semicontinuas inferiormente, entonces* $\sum_{j=1}^{\infty} g_j$ *es semicontinua inferiormente.*
4. *Si* f_1 *y* f_2 *son dos funciones semicontinuas inferiormente y* $f_1 + f_2$ *es continua, entonces* f_1 *y* f_2 *también son funciones continuas.*
5. *Si* g *es semicontinua inferiormente en* a *y* $\beta \geqslant 0$*, entonces* βg *es una función semicontinua inferiormente en* a*.*
6. *Si dos funciones* f *y* g *son semicontinuas inferiormente con* $f, g > 0$*, entonces su producto* $f g$ *es semicontinua inferiormente.*

2.4.2. Propiedades. Aplicaciones a la Optimización

El siguiente teorema aborda la semicontinuidad inferior de una función en un conjunto compacto, ya que proporciona propiedades muy interesantes al optimizar.

Teorema 2.18

Sea X *un subconjunto compacto de* $\mathbb{R}$ *y* $L : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función semicontinua inferiormente en* X*. Entonces* L *alcanza en* X *el valor* $\alpha = \inf_{x\in X} \{L(x)\}$ *.*

El corolario siguiente va encaminado en la idea de sustituir en el teorema anterior el carácter compacto del conjunto por el de ser cerrado.

Corolario 2.19

Sean X un subconjunto de $\mathbb{R}$ cerrado y no vacío y $L : X \to \mathbb{R}$ una función semicontinua inferiormente en X, tal que para toda sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ con $|x_k| \to \infty$ cuando $k \longrightarrow \infty$, se tiene

$$\lim_{k\to\infty} L(x_k) = +\infty.$$

Entonces L alcanza en X el valor $\alpha = \inf_{x\in X} L(x)$.

La siguiente proposición trata sobre la composición de funciones semicontinuas.

Proposición 2.20

Sean X e Y dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ y $\psi : X \longrightarrow Y$ una función continua. Entonces, si $L : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función semicontinua inferiormente, se tiene que la composición $h = L \circ \psi$ es semicontinua inferiormente.

CAPÍTULO 3

Políticas (s, S)

En este capítulo vamos a formular y analizar un modelo de Control de Inventarios sobre el cual estudiaremos la existencia de *propiedades retrohereditarias* y la obtención de condiciones suficientes que nos aseguren la optimalidad de políticas (s, S). Este capítulo se basa fundamentalmente en Denardo (1982, 2013). Además, proporcionamos varios ***teoremas y corolarios novedosos*** que mejoran los existentes en Denardo (1982, 2013), pues exigimos hipótesis más débiles sobre las funciones y formalizamos de una forma más precisa las condiciones de optimalidad de las políticas (s, S).

3.1. Control de Inventarios

3.1.1. Descripción. Modelización

El modelo que presentamos es el siguiente: Al inicio de cada periodo del horizonte de planificación, un gestor observa el nivel del stock y tiene que decidir hasta que cantidad se eleva el nivel del mismo.

Los costes que se incluyen en este modelo son el coste de pedir, generado por colocar un pedido y elevar el nivel del inventario; y el coste de mantener el inventario. Además, supondremos que *la entrega es instantánea*, es decir, desde el momento en el que se realiza un pedido al proveedor los artículos o productos pedidos se encuentran disponibles. También supondremos que los pagos de los clientes se realizan al final del periodo en el que se ha realizado el pedido. Además en este modelo inicial vamos a excluir la posibilidad de *deterioro del stock* .

A continuación usaremos la siguiente notación:

Notación	
x	*nivel del inventario al inicio de un periodo.*
y	*nivel que alcanza el inventario después de pedir $y - x$ unidades.*
N	*número de periodos del horizonte de planificación.*
K_n	*coste de pedir o de preparación en el periodo n.*
W_n	*precio unitario de compra en el periodo n.*
R_n	*precio unitario de venta en el periodo n.*
D_n	*v. a. que expresa la demanda en el periodo n (independientes).*
α	*coeficiente de actualización del valor del dinero, con $0 < \alpha \leqslant 1$.*
$A_n(y)$	*coste esperado de mantener el inventario durante el periodo n (carrying cost).*
$I_n(y, D_n)$	*nivel del inventario después de actuar la demanda sobre el nivel del inventario y.*
$e(x^+)$	*valor de rescate de tener x^+ unidades en el inventario al final del periodo N.*

Gastos e ingresos.

La cantidad de unidades vendidas durante el periodo n es igual a $y - I_n(y, D_n)$.

Para cuantificar el coste de pedir, nos valdremos de la función de *Heaviside* dada por

$$H(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad z \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad z > 0 \end{cases}$$

- **Coste de pedir**: gasto de compra para elevar el nivel del inventario desde x a y:
$$K_n H(y - x) + W_n(y - x).$$
- **Coste de mantener el inventario**: representaremos por $A_n(y)$ el coste esperado de mantener el inventario si al inicio del periodo n el nivel del mismo es y. El coste de mantener el inventario depende del valor actual de la v.a. D_n pero su esperanza con respecto a D_n no.
- **Ingresos por las unidades vendidas**: $R_n\Big[y - I_n(y, D_n)\Big]$.
  Como es una v.a. tomamos su esperanza matemática. Su valor se considera un ingreso al final del periodo y para evaluarlo al inicio del mismo se actualiza usando el parámetro α.

En consecuencia, tenemos que después de hacer el pedido el total de costes asociados al periodo n es

$$c_n(x, y) = K_n H(y - x) + W_n(y - x) + A_n(y) - \alpha R_n\Big[y - E\left[I_n(y, D_n)\right]\Big] \tag{3.1}$$

3.1.2. Ecuación funcional de recurrencia

Sea $f(n,x)$ el coste mínimo esperado para ir desde el estado (n,x) (es decir, desde el periodo n con inventario inicial x), hasta el final del horizonte de planificación. Entonces:

Para $n = 1,\ldots,N$, se tiene que

$$f(n,x) = \inf_{y|y\geqslant x} \left\{ c_n(x,y) + \alpha E\Big[f\left(n+1, I_n(y,D_n)\right) \Big] \right\} \tag{3.2}$$

donde

$$f(N+1,x) = K_{N+1}H(-x) + W_{N+1}(-x)^+ - e(x^+) \tag{3.3}$$

La justificación de la relación (3.2) es la siguiente. En el estado (n,x) se tiene que el total de costes asociados al periodo n, es $c_n(x,y)$. Sin embargo, para hallar $f(n,x)$ hay que añadir además el coste mínimo esperado para ir desde el estado $(n+1, I_n(y,D_n))$ hasta el final, actualizado a su vez con α.

La justificación de la relación (3.3) es la siguiente. Al final del horizonte de planificación, es decir al final del periodo N, podemos tener dos situaciones. Si se dispone de $x > 0$ unidades sobrantes, $f(N+1,x) = -e(x^+) = -e(x)$. En otro caso, si se dispone de $x \leqslant 0$ unidades se piden $-x \geqslant 0$ unidades lo que, admitiendo que $e(0) = 0$, nos lleva a que $f(N+1,x) = K_{N+1}H(-x) + W_{N+1}(-x)$.

Nótese el esquema secuencial que seguimos. Se parte con x unidades iniciales, se piden $y - x$ unidades para elevar el nivel del inventario a y, sucede el fenómeno aleatorio D_n y se reduce el inventario a $I_n(y,D_n)$. En consecuencia, en el periodo $n+1$ se parte de $I_n(y,D_n)$ unidades y a partir de este periodo se incurre en un coste esperado (actualizado con α) dado por $\alpha E[f(n+1, I_n(y,D_n))]$ (véase la figura 3.1).

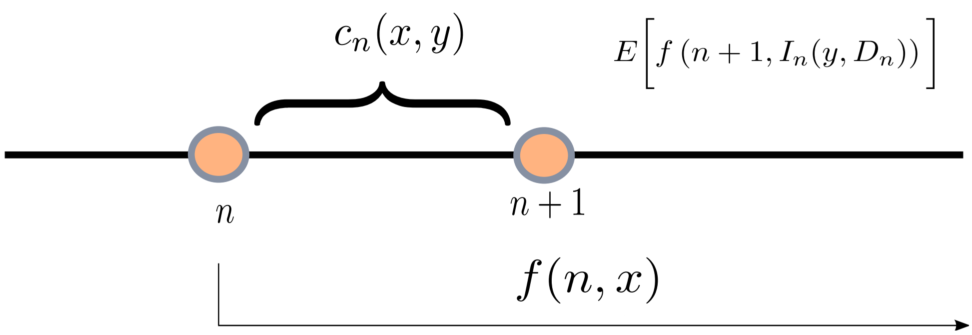


Figura 3.1

3.1.3. Reformulación de la ecuación funcional de recurrencia.

Las funciones implicadas en la ecuación funcional de recurrencia, para $n = 1, \ldots, N$,

$$f(n,x) = \inf_{y|y\geqslant x} \left\{ c_n(x,y) + \alpha E\Big[f\,(n+1, I_n(y,D_n)) \Big] \right\} \tag{3.4}$$

siendo

$$c_n(x,y) = K_n H(y-x) + W_n(y-x) + A_n(y) - \alpha R_n \Big[y - E\,[I_n(y,D_n)] \Big] \tag{3.5}$$

y

$$f(N+1,x) = K_{N+1}H(-x) + W_{N+1}(-x)^+ - e(x^+) \tag{3.6}$$

no tienen buenas propiedades retrohereditarias (es decir, propiedades de las funciones asociadas a un periodo que a través de las relaciones (3.4), (3.5) y (3.6) puedan trasladarse al periodo anterior), por lo que vamos a hacer un cambio funcional para conseguirlo.

Ahora la variable x está tanto en la función objetivo como en la restricción; se trata de quitarla parcialmente de la función objetivo.

Con el cambio

$$f(n,x) = F(n,x) - W_n x, \tag{3.7}$$

se tiene:

$$F(N+1,x) = K_{N+1}H(-x) + W_{N+1}x^+ - e(x^+) \tag{3.8}$$

y, para $n = 1, \ldots, N$,

$$F(n,x) = \inf_{y|y\geqslant x} \left\{ K_n H(y-x) + G_n(y) + \alpha E\Big[F\,(n+1, I_n(y,D_n)) \Big] \right\}, \tag{3.9}$$

siendo

$$G_n(y) = A_n(y) + (W_n - \alpha R_n)y + \alpha(R_n - W_{n+1})E[I_n(y,D_n)] \tag{3.10}$$

Resulta muy interesante interpretar las nuevas ecuaciones de recurrencia obtenidas por medio del cambio funcional (3.7). Ahora, y desde un punto de vista *virtual*, es como si cada periodo se iniciara y se terminara con 0 unidades en el stock, pero estuviéramos obligados a comprar al menos x unidades. Si compro exactamente x unidades no hay coste de pedir, pero si compro más de x unidades hay un coste de pedir de valor K. Es decir, $F(n, x)$ = coste óptimo de empezar con 0 unidades y llegar hasta el final de forma óptima, suponiendo que se incluye la compra de al menos x unidades.

También podemos dar una justificación directa de la nueva ecuación de recurrencia. En efecto:

- Coste de comprar (incluyendo inventario inicial eventualmente negativo) hasta tener un nivel $y \geqslant x$ (también eventualmente negativo): $K_n H(y - x) + W_n y$.
- Coste de mantenimiento en el inventario (*carrying cost*): $A_n(y)$.
- Venta propia quedando con un nivel de inventario $I_n(y, D_n)$: $-\alpha R_n \Big[y - E\,[I_n(y, D_n)]\Big]$.
- Venta impropia o virtual de inventario residual $I_n(y, D_n) : -\alpha W_{n+1} E[I_n(y, D_n)]$.
- Suma: $K_n H(y - x) + A_n(y) + (W_n - \alpha R_n)y + \alpha(R_n - W_{n+1})E[I_n(y, D_n)]$.

3.1.4. Nueva notación y primeras propiedades

Con el fin de facilitar la exposición de los resultados que siguen, damos a continuación una nueva notación que además sirve para focalizar mejor el problema.

Para $n = 1, \ldots, N$, sea

$$F(n, x) = \inf_{y|y\geqslant x} \{K_n H(y - x) + L_n(y)\} \tag{3.11}$$

donde

$$L_n(y) = G_n(y) + \alpha E\Big[F(n + 1, I_n(y, D_n))\Big] \tag{3.12}$$

y, como antes,

$$G_n(y) = A_n(y) + (W_n - \alpha R_n)y + \alpha(R_n - W_{n+1})E[I_n(y, D_n)] \tag{3.13}$$

Además,

$$F(N + 1, x) = K_{N+1} H(-x) + W_{N+1} x^+ - e(x^+) \tag{3.14}$$

3.2. Políticas (s, S). Condiciones suficientes de optimalidad

3.2.1. Políticas (s, S)

A continuación vamos a estudiar la posibilidad de encontrar *condiciones suficientes* para resolver el problema planteado; es decir condiciones que nos aseguren la existencia de una solución óptima. Para ello, necesitamos anteponer algunos lemas cuyas demostraciones pueden consultarse en Denardo (1982, 2013) pero que en algunos casos aquí exponemos y demostramos con mayor detalle. Nos serán de gran utilidad en el desarrollo de la obtención de las *políticas* (s, S). Éstas son de gran importancia en la Teoría de Inventarios. Según señala Caplin y Leahy (2010), "*To this day, the* (s, S) *model holds place of honor at the center of inventory theory and ordering policy, having most recently been incorporated into the business software with which production and storage processes are run worldwide*".

Lema 3.1

Sean X un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ con al menos tres elementos y $L : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función semicontinua inferiormente y K-cuasiconvexa en X, con $K \geqslant 0$. Supongamos además, que existe un elemento $S \in X$ tal que

$$L(S) = \inf\left\{L(x) \;\middle/\; x \in X\right\}. \tag{3.15}$$

Entonces:

A. *Para $x \in X$ la función $F(x) = \inf\limits_{y \in X | y \geqslant x} \{KH(y-x) + L(y)\}$ está bien definida.*

B. *Existe $s = \inf\left\{y \in X \;\middle/\; L(y) \leqslant K + L(S)\right\}$ y $s \leqslant S$ (eventualmente $s = -\infty$).*

C. *Si $s > -\infty$, se tiene* $F(x) = \begin{cases} K + L(S) & si \quad x < s \\ L(x) & si \quad x \geqslant s \end{cases}$

D. *Si $s = -\infty$, resulta $F(x) = L(x)$.*

<u>DEMOSTRACIÓN</u>

► <u>*Comentarios previos*</u>

(i) *$F(x)$ está bien definida ya que $x \in \{y \in X \;/\; y \geqslant x\}$ y, por tanto,*

$\{KH(y-x)+L(y)\}$ es no vacío. Además, $F(x) \geqslant L(S)$.

(ii) $F(x) \leqslant L(x)$.

(iii) *s está bien definido ya que $S \in \{y \in X \ / \ L(y) \leqslant K + L(S)\}$ y por tanto éste último conjunto es no vacío. Además $s \leqslant S$.*

Dependiendo de la posición relativa de x respecto a s y S tenemos los siguientes casos:

- <u>Caso 1</u>. Si $x > S$, veamos que $F(x) = L(x)$.

  De (ii) se sigue que $F(x) \leqslant L(x)$. Veamos que no es posible que $F(x) < L(x)$. Si esto ocurre, entonces existe $c \in X$, con $c \geqslant x$, $c \neq x$ tal que $K + L(c) < L(x)$. Pero $L(S) \leqslant L(c) \Longrightarrow K + L(S) \leqslant K + L(c) < L(x)$, luego $L(S) < L(x)$, tenemos $S < x < c$ con $L(S) < L(x) > K + L(c)$ lo cual es imposible por ser L una función K-cuasiconvexa.

- <u>Caso 2</u>. Si $x = S$ veamos que $F(S) = L(S)$.

  Ya que $L(S) \leqslant K + L(S) \leqslant K + L(y)$, para todo $y \in X$, de la definición de $F(S)$ se sigue $F(S) = L(S)$.

- <u>Caso 3</u>. Si $-\infty < s < x < S$ veamos que $F(x) = L(x)$.

  De la definición de s se sigue que existe $a \in X$ con $s \leqslant a < x$ tal que $L(a) \leqslant K + L(S)$. Si $L(x) > K + L(S)$ entonces $L(x) > K + L(S) \geqslant L(a)$ luego $a < x < S$ y $L(a) < L(x) > K + L(S)$ en contra de ser L una función K-cuasiconvexa. Por tanto, $L(x) \leqslant K + L(S) \leqslant K + L(y)$ para todo $y \in X$ y, en particular para todo $y \geqslant x$ de donde $F(x) = L(x)$.

- <u>Caso 3 (bis)</u>. Si $s = -\infty < x < S$ veamos que $F(x) = L(x)$.

  Vale lo del caso anterior sustituyendo el final de la primera línea $s \leqslant a < x$ por $s < a < x$. El resto es idéntico.

► Nota: *Si $s = -\infty$, con los casos anteriores, ya está terminada la demostración.*

Si $s > -\infty$ nos quedan dos casos por demostrar.

- <u>Caso 4</u>. Si $-\infty < x < s$, veamos que $L(x) = K + L(S)$.

  De la definición de s se sigue que $L(x) > K + L(S)$. Pero, para todo $y \in X$, $K + L(y) \geqslant K + L(S)$. Juntando estas dos relaciones y teniendo en cuenta la definición de $F(x)$, se sigue que $F(x) = K + L(S)$.

► *Nota: Hasta aquí no se ha usado que $L(x)$ es una función semicontinua inferiormente. Lo haremos en el siguiente y último caso.*

- Caso 5. Si $-\infty < x = s$, veamos que $F(s) = L(s)$.

  Como X es cerrado, de la definición de s se sigue que necesariamente $s \in X$. Veamos que $L(s) > K + L(S)$ no es posible. En efecto, en tal caso, como L es semicontinua inferiormente, eligiendo $\varepsilon = \dfrac{(L(s) - K - L(S))}{2}$, existe un entorno $\mathcal{V}$ de s tal que $L(\mathcal{V}) > K + L(s) - \varepsilon$ lo que va en contra de la definición de $s = \inf\left\{y \in X \;\middle/\; L(y) \leqslant K + L(S)\right\}$. Por tanto, $L(s) \leqslant K + L(S) \leqslant K + L(y)\ \forall y \in X,\ y \geqslant s$ lo que implica que $F(s) = L(s)$.

■

► *Nota:* Si la función $L(y)$ no es K-cuasiconvexa, aunque sea continua, falla el Lema 3.1 (véase el ejemplo siguiente y la figura 3.2).

- Ejemplo:

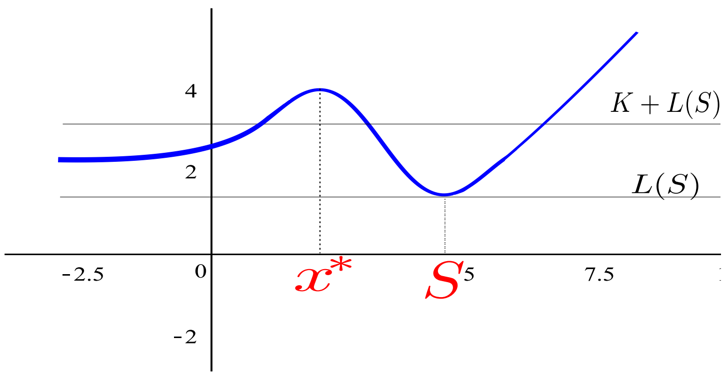


Figura 3.2: Nótese que $s = -\infty$ y $s < x^*$, luego debería ser $F(x^*) = L(x^*)$ pero $L(x^*) > K + L(S)$ lo que contradice la definición de $F(x^*) = \inf\limits_{y \in X \,|\, y \geqslant x^*} \{KH(y - x^*) + L(y)\}$. En este caso $F(x^*) = K + L(S)$.

Lema 3.2

Sean X un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ con al menos tres elementos, $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y no decreciente en X, $Y \supseteq \left\{\varphi(x) \,\middle/\, x \in X\right\}$ y $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ una función K-convexa tal que para cada par $a, c \in Y$, con $a < c$, se tiene

$$g(a) \leqslant g(c) + K. \tag{3.16}$$

Entonces, $g\left[\varphi(x)\right]$ es K-convexa en X.

Lema 3.3

Sean X un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ con al menos tres elementos, $L : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función semicontinua inferiormente y K-convexa en X, y $F(x) = \inf\limits_{y \in X | y \geqslant x} \{KH(y - x) + L(y)\}$. Entonces:

A. *Para todo par $b, c \in X$, con $b < c$, se tiene $F(b) \leqslant F(c) + K$.*

B. *F es K-convexa en X.*

3.2.2. Condiciones suficientes de optimalidad

Esta subsección está dedicada a presentar varios teoremas y corolarios que nos proporcionen condiciones suficientes bajo las cuales una política (s, S) es óptima.

En la literatura existente sobre teoría de inventarios, es frecuente encontrar condiciones suficientes de optimalidad para las políticas (s, S) más fuertes que las que presentamos en este trabajo. Las principales razones de este hecho son: en primer lugar, el carácter *continuo* del conjunto X que suele ser $\mathbb{R}$ y, en segundo lugar, la dependencia de las hipótesis de convexidad y continuidad de las funciones de los modelos de inventarios. Muestra de ello, son las referencias Hillier (1991), Simchi-Levi *et al.* (2014) o Porteus (2002) por ejemplo.

Además, comprobaremos en un capítulo posterior la versatilidad y el gran alcance de los resultados ante los modelos de inventarios más comunes existentes en la práctica.

A continuación vamos a exponer un lema que es básico como apoyo a los resultados que le siguen.

Lema 3.4

Sea X un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ con al menos tres elementos y supongamos que para los parámetros y funciones definidos anterioremente se verifican las siguientes hipótesis:

a) $K_n \geqslant \alpha K_{n+1}$.

b) *La función G_n es semicontinua inferiormente y K-convexa, con $0 \leqslant K \leqslant K_n - \alpha K_{n+1}$ en X.*

c) *Para cada valor de D_n, respecto a la variable y, la función $I_n(y, D_n)$ es continua, convexa, y no decreciente en X.*

d) *Todas las esperanzas son finitas. Además, si X es un conjunto no acotado, existen los correspondientes ínfimos y se tiene*

$$\inf_{x\in X} \{L_n(x)\} < \lim_{\substack{|x|\longrightarrow\infty \\ x\in X}} \inf\left\{L_n(y) \Big/ \ |y| > |x|\right\} \tag{3.17}$$

Supongamos que en X la función $F(n+1, x)$ es K_{n+1}-convexa, semicontinua inferiormente y para todo par $b, c \in X$, con $b < c$, se tiene $F(n+1, b) \leqslant F(n+1, c) + K_{n+1}$. Entonces:

A. *En X, la función $L_n(y)$ es K_n-cuasiconvexa y semicontinua inferiormente.*

B. *Existe $S_n \in X$ tal que $L_n(S_n) = \inf\left\{L_n(y) \Big/ \ y \in X\right\}$ y existe $s_n \in X$ tal que*
$s_n = \inf\left\{y \in X \Big/ \ L_n(y) \leqslant K_n + L_n(S_n)\right\}$ (eventualmente $s_n = -\infty$).

Además, para $x \in X$ se tiene

C1. *Si $s_n > -\infty$,*

$$F(n, x) = \begin{cases} K_n + L_n(S_n) & si \quad x < s_n \\ L_n(x) & si \quad x \geqslant s_n \end{cases} \tag{3.18}$$

C2. *Si $s_n = -\infty$,*

$$F(n, x) = L_n(x). \tag{3.19}$$

D. *La función $F(n, x)$ es K_n-convexa, semicontinua inferiormente y para todo par $b, c \in X$, con $b < c$, se tiene que $F(n, b) \leqslant F(n, c) + K_n$.*

DEMOSTRACIÓN

- Por la hipótesis (c), tenemos que para cada valor de D_n, la función $I_n(y, D_n)$ es continua , convexa y no decreciente con respecto a y en X. Aplicando el lema 3.2 se tiene que $F(n+1, I_n(y, D_n))$ es K_{n+1}-convexa, para cada valor de D_n. Luego aplicando la proposición 2.3 apartado (b) se tiene que la función $\alpha\Big[F(n+1, I_n(y, D_n))\Big]$ es αK_{n+1}-convexa para cada valor de D_n.

  La primera parte de la hipótesis (d), nos asegura que todas las esperanzas son finitas. Aplicando la proposición 2.3 apartado (d), resulta que la función $\alpha E\Big[F(n+1, I_n(y, D_n))\Big]$ es αK_{n+1}-convexa para cada valor de D_n.

  La función $L_n(y) = G_n(y) + \alpha E\Big[F(n+1, I_n(y, D_n))\Big]$ es suma de la función $G_n(y)$, que por hipótesis es $(K_n - \alpha K_{n+1})$-convexa, y de la función $\alpha E\Big[F(n+1, I_n(y, D_n))\Big]$ que hemos probado que es αK_{n+1}-convexa, luego aplicando la proposición 2.3 apartado (c) se tiene que $L_n(y)$ es K_n-convexa.

- Para cada valor de D_n, la función $I_n(\cdot, D_n)$ es continua y, por hipótesis, $F(n+1, \cdot)$ es semicontinua inferiormente. Aplicando la proposición 2.20 se deduce que la composición de dichas funciones, es decir $F(n+1, I_n(y, D_n))$ es semicontinua inferiormente. Ahora, aplicando el apartado 5 de la propiedad 2.17 y la linealidad y monotonía de la esperanza matemática se deduce que $\alpha E\Big[F(n+1, I_n(y, D_n))\Big]$ es semicontinua inferiormente.

  Luego, $L_n(y)$ es semicontinua inferiormente por ser suma de dos funciones semicontinuas inferiormente.

- Como la función $L_n(y)$ es K_n-convexa, aplicando el lema 2.14, se tiene que es K_n-cuasiconvexa. En resumen, en X, la función $L_n(y)$ es K_n-cuasiconvexa y semicontinua inferiormente.
  Por otra parte, la hipótesis (d) asegura que existe $S_n \in X$ tal que $L_n(S_n) = \inf\Big\{L_n(y) \Big/ y \in X\Big\}$.
  Por tanto, aplicando el lema 3.1 se deduce que existe $s_n \in X$ tal que

  $$s_n = \inf\Big\{y \in X \Big/ L_n(y) \leqslant K_n + L_n(S_n)\Big\}$$

  (eventualmente $s_n = -\infty$).

  Además, si $s_n > -\infty$, para cada $x \in X$ se tiene

  $$F(n, x) = \begin{cases} K_n + L_n(S_n) & si \quad x < s_n \\ L_n(x) & si \quad x \geqslant s_n \end{cases}$$

Evidentemente, si $s_n = -\infty$, entonces se tiene $F(n,x) = L_n(x)$.

- La función $F(n,x)$ es la yuxtaposición de una función constante en el conjunto $(-\infty, s_n) \cap X$ y una función semicontinua inferiormente en el conjunto $[s_n, +\infty) \cap X$; por tanto, es semicontinua inferiormente en X. Aplicando el lema 3.3, se concluye que para todo par $b, c \in X$, con $b < c$, se tiene que $F(n,b) \leqslant F(n,c) + K_n$. En consecuencia, la función $F(n,x)$ es K_n-convexa, semicontinua inferiormente y para todo par $b, c \in X$, con $b < c$, se tiene que $F(n,b) \leqslant F(n,c) + K_n$. ■

Teorema 3.5

Supongamos que para $n = 1, \dots, N$, se verifican las hipótesis (a), (b), (c) *y* (d) *del lema 3.4 y, en X la función $F(N+1,x)$ es K_{N+1}-convexa, semicontinua inferiormente y para todo par $b, c \in X$, con $b < c$, se tiene*

$$F(N+1,b) \leqslant F(N+1,c) + K_{N+1}.$$

Entonces, para cada $n = 1, \dots, N$ existe una política (s_n, S_n) que es óptima.

Demostración

Abordaremos la demostración *retroactivamente*. Más concretamente, analizaremos como las propiedades de las funciones asociadas a un periodo del horizonte de planificación se trasladan a las del periodo anterior.

Por hipótesis, la función $F(N+1,x)$ es K_{N+1}-convexa, semicontinua inferiormente y para todo par $b, c \in X$, con $b < c$, se tiene $F(N+1,b) \leqslant F(N+1,c) + K_{N+1}$. Por tanto, aplicando el lema 3.4, existe una política (s_N, S_N) que es óptima para el horizonte de planificación formado por los periodos N y $N+1$. Además, la función $F(N,x)$ es K_N-convexa, semicontinua inferiormente y para todo par $b, c \in X$, con $b < c$, se tiene que $F(N,b) \leqslant F(N,c) + K_N$. Esto implica que, aplicando de nuevo el lema 3.4, existe una política (s_{N-1}, S_{N-1}) que es óptima para el horizonte de planificación que se inicia en el periodo $N-1$ y termina en el $N+1$ y que la función $F(N-1,x)$ es K_{N-1}-convexa, semicontinua inferiormente y para todo par $b, c \in X$, con $b < c$, se tiene que $F(N-1,b) \leqslant F(N-1,c) + K_{N-1}$.

En consecuencia, razonando recurrentemente hacia atrás, resulta que en cada periodo $n = N, N-1, \dots, 2, 1$, existe una política (s_n, S_n) que es óptima para el horizonte de planificación que se inicia en el periodo n y termina en el $N+1$.

■

► *Nota:* Como puede comprobarse, el resultado anterior presenta mejoras con respecto al dado en Denardo (1982, 2013, p. 140). Concretamente:

- La función $G_n(y)$, es semicontinua inferiormente y K-convexa con $0 \leqslant K \leqslant K_n - \alpha K_{n+1}$ en X, y esto representa una notable mejora con el teorema existente en Denardo (1982, 2013) pues allí se exige que $G_n(y)$ sea continua y convexa en X, una condición más fuerte y exigente.
- La semicontinuidad es una notable mejora, ya que esta surge de una manera natural en el contexto de los descuentos cuantitativos en todas las unidades (ver Fernández Suárez *et al.* (1999, pp. 74-75)). En la Figura 3.3 se muestra intuitivamente el comentario anterior.
- Se clarifican las hipótesis sobre las funciones $\{L_n(x)\}$ que en Denardo (1982, 2013) estaban expuestas de una forma oscura, utilizando una notación nada estándar en la literatura matemática.

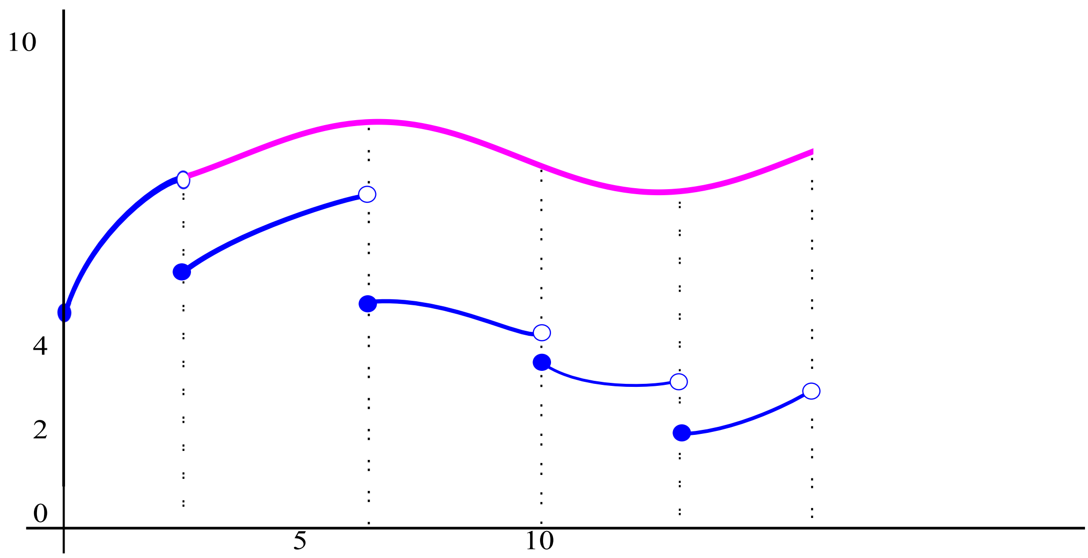


Figura 3.3

En el teorema anterior, se imponían hipótesis sobre la función $F(N+1,x)$. La clave para inicializar el análisis *retroactivo* reside en imponer una *condición terminal de arranque*. El corolario siguiente da una respuesta afirmativa a la pregunta de si es posible suprimir hipótesis acerca de la función $F(N+1,x)$ y seguir teniendo optimalidad de una política (s,S). A cambio, es necesario imponer hipótesis acerca de la función L_N. Como puede comprobarse, en el corolario existente en Denardo (1982, 2013, p. 144) se omite el coste asociado al periodo $N+1$. Esto es incorrecto, pues es necesario añadir dicho coste a la función objetivo. Nosotros aquí supondremos que la demanda no satisfecha al final del periodo N es perdida y que el inventario sobrante tiene coste nulo.

Corolario 3.6

Supongamos que para $n=1,\dots,N$, se verifican las hipótesis del lema 3.4 y, en X la función L_N es semicontinua inferiormente y K_N-convexa. Entonces, para $n=1,\dots,N$ existe una política (s_n,S_n) que es óptima.

DEMOSTRACIÓN

Por hipótesis, la función L_N es semicontinua inferiormente y K_N-convexa en X. Como la función $L_N(y)$ es K_N-convexa, aplicando el lema 2.14, se tiene que es K_N-cuasiconvexa. En resumen, en X, la función $L_N(y)$ es K_N-cuasiconvexa y semicontinua inferiormente.

Por otra parte, la hipótesis (d) del lema 3.4 asegura que existe $S_N \in X$ tal que $L_N(S_N) = \text{ínf}\left\{L_N(y) \;\middle/\; y \in X\right\}$.

Por tanto, aplicando el lema 3.1 se deduce que existe $s_N \in X$ tal que $s_N = \text{ínf}\left\{y \in X \;\middle/\; L_N(y) \leqslant K_N + L_N(S_N)\right\}$ (eventualmente $s_N = -\infty$).

Además, si $s_N > -\infty$, para cada $x \in X$ se tiene

$$F(N,x) = \begin{cases} K_N + L_N(S_N) & si \quad x < s_N \\ L_N(x) & si \quad x \geqslant s_N \end{cases}$$

Evidentemente, si $s_N = -\infty$, entonces se tiene $F(N,x) = L_N(x)$. La función $F(N,x)$ es la yuxtaposición de una función constante en el conjunto $(-\infty, s_N) \cap X$ y una función semicontinua inferiormente en el conjunto $[s_N, +\infty) \cap X$; por tanto, es semicontinua inferiormente en X. Aplicando el lema 3.3, se concluye que para todo par $b, c \in X$, con $b < c$, se tiene que $F(N,b) \leqslant F(N,c) + K_N$.

En consecuencia, la función $F(N,x)$ es K_N-convexa, semicontinua inferiormente y para todo par $b, c \in X$, con $b < c$, se tiene que $F(N,b) \leqslant F(N,c) + K_N$.

Aplicando el lema 3.4, existe una política (s_{N-1}, S_{N-1}) que es óptima en el periodo $N-1$ y que la función $F(N-1,x)$ es K_{N-1}-convexa, semicontinua inferiormente y para todo par $b, c \in X$, con $b < c$, se tiene que $F(N-1,b) \leqslant F(N-1,c) + K_{N-1}$.

En consecuencia, razonando recurrentemente hacia atrás, resulta que en cada periodo $n = N, N-1, \ldots, 2, 1$ existe una política (s_n, S_n) que es óptima.

■

A continuación, vamos a presentar otro teorema que nos va a proporcionar condiciones suficientes acerca de la optimalidad de las políticas (s, S).

Si bien el Teorema 3.5 tiene la ventaja de no imponer ninguna condición acerca de la función $e(x^+)$, imponía la hipótesis de convexidad a la función $I_n(y, D_n)$, o hipótesis de K-convexidad sobre la función $G_n(y)$.

Al modelizar un problema real, puede suceder que la expresión para la función $I_n(y, D_n)$ no resulte ser convexa y, por tanto, no podamos aplicar el Teorema 3.5 o la expresión de $G_n(y)$ no sea ni siquiera K-convexa. La pregunta es si podemos hallar condiciones suficientes de optimalidad cuando la función $G_n(y)$ no sea K-convexa y no podamos asegurar que la función $I_n(y, D_n)$ sea convexa.

Veamos a continuación, que la respuesta es afirmativa y que incluso cuando la función $G_n(y)$ no sea ni siquiera K-convexa, pero que sea K_n-cuasiconvexa podremos tener optimalidad para las políticas (s, S).

Teorema 3.7

Sea X un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ con al menos tres elementos y supongamos que para los parámetros y funciones definidos anterioremente se verifican las siguientes hipótesis:

a) *Para $n = 1, \ldots, N$, se tiene $K_n \geqslant \alpha K_{n+1}$.*

b) *Existen $a_1, \ldots, a_N \in X$, con $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_N$ tales que para cada $n = 1, \ldots, N$, la función $G_n(x)$ es no creciente para $x \leqslant a_n$ y no decreciente para $x \geqslant a_n$ y, además, G_n es semicontinua inferiormente en X.*

c) *Para $n = 1, \ldots, N$, y para cada valor de D_n, respecto a la variable y, la función $I_n(y, D_n)$ es continua y no decreciente en X y, además, $I_n(a_n, D_n) \leqslant a_n$.*

d) *Para cada $x \in X$, $e(x^+) = W_{N+1}x^+$.*

e) *Todas las esperanzas son finitas. Además, si X es un conjunto no acotado, para $n = 1, \ldots, N$, existen los correspondientes ínfimos y se tiene*

$$\operatorname*{ínf}_{x \in X} \{L_n(x)\} < \lim_{\substack{|x| \longrightarrow \infty \\ x \in X}} \operatorname{ínf}\left\{L_n(y) \;\middle/\; |y| > |x|\right\} \tag{3.20}$$

Entonces, para $n = 1, \ldots, N$:

A. *Existe $S_n \in X$ tal que $L_n(S_n) = \operatorname{ínf}\left\{L_n(y) \;\middle/\; y \in X\right\}$ y existe $s_n \in X$ tal que*
$s_n = \operatorname{ínf}\left\{y \in X \;\middle/\; L_n(y) \leqslant K_n + L_n(S_n)\right\}$ (eventualmente $s_n = -\infty$).

Además, para $x \in X$ se tiene

B1. *Si $s_n > -\infty$,*

$$F(n, x) = \begin{cases} K_n + L_n(S_n) & si \quad x < s_n \\ L_n(x) & si \quad x \geqslant s_n \end{cases} \tag{3.21}$$

B2. *Si $s_n = -\infty$,*

$$F(n, x) = L_n(x). \tag{3.22}$$

DEMOSTRACIÓN

- Veamos en primer lugar que en X la función L_n es K_n-cuasiconvexa.
  - (H1) *Para todo par $b, c \in X$, con $a_n < b < c$ se tiene que $L_n(b) \leqslant K_n + L_n(c)$.*
    - Veamos en primer lugar que para todo par $x, z \in X$, con $x < z$ se tiene que
    $$F(n+1, x) \leqslant K_{n+1} + F(n+1, z) \tag{3.23}$$
    Si $n = N$, de la relación (3.14) y de la hipótesis (d), se tiene que dados $x, z \in X$ con $x < z$ se deduce que
    $$F(N+1, x) \leqslant K_{N+1} + F(N+1, z).$$
    Si $n < N$, se sigue directamente de la ecuación (3.11).
    - Consideremos $b, c \in X$, con $b < c$. Por la hipótesis (c), tenemos que para cada valor de D_n, la función $I_n(y, D_n)$ es continua , convexa y no decreciente con respecto a y en X, luego se tiene que $I_n(b, D_n) \leqslant I_n(c, D_n)$. Por tanto, por la relación (3.23) y la linealidad y monotonía de la esperanza matemática se deduce que para $n = 1, \ldots, N$,
    $$E\Big[F(n+1, I_n(b, D_n))\Big] \leqslant K_{n+1} + E\Big[F(n+1, I_n(c, D_n))\Big] \tag{3.24}$$
    Dado que $L_n(y) = G_n(y) + \alpha E\Big[F(n+1, I_n(y, D_n))\Big]$ se tiene
    $$L_n(b) = G_n(b) + \alpha E\Big[F(n+1, I_n(b, D_n))\Big]$$
    y
    $$L_n(c) = G_n(c) + \alpha E\Big[F(n+1, I_n(c, D_n))\Big],$$
    luego restando y, usando la relación (3.24), se deduce que
    $$\begin{aligned} L_n(b) - L_n(c) &\leqslant G_n(b) + \alpha \left(K_{n+1} + E\Big[F(n+1, I_n(c, D_n))\Big]\right) \\ &\quad - \left(G_n(c) + \alpha E\Big[F(n+1, I_n(c, D_n))\Big]\right) \\ &= \alpha K_{n+1} + G_n(b) - G_n(c) \end{aligned}$$

Por lo tanto, por las hipótesis (a) y (b) se sigue que

$$L_n(b) \leqslant K_n + L_n(c)$$

si $a_n < b < c$.

Si $a_n = b < c$, análogamente se prueba que $L_n(b) \leqslant K_n + L_n(c)$.

- (H2) *Para cada par $a, b \in X$, con $a < b \leqslant a_n$, se tiene que $L_n(a) \geqslant L_n(b)$.*

    - La hipótesis (d) asegura que la función $F(N+1, y)$ es no creciente. Consideremos $a, b \in X$, con $a < b$. La hipótesis (c) implica que

    $$F(N+1, I_N(a, D_N)) \geqslant F(N+1, I_N(b, D_N))$$

    La linealidad y monotonía de la esperanza matemática aseguran que

    $$E\Big[F(N+1, I_N(a, D_N))\Big] \geqslant E\Big[F(N+1, I_N(b, D_N))\Big],$$

    luego la función $E\Big[F(N+1, I_N(y, D_N))\Big]$ es no creciente.
    La hipótesis (b) asegura que la función

    $$L_N(x) = G_N(x) + \alpha E\Big[F(N+1, I_N(x, D_N))\Big]$$

    es no creciente para $x \leqslant a_N$.

    - **Hipótesis iniciativa A**: *Supongamos que para cada par $a, b \in X$, con $a < b \leqslant a_{n+1}$ se tiene que $L_{n+1}(a) \geqslant L_{n+1}(b)$.*

    Veamos *retroactivamente*, que la propiedad se verifica para la función $L_n(y)$. Por la hipótesis iniciativa A, se deduce que

    $$\begin{aligned} F(n+1, a) &= \min\Big\{L_{n+1}(a), K_{n+1} + \inf_{y>a}\{L_{n+1}(y)\}\Big\} \\ &\geqslant \min\Big\{L_{n+1}(b), K_{n+1} + \inf_{y>b}\{L_{n+1}(y)\}\Big\} = F(n+1, b) \end{aligned}$$

    Luego la función $F(n+1, y)$ es no creciente para $y \leqslant a_{n+1}$. Por tanto, la hipótesis (c) en conjunción con la linealidad y monotonía de la esperanza matemática muestran que la función $E\Big[F(n+1, I_n(y, D_n))\Big]$ es no creciente para $y \leqslant a_{n+1}$.
    La hipótesis (b) asegura que la función $L_n(y) = G_n(y) + \alpha E\Big[F(n+1, I_n(y, D_n))\Big]$ es no creciente para $y \leqslant a_n$. Esto concluye la prueba retroactiva.

- (H1) y (H2) muestran que, efectivamente, la función L_n es K_n-cuasiconvexa.

- Veamos ahora que la función L_n es semicontinua inferiormente en X.
  - *La función L_N es semicontinua inferiormente en X.*
    - En $\mathbb{R}$ y, por tanto, también en X, la función de *Heaviside*, $H(\cdot)$, es semicontinua inferiormente, y como $K_{N+1} \geqslant 0$, entonces por el apartado 5 de la propiedad 2.17 se tiene que la función $F(N+1, x) = K_{N+1}H(-x)$ es semicontinua inferiormente.
    - Ahora, aplicando la proposición 2.20 se deduce que la composición de dichas funciones, es decir $F(N+1, I_N(y, D_N))$ es semicontinua inferiormente. Aplicando el apartado 5 de la propiedad 2.17 y la linealidad y monotonía de la esperanza matemática se deduce que $\alpha E\Big[F(N+1, I_N(y, D_N))\Big]$ es semicontinua inferiormente.

      Luego, $L_N(y) = G_N(y) + \alpha E\Big[F(N+1, I_N(y, D_N))\Big]$ es semicontinua inferiormente por ser suma de dos funciones semicontinuas inferiormente.
  - **Hipótesis iniciativa B**: *Supongamos que en X, la función $F(n+1, x)$ es semicontinua inferiormente.*
  - Para cada valor de D_n, la función $I_n(\cdot, D_n)$ es continua y, por la hipótesis iniciativa B, $F(n+1, \cdot)$ es semicontinua inferiormente. Aplicando la proposición 2.20 se deduce que la composición de dichas funciones, es decir $F(n+1, I_n(y, D_n))$ es semicontinua inferiormente. Ahora, aplicando el apartado 5 de la propiedad 2.17 y la linealidad y monotonía de la esperanza matemática se deduce que $\alpha E\Big[F(n+1, I_n(y, D_n))\Big]$ es semicontinua inferiormente.

    Luego, $L_n(y) = G_n(y) + \alpha E\Big[F(n+1, I_n(y, D_n))\Big]$ es semicontinua inferiormente por ser suma de dos funciones semicontinuas inferiormente.
    Por otra parte, la hipótesis (e) asegura que existe $S_n \in X$ tal que $L_n(S_n) = \inf\Big\{L_n(y) \Big/ y \in X\Big\}$.
    Por tanto, aplicando el lema 3.1 se deduce que existe $s_n \in X$ tal que

    $$s_n = \inf\Big\{y \in X \Big/ L_n(y) \leqslant K_n + L_n(S_n)\Big\}$$

    (eventualmente $s_n = -\infty$).

    Además, si $s_n > -\infty$, para cada $x \in X$ se tiene

    $$F(n, x) = \begin{cases} K_n + L_n(S_n) & si \quad x < s_n \\ L_n(x) & si \quad x \geqslant s_n \end{cases}$$

Evidentemente, si $s_n = -\infty$, entonces se tiene $F(n, x) = L_n(x)$.

- La función $F(n, x)$ es la yuxtaposición de una función constante en el conjunto $(-\infty, s_n) \cap X$ y una función semicontinua inferiormente en el conjunto $[s_n, +\infty) \cap X$; por tanto, es semicontinua inferiormente en X.

■

► *Nota:* Como puede comprobarse, el resultado anterior presenta mejoras con respecto al dado en Denardo (1982, 2013, p. 140). Concretamente:

- La función $G_n(y)$, es semicontinua inferiormente y esto representa una notable mejora con el teorema existente en Denardo (1982, 2013) pues allí se exige que $G_n(y)$ sea continua una condición más fuerte y exigente.
- La semicontinuidad es una notable mejora, ya que esta surge de una manera natural en el contexto de los descuentos cuantitativos en todas las unidades (ver Fernández Suárez *et al.* (1999, pp. 74-75)). En la Figura 3.3 se muestra intuitivamente el comentario anterior.
- Se clarifican las hipótesis sobre las funciones $\{L_n(x)\}$ que en Denardo (1982, 2013) estaban expuestas de una forma oscura, utilizando una notación nada estándar en la literatura matemática.

En el teorema anterior, se tenía la hipótesis restrictiva acerca de la función $e(x^+) = W_{N+1}x^+$ que debe ser lineal con pendiente $N+1$. Es posible suprimir esta hipótesis como asegura el teorema siguiente.

Teorema 3.8

Supongamos que en el Teorema 3.7 se reemplaza la hipótesis (d) *por:*

(d”)
- *La función L_N es semicontinua inferiormente y K_N-convexa en X.*
- *En la hipótesis (b), la condición sobre la función G_N se sustituye por: La función $L_N(x)$ es no creciente para $x \leqslant a_N$ y para todo par $b, c \in X$, con $a_N \leqslant b < c$ se tiene $L_N(b) \leqslant K_N + L_N(c)$.*

Entonces, las conclusiones de dicho teorema siguen siendo válidas.

DEMOSTRACIÓN

- Veamos en primer lugar que en X la función L_n es K_n-cuasiconvexa.
  - (H1) *Para todo par* $b, c \in X$, *con* $a_n < b < c$ *se tiene que* $L_n(b) \leqslant K_n + L_n(c)$.

    - Si $n = N$, se sigue directamente de la hipótesis (d").
    - Si $n < N$, de la ecuación (3.11) se sigue directamente que para todo par $x, z \in X$, con $x < z$ se tiene que
$$F(n+1, x) \leqslant K_{n+1} + F(n+1, z) \tag{3.25}$$
    - Consideremos $b, c \in X$, con $b < c$. Por la hipótesis (c), tenemos que para cada valor de D_n, la función $I_n(y, D_n)$ es continua , convexa y no decreciente con respecto a y en X, luego se tiene que $I_n(b, D_n) \leqslant I_n(c, D_n)$. Por tanto, por la relación (3.25) y la linealidad y monotonía de la esperanza matemática se deduce que para $n = 1, \ldots, N$,
$$E\Big[F(n+1, I_n(b, D_n))\Big] \leqslant K_{n+1} + E\Big[F(n+1, I_n(c, D_n))\Big] \tag{3.26}$$
Dado que $L_n(y) = G_n(y) + \alpha E\Big[F(n+1, I_n(y, D_n))\Big]$ se tiene
$$L_n(b) = G_n(b) + \alpha E\Big[F(n+1, I_n(b, D_n))\Big]$$
y
$$L_n(c) = G_n(c) + \alpha E\Big[F(n+1, I_n(c, D_n))\Big],$$
luego restando y, usando la relación (3.26), se deduce que
$$\begin{aligned} L_n(b) - L_n(c) &\leqslant G_n(b) + \alpha \left(K_{n+1} + E\Big[F(n+1, I_n(c, D_n))\Big]\right) \\ &\quad - \left(G_n(c) + \alpha E\Big[F(n+1, I_n(c, D_n))\Big]\right) \\ &= \alpha K_{n+1} + G_n(b) - G_n(c) \end{aligned}$$
Por lo tanto, por las hipótesis (a) y (b) se sigue que
$$L_n(b) \leqslant K_n + L_n(c)$$
si $a_n < b < c$.

      Si $a_n = b < c$, análogamente se prueba que $L_n(b) \leqslant K_n + L_n(c)$.

- (H2) *Para cada par $a, b \in X$, con $a < b \leqslant a_n$, se tiene que $L_n(a) \geqslant L_n(b)$.*

  - La hipótesis (d) asegura que la función

    $$L_N(x) = G_N(x) + \alpha E\Big[F(N+1, I_N(x, D_N))\Big]$$

    es no creciente para $x \leqslant a_N$.

  - **Hipótesis iniciativa A**: *Supongamos que para cada par $a, b \in X$, con $a < b \leqslant a_{n+1}$ se tiene que $L_{n+1}(a) \geqslant L_{n+1}(b)$.*

    Veamos *retroactivamente*, que la propiedad se verifica para la función $L_n(y)$. Por la hipótesis iniciativa A, se deduce que

    $$\begin{aligned} F(n+1, a) &= \min\Big\{L_{n+1}(a), K_{n+1} + \inf_{y>a}\{L_{n+1}(y)\}\Big\} \\ &\geqslant \min\Big\{L_{n+1}(b), K_{n+1} + \inf_{y>b}\{L_{n+1}(y)\}\Big\} = F(n+1, b) \end{aligned}$$

    Luego la función $F(n+1, y)$ es no creciente para $y \leqslant a_{n+1}$. Por tanto, la hipótesis (c) en conjunción con la linealidad y monotonía de la esperanza matemática muestran que la función $E\Big[F(n+1, I_n(y, D_n))\Big]$ es no creciente para $y \leqslant a_{n+1}$.
    La hipótesis (b) asegura que la función $L_n(y) = G_n(y) + \alpha E\Big[F(n+1, I_n(y, D_n))\Big]$ es no creciente para $y \leqslant a_n$. Esto concluye la prueba retroactiva.

- (H1) y (H2) muestran que, efectivamente, la función L_n es K_n-cuasiconvexa.

■ Veamos ahora que la función L_n es semicontinua inferiormente en X.

- Por la hipótesis (d"), la función L_N es semicontinua inferiormente en X.
- **Hipótesis iniciativa B**: *Supongamos que en X, la función $F(n+1, x)$ es semicontinua inferiormente.*
- Para cada valor de D_n, la función $I_n(\cdot, D_n)$ es continua y, por la hipótesis iniciativa B, $F(n+1, \cdot)$ es semicontinua inferiormente. Aplicando la proposición 2.20 se deduce que la composición de dichas funciones, es decir $F(n+1, I_n(y, D_n))$ es semicontinua inferiormente. Ahora, aplicando el apartado 5 de la propiedad 2.17 y la linealidad y monotonía de la esperanza matemática se deduce que $\alpha E\Big[F(n+1, I_n(y, D_n))\Big]$ es semicontinua inferiormente.

Luego, $L_n(y) = G_n(y) + \alpha E\Big[F(n+1, I_n(y, D_n))\Big]$ es semicontinua inferiormente por ser suma de dos funciones semicontinuas inferiormente.

Por otra parte, la hipótesis (e) asegura que existe $S_n \in X$ tal que $L_n(S_n) = \text{ínf}\Big\{L_n(y) \Big/ \; y \in X\Big\}$.

Por tanto, aplicando el lema 3.1 se deduce que existe $s_n \in X$ tal que

$$s_n = \text{ínf}\Big\{y \in X \Big/ \; L_n(y) \leqslant K_n + L_n(S_n)\Big\}$$

(eventualmente $s_n = -\infty$).

Además, si $s_n > -\infty$, para cada $x \in X$ se tiene

$$F(n,x) = \begin{cases} K_n + L_n(S_n) & si \quad x < s_n \\ L_n(x) & si \quad x \geqslant s_n \end{cases}$$

Evidentemente, si $s_n = -\infty$, entonces se tiene $F(n,x) = L_n(x)$.

- La función $F(n,x)$ es la yuxtaposición de una función constante en el conjunto $(-\infty, s_n) \cap X$ y una función semicontinua inferiormente en el conjunto $[s_n, +\infty) \cap X$; por tanto, es semicontinua inferiormente en X.

■

Si se suprime el coste de pedir, vamos a ver con el corolario siguiente, que la política (s,S) adquiere una forma *especial*: la llamada *política de un número crítico*:

Corolario 3.9

Supongamos que en el Teorema 3.5 o en el Teorema 3.7 se añade la hipótesis $K_n = 0$ y que para $n = 1, \ldots, N$, $S_n \in X$ es el menor valor tal que

$$L_n(S_n) = \text{ínf}\Big\{L_n(x) \Big/ \; x \in X\Big\}. \tag{3.27}$$

Entonces se cumple que una política (s_n, S_n) es óptima con $s_n = S_n$.

3.2.3. Funciones de valor terminal

Al estudiar condiciones suficientes de optimalidad, veíamos en el Teorema 3.5 y en el Teorema 3.7 que era necesario poseer una *condición terminal de arranque*, que iniciara el análisis retroactivo. La condición terminal de arranque era, en principio, una hipótesis relacionada con la función $F(N+1,x)$. A la función $F(N+1,x)$ la llamaremos *función de valor terminal*. En los modelos de la literatura existente, según los diversos autores, se han propuesto diversas funciones de valor terminal. Veamos a continuación algunas de ellas y su relación con las condiciones suficientes de optimalidad que hemos obtenido y estudiado anteriormente.

Nuestra formulación general de la función de valor terminal incluye, como casos particulares:

- La existente en Porteus (2002, p. 66) ya que la función de valor terminal es convexa y continua, en concreto está dada mediante una expresión lineal (a trozos):

  $$v_T(x) = \begin{cases} -cx & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

  donde c es el coste unitario de compra (> 0) y que corresponde con nuestro W_{N+1}. Nótese que nuestro $F(N+1,x)$ en el Teorema 3.5 es su $v_T(x)$.

- Las existentes en Snyder y Max (2011, pp. 99, 107, 115) ya que las funciones de valor terminal son convexas y continuas, en concreto están dadas mediante una expresión lineal:

  $$\theta_{T+1}(x) = -cx$$

  $$\theta_{T+1}(x) = \begin{cases} -(h+p)x & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

  donde $h > \gamma c$, c es el coste unitario de compra (> 0), h es el coste unitario por sobrante, p es el coste unitario por faltante y γ es el coeficiente de actualización del valor del dinero (con $0 < \gamma \leqslant 1$).

  Nótese que nuestro $F(N+1,x)$ en el Teorema 3.5 es su $\theta_{T+1}(x)$ y que nuestro α es su γ.

- La existente en Muckstadt y Sapra (2010, p.153) ya que la función de valor terminal está dada por

  $$g_{N+1}(y) = -cy$$

  donde c es el coste unitario de compra (> 0). Nótese que nuestro $F(N+1,x)$ en el Teorema 3.5 es su $g_{N+1}(y)$ y que su y es nuestra x.

- La existente en Simchi-Levi *et al.*(2014, p.155) puesto que la función de valor terminal, z_{T+1}, es idénticamente nula. Nótese que nuestro $F(N+1,x)$ en el Teorema 3.5 es su $z_{T+1}(x)$.

A continuación, vamos a ver las diferencias con las hipótesis dadas en Denardo (1982, 2013). Sea $\varphi(x) = W_{N+1}x^{+} - e(x^{+})$. En el teorema existente en Denardo (1982, 2013, p.141) se exige que $\varphi(x)$ sea continua. Nosotros en cambio, para poder aplicar nuestro Teorema 3.5 basta con imponer que sea semicontinua inferiormente, una condición menos exigente.

De hecho, nuestras hipótesis acerca de la función $F(N+1,x)$ en el Teorema 3.5 cubren un amplio espectro de funciones que son utilizadas como funciones de valor terminal en la mayoría de los modelos existentes en la literatura y en la práctica. Más aún, si la formulación de la función de valor terminal no verifica las hipótesis del Teorema 3.5 o la del Teorema 3.7, aún tendremos la posibilidad de aplicar los respectivos corolarios, pues allí no exigimos hipótesis acerca de la función de valor terminal $F(N+1,x)$.

CAPÍTULO 4

Casos Particulares y Variaciones sobre el modelo del Capítulo 3

A continuación analizaremos algunos casos particulares del modelo general expuesto en el capítulo anterior, así como algunas variaciones que generalizan aspectos parciales del mismo. También, incluimos una sección dedicada a otras políticas de inventario.

4.1. Casos particulares

4.1.1. El modelo de demanda acumulable

También denominado modelo de *demanda pendiente* o de *demanda en espera*, se tiene cuando al quedar a cero el nivel del inventario cada cliente entrante está dispuesto a esperar hasta la llegada del siguiente pedido.

Probablemente es el modelo más analizado en el contexto de la literatura científica sobre problemas estocásticos de inventario con horizonte finito. Desde el punto de vista de su formulación, tiene la ventaja de que al ser los ingresos esperados una constante, su valor puede excluirse de la función objetivo con lo que esta se simplifica. Además, si el coste unitario de adquisición de la mercancía permanece constante a lo largo del horizonte de planificación, entonces el correspondiente coste esperado también puede excluirse de la función objetivo, con lo que esta de nuevo se simplifica. Comentamos a continuación una exposición reciente de este modelo señalando su conexión con el modelo general expuesto en el Capítulo 3.

4.1.1.1. Modelo de Simchi-Levi *et al.* (2014)

En la página 153 puede verse la descripción del modelo. En línea con lo comentado unas líneas arriba, tanto los ingresos totales a lo largo del horizonte de planificación como los costes variables son ambos constantes, por lo que pueden excluirse de la función objetivo. Una forma de incluir esta situación en el modelo general desarrollado en el Capítulo 3 es suponer que en este el precio unitario de compra y el precio unitario de venta son respectivamente $W_n = 0$ y $R_n = 0$. Además se tiene:

1. El conjunto cerrado X al que se alude en el capítulo anterior es $X = (-\infty, \infty)$.
2. Se considera $\alpha = 1$ y $K_n = K$ para $n = 1, \ldots, N + 1$. Luego $K_n \geq \alpha K_{n+1}$ y, por tanto, se cumple la hipótesis (a) del Teorema 3.5 .
3. $I_n(y, D_n) = y - D_n$ que, para cada valor de la demanda D_n es una función continua, convexa y no decreciente en el conjunto X. Por tanto se cumple la hipótesis (c) del Teorema 3.5.
4. Si al iniciarse el periodo $N + 1$ el inventario es $x > 0$, entonces el valor del inventario es $cx = W_{N+1}x$, y si $x < 0$ los costes ya se consideran excluidos como se indicó arriba (ver p. 154). Luego, $F(N + 1, x)$ cumple la hipótesis del Teorema 3.5.
5. Si la demanda es continua con valores en el intervalo $[0, \infty)$, el tamaño del almacén es ilimitado y la función de densidad de la demanda es $f(t)$, entonces el coste esperado de la gestión del almacén (*carrying cost*) en el periodo n es

   $$A_n(y) = h^+ \int_0^y (y - t)f(t)dt + h^- \int_y^\infty (t - y)f(t)dt,$$

   donde h^+ es el coste unitario de almacenamiento y h^- es el coste unitario de penalización por la espera en recibir el pedido.

   Es claro que $A_n(y)$ es una función convexa y, además, $\lim_{|y|\to\infty} A_n(y) = \infty$.
6. Teniendo en cuenta que hemos considerado $W_n = 0$ y $R_n = 0$, se tiene que $G_n(y) = A_n(y)$ y, por tanto, la función $G_n(y)$ es continua (luego semicontinua inferiormente) y convexa (luego $K-$convexa con $0 \leq K \leq K_n - \alpha K_{n+1}$), como se pide en la hipótesis (b) del Teorema 3.5.
7. Como $L_n(y) = G_n(y) + \alpha E[F(n + 1, I_n(y, D_n))] \geq G_n(y)$, se tiene $\lim_{|y|\to\infty} L_n(y) = \infty$. Luego se cumple la hipótesis (d) del Teorema 3.5.
8. Notese que nuestro $L_n(y)$ coincide con lo que en Simchi-Levi *et al.* (2014, p. 155, Eq. (9.3)) se representa por $G_n(y)$ y, así mismo, nuestro $F(n, x)$ es su $z_t(x)$ de la Eq. (9.4).

En consecuencia, a través del modelo general expuesto en el Capítulo 3, y con las consideraciones anteriores, recaemos en el modelo considerado en Simchi-Levi *et al.* (2014, p. 153 y siguientes).

4.1.2. El modelo de pérdida de ventas

Es otro de los modelos que con mayor frecuencia aparece tratado en los problemas estocásticos de inventarios con horizonte finito.

Se tiene cuando al quedar a cero el nivel del inventario cada cliente entrante decide ir a otro sistema a satisfacer su demanda.

El modelo de pérdida de ventas es menos popular históricamente que el modelo de demanda acumulable. Esto es debido en parte porque los estudios comenzaron con problemas de gestión de inventario de piezas de repuesto en aplicaciones militares, donde el caso de demanda acumulable es realista. Sin embargo, en muchas otras situaciones en la práctica, es muy común que la demanda que no es satisfecha se pierda. Esto es particularmente cierto en un entorno empresarial competitivo. Por ejemplo, en muchos establecimientos minoristas tales como un supermercado, o en unos grandes almacenes, un cliente elige una marca específica y va a otro sistema a satisfacer su demanda si dicha marca está agotada.

Principalmente, las dos referencias históricas donde se considera el caso de pérdida de ventas son Veinott (1966) y Shreve (1976). Una exposición reciente es Xu *et al.* (2010). Sin embargo, las condiciones suficientes de optimalidad presentes en dichas referencias son más fuertes que las presentamos en este trabajo.

Entonces, en el periodo $n+1$ se tiene que:

1. El nivel de existencias al inicio de la misma es $x_{n+1} = (y_n - D_n)^+ \geq 0$, siendo y_n el nivel de existencias en el periodo n despues de realizar el pedido de $y_n - x_n$ unidades.
2. El nivel de existencias después de realizar el pedido de $y_{n+1} - x_{n+1} \geq 0$ unidades es $y_{n+1} \geq x_{n+1} \geq 0$ unidades.

La expresión más sencilla de la función $A_n(y)$ es la dada por la suma de los *gastos por sobrantes*, y los *gastos por faltantes*. Si en el periodo n, el coste unitario de almacenamiento es h_n, y el coste unitario de penalización por ventas perdidas o coste de pérdida de confianza es p_n se tiene que

$$A_n(y) = h_n E\Big[(y - D_n)^+\Big] + p_n E\Big[(D_n - y)^+\Big].$$

En consecuencia, en este caso:

1. Si la demanda es continua con valores en el intervalo $[0, \infty)$ y el tamaño del almacén es ilimitado, entonces:

a) El conjunto cerrado X al que se alude en el capítulo anterior es $X = [0, \infty)$.

b) $I_n(y, D_n) = (y - D_n)^+$que, para cada valor de la demanda D_n es una función continua, convexa y no decreciente en el conjunto X.

c) Si en el periodo n, el coste unitario de almacenamiento es h_n, el coste unitario de penalización por ventas perdidas es p_n y la función de densidad de la demanda es $f(t)$, entonces $A_n(y) = h_n \int_0^y (y-t)f(t)dt + p_n \int_y^\infty (t-y)f(t)dt$, que es una función continua y convexa en el conjunto X.

2. Si la demanda es continua y con valores en el intervalo $[0, \infty)$ y el tamaño del almacén está limitado por el valor M, entonces:

a) El conjunto cerrado X al que se alude en el capítulo anterior es $X = [0, M]$.

b) $I_n(y, D_n) = (y - D_n)^+$que, para cada valor de la demanda D_n es una función continua, convexa y no decreciente en el conjunto X.

c) Si en el periodo n, el coste unitario de almacenamiento es h_n, el coste unitario de penalización por ventas perdidas es p_n y la función de densidad de la demanda es $f(t)$, entonces $A_n(y) = h_n \int_0^y (y-t)f(t)dt + p_n \int_y^M (t-y)f(t)dt$, que es una función continua y convexa en el conjunto X.

3. Si la demanda es discreta y con valores en el conjunto $\{0, 1, 2, 3, ...\}$, función de probabilidad $p_n(j) = P(D_n = j)$ y el tamaño del almacén es ilimitado, entonces:

a) El conjunto X al que se alude en el capítulo anterior es $X = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.

b) $I_n(y, D_n) = (y - D_n)^+$que, para cada valor de la demanda D_n es una función continua, convexa y no decreciente en el conjunto X.

c) Si en el periodo n, el coste unitario de almacenamiento es h_n, el coste unitario de penalización por ventas perdidas es p_n y la función de probabilidad es $p_n(j)$, entonces $A_n(y) = h_n \sum_{j=0}^{y} (y - j)p_n(j) + p_n \sum_{j=y+1}^{\infty} (j - y)p_n(j)$, que es una función continua y convexa en el conjunto X.

4. Si la demanda es discreta y con valores en el conjunto $\{0, 1, 2, 3, ...\}$ y el tamaño del almacén está limitado por el valor entero M, entonces:

a) El conjunto X es $X = \{0, 1, 2, 3, ..., M\}$.

b) $I_n(y, D_n) = (y - D_n)^+$que, para cada valor de la demanda D_n es una función continua, convexa y no decreciente en el conjunto X.

c) Si en el periodo n, el coste unitario de almacenamiento es h_n, el coste unitario de penalización por ventas perdidas es p_n y la función de probabilidad es $p_n(j)$, entonces $A_n(y) = h_n \sum_{j=0}^{y} (y - j)p_n(j) + p_n \sum_{j=y+1}^{M} (j - y)p_n(j)$, que es una función continua y convexa en el conjunto X.

4.2. Variaciones

4.2.1. Modelos con deterioro del stock

Uno de los aspectos más analizados en el contexto de los modelos matemáticos de optimización en la gestión de stocks es el de la inclusión en los mismos del deterioro de los bienes almacenados.

La literatura sobre este tópico es amplia (véase Nahmias (2011) o Pando (2014, p. 73)). Si bien en muchas situaciones reales se puede observar que existen productos (como vegetales, carne o leche), y también, productos que pierden calidad (como material fotográfico o componentes electrónicos por ejemplo) que pueden deteriorarse durante el periodo normal de almacenamiento, la literatura acerca de modelos con inclusión del deterioro del stock es reciente (a partir de la década de 1980) en comparación al inicio de la *Era Dorada de Stanford* (alrededor de 1950). En tres décadas, la mayoría de los modelos (a excepción de Within (1957) o en la tesis doctoral de A.F. VEINOTT Jr. (a principios de la década de 1960)) excluían el caso de deterioro y, esto era debido, a que son problemas bastante difíciles de analizar y la exclusión del deterioro permite una formulación más sencilla del modelo matemático.

A continuación analizaremos como afecta la consideración del deterioro en el caso de los modelos estocásticos multiperiodo. Ya en Denardo (1982, 2013 p. 149) se hace referencia a un modelo de pérdida de ventas con deterioro y otro modelo de deterioro con demanda acumulable. En el caso de pérdida de ventas, para adaptar esta situación al modelo allí analizado, Denardo necesita hacer algunas manipulaciones que rompen con la notación y definiciones inicialmente establecidas. Por esta razón, pensamos que es más adecuado analizar esta situación como una variación del modelo expuesto en el Capítulo 3.

Es claro que lo primero que se debe matizar es la forma en que se produce el deterioro, ya que son muchas las maneras en que puede suceder. Aquí supondremos que el deterioro se produce al final de cada periodo, después de que la demanda haya actuado sobre el nivel de existencias existentes y antes de recibir la llegada del siguiente pedido. Con el fin de formular con claridad el correspondiente modelo, a la notación ya dada en el Capítulo 3 añadimos la siguiente:

$$J_n(y, D_n) = \text{nivel del inventario al inicio del periodo } n+1.$$

Por tanto, el esquema secuencial descrito en la página 43 con la figura 3.1 queda alterado del modo siguiente: Se parte con x unidades iniciales, se piden $y - x$ unidades para elevar el nivel del inventario a y, sucede el fenómeno aleatorio D_n y se reduce el inventario a $I_n(y, D_n)$. A continuación, como consecuencia del deterioro el inventario pasa al nivel $J_n(y, D_n)$. Por tanto, en el periodo $n+1$ se parte de un inventario con $J_n(y, D_n)$ unidades y a partir de este periodo se incurre en un coste esperado (actualizado con α) dado por $\alpha E[f(n+1, J_n(y, D_n))]$ (véase la figura 4.1).

Recordemos que en el Capítulo 3, $I_n(y, D_n)$ representa el nivel del inventario al final del periodo n antes de la consideración del deterioro y, por tanto, de la recepción de siguiente pedido.

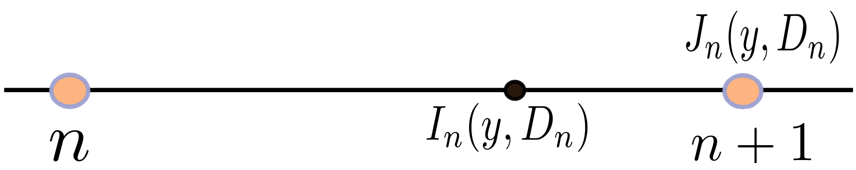


Figura 4.1

En el contexto de la formulación matemática del modelo tenemos lo siguiente:

1. En las ecuaciones funcionales de recurrencia (ver subsección 3.1.2), las relaciones (3.1) y (3.3) se mantienen, pero la (3.2) pasa a ser

$$f(n, x) = \inf_{y|y \geq x} \left\{ c_n(x, y) + \alpha E\left[f(n+1, J_n(y, D_n)) \right] \right\} \tag{4.1}$$

2. En la reformulación de las ecuaciones funcionales de recurrencia (ver subsección 3.1.3), las relaciones (3.4), (3.5) y (3.6) siguen lo que acabamos de señalar. Además, la relación (3.8) se mantiene, pero las relaciones (3.9), (3.10) y (3.12) pasan a ser respectivamente

$$F(n,x) = \inf_{y|y \geqslant x} \left\{ K_n H(y-x) + G_n(y) + \alpha E\Big[F\,(n+1, J_n(y,D_n))\,\Big] \right\}, \qquad (4.2)$$

para $n = 1, \ldots, N$,

$$G_n(y) = A_n(y) + (W_n - \alpha R_n)y + \alpha R_n E[I_n(y,D_n)] - \alpha W_{n+1} E[J_n(y,D_n)] \quad (4.3)$$

$$L_n(y) = G_n(y) + \alpha E\Big[F(n+1, J_n(y,D_n)) \Big] \qquad (4.4)$$

A continuación, vamos a considerar los modelos de pérdida de ventas y demanda acumulable con la inclusión del deterioro del stock.

4.2.1.1. Un modelo con deterioro y pérdida de ventas

Además de la notación y relaciones expuestas anteriormente, vamos a considerar que para $n = 1, \ldots, N$, como el inventario restante es siempre no negativo, sobre $I_n(y, D_n)$ se produce una fracción constante de deterioro. Por tanto, se tiene que

$$J_n(y,D_n) = \rho_n\, [I_n(y,D_n)] \qquad (4.5)$$

siendo ρ_n una constante que indica la fracción de **no** deterioro, con $0 < \rho_n \leqslant 1$.

Lema 4.1

Sea X un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ con al menos tres elementos y supongamos que para los parámetros y funciones definidos anteriormente se verifican las siguientes hipótesis:

a) $K_n \geqslant \alpha K_{n+1}$.

b) *La función G_n es semicontinua inferiormente y K-convexa, con $0 \leqslant K \leqslant K_n - \alpha K_{n+1}$ en X.*

c) *Para $n = 1, \dots, N$, y para cada valor de D_n, $I_n(y, D_n) = (y - D_n)^+$.*

d) *Todas las esperanzas son finitas. Además, si X es un conjunto no acotado, existen los correspondientes ínfimos y se tiene*

$$\inf_{x \in X} \{L_n(x)\} < \lim_{\substack{|x| \longrightarrow \infty \\ x \in X}} \inf \left\{ L_n(y) \;\Big/\; |y| > |x| \right\} \tag{4.6}$$

e) *Para $n = 1, \dots, N$, se tiene $0 < \rho_n \leqslant 1$.*

Supongamos que en X la función $F(n+1, x)$ es K_{n+1}-convexa, semicontinua inferiormente y para todo par $b, c \in X$, con $b < c$, se tiene $F(n+1, b) \leqslant F(n+1, c) + K_{n+1}$. Entonces:

A. *En X, la función $L_n(y)$ es K_n-cuasiconvexa y semicontinua inferiormente.*

B. *Existe $S_n \in X$ tal que $L_n(S_n) = \inf\left\{ L_n(y) \;\Big/\; y \in X \right\}$ y existe $s_n \in X$ tal que*
$s_n = \inf\left\{ y \in X \;\Big/\; L_n(y) \leqslant K_n + L_n(S_n) \right\}$ (eventualmente $s_n = -\infty$).

Además, para $x \in X$ se tiene

C1. *Si $s_n > -\infty$,*

$$F(n, x) = \begin{cases} K_n + L_n(S_n) & si \quad x < s_n \\ L_n(x) & si \quad x \geqslant s_n \end{cases} \tag{4.7}$$

C2. *Si $s_n = -\infty$,*

$$F(n, x) = L_n(x). \tag{4.8}$$

D. *La función $F(n, x)$ es K_n-convexa, semicontinua inferiormente y para todo par $b, c \in X$, con $b < c$, se tiene que $F(n, b) \leqslant F(n, c) + K_n$.*

Demostración

- Por la hipótesis (c), tenemos que para cada valor de D_n, la función $I_n(y, D_n) = (y - D_n)^+$ es continua , convexa y no decreciente con respecto a y en X. Por tanto, también la función $J_n = \rho_n\,[I_n(y, D_n)]$, con $0 < \rho_n \leqslant 1$, es continua, convexa y no decreciente con respecto a y en X. Aplicando el lema 3.2 se tiene que $F(n+1, J_n(y, D_n))$ es K_{n+1}-convexa, para cada valor de D_n. Luego aplicando la proposición 2.3 apartado (b) se tiene que la función $\alpha\Big[F(n+1, J_n(y, D_n))\Big]$ es αK_{n+1}-convexa para cada valor de D_n.

  La primera parte de la hipótesis (d), nos asegura que todas las esperanzas son finitas. Aplicando la proposición 2.3 apartado (d), resulta que la función $\alpha E\Big[F(n+1, J_n(y, D_n))\Big]$ es αK_{n+1}-convexa para cada valor de D_n.

  La función $L_n(y) = G_n(y) + \alpha E\Big[F(n+1, J_n(y, D_n))\Big]$ es suma de la función $G_n(y)$, que por hipótesis es $(K_n - \alpha K_{n+1})$-convexa, y de la función $\alpha E\Big[F(n+1, J_n(y, D_n))\Big]$ que hemos probado que es αK_{n+1}-convexa, luego aplicando la proposición 2.3 apartado (c) se tiene que $L_n(y)$ es K_n-convexa.

- Para cada valor de D_n, la función $J_n(y, D_n)$ es continua y, por hipótesis, $F(n+1, \cdot)$ es semicontinua inferiormente. Aplicando la proposición 2.20 se deduce que la composición de dichas funciones, es decir $F(n+1, J_n(y, D_n))$ es semicontinua inferiormente. Ahora, aplicando el apartado 5 de la propiedad 2.17 y la linealidad y monotonía de la esperanza matemática se deduce que $\alpha E\Big[F(n+1, J_n(y, D_n))\Big]$ es semicontinua inferiormente.

  Luego, $L_n(y)$ es semicontinua inferiormente por ser suma de dos funciones semicontinuas inferiormente.

- Como la función $L_n(y)$ es K_n-convexa, aplicando el lema 2.14, se tiene que es K_n-cuasiconvexa. En resumen, en X, la función $L_n(y)$ es K_n-cuasiconvexa y semicontinua inferiormente.
  Por otra parte, la hipótesis (d) asegura que existe $S_n \in X$ tal que $L_n(S_n) = \operatorname{ínf}\Big\{L_n(y) \Big/ \ y \in X\Big\}$.
  Por tanto, aplicando el lema 3.1 se deduce que existe $s_n \in X$ tal que

  $$s_n = \operatorname{ínf}\Big\{y \in X \Big/ \ L_n(y) \leqslant K_n + L_n(S_n)\Big\}$$

  (eventualmente $s_n = -\infty$).

Además, si $s_n > -\infty$, para cada $x \in X$ se tiene

$$F(n,x) = \begin{cases} K_n + L_n(S_n) & si \quad x < s_n \\ L_n(x) & si \quad x \geqslant s_n \end{cases}$$

Evidentemente, si $s_n = -\infty$, entonces se tiene $F(n,x) = L_n(x)$.

- La función $F(n,x)$ es la yuxtaposición de una función constante en el conjunto $(-\infty, s_n) \cap X$ y una función semicontinua inferiormente en el conjunto $[s_n, +\infty) \cap X$; por tanto, es semicontinua inferiormente en X. Aplicando el lema 3.3, se concluye que para todo par $b, c \in X$, con $b < c$, se tiene que $F(n,b) \leqslant F(n,c) + K_n$.

  En consecuencia, la función $F(n,x)$ es K_n-convexa, semicontinua inferiormente y para todo par $b, c \in X$, con $b < c$, se tiene que $F(n,b) \leqslant F(n,c) + K_n$. ■

Teorema 4.2

Si para $n = 1, \ldots, N$, se verifican las hipótesis (a), (b), (c) *y* (d) *del lema 4.1 y, que en X la función $F(N+1, x)$ es K_{N+1}-convexa, semicontinua inferiormente y para todo par $b, c \in X$, con $b < c$, se tiene*

$$F(N+1, b) \leqslant F(N+1, c) + K_{N+1}.$$

Entonces, para $n = 1, \ldots, N$ existe una política (s_n, S_n) que es óptima.

Demostración

Abordaremos la demostración *retroactivamente*. Más concretamente, analizaremos como las propiedades de las funciones asociadas a un periodo del horizonte de planificación se trasladan a las del periodo anterior.

Por hipótesis, la función $F(N+1,x)$ es K_{N+1}-convexa, semicontinua inferiormente y para todo par $b, c \in X$, con $b < c$, se tiene $F(N+1,b) \leqslant F(N+1,c) + K_{N+1}$. Por tanto, aplicando el lema 4.1, existe una política (s_N, S_N) que es óptima en el periodo N. Además, la función $F(N,x)$ es K_N-convexa, semicontinua inferiormente y para todo par $b, c \in X$, con $b < c$, se tiene que $F(N,b) \leqslant F(N,c) + K_N$. Esto implica que, aplicando de nuevo el lema 4.1, existe una política (s_{N-1}, S_{N-1}) que es óptima en el periodo $N-1$ y que la función $F(N-1,x)$ es K_{N-1}-convexa, semicontinua inferiormente y para todo par $b, c \in X$, con $b < c$, se tiene que $F(N-1,b) \leqslant F(N-1,c) + K_{N-1}$.

En consecuencia, razonando recurrentemente hacia atrás, resulta que en cada periodo $n = N, N-1, \ldots, 2, 1$ existe una política (s_n, S_n) que es óptima.

■

4.2.1.2. Un modelo con deterioro y demanda acumulable

Aquí, además de la notación y relaciones expuestas en la página 71 (y siguientes), vamos a considerar que para $n = 1, \ldots, N$, cuando el inventario restante es no negativo, sobre $y - D_n$ se produce una fracción constante de deterioro. Por tanto, se tiene que

$$J_n(y, D_n) = I_n(y, D_n) = y - D_n - \tau_n (y - D_n)^+ \tag{4.9}$$

siendo τ_n una constante que indica la fracción de deterioro, con $0 < \tau_n \leqslant 1$.

Para cada valor de la v.a. D_n, la función $J_n(y, D_n)$ es continua, no decreciente y *cóncava* con respecto a y en X. Ésta función no verifica las hipótesis del Teorema 3.5, pero sí las relativas al Teorema 3.7.

4.3. Otras políticas próximas a las (s, S)

En este trabajo, hemos estudiado condiciones suficientes de optimalidad para las políticas (s, S). La K-convexidad es una condición suficiente de optimalidad, pero *no es una condición necesaria*. Más concretamente, en la Figura 4.2 se puede observar que una política (s, S) es óptima pero la función **no** es K-convexa.

En la Figura 4.3 se observa que política (s, S) **no** es óptima. Nótese que las políticas (s, S) están muy relacionadas con el concepto de K-convexidad. Cabe preguntarse de qué forma pueden ser las políticas óptimas si no son de la forma (s, S).

A continuación vamos a introducir otro tipo de políticas diferentes a las (s, S): las *políticas* $(s, S, \widetilde{s}, \widetilde{S}, S')$, definidas por los cinco parámetros $s, S, \widetilde{s}, \widetilde{S}, S'$ con $s < S < \widetilde{s} < \widetilde{S} < S'$.

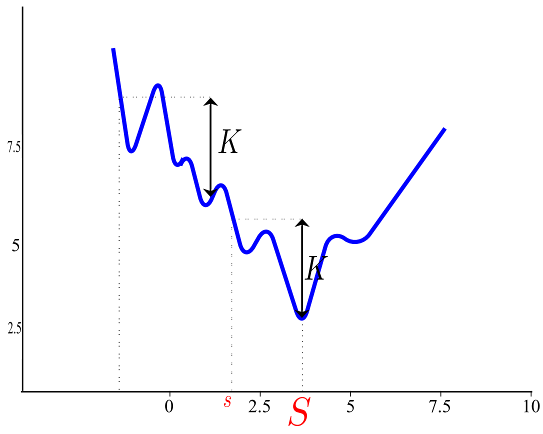


Figura 4.2: Una política (s, S) es óptima pero la función **no** es K-convexa.

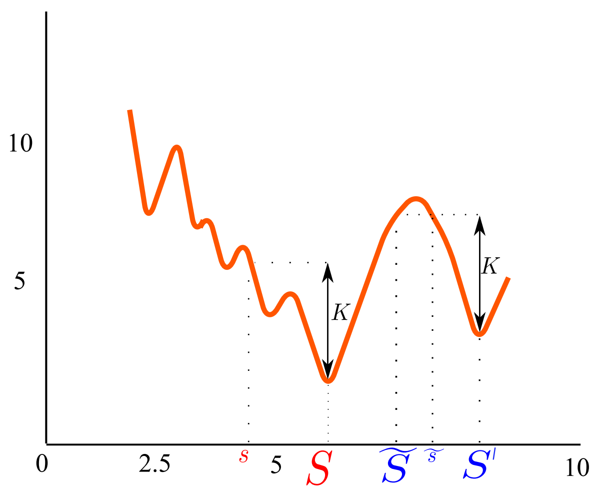


Figura 4.3: Una política (s, S) **no** es óptima. Nótese que es una función que **no** es K-convexa.

Políticas $(s, S, \widetilde{s}, \widetilde{S}, S')$.

*Una **política** $(s, S, \widetilde{s}, \widetilde{S}, S')$, es una regla de decisión en el sentido siguiente:*

Si x es el nivel inicial del inventario, entonces

- *Si $x < s$, se pide $S - x$ para alcanzar el nivel S.*
- *Si $s < x \leqslant \widetilde{S}$, **no** se pide.*
- *Si $\widetilde{S} < x < \widetilde{s}$, se pide $S' - x$ para alcanzar el nivel S'.*
- *Si $x \geqslant \widetilde{s}$, **no** se pide.*

En la Figura 4.3, se observa que una política de la forma $(s, S, \widetilde{s}, \widetilde{S}, S')$ es óptima.

Para finalizar esta sección, mencionamos que existen otras políticas como las llamadas *políticas de banda de control* o *políticas de intervalo diana*. Estas políticas están definidas por medio de los dos parámetros $\underline{S}, \overline{U}$, con $\underline{S} \leqslant \overline{U}$. En este caso, se permite retornar el exceso de inventario al proveedor en cada periodo, es decir, puede ser $y < x$.

Políticas $(\underline{S}, \overline{U})$.

*Una **política** $(\underline{S}, \overline{U})$, es una regla de decisión en el sentido siguiente:*

Si x es el nivel inicial del inventario, entonces

- *Si $x < \underline{S}$, se pide $\underline{S} - x$ para alcanzar el nivel $\underline{S}$.*
- *Si $\underline{S} \leqslant x \leqslant \overline{U}$, **no** se pide.*
- *Si $x > \overline{U}$, se pide $\overline{U} - x$ para alcanzar el nivel $\overline{U}$.*

El conjunto $\left[\underline{S}, \overline{U}\right]$ se denomina *banda de control* o *intervalo diana*. En la Figura 4.4 se observa que una política de la forma $(\underline{S}, \overline{U})$ es óptima.

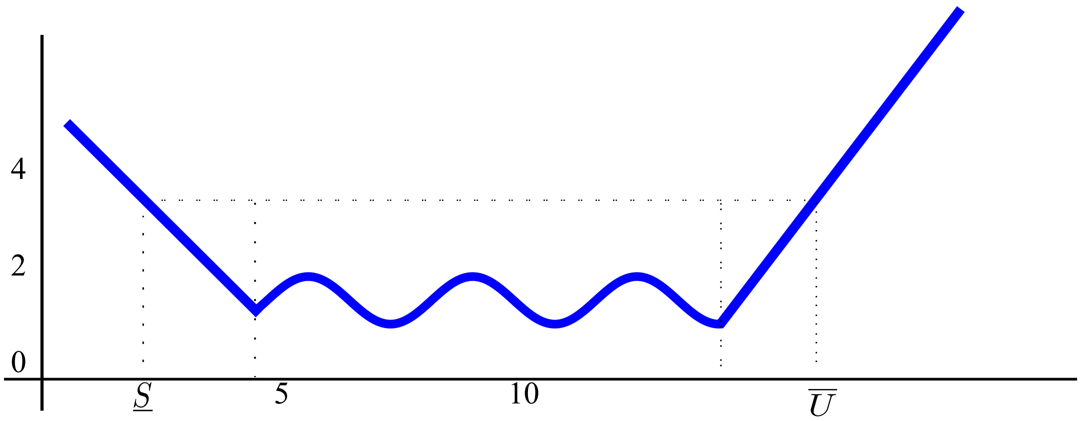


Figura 4.4: Función para la que una política $(\underline{S}, \overline{U})$ es óptima.

CAPÍTULO 5

ASPECTOS COMPUTACIONALES

Este capítulo está dedicado a estudiar los aspectos computacionales del trabajo. Para ello, se han desarrollado dos programas escritos en AMPL correspondientes a los casos de *pérdida de ventas* y *demanda acumulable* con posibilidad de *deterioro del stock* los cuales se encuentran en el apéndice.También vamos a realizar un análisis de la sensibilidad de la solución óptima con respecto a parámetros de los modelos considerados y a estudiar la rentabilidad del sistema.

5.1. Análisis de la sensibilidad.

En la práctica, lo más relevante para el gestor es conocer con precisión (además de los valores (s, S)) el coste mínimo esperado a lo largo de todo el horizonte de planificación, es decir, $f(1, x)$. Ahora, se trata de estudiar *cuánto varían las soluciones óptimas cuando varían algunos parámetros del modelo*.

5.1.1. Caso de pérdida de ventas

A continuación presentamos un ejemplo numérico para ilustrar el modelo de pérdida de ventas introducido en los capítulos anteriores y su procedimiento de resolución, incluyendo un análisis de la sensibilidad de las soluciones óptimas con respecto a los parámetros p_n y ρ_n considerados en el mismo.

Supondremos que el sistema de inventario tiene los siguientes parámetros: $K_1 = 30$, $K_2 = 31$, $K_3 = 32$, $W_1 = 55$, $W_2 = 57$, $W_3 = 60$, $W_4 = 55$, $R_1 = 90$, $R_2 = 90$, $R_3 = 80$, $h_1 = 20$, $h_2 = 23$, $h_3 = 25$, $p := p_1 = p_2 = p_3 = 60$, $\alpha = 0.95$ y $\rho := \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$. Además, vamos a suponer que el horizonte de planificación está formado $N = 3$ periodos y que el tamaño del almacén estará limitado por 5 unidades, es decir, $X = [0, 1, 2, 3, 4, 5]$. Los datos anteriores se encuentran en el fichero `perdida_ventas.dat` que se encuentra en el apéndice (véase página 107). A continuación se muestra la tabla de resultados del análisis de la sensibilidad respecto a los parámetros anteriormente citados.

		ρ			
p		1	0.95	0.9	0.85
54	(s_1, S_1)	(2,3)	(2,3)	(2,3)	(2,3)
	(s_2, S_2)	(1,2)	(1,2)	(1,2)	(1,2)
	(s_3, S_3)	(4,5)	(4,5)	(4,5)	(4,5)
	$f(1,0)$	9.84169	24.013	31.3525	38.6921
	$f(1,1)$	-45.1583	-30.987	-23.6475	-16.3079
	$f(1,2)$	-117.839	-102.471	-96.8976	-91.3246
	$f(1,3)$	-185.158	-170.987	-163.647	-156.308
	$f(1,4)$	-221.466	-213.737	-202.898	-192.059
	$f(1,5)$	-242.034	-240.384	-225.152	-209.92
57	(s_1, S_1)	(2,3)	(2,3)	(2,3)	(2,3)
	(s_2, S_2)	(1,2)	(1,2)	(1,2)	(1,2)
	(s_3, S_3)	(4,5)	(4,5)	(4,5)	(4,5)
	$f(1,0)$	10.5118	24.9895	32.329	39.6686
	$f(1,1)$	-44.4882	-30.0105	-22.671	-15.3314
	$f(1,2)$	-116.113	-100.894	-95.3207	-89.7477
	$f(1,3)$	-184.488	-170.011	-162.671	-155.331
	$f(1,4)$	-221.167	-213.217	-202.378	-191.539
	$f(1,5)$	-241.97	-240.085	-224.853	-209.621
60	(s_1, S_1)	(2,3)	(2,3)	(2,3)	(2,3)
	(s_2, S_2)	(1,2)	(1,2)	(1,2)	(1,2)
	(s_3, S_3)	(4,5)	(4,5)	(4,5)	(4,5)
	$f(1,0)$	11.1819	25.966	33.3055	40.6451
	$f(1,1)$	-43.8181	-29.034	-21.6945	-14.3549
	$f(1,2)$	-114.386	-99.3167	-93.7438	-88.1709
	$f(1,3)$	-183.818	-169.034	-161.694	-154.355
	$f(1,4)$	-220.867	-212.697	-201.858	-191.018
	$f(1,5)$	-241.906	-239.785	-224.553	-209.321
63	(s_1, S_1)	(2,3)	(2,3)	(2,3)	(2,3)
	(s_2, S_2)	(1,2)	(1,2)	(1,2)	(1,2)
	(s_3, S_3)	(4,5)	(4,5)	(4,5)	(4,5)
	$f(1,0)$	11.8521	26.9425	34.282	41.6216
	$f(1,1)$	-43.1479	-28.0575	-20.718	-13.3784
	$f(1,2)$	-112.66	-97.7399	-92.1669	-86.594
	$f(1,3)$	-183.148	-168.058	-160.718	-153.378
	$f(1,4)$	-220.568	-212.176	-201.337	-190.498
	$f(1,5)$	-241.842	-239.486	-224.254	-209.022
66	(s_1, S_1)	(2,3)	(2,3)	(2,3)	(2,3)
	(s_2, S_2)	(1,2)	(1,2)	(1,2)	(1,2)
	(s_3, S_3)	(4,5)	(4,5)	(4,5)	(4,5)
	$f(1,0)$	12.5222	27.919	35.2585	42.5981
	$f(1,1)$	-42.4778	-27.081	-19.7415	-12.4019
	$f(1,2)$	-110.933	-96.163	-90.5901	-85.0171
	$f(1,3)$	-182.478	-167.081	-159.741	-152.402
	$f(1,4)$	-220.269	-211.656	-200.817	-189.978
	$f(1,5)$	-241.778	-239.187	-223.955	-208.723

A continuación se muestran las Figuras 5.1 y 5.2 para ilustrar gráficamente el efecto de los parámetros ρ y p sobre el coste mínimo esperado en el estado $(1,0)$.

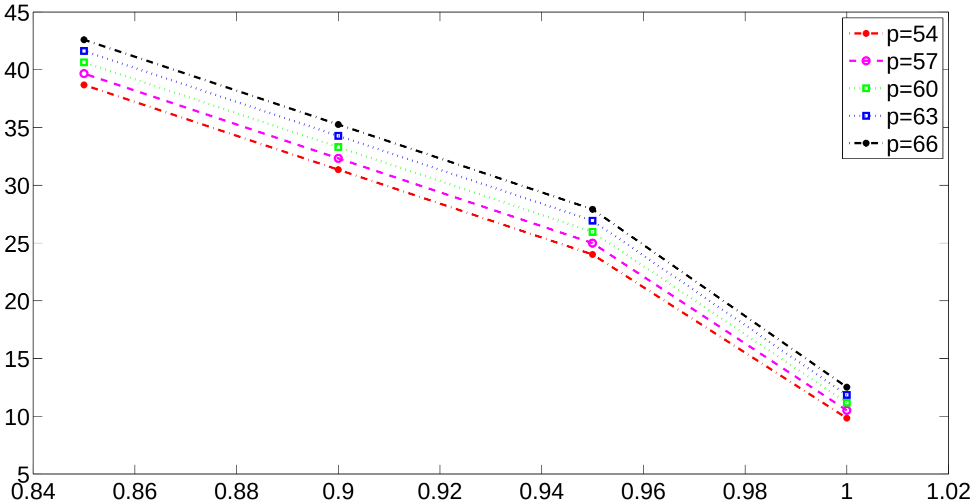


Figura 5.1: Variación de $f(1,0)$ con ρ.

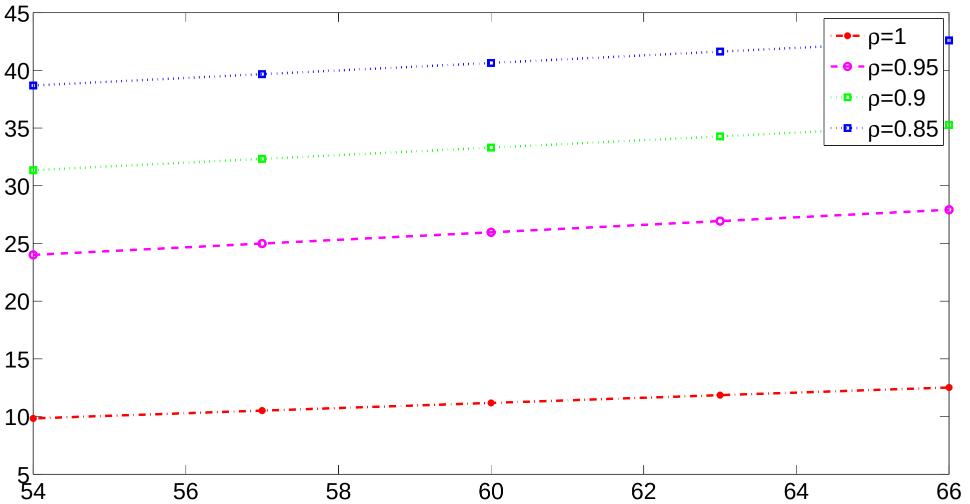


Figura 5.2: Variación de $f(1,0)$ con p.

A la vista de estos resultados numéricos, pueden hacerse los siguientes comentarios sobre el efecto de los parámetros ρ y p en las soluciones óptimas para este ejemplo numérico:

1. Como es de esperar, se observa que si x es el nivel inicial del inventario, $f(1,x)$ crece cuando los parámetros de coste aumentan.
2. Fijando un periodo n del horizonte de planificación y variando los parámetros ρ y p, se observa que la política (s_n, S_n) no varía. En realidad, esto se debe al tamaño elegido del almacén.
3. Si nos centramos en el valor $f(1,0)$:
   a) Una reducción del 10 % en el coste de penalización por ventas perdidas p origina una reducción del coste en un 11.99 %. Un aumento del 10 % en el coste de penalización por ventas perdidas p origina un aumento del coste en un 11.99 %.
   b) Una reducción del 5 % en el parámetro ρ ocasiona un aumento del 232 % del coste. Además, una reducción del 15 % en el parámetro ρ ocasiona un incremento en el mismo del 363 %.
   c) Una reducción del 5 % en el parámetro ρ y un aumento del 5 % en el coste de penalización por ventas perdidas p origina un aumento del coste en un 140 %. Una reducción del 15 % en el parámetro ρ y un aumento del 10 % en el coste de penalización por ventas perdidas p origina un aumento del coste en un 280.95 %.
4. Una sobreestimación del 10 % en el coste de penalización por ventas perdidas p y una reducción del 10 % en el parámetro ρ, origina un aumento del 315 % en el valor $f(1,0)$. Además, en este caso, para los valores $f(1,1)$, $f(1,2)$ y $f(1,3)$ se contempla una disminución en el beneficio del 55 %, 20 % y 13 % respectivamente. En cambio, para $f(1,4)$ y $f(1,5)$ se observa una reducción del beneficio en un 9 % y 7 % respectivamente.

5.1.2. Caso de demanda acumulable

A continuación presentamos un ejemplo numérico para ilustrar el modelo de demanda acumulable introducido en los capítulos anteriores y su procedimiento de resolución, incluyendo un análisis de la sensibilidad de la solución óptima con respecto a los parámetros p y a la tasa de deterioro.

Además, vamos a suponer que la demanda puede describirse por medio de de una v.a. uniforme discreta. Según señala Pando (2014, pp. 189-190) en su tesis doctoral, "*esta distribución de probabilidad suele utilizarse para expresar los resultados de una demanda cuyos valores son desconocidos, excepto por el hecho de que tales valores se encuentran entre un valor mínimo a y un valor máximo b. Cuando no se dispone de datos históricos previos para una estimación preliminar de la distribución de probabilidad de la demanda, el uso de la distribución uniforme puede resultar útil porque sólo se necesita una estimación para los valores mínimo y máximo, y no es necesario estimar otros parámetros como la desviación típica, el coeficiente de variación o los coeficientes de asimetría o kurtosis. Esta situación suele presentarse en el entorno de inventarios cuando se maneja un nuevo producto que va a ser introducido en el mercado y se desconoce la posible demanda que va a tener entre los potenciales clientes. El distribuidor podría empezar entonces utilizando el tamaño del lote adecuado para el caso en que la distribución sea uniforme y, posteriormente, cuando disponga de datos históricos de ventas, podrá ajustar otro tipo de distribución y plantear el nuevo modelo con ella. En esta línea, Wanke (2008) observó resultados satisfactorios en un análisis de robustez sobre la hipótesis de la distribución uniforme utilizada en el entorno de modelos estocásticos de inventario.*"

Supondremos que el sistema de inventario tiene los siguientes parámetros: $K_1 = 30$, $K_2 = 31$, $K_3 = 32$, $W_1 = 55$, $W_2 = 57$, $W_3 = 60$, $W_4 = 55$, $R_1 = 90$, $R_2 = 90$, $R_3 = 80$, $h_1 = 20$, $h_2 = 23$, $h_3 = 25$, $p := p_1 = p_2 = p_3 = 60$, $\alpha = 0.95$ y $\tau := \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$. Además, vamos a suponer que el horizonte de planificación está formado $N = 3$ periodos y que $X = [-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5]$. Los datos anteriores se encuentran en el fichero `demanda_acumulable.dat` que se encuentra en el apéndice (véase página 107). A continuación se muestra la tabla de resultados del análisis de la sensibilidad respecto a los parámetros anteriormente citados.

		τ		
p		0	0.05	0.3
54	(s_1, S_1)	(2,4)	(3,5)	(3,5)
	(s_2, S_2)	(2,4)	(3,4)	(3,5)
	(s_3, S_3)	(1,3)	(2,3)	(2,4)
	$f(1,-5)$	299.748	260.112	247.919
	$f(1,-4)$	244.748	205.112	192.919
	$f(1,-3)$	189.748	150.112	137.919
	$f(1,-2)$	134.748	95.1117	82.9185
	$f(1,-1)$	79.7479	40.1117	27.9185
	$f(1,0)$	24.7479	-14.8883	-27.0815
	$f(1,1)$	-30.2521	-69.8883	-82.0815
	$f(1,2)$	-86.538	-124.888	-137.081
	$f(1,3)$	-161.531	-196.307	-204.062
	$f(1,4)$	-225.252	-263.277	-273.326
	$f(1,5)$	-275.176	-319.888	-332.081
57	(s_1, S_1)	(3,4)	(3,5)	(3,5)
	(s_2, S_2)	(2,4)	(3,4)	(3,5)
	(s_3, S_3)	(1,3)	(2,3)	(2,4)
	$f(1,-5)$	303.284	262.326	249.423
	$f(1,-4)$	248.284	207.326	194.423
	$f(1,-3)$	193.284	152.326	139.423
	$f(1,-2)$	138.284	97.3256	84.4229
	$f(1,-1)$	83.2843	42.3256	29.4229
	$f(1,0)$	28.2843	-12.6744	-25.5771
	$f(1,1)$	-26.7157	-67.6744	-80.5771
	$f(1,2)$	-81.7157	-122.674	-135.577
	$f(1,3)$	-156.995	-192.751	-201.207
	$f(1,4)$	-221.716	-260.563	-271.471
	$f(1,5)$	-272.256	-317.674	-330.577
60	(s_1, S_1)	(3,4)	(3,5)	(3,5)
	(s_2, S_2)	(3,4)	(3,5)	(3,5)
	(s_3, S_3)	(2,3)	(2,3)	(2,4)
	$f(1,-5)$	306.317	264.178	250.927
	$f(1,-4)$	251.317	209.178	195.927
	$f(1,-3)$	196.317	154.178	140.927
	$f(1,-2)$	141.317	99.1776	85.9273
	$f(1,-1)$	86.3173	44.1776	30.9273
	$f(1,0)$	31.3173	-10.8224	-24.0727
	$f(1,1)$	-23.6827	-65.8224	-79.0727
	$f(1,2)$	-78.6827	-120.822	-134.073
	$f(1,3)$	-152.962	-189.738	-198.353
	$f(1,4)$	-218.683	-258.302	-269.616
	$f(1,5)$	-269.84	-315.822	-329.073

p		τ 0	0.05	0.3
63	(s_1, S_1)	(3,4)	(3,5)	(3,5)
	(s_2, S_2)	(3,4)	(3,5)	(3,5)
	(s_3, S_3)	(2,3)	(2,4)	(2,4)
	$f(1,-5)$	308.906	265.691	252.432
	$f(1,-4)$	253.906	210.691	197.432
	$f(1,-3)$	198.906	155.691	142.432
	$f(1,-2)$	143.906	100.691	87.4316
	$f(1,-1)$	88.9059	45.6907	32.4316
	$f(1,0)$	33.9059	-9.30925	-22.5684
	$f(1,1)$	-21.0941	-64.3093	-77.5684
	$f(1,2)$	-76.0941	-119.309	-132.568
	$f(1,3)$	-149.373	-187.051	-195.498
	$f(1,4)$	-216.094	-256.379	-267.762
	$f(1,5)$	-267.869	-314.309	-327.568
66	(s_1, S_1)	(3,4)	(3,5)	(3,5)
	(s_2, S_2)	(3,4)	(3,5)	(3,5)
	(s_3, S_3)	(2,3)	(2,4)	(2,4)
	$f(1,-5)$	311.494	266.961	253.936
	$f(1,-4)$	256.494	211.961	198.936
	$f(1,-3)$	201.494	156.961	143.936
	$f(1,-2)$	146.494	101.961	88.936
	$f(1,-1)$	91.4945	46.9608	33.936
	$f(1,0)$	36.4945	-8.03925	-21.064
	$f(1,1)$	-18.5055	-63.0392	-76.064
	$f(1,2)$	-73.5055	-118.039	-131.064
	$f(1,3)$	-145.784	-184.573	-192.643
	$f(1,4)$	-213.506	-254.688	-265.907
	$f(1,5)$	-265.897	-313.039	-326.064

A continuación se muestran las Figuras 5.3 y 5.4 para ilustrar gráficamente el efecto de los parámetros τ y p sobre el coste mínimo esperado en el estado $(1,0)$.

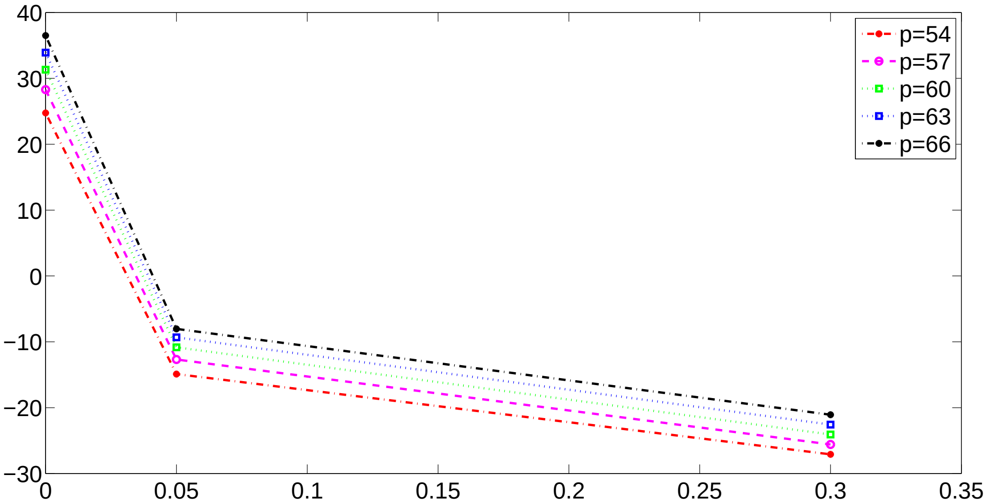


Figura 5.3: Variación de $f(1,0)$ con τ.

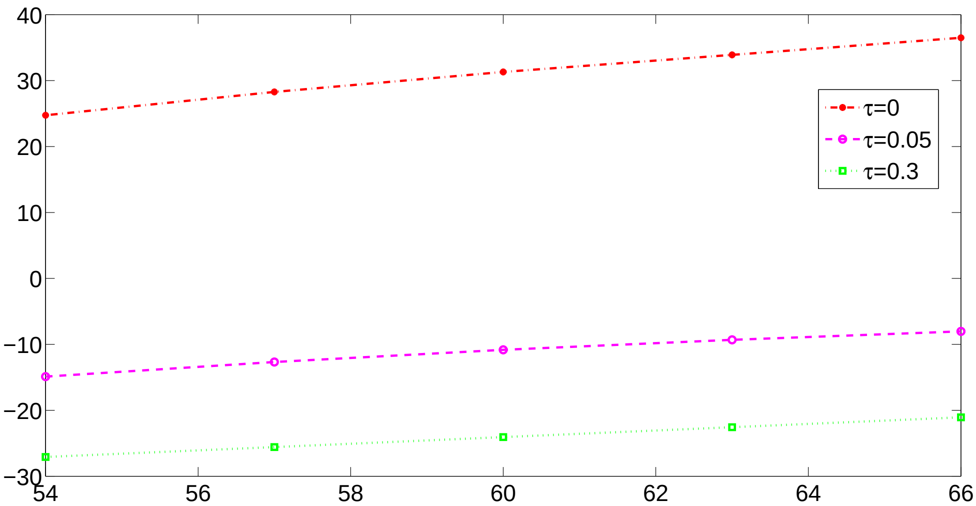


Figura 5.4: Variación de $f(1,0)$ con p.

A la vista de estos resultados numéricos, pueden hacerse los siguientes comentarios sobre el efecto de los parámetros τ y p en las soluciones óptimas para este ejemplo numérico:

1. Como es de esperar, se observa que si x es el nivel inicial del inventario, $f(1, x)$ crece cuando los parámetros de coste aumentan.
2. Con respecto a las políticas (s_n, S_n):
    a) (s_1, S_1): Fijando $p = 54$, los dos niveles básicos de referencia (s_1, S_1) ambos se ven incrementados en una unidad con $\tau = 0.05$. Para $\tau = 0.3$ estos dos niveles no varían con respecto a $\tau = 0.05$. Para $p = 57, 60, 63, 66$, fijado $\tau = 0$, el nivel $s_1 = 3$ en vez de 2.
    b) (s_2, S_2): Fijando $p = 54, 57$, los dos niveles básicos de referencia (s_2, S_2) ambos varían de la misma forma: s_2 se incrementa primero en una unidad con $\tau = 0.05$ y, con $\tau = 0.3$, S_2 aumenta en una unidad sin haber variado el nivel s_2 asociado a $\tau = 0.05$. Para $p = 60, 63, 66$, variando τ, los niveles (s_2, S_2) son los mismos.
    c) (s_3, S_3): Fijando $p = 54, 57$, los dos niveles básicos de referencia (s_3, S_3) ambos varían de la misma forma: s_3 se incrementa primero en una unidad con $\tau = 0.05$ y con $\tau = 0.3$, S_3 aumenta en una unidad sin haber variado el nivel s_3 asociado a $\tau = 0.05$. Para $p = 60$, con $\tau = 0.05, 0.3$, los niveles (s_3, S_3) son los mismos. Para $p = 63, 66$, con $\tau = 0.05, 0.3$, los niveles (s_3, S_3) son los mismos.
3. Si nos centramos en el valor $f(1, 0)$:
    a) Fijado $\tau = 0$, una reducción del 10 % en el coste unitario de retropedidos p origina una reducción del coste en un 21 %. Un aumento del 10 % en el coste unitario de retropedidos p origina un aumento del coste en un 16.53 %.
    b) Fijado $p = 60$, un aumento del 5 % en el parámetro τ ocasiona una reducción del 132 % del coste. Además, un aumento del 30 % en el parámetro τ ocasiona una reducción en el mismo del 177 %.
4. Para $x > 0, x \in X$ y fijando $\tau = 0$, una sobreestimación del 10 % en el coste unitario de retropedidos p, origina un incremento del coste en menos de un 10 %.
5. Fijando $\tau = 0.05$ y sobreestimando p en un 10 %, se tiene que para $x = 1, 2$, el coste se reduce en más de un 50 % y, para $x = 3, 4, 5$ el coste ya se reduce en menos de un 25 %.

5.2. Rentabilidad del sistema

Una cuestión de interés en situaciones prácticas reales es la de establecer condiciones que aseguren que el sistema de inventario generará beneficios, al menos si se usa una política óptima a lo largo del horizonte de planificación.

Dado un nivel inicial de inventario x, diremos que el sistema de inventario es *rentable a lo largo del horizonte de planificación* si $f(1,x) < 0$, mientras que, si $f(1,x) > 0$ diremos que el sistema de inventario es *no rentable a lo largo del horizonte de planificación*. Cuando $f(1,x) = 0$ tendremos que el sistema iguala costes e ingresos y lo denominaremos sistema de inventario *en equilibrio a lo largo del horizonte de planificación*.

Diremos que el sistema de inventario es *absolutamente rentable a lo largo del horizonte de planificación* si $f(1,x) < 0$ para cada $x \in X$.

Por lo tanto, dados varios periodos del horizonte de planificación, si es posible conocer una relación existente entre los parámetros del sistema para que éste sea rentable, será posible establecer los mínimos precios de venta (unitarios) que garanticen la rentabilidad del mismo.

De este modo, dados los parámetros del sistema, hallaremos el precio de venta del producto que se debe rebasar para poder obtener un sistema rentable de inventario a lo largo del horizonte de planificación.

5.2.1. Caso de pérdida de ventas

Vamos a estudiar la rentabilidad del sistema definido por los parámetros correspondientes al sistema de la sección anterior (véase página 81). Aquí, centraremos el estudio en R_1 (se haría análogamente si estuviéramos interesados en establecer el mínimo precio de venta en cualquier otro periodo (o varios) del horizonte de planificación que asegurara la rentabilidad del sistema de inventario).

Tabla 5.1: $f(1,x)$ para diferentes parámetros R_1.

$f(1,x)$ \ R_1	90	94.5	96.52	99
$f(1,0)$	11.1819	3.48694	0.0327375	-4.20806
$f(1,1)$	-43.8181	-51.5131	-54.9673	-59.2081
$f(1,2)$	-114.386	-121.572	-123.987	-127.639
$f(1,3)$	-183.818	-191.513	-194.967	-199.208
$f(1,4)$	-220.867	-228.776	-232.326	-236.685
$f(1,5)$	-241.906	-249.815	-253.365	-257.724

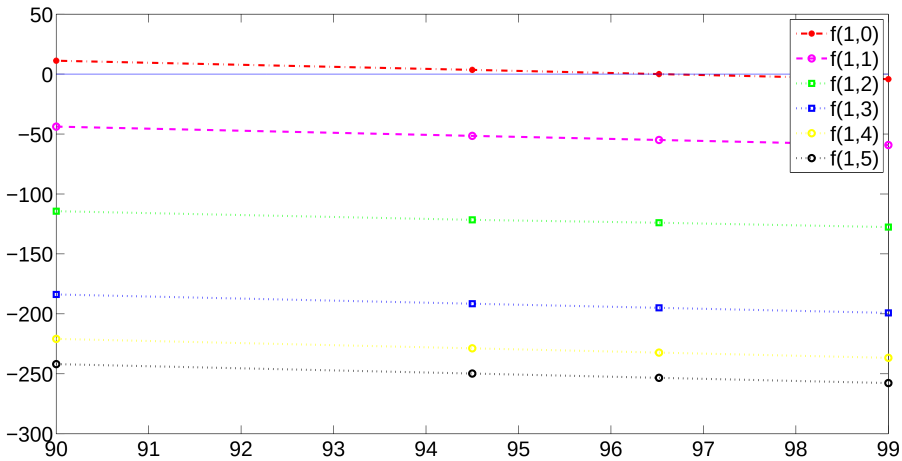


Figura 5.5: Variación de $f(1,x)$ con R_1.

A partir de la Tabla 5.1 y la Figura 5.5 observamos que, dados los parámetros iniciales del sistema, sólo es rentable a lo largo del horizonte de planificación disponer como nivel inicial del inventario de los valores 1, 2, 3, 4 y 5. Nótese, que a partir del valor $R_1 = 96.52$, $f(1,x) < 0$ para cada $x \in X$. Por tanto, si incrementamos el precio de venta en al menos un 7.24 %, el sistema es absolutamente rentable a lo largo del horizonte de planificación.

5.2.2. Caso de demanda acumulable

Vamos a estudiar la rentabilidad del sistema definido por los parámetros correspondientes al sistema de la sección anterior (véase página 85). Aquí, en principio, centraremos el estudio en R_1.

Tabla 5.2: $f(1,x)$ para diferentes parámetros R_1.

$f(1,x)$ \ R_1	90	94.5	218.99
$f(1,-5)$	306.317	295.631	0.00278978
$f(1,-4)$	251.317	240.631	-54.9972
$f(1,-3)$	196.317	185.631	-109.997
$f(1,-2)$	141.317	130.631	-164.997
$f(1,-1)$	86.3173	75.6311	-219.997
$f(1,0)$	31.3173	20.6311	-274.997
$f(1,1)$	-23.6827	-34.3689	-329.997
$f(1,2)$	-78.6827	-89.3689	-384.997
$f(1,3)$	-152.962	-163.649	-459.301
$f(1,4)$	-218.683	-229.369	-524.997
$f(1,5)$	-269.84	-280.526	-576.13

A partir de la Tabla 5.2 observamos que dados los parámetros iniciales del sistema sólo es rentable a lo largo del horizonte de planificación disponer como nivel inicial del inventario de los valores 1,2,3,4 y 5. Además, dados los parámetros iniciales del sistema, el sistema es absolutamente rentable a lo largo del horizonte de planificación si se establece $R_1 \geqslant 218.99$. Se observa que este precio unitario de venta al inicio del horizonte de planificación es un 243 % superior al parámetro inicial del sistema $R_1 = 90$.

Una alternativa para asegurar la rentabilidad absoluta del sistema (sin elevar *excesivamente* el precio unitario de venta en un solo periodo) a lo largo del horizonte de planificación sería incrementar el precio de venta unitario R_n no sólo en el periodo 1, sino en varios periodos.

Se puede comprobar que incrementando todos los precios de venta unitarios en al menos un 52 % se obtiene un sistema absolutamente rentable. Más concretamente:

Se tiene $R_1 = 136.8$, $R_2 = 136.8$ y $R_3 = 121.6$. Además:

$f(1,x)$ \ R_n	$R_1 = 136.8$, $R_2 = 136.8$ y $R_3 = 121.6$
$f(1,-5)$	0.378962
$f(1,-4)$	-54.621
$f(1,-3)$	-109.621
$f(1,-2)$	-164.621
$f(1,-1)$	-219.621
$f(1,0)$	-274.621
$f(1,1)$	-329.621
$f(1,2)$	-384.621
$f(1,3)$	-458.909
$f(1,4)$	-524.621
$f(1,5)$	-575.768

Conclusiones

A lo largo de este trabajo, a partir de un problema de Optimización Estocástica como es el del Control de Inventarios, a través de modelos *Newsboy* multiperiodo, se han estudiado y hallado propiedades retrohereditarias que nos faciliten el cálculo de soluciones óptimas.

Se han obtenido **resultados novedosos**, proporcionando teoremas bajo hipótesis más débiles que los existentes en la literatura. Más concretamente, se pide que la función $G_n(y)$ sea semicontinua inferiormente y K-convexa con $0 \leqslant K \leqslant K_n - \alpha K_{n+1}$ en X, y esto representa una notable mejora respecto al teorema existente en Denardo (1982, 2013), pues allí se exige que $G_n(y)$ sea continua y convexa en X, una condición más fuerte y exigente. Además, permitimos que la función de valor terminal sea semicontinua inferiormente, una mejora respecto a lo expuesto en Denardo (1982, 2013), pues allí se exige que sea continua. También se ha extendido el modelo a situaciones donde existe deterioro en el stock. Los resultados que presentamos en este trabajo mejoran notablemente los existentes en una buena parte de la literatura.

Para el cálculo explícito de las políticas (s, S) y para analizar las soluciones óptimas hemos desarrollado e implementado dos programas en AMPL. Con ellos se estudian diversos aspectos computacionales, como el análisis de la sensibilidad y la rentabilidad de los sistemas de inventario.

Bibliografía

[1] Avriel, M., Diewert, W.E., Schaible, S., Zang, I. (2010). *Generalized Concavity* . Classics in Applied Mathematics. SIAM.

[2] Arrow K.J., Harris T., Marschak J. (1951). "Optimal inventory policy". *Econometrica*, Vol. 19, No. 3, 250-272 .

[3] Arrow K.J. (1983). *Message to members, ISIR-Newsletter*. Vol. 1 (1).

[4] Abia Vian, J.A., García Laguna, J., Marijuán López, C. (1998). *Cálculo Diferencial en* $\mathbb{R}^n$ *. Teoría y Ejercicios.* Ed. Germinal.

[5] Beyer, D. , Cheng, F., Sethi, S.P., Taksar, M. (2010). *Markovian Demand Inventory Models*. Ed. Springer.

[6] Caplin, A., Leahy, J. (2010). "Economic theory and the world of practice: a celebration of the (s, S) model". *The Journal of Economic Perspectives*, Vol. 24, 1, 183-202.

[7] Choquet, G. (1966). *Topology*. Ed. Elsevier Academic Press.

[8] Denardo, E.V. (1982). *Dynamic Programming: Models and Applications*. Prentice Hall.

[9] Denardo, E.V. (2013). *Dynamic Programming: Models and Applications*. Dover Publications. (Reimpresión)

[10] Dvoretzky, A., Kiefer, J., Wolfowitz, J. (1952). "The inventory problem: I. Case of known distribution of demand, II. Case of unknown distribution of demand". *Econometrica*, 20, 187-222, 450-466.

[11] Fernández Suárez, N., García Laguna, J., Martínez Ferreras, J., San José Nieto, L.A. (1999). *Gestión de stocks : modelos de optimización y software.* Secretariado de Publicaciones e Intercambio Editorial, Universidad de Valladolid.

[12] Galindo Soto, F., Sanz Gil, J., Tristán Vega, L.A. (2005). *Guía Práctica de Cálculo Infinitesimal en Varias Variables* . Ed. Thomson.

[13] GARNIR, H.G. (1965). *Fonctions de Variables Réelles (2 vols.).* Ed. Librairie Universitaire, Louvain.

[14] GIRLICH, H.-J., CHIKÁN, A. (2001). "The origins of dynamic inventory modelling under uncertainty (the men, their work and connection with the Stanford Studies)". *International Journal of Production Economics*, Vol. 71, Issues 1-3, 351-363. Tenth International Symposium on Inventories.

[15] HILLIER F.S., LIEBERMAN G.J. (1991). *Introducción a la Investigación de Operaciones* . McGraw-Hill. 5ª edición.

[16] MUCKSTADT, J.A., SAPRA, A. (2010). *Principles of Inventory Management: When You Are Down to Four, Order More* . Ed. Springer.

[17] NAHMIAS, S. (2011). *Perishable Inventory Systems*. Ed. Springer.

[18] PANDO FERNÁNDEZ, V. (2014). *Análisis y optimización de nuevos sistemas determinísticos y estocásticos en gestión de stocks.* Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid.

[19] PORTEUS, E.L. (2002). *Foundations of Stochastic Inventory Theory.* Stanford University Press. Stanford. California.

[20] PORTEUS, E.L. (1971). "On the optimality of generalized (s, S) policies". *Management Science*, 17. 411-426.

[21] SAN JOSÉ NIETO, L.A. (2006). *Obtención de Algoritmos de Optimización en Modelos EOQ.* Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid.

[22] SCARF, H.E. (1960). "The optimality of (s, S) policies in dynamic inventory problems". En ARROW, K. J., SUPPES, P., KARLIN, S. (Eds.), *Mathematical Methods in the Social Sciences* (1959), Stanford University Press. Stanford. California.

[23] SCHÄL, M. (1976). "On the Optimality of (s, S)-Policies in Dynamic Inventory Models with Finite Horizon". *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 30, 3, 528-537.

[24] SHREVE, S.E. (1976). "Abbreviated proof [in the lost sales case]", en *Dynamic Programming and Stochastic Control*. Edited by D.P. Bertsekas, New York: Academic Press, 105-106.

[25] SIMCHI-LEVI, D., CHEN, X., BRAMEL, J. (2014). *The Logic of Logistics. Theory, Algorithms, and Applications for Logistics Management*. Ed. Springer.

[26] SNYDER, L.V. , MAX SHEN, Z.-J. (2011). *Fundamentals of Supply Chain Theory.* Wiley.

[27] STEFANOV, S.M. (2001). *Separable Programming: Theory and Methods*. Ed. Springer.

[28] VEINOTT JR., A.F. (1966). "On the Optimality of (s, S) Inventory Policies: New Conditions and a New Proof". *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 14, 5, 1067-1083.

[29] WHITIN, T.M. (1957). *The Theory of Inventory Management*. Rev. edition. Princeton University Press, Princeton, NJ.

[30] XU, Y., BISI, A., DADA, M. (2010). "New structural properties of (s, S) policies for inventory models with lost sales". *Operations Research Letters*, 38, 441-449.

Anexos

APÉNDICE A

Códigos de programas

A.1. Fichero perdida_ventasdeterioro.run

```
# Problema Estocástico de Inventarios con demanda entera, no negativa y acotada
# MODELO DE PÉRDIDA DE VENTAS
# include perdida_ventasdeterioro.run;
#########################################
reset;

# parametros escalares
param N;        # N es el numero de periodos
param alfa;     # alfa es el coeficiente de actualización del valor del dinero
param a;        # a es el menor valor admisible del inventario (almacén)
param b;        # b es el mayor valor admisible del inventario (almacén)

# conjuntos
set PERIODOS:=N+1..1 by -1;     # conjunto que indica los periodos posibles
set DEMANDAS;                   # conjunto para indexar las demandas
set ALMACEN:=a..b;              # conjunto valores admisibles del inventario (conjunto X, almacén)

# parametros vectoriales
param K {PERIODOS};     # coste fijo de compra en cada periodo
param W {PERIODOS};     # coste unitario de compra en cada periodo
param R {PERIODOS};     # valor unitario de venta en cada periodo
param h {PERIODOS};     # coste unitario de almacenamiento en cada periodo (holding cost)
param p {PERIODOS};     # coste unitario de retropedidos en cada periodo (holding cost)
param ro {PERIODOS};    # fracción de no deterioro en cada periodo

# parametros matriciales
param prob {PERIODOS,DEMANDAS};
param F_back {PERIODOS, ALMACEN};
param f_back {PERIODOS, ALMACEN};

########################################
### fichero de datos
data perdida_ventas.dat;
########################################
### Calculo de los costes de compra en una periodo n=1,..,N
param c_compra{n in PERIODOS, x in ALMACEN, y in ALMACEN: y>=x};
for{n in PERIODOS, x in ALMACEN, y in ALMACEN: y>=x}
        {if y=x then {let c_compra[n,x,y]:=0} else {let c_compra[n,x,y]:=K[n]} };
########################################
### Calculo de los costes de almacenamiemto en un periodo n=1,..,N

param c_almacen {n in PERIODOS, y in ALMACEN};

for{n in PERIODOS, y in ALMACEN: n<=N}{
        let c_almacen[n,y]:=
                (h[n]*sum{j in DEMANDAS: j<=y} prob[n,j]*(y-j))
            +   (p[n]*sum{j in DEMANDAS: j>=y} prob[n,j]*(j-y)) ;
```

```
                                };

########################################
### Calculo de la función G_n en un periodo n=1,..,N

param G {n in PERIODOS, y in ALMACEN};
for{n in PERIODOS, y in ALMACEN: n<=N}{
        let G[n,y]:=c_almacen[n,y]+(W[n]-alfa*R[n])*y
                  +alfa*(R[n])*(sum{j in DEMANDAS: j<=y} prob[n,j]*(y-j))
                  -alfa*(W[n+1])*ro[n]*(sum{j in DEMANDAS: j<=y} prob[n,j]*(y-j));
                                };

########################################
### Calculo de los ingresos asociados al periodo N+1 (Nota: obsérvese que suponemos x>=0)
for{x in ALMACEN} {let F_back[N+1,x]:= -W[N+1]*x ;};
########################################

########################################
### FUNCIÓN GENERAL DE RECURRENCIA (etapa n<=N)
param L {n in PERIODOS, y in ALMACEN};
for {n in PERIODOS: n<=N}{

     for{x  in ALMACEN: n<=N} {
               for{y in ALMACEN: n<=N}{
                         let L[n,y]:=G[n,y]
                           +alfa*( (sum{j in DEMANDAS: j<y } prob[n+1,j]*F_back[n+1, trunc(ro[n]*(y-j))] )
                               + (sum{j in DEMANDAS: j>=y} prob[n+1,j]*F_back[n+1,0]) )         ;
                                };
        let F_back[n,x]:= min{y in ALMACEN: y>=x}
                (c_compra[n,x,y] + L[n,y])
                ;};
                           };
########################################
### DECISION ÓPTIMA (etapa n<=N)
param S{n in PERIODOS, x in ALMACEN};   # S es la solución óptima en el periodo n con inventario inicial x

for {n in PERIODOS: n<=N}{
        for {x in ALMACEN}{
                for {y in ALMACEN: y>=x} {
                        {if F_back[n,x]=(c_compra[n,x,y] + L[n,y] )
                        then {let S[n,x]:=y}};
                        } } };
########################################
###
param s{n in PERIODOS};

for {n in PERIODOS: n<=N}{
let s[n]:=Infinity;

for {ii in {x in ALMACEN : x=S[n,x] }} {
                        {if ii< s[n]
                        then {let s[n]:=ii}};

                                 } };

for {n in PERIODOS: n<=N+1}{

     for{x  in ALMACEN: n<=N+1} {

        let f_back[n,x]:=F_back[n,x]-W[n]*x
                ;       };
                           };



########################################
### Salida de resultados

printf"\n \n";
display PERIODOS;
display DEMANDAS;
display ALMACEN;
display prob;
display K, W, R, h, p;
```

```
display c_compra;
display c_almacen;
display F_back;
display S;
display s;
display f_back;
display { x in ALMACEN} f_back[1,x];
```

A.2. Fichero demanda_acumulabledeterioro.run

```
# Problema Estocástico de Inventarios con demanda entera, no negativa y acotada
# MODELO DE DEMANDA ACUMULABLE
# include demanda_acumulabledeterioro.run;
########################################
reset;

# parametros escalares
param N;        # N es el numero de periodos
param alfa;     # alfa es el coeficiente de actualización del valor del dinero
param a;        # a es el menor valor admisible del inventario (almacen)
param b;        # a es el mayor valor admisible del inventario (almacen)

# conjuntos
set PERIODOS:=N+1..1 by -1;     # conjunto que indica los periodos posibles
set DEMANDAS;                   # conjunto para indexar las demandas
set ALMACEN:=a..b;              # conjunto valores admisibles del inventario (conjunto X, almacen)

# parametros vectoriales
param K {PERIODOS};     # coste fijo de compra en cada periodo
param W {PERIODOS};     # coste unitario de compra en cada periodo
param R {PERIODOS};     # valor unitario de venta en cada periodo
param h {PERIODOS};     # coste unitario de almacenamiento en cada periodo (holding cost)
param p {PERIODOS};     # coste unitario de retropedidos en cada periodo (holding cost)
param tau {PERIODOS};   # fracción de deterioro en cada periodo

# parametros matriciales
param prob {PERIODOS,DEMANDAS};
param F_back {PERIODOS, ALMACEN};
param f_back {PERIODOS, ALMACEN};
########################################
### fichero de datos
data demanda_acumulable.dat ;
########################################
### Calculo de los costes de compra en una periodo n=1,..,N
param c_compra{n in PERIODOS, x in ALMACEN, y in ALMACEN: y>=x};
for{n in PERIODOS, x in ALMACEN, y in ALMACEN: y>=x}
        {if y=x then {let c_compra[n,x,y]:=0} else {let c_compra[n,x,y]:=K[n]} };
########################################
### Calculo de los costes de almacenamiemto en un periodo n=1,..,N
param c_almacen {n in PERIODOS, y in ALMACEN};

for{n in PERIODOS, y in ALMACEN: n<=N}{
        let c_almacen[n,y]:=
                (h[n]*sum{j in DEMANDAS: j<=y} prob[n,j]*(y-j))
             +  (p[n]*sum{j in DEMANDAS: j>=y} prob[n,j]*(j-y)) ;
                                };
########################################
### Calculo de la función G_n en un periodo n=1,..,N
param G {n in PERIODOS, y in ALMACEN};
for{n in PERIODOS, y in ALMACEN: n<=N}{
        let G[n,y]:=c_almacen[n,y]+(W[n]-alfa*R[n])*y
                  +alfa*(R[n]-W[n+1])*((sum{j in DEMANDAS: a<=y-j<=b and y<=j } prob[n,j]*(y-j))
                  +(sum{j in DEMANDAS: a<=y-j<=b and y>j } prob[n,j]*(trunc(y-j-tau[n]*(y-j)))));
                                };
########################################
### Calculo de los ingresos asociados al periodo N+1
for{x in ALMACEN}
```

```
{if x>=0 then {let F_back[N+1,x]:= -W[N+1]*x } else {let F_back[N+1,x]:= K[N+1]}  };

########################################

########################################
### FUNCIÓN GENERAL DE RECURRENCIA (etapa n<=N)

param L {n in PERIODOS, y in ALMACEN};

for {n in PERIODOS: n<=N}{


     for{x  in ALMACEN: n<=N} {
               for{y in ALMACEN: n<=N }{
                let L[n,y]:=G[n,y] +alfa*((sum{j in DEMANDAS: a<=y-j<=b and y<=j} prob[n+1,j]*F_back[n+1,y-j])
                + (sum{j in DEMANDAS: a<=y-j<=b and y>j} prob[n+1,j]*F_back[n+1,trunc(y-j-tau[n]*(y-j))]));
                                };

        let F_back[n,x]:= min{y in ALMACEN: y>=x}
                (c_compra[n,x,y] + L[n,y]);
                                };
                           };
########################################
### DECISION ÓPTIMA (etapa n<=N)
param S{n in PERIODOS, x in ALMACEN};   # S es la solución óptima en el periodo n con inventario inicial x

for {n in PERIODOS: n<=N}{
        for {x in ALMACEN}{
                for {y in ALMACEN: y>=x} {
                        {if F_back[n,x]=(c_compra[n,x,y] + L[n,y] )
                        then {let S[n,x]:=y}};
                        } } };
########################################
###
param s{n in PERIODOS};

for {n in PERIODOS: n<=N}{
let s[n]:=Infinity;

for {ii in {x in ALMACEN : x=S[n,x] }} {
                        {if ii< s[n]
                        then {let s[n]:=ii}};

                                 } };

for {n in PERIODOS: n<=N+1}{

     for{x  in ALMACEN: n<=N+1} {

        let f_back[n,x]:=F_back[n,x]-W[n]*x
                ;       };
                           };
########################################
### Salida de resultados

printf"\n \n";
display PERIODOS;
display DEMANDAS;
display ALMACEN;
display prob;
display K, W, R, h, p;

display c_compra;
display c_almacen;

display F_back;
display S;
display s;
display f_back;
display { x in ALMACEN} f_back[1,x];
```

A.3. perdida_ventas.dat

```
# Problema Estocástico de Inventarios con demanda entera, no negativa, acotada y no uniforme
# fichero perdida_ventas.dat;

param N:=3;
param alfa:=0.95;
param a:=0;
param b:=5;

set DEMANDAS:=
     0
     1
     2
     3
     4
     5;

param:  K       W       R       h       p       ro:=
1       30      55      90      20      60      1
2       31      57      90      23      60      1
3       32      60      80      25      60      1
4       0       55      0       0       0       0;

param prob:
        0       1       2       3       4       5:=
1       0.1     0.25    0.4     0.2     0.05    0
2       0.25    0.4     0.2     0.15    0       0
3       0       0       0.15    0.1     0.35    0.4
4       0       0       0       0       0       0;
```

A.4. demanda_acumulable.dat

```
# Problema Estocástico de Inventarios con demanda entera, no negativa, acotada y uniforme
# fichero demanda_acumulable.dat;

param N:=3;
param alfa:=0.95;
param a:=-5;
param b:=5;

set DEMANDAS:=
     0
     1
     2
     3
     4
     5;

param:  K       W       R       h       p       tau:=
1       30      55      90      20      60      0
2       31      57      90      23      60      0
3       32      60      80      25      60      0
4       0       55      0       0       0       0;

param prob:
        0       1       2       3       4       5:=
1       0.1667  0.1667  0.1667  0.1667  0.1667  0.1667
2       0.1667  0.1667  0.1667  0.1667  0.1667  0.1667
3       0.1667  0.1667  0.1667  0.1667  0.1667  0.1667
4       0       0       0       0       0       0;
```