Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Grado en Economía

Valoración de derivados financieros

Presentado por:

Tamara Bayón Minguela

Valladolid, 28 de Julio de 2015

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

Una buena modelización de la dinámica de la estructura temporal de los tipos de interés (ETTI) es fundamental para conocer el funcionamiento de la Economía. No hay que olvidar el importante papel que juegan los tipos de interés en los movimientos del sector monetario.

En la Economía Financiera, una estimación precisa de la ETTI permite valorar múltiples activos y diseñar estrategias de cobertura en las inversiones que se realizan.

Desde el punto de vista de la Teoría Económica, la ETTI es una herramienta fundamental para el estudio de la formación de expectativas y la transmisión de la política monetaria las variables macroeconómicas relevantes. Además, la ETTI es un instrumento fundamental en la teoría monetaria y contribuye a analizar las condiciones de financiación del Tesoro Público.

Es muy utilizada para analizar, junto con otras herramientas, las condiciones de política monetaria en las que se tiene que actuar y la percepción por parte de los agentes y el grado de confianza que genera respecto al mantenimiento en el futuro.

El mercado de los derivados de los tipos de interés ha sufrido un gran crecimiento en las décadas de los 80 y 90, debido en gran medida a la gran volatilidad de los tipos de interés. En 1979, EEUU cambió su política monetaria lo que provocó la gran volatilidad de los tipos en dicho país. Actualmente, debido a la globalización de los mercados de capitales, la volatilidad podemos observarla a nivel mundial.

En este contexto las empresas han intentado buscar la compra de seguros, para contrarrestar el aumento de la incertidumbre de los mercados de tipos de interés, lo que ha llevado a un fuerte aumento del volumen en investigación sobre el comportamiento de la ETTI, la valoración de derivados y la gestión del riesgo.

La ETTI no es observable directamente, pero los tipos observados reflejan efectos distintos del plazo, como el riesgo del crédito, la fiscalidad, el riesgo de liquidez o las características de instrumentos financieros, por lo que la ETTI requiere una estimación.

Los trabajos realizados en este campo se dividen en: estáticos, que son los modelos de ajuste de la curva tipo-plazo; y dinámicos, que describen la evolución en el tiempo de la relación tipo-plazo, basándose, en general, en una valoración estocástica en ausencia de arbitraje.

Respecto al modelo dinámico, en los años 70, Merton (1973) modelizó el tipo de interés mediante un proceso estocástico para la valoración de opciones. Vasiceck (1977), Brennan y Schwartz (1979) utilizaron argumentos de arbitraje para modelizar la ETTI, basándose en los modelos de Black y Scholes (1973). Posteriormente, se han construido nuevos modelos más perfeccionados, como en Cox, Ingersoll, y Ross (1985), Hull y White (1990b), Chan et al.(1992), Ahn y Gao (1999), y los modelos no paramétricos de Staton (1997) y Jiang (1998b).

Hay dos tipos de modelos entre los propuestos, por un lado, están los Endógenos, que describen los movimientos de la curva de tipos a partir de una especificación particular de las variables estado y, por otro lado, están los Exógenos o consistentes con la curva que deben de ser recalibrados constantemente para ser consistentes con la estructura temporal.

Uno de los objetivos de este trabajo es estimar un modelo de valoración de activos de renta de fija utilizando tipos de interés constantes en un modelo determinista para hacer una descripción de la ETTI.

Existen dos técnicas de estimación de las funciones de los modelos: las técnicas paramétricas y las no paramétricas. En las técnicas paramétricas las funciones a estimar tienen una expresión conocida y dependen de un conjunto de parámetros que son los que se deben aproximar. En las técnicas no paramétricas se basan en la estimación de las diversas funciones que aparecen en el modelo sin determinar a priori ninguna relación funcional.

La estructura de este trabajo es la siguiente: en el Capítulo 2 introducimos los activos de renta fija y los distintos tipos que existen e introducimos algunos conceptos necesarios, en el Capítulo 3, definimos la estructura temporal de los tipos de interés e introducimos en las definiciones y la notación necesarias para plantear los modelos que utilizamos las siguientes secciones, en el Capítulo 4, describimos la ETTI en un modelo en tiempo continuo determinista, y realizamos una breve introducción a los modelos estocásticos. Por último, en el Capítulo 5, realizamos una aplicación empírica del modelo determinista, con los tipos de interés de USA, para modelizar la ETTI durante los últimos 20 años, realizando la estimación de los parámetros y estudiando la sensibilidad a ellos.

2. ACTIVOS DE RENTA FIJA

En la actualidad el mercado de renta fija se ha convertido en una de las fuentes principales de financiación de las empresas en todo el mundo. Este mercado está cobrando cada vez más importancia por dos motivos principales. En primer lugar, por el crecimiento de los fondos disponibles por inversores institucionales y, en segundo lugar, por ser una fuente de financiación alternativa a la bancaria.

En este capítulo describimos los diferentes tipos de títulos de renta fija que existen en el mercado y cómo se valoran. Comenzamos con el caso en el que el tipo de interés es constante y posteriormente lo extenderemos al caso en el que el tipo de interés es variable.

2.1 TIPOS DE ACTIVOS DE RENTA FIJA

Los activos de renta fija son valores representativos de una parte de un préstamo que pueden presentarse en forma de títulos o de anotaciones en cuenta. Dichos activos son emitidos por las Administraciones públicas, ya sea el Estado, las Comunidades Autónomas, Ayuntamientos o las Diputaciones; o por empresas que quieran conseguir fondos para financiar su actividad empresarial.

Los términos de cada emisión, que los podemos considerar globalmente a todos los efectos como un préstamo, son establecidos por el prestatario (emisor) que incita a los inversores a suscribir dicho préstamo a un determinado precio de emisión. En el caso de que la emisión se realice mediante subasta, son los inversores los que pueden ofrecer un precio por el que estén dispuestos a pagar los títulos y de esta manera se le será asignado al mayor postor. A cambio los inversores reciben el derecho a recibir los intereses pactados (flujos de caja predeterminados) y a la devolución del capital invertido o de una parte de él en una fecha dada.

Los activos de renta fija pueden tener diferentes características dependiendo, entre otras cosas, de cuál sea el emisor. Así, diferenciaremos entre deuda pública y renta fija privada.

2.1.1 Deuda pública

Son los valores emitidos por las Administraciones públicas y pueden ser:

- Letras del Tesoro: Son activos a corto plazo (máximo 18 meses) emitidos por la Dirección General del Tesoro; siempre al descuento representados mediante anotaciones en cuenta. Son emitidos regularmente a través de subastas competitivas como forma de financiación y se ofrecen a distintos plazos de vencimiento; a 6, 12 y 18 meses. Las operaciones pueden ser tramitadas en el mercado primario y en el secundario a través de cualquier entidad financiera, o también a través del Banco de España mediante las cuentas directas de deuda del Estado.
- Bonos y Obligaciones del Estado: los bonos son activos de medio plazo y las obligaciones de largo plazo y son emitidos por el Estado con rendimiento explícito. Los bonos se emiten a 3 y 5 años y las obligaciones a 10, 15 y 30 años. A lo largo de su vida ambos activos devengan un tipo de interés fijo que se abona mediante cupones anuales que se establece como un porcentaje del nominal del título (tanto del cupón). Estos productos pueden adquirirse en el mercado primario o secundario de igual forma que las Letras del Tesoro.
- Deuda autonómica y de otros Organismos Públicos: los distintos entes públicos emiten valores a corto plazo (pagarés) y a largo plazo y tiene características similares a los anteriores.

En este trabajo nos centrarnos en los valores que ofrecen al inversor una serie de flujos de caja predeterminados como son los bonos y obligaciones con pago periódicos de cupones y bonos cupón cero.

Los bonos y obligaciones con pago periódico de cupones son títulos que generan al inversor pagos periódicos de intereses (cupones) que son un porcentaje del nominal del título (tanto del cupón). Los cupones se pagan anual o semestralmente. En la fecha de amortización del título, el inversor recibirá el último cupón más el precio de amortización (porcentaje del nominal).

Si el precio de amortización es del 100%, el inversor recibirá en la fecha de amortización el último cupón más un cuantía igual al nominal del título (titulo amortizable a la par); si el precio de amortización es superior será por encima de la par, y si es inferior por debajo de la par.

Los bonos cupón cero no pagan cupones sino que se paga el nominal y los intereses generados en la fecha de amortización del título. Los flujos de caja generados quedan completamente determinados por el nominal, su precio de amortización y la fecha de amortización. Cuando los bonos cupón cero se amortizan al 100% de su valor nominal se llaman activos emitidos al descuento, y su precio de emisión ha de ser inferior al nominal.

2.1.2 Renta fija privada

Son los productos de renta fija que son emitidos por empresas privadas, y quedan obligadas a editar y registrar en la CNMV un folleto informativo cada vez que realizan una emisión.

- Pagarés de empresa: valores cupón cero emitidos al descuento, su rentabilidad se obtiene por diferencia entre el precio de compra y el valor nominal del pagaré que se recibe en la fecha de amortización. Son a corto plazo, y existen vencimientos entre siete días y venticinco meses, aunque los más frecuentes son de uno, tres, seis, doce y dieciocho meses. Los pagarés se colocan en el mercado primario mediante subasta competitiva o negociación directa entre la entidad financiera y el inversor.
- Bonos y obligaciones: son valores a medio y a largo plazo. Las características varían dependiendo de su emisión (fecha de vencimiento, tipo de interés, periodicidad de los cupones, precios de emisión y amortización…). En este caso si la evolución de los tipos de interés es desfavorable, se podría no recibir ningún rendimiento o incluso obtener pérdidas.

- Obligaciones convertibles y/o canjeables: dan derecho al propietario a cambiarlos por acciones en una fecha determinada. En el caso de las canjeables las acciones que se entregan forman parte de la cartera del emisor. En las convertibles, las acciones entregadas son nuevas. Las condiciones se especifican en el Folleto de Emisión. Hasta la fecha de conversión, el tenedor recibe los intereses mediante el cobro de los cupones periódicos.
- Cédulas hipotecarias: son emitidas por entidades de crédito, respaldados de modo global por su cartera de préstamos hipotecarios. Suelen ser emisiones a medio plazo.
- Titulizaciones hipotecarias o de activos: venta o cesión de determinados activos.

2.2 VALORACIÓN DE ACTIVOS CON TIPO DE INTERÉS CONSTANTE

En esta sección suponemos que el tipo de interés es constante, es decir, que el precio con el que el mercado remunera es constante y conocido[1]. Bajo esta hipótesis el valor actual de una unidad monetaria en t viene determinada por la siguiente expresión:

$$v(t) = \frac{1}{(1+i)^t},$$

donde $i(t) = i$, es el tipo de interés efectivo periodal constante.

El valor de un activo de renta fija, es por tanto, la suma de los valores actuales de los flujos de caja futuros que genere el activo a favor del inversor. Por ejemplo, si tenemos un título que genera los siguientes flujos de caja:

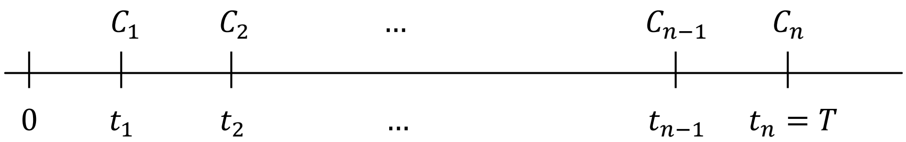


Figura 1

[1] Para realizar esta sección nos hemos ayudado de la publicación de Navarro y Nave (2001).

el valor actual de este título es:

$$V(0) = \sum_{j=1}^{n} C_j v(t_j) = \sum_{j=1}^{n} \frac{C_j}{(1+i)^{t_j}}.$$

A la hora de proceder a la compra de un título sólo se valoran los flujos de caja futuros que vaya a generar ese título, ya que será lo que perciba el inversor en el futuro mientras mantenga el título en su cartera. Los pagos anteriores no tendrán valor para él.

Si suponemos un bono u obligación con un nominal N u.m. con n años hasta su amortización y con el pago de cupones anual de cuantía $C = cN$ u.m., con c siendo el tanto del cupón, su valor actual vendrá expresado por:

$$V(0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{C}{(1+i)^{t_j}} + \frac{N}{(1+i)^{T}}.$$

Dependiendo del valor del bono o la obligación en el momento posterior al pago del primer cupón se obtienen las siguientes relaciones:

- Si el tanto del cupón coincide con el tipo de interés efectivo, $c = i$, entonces, el título cotiza a la par, $V(0) = N$.
- Si el tanto del cupón es superior al tipo de interés efectivo, $c > i$, entonces, el título cotiza por encima de la par, $V(0) > N$.
- Si el tanto del cupón es inferior al tipo de interés efectivo, $c < i$, entonces, el título cotiza por debajo de la par, $V(0) < N$.

Como ejemplo, podemos ver en la representación gráfica de la función $V(t)$, Figura 2, de un bono que cotiza a la par nos da la evolución a lo largo del tiempo del valor de un bono con pago periódico de cupones bajo la hipótesis de tipo de interés constante.

Como se puede observar en la Figura 2 el aumento del valor del bono se produce a medida que se va acercando la fecha del cobre del cupón. El precio del bono va aumentando de forma exponencial en el intervalo de tiempo $[t_j, t_{j+1})$.

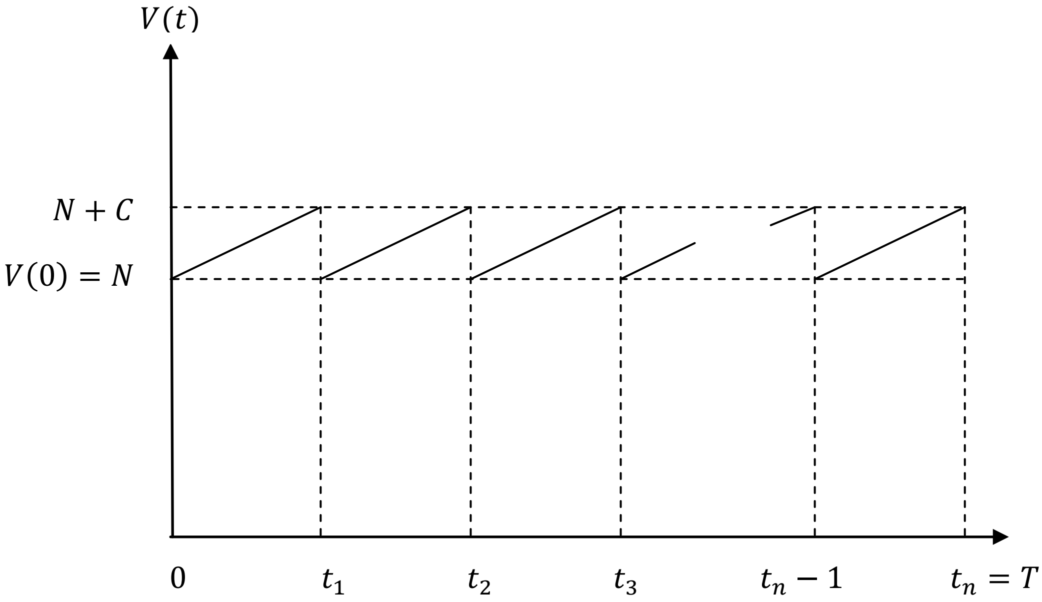


Figura 2

El valor del título vendrá dado por:

$$V(t) = \sum_{j=m+1}^{n} \frac{C}{(1+i)^{t_j-t}} + \frac{N}{(1+i)^{T-t}} = V(0)(1+i)^t\,, \qquad t_j \leq t \leq t_{j+1}.$$

En el momento del pago del cupón se produce una caída del valor del título que es equivalente a la cuantía del cupón, debido a que el título se valora según los flujos de caja futuros que generará. Esta evolución del valor del título da lugar a la forma de “dientes de sierra” y se conoce como efecto del cupón corrido. El cupón corrido es el incremento del precio del título que se produce paulatinamente a medida que se va acercando la fecha del pago del cupón y se calcula con la siguiente expresión:

$$CC = Importe\ del\ cupón\ periodal\ x\ \frac{nº\ de\ días\ transcurridos\ desde\ el\ pago\ del\ último\ cupón}{nº\ de\ días\ entre\ el\ pago\ de\ cupones}$$

que se traduciría en una aproximación lineal al incremento de la función $V(t)$ debido al transcurso del tiempo.

Normalmente el precio del activo de renta fija se publica eliminando el precio de este cupón corrido:

Precio ex-cupón = Precio – Cupón corrido.

En el caso del bono cupón cero, al generar un único flujo de caja futuro, el valor actual vendrá determinado por la expresión:

$$V(t_0) = P_n\, v(t_n) = \frac{P_n}{(1+i)^{t_n - t_0}},$$

donde P_n es el precio de amortización del título y t_n la fecha de amortización del título, y la evolución del precio del activo a lo largo del tiempo vendrá dado como en la Figura 3.

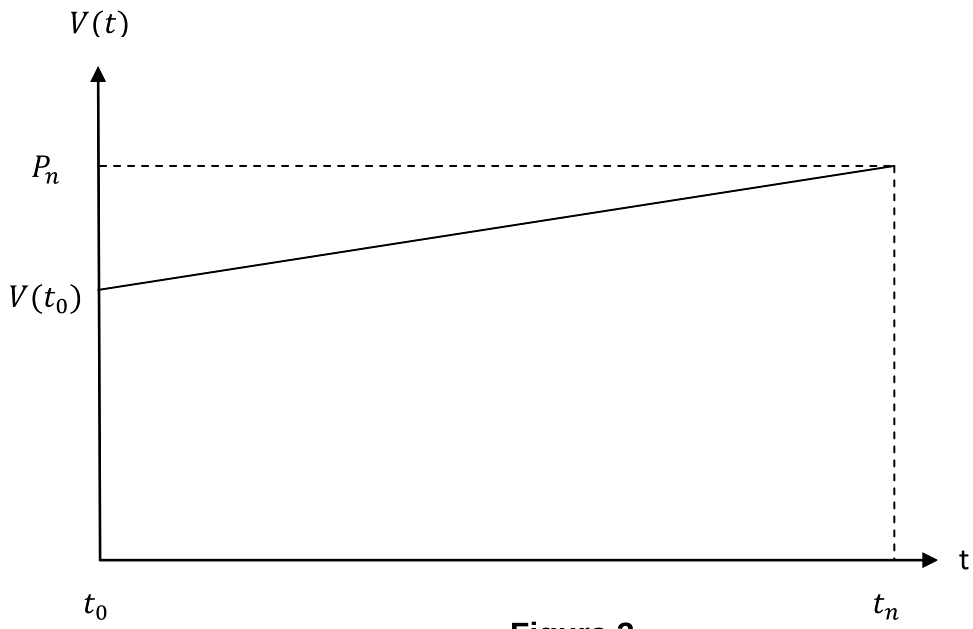


Figura 3

2.3 VALORACION DE ACTIVOS CON TIPOS DE INTERÉS VARIABLE

En esta sección consideramos que el tipo de interés instantáneo no es constante y que varía siguiendo una función $r(t)$. De esta forma, dado un capital de cuantía C_j con fecha de vencimiento en t_j, su valor en el momento $t = 0$ vendrá dado por $C_j v(t_j)$, o en capitalización continua con $i(t) = e^{r(t)} - 1$, como $C_j e^{-\int_0^{t_j} r(s)ds}$.

Evitando cualquier oportunidad de arbitraje, el valor de un bono en el momento $t = 0$ con un nominal de N u.m. que será amortizado en n periodos y que periódicamente se produce el pago de un cupón de cuantía C, vendrá dado por el valor actual de los flujos de caja futuros que genere dicho activo:

$$V(0) = Cv(t_1) + Cv(t_2) + \cdots + (C + P_n)v(t_n)$$

$$= Ce^{-\int_0^{t_1} r(s)ds} + Ce^{-\int_0^{t_2} r(s)ds} + \cdots + Ce^{-\int_0^{t_n} r(s)ds}.$$

Conocemos el valor de r(0), por ser el tipo de interés instantáneo actual, pero no la función r(t). Lo único que podemos conocer es el precio al que se están intercambiando los activos en un momento dado del tiempo. Así, en el caso de un título de renta fija, amortizable en n periodos, y que genera una serie de pagos de cuantías C_i hasta ese momento, su precio en el momento inicial t_0 vendrá dado por:

$$V(t_0) = C_1 e^{-R(t_1 - t_0)} + C_2 e^{-R(t_2 - t_0)} + \cdots + C_n e^{-R(t_n - t_0)},$$

siendo el valor R un tipo de interés constante instantáneo que iguala el valor actual de los flujos de caja generados por el activo con su precio (en C_n está incluido el nominal N).

El valor R recibe el nombre de tanto interno de rentabilidad (T.I.R) del título, y es el tipo de interés que suele acompañar a los precios de los activos de renta fija.

Todo esto no implica que el tipo de interés r(t) sea igual a R. Sin embargo, el T.I.R. es muy útil ya que a diferencia de r(t), es directamente observable y se puede calcular con las características y el precio del título, sabiendo que el precio sí proviene de los tipos de interés vigentes en un instante de tiempo concreto.

En el caso más simple de un bono cupón cero que paga periódicamente cupones de una cantidad C y se amortiza en n periodos, el T.I.R. viene dado por:

$$V(t_0) = P_n v(t_n) = P_n e^{-\int_{t_0}^{t_n} r(s)ds}.$$

3. LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE LOS TIPOS DE INTERÉS

En esta sección consideramos el tipo de interés variable y trabajamos con una metodología en tiempo continuo[2]. En primer lugar planteamos los conceptos

[2] Para realizar esta sección nos hemos ayudado de la publicación de González y Presa (2005).

básicos que se necesitan para describir la estructura temporal de los tipos de interés y, posteriormente, sus aplicaciones.

3.1 CONCEPTOS BÁSICOS

Cuando hablamos de tipos de tipos de interés al contado siempre lo asociamos con un plazo de vencimiento determinado, de ahí definimos la estructura temporal de los tipos de interés como la relación funcional entre los tipos de interés proporcionados por activos libres de riesgo y sus distintos plazos de vencimiento en un determinado momento. La ETTI es una función cuya variable dependiente es el tipo de interés al contado y la variable independiente es el vencimiento.

La representación gráfica de la estructura temporal se suele denominar curva de tipos de interés o curva de rendimientos, donde se coloca en el eje de ordenadas los diferentes tipos y en el eje de abcisas los periodos de vencimiento, como el de la Figura 4.

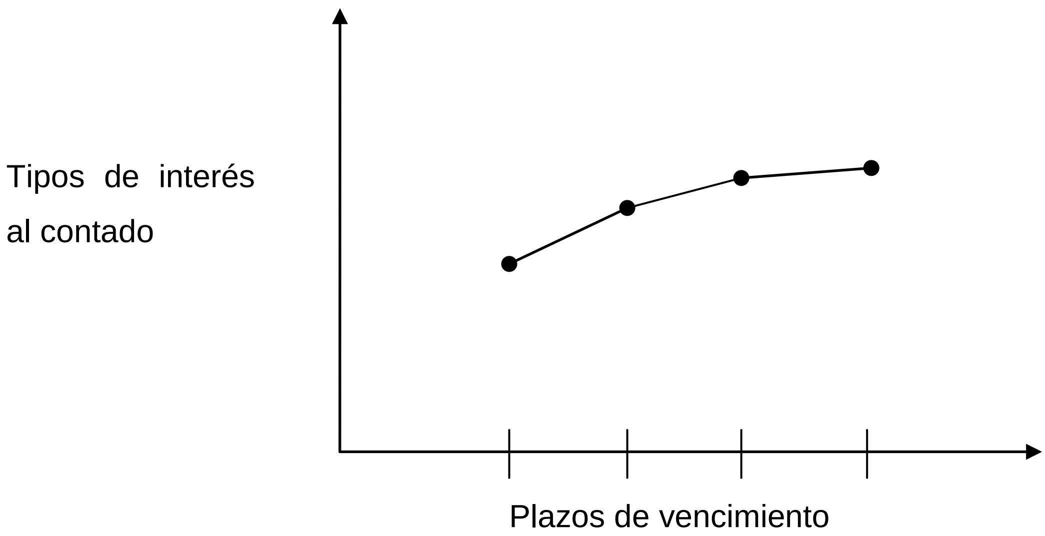


Figura 4

Para describir la ETTI utilizamos su relación con los bonos cupón cero.

Denotamos por $P(t,T),\ t \leq T,$ el precio en el instante de tiempo t, de un bono cupón cero con precio de amortización de 1 u.m., es decir, $P(T,T) = 1$. Este precio $P(t,T)$ crece a lo largo del tiempo hasta alcanzar el valor 1 en el vencimiento, aunque el tipo de interés sea constante.

Si representamos los precios de los bonos en un instante de tiempo t, en función del vencimiento de cada bono, se obtiene en el momento t una gráfica denominada curva de bonos cupón cero.

En la práctica, la información de los bonos cupón cero suele venir recogida mediante el tipo de interés continuo o spot en el instante t para un periodo de vencimiento $\tau = T - t$; $R(t,T)$, de forma que:

$$P(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)}, \qquad t \leq T, \qquad (3.1)$$

es decir,

$$R(t,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t}.$$

Al representar gráficamente estos tipos al contado $R(t,T)$ en un instante de tiempo t fijo y distintas fechas de vencimiento T, se obtiene la curva de tipos al contado en el momento t que es lo que se denomina estructura temporal de los tipos de interés.

En la ETTI se reflejan las expectativas del mercado acerca de la evolución a lo largo del tiempo de los tipos al contado.

Si consideramos que el plazo hasta el vencimiento se aproxime a cero y calculamos el límite del tipo de interés al contado, es decir:

$$r(t) = R(t,t) = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\ln P(t, t+\Delta t)}{\Delta t} = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t,t),$$

siendo $\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t,t)$ la derivada parcial en T=t.

Por tanto, r(t) es el tipo de interés instantáneo en el momento t, es decir, el tipo al contado para un periodo hasta el vencimiento infinitesimal en el instante t.

Dado que en el tipo de interés instantáneo no se tiene en cuenta el vencimiento, se pierde información al pasar de una curva completa de tipos a un tipo instantáneo y en general, no se puede obtener la curva completa de tipos al contando conociendo solo el instantáneo en el momento t.

Para obtener la curva completa de tipos al contado se utilizan los tipos a plazo considerando momentos infinitesimales y conservando la dependencia de la fecha de vencimiento. Para llevarlo a cabo, planteamos un contrato que se acuerda en el momento t, donde dos partes establecen intercambiar sin coste en la fecha T_1 un bono cupón cero con un periodo hasta el vencimiento $T_2 - T_1$ de un pago de $P(t, T_1, T_2)$ el cual hay que determinar, como se puede ver en la Figura 5.

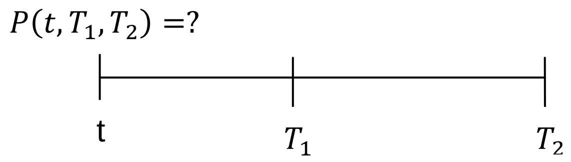


Figura 5

Si el mercado está libre de arbitraje se cumple:

$$P(t, T_1, T_2)P(t, T_1) = P(t, T_2) \quad => \quad P(t, T_1, T_2) = \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)}.$$

Así, el rendimiento al vencimiento a plazo correspondiente se obtiene a partir de los precios de los bonos cupón cero de la forma:

$$P(t, T_1, T_2) = e^{-R(t,T_1,T_2)(T_2-T_1)}$$

y, por tanto, el tipo a plazo será:

$$R(t, T_1, T_2) = -\frac{\ln P(t, T_1, T_2)}{T_2 - T_1} = -\frac{\ln \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)}}{T_2 - T_1} = -\frac{\ln P(t, T_2) - \ln P(t, T_1)}{T_2 - T_1}$$

Cuando $T_1 = T$ y $T_2 = T + \Delta t$, y hacemos tender a Δt a 0, se obtiene el tipo instantáneo a plazo que está representado en un periodo infinitesimal en la fecha T y valorado en la fecha t.

$$f(t, T) = R(t, T, T) = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\ln P(t, T + \Delta t) - \ln P(t, T)}{\Delta t},$$

y, entonces, $f(t, T) = \frac{\partial}{\partial T} \ln P(t, T)$. Además si $T = t$ entonces $f(t, t) = r(t)$.

De esta forma, a diferencia de lo que ocurre con el tipo de interés instantáneo $r(t)$, el tipo instantáneo a plazo permite obtener los precios $P(t, T)$ y los rendimientos $R(t, T)$,

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T f(t,s)ds} \quad y \quad R(t, T) = \frac{1}{T - t} \int_t^T f(t, s) ds$$

Si representamos gráficamente todos los $f(t,T)$ para distintos vencimientos T obtenemos la curva de tipos a plazo en la fecha t.

Dada la relación anterior entre el tipo a plazo y el tipo al contado:

$$f(t,T) = \frac{\partial}{\partial T}\ln P(t,T) = \frac{\partial}{\partial T}[R(t,T)(T-t)] = R(t,T) + (T-t)\frac{\partial}{\partial T}R(t,T)$$

La curva de la ETTI puede ser de diferentes tipos, dependiendo de las características de la economía en cada momento:

- Decreciente: los tipos de interés a corto plazo son mayores que los tipos a largo, también denominada curva invertida. Es una situación poco habitual cuyas expectativas son que los tipos de interés a corto o medio plazo disminuyan.
- Creciente: los tipos de interés a largo plazo son más elevados que los de corto plazo. Es la situación habitual donde el mayor plazo implica mayor riesgo.
- Plana: los tipos de interés se mantienen constantes o prácticamente iguales independientemente del plazo de vencimiento. Es una situación muy inusual e inestable.
- Oscilante o con jorobas: con tramos descendentes y ascendentes. Es una situación muy inestable por la incertidumbre del mercado.

Como ya hemos comentado, la estructura temporal de los tipos de interés, que relaciona el tipo de interés en cada momento con el vencimiento, no puede ser observada directamente en el mercado. En primer lugar, no se dispone de información suficiente para todos los vencimientos que se pueden considerar en un determinado horizonte temporal. En segundo lugar, se pueden encontrar distintos tipos de interés para un mismo vencimiento a causa de la cantidad de factores que influyen en su determinación. Esto es debido a que los tipos de interés observados reflejan distintos efectos del plazo, por ejemplo, el riesgo de insolvencia del emisor. Este riesgo es valorado por los agentes del mercado, que si lo consideran demasiado elevado sólo lo financian si los rendimientos son lo suficientemente altos para compensarles. Para que estos riesgos no afecten a la ETTI se utilizan los rendimientos de renta fija que son emitidos por el Estado, que se negocia en mercados secundarios, suficientemente líquidos para una gran gama de plazos, y para que en la medida de los posible sean tipos de interés libres de riesgo. De esta forma se consiguen rendimientos de renta fija estables lo más homogéneos posible y libres de posible factores que hagan distorsionar la relación de los tipos de interés y los plazos.

La negociación que se establece en los mercados financieros se produce en tiempo continuo que permite analizar la estructura temporal de una forma dinámica en vez de estática.

3.2 APLICACIONES DE LA ETTI

La aplicación de la estructura temporal de los tipos de interés se establece tanto en entornos microeconómicos como macroeconómicos, de hecho una de las variables macroeconómicas básicas es el tipo de interés. La ETTI es útil para analizar las condiciones en las que la política monetaria debe actuar, las expectativas del objetivo de dicha política y la percepción por parte de los agentes de la política y su grado de confianza en ella para mantenerla en un futuro.

La aplicación de la ETTI de carácter financiero se asocia con la valoración de los activos de renta fija a partir de la aplicación del principio de inexistencia de oportunidades de arbitraje (es un mercado de competencia perfecta), en el cual los productos financieros que generen flujos de caja iguales tienen que tener un mismo precio; y con la cobertura y evaluación de estrategias de gestión de productos derivados de renta fija.

En los últimos tiempos se ha producido un gran incremento de la negociación de los activos derivados del tipo de interés, y por ello es necesario ofrecer técnicas de valoración de derivados financieros que sean acordes con los nuevos activos surgidos.

La estimación de la ETTI nos permite también definir las medidas de riesgo asociadas a variaciones de los tipos de interés, lo que hace posible un mayor control de la eficiencia de las estrategias de gestión de carteras de renta fija.

Destacan entre otras aplicaciones en el sector financiero de la ETTI la construcción y contrastación de las distintas interpretaciones de la teoría de las expectativas, la contrastación de los efectos de la fiscalidad sobre los activos financieros y finalmente la construcción de nuevos modelos que analizan las posibilidades de arbitraje entre los activos de renta fija.

4. MODELOS DETERMINISTAS Y MODELOS ESTOCÁSTICOS

En este capítulo realizamos una descripción de la ETTI mediante un modelo en tiempo continuo determinista. Además, hacemos una introducción breve a los modelos estocásticos, donde el tipo de interés instantáneo sigue un proceso de difusión.

4.1 MODELO DETERMINISTA

Habitualmente, el precio de los bonos depende del tipo de interés, del tiempo y del vencimiento. En esta sección consideramos que el tipo de interés, $r(t)$, es una función determinista dependiente del tiempo. Consideramos que r es solución de una ecuación diferencial ordinaria cuya dinámica se conoce en el campo de la Economía Financiera como de reversión a la media, véase Navarro y Nave (2001),

$$dr(t) = k\big(\mu - r(t)\big)dt.$$

Aquí, el parámetro μ es el nivel a largo plazo del tipo de interés instantáneo y k es la velocidad con que el tipo de interés tiende hacia ese nivel μ.

Si resolvemos el problema de Cauchy formado por la ecuación diferencial anterior y un dato inicial $r(t_0) = r_0$, tenemos

$$\int_{r(t_0)}^{r(t)} \frac{dr}{\mu - r} = \int_{t_0}^{t} k ds, \qquad t_0 < t,$$

y, por tanto,

$$r(t) = \mu + (r(t_0) - \mu)e^{-k(t-t_0)}, \qquad t_0 < t. \tag{4.1}$$

En la ecuación diferencial vemos que $r(t) = \mu$ es un equilibrio de la ecuación y si analizamos su estabilidad vemos que la función $r(t)$, puede comportarse de diferentes formas a lo largo del tiempo, teniendo en cuenta que $k > 0$:

- Si $r(t_0) > \mu$, entonces, $dr(t)/dt < 0$ y $r(t)$ decrece hacia μ.
- Si $r(t_0) < \mu$, entonces, $dr(t)/dt > 0$ y $r(t)$ crece hacia μ.
- Si $r(t_0) = \mu$, $dr(t)/dt = 0$ y, por tanto, $r(t) = \mu$, $\forall t \geq t_0$.

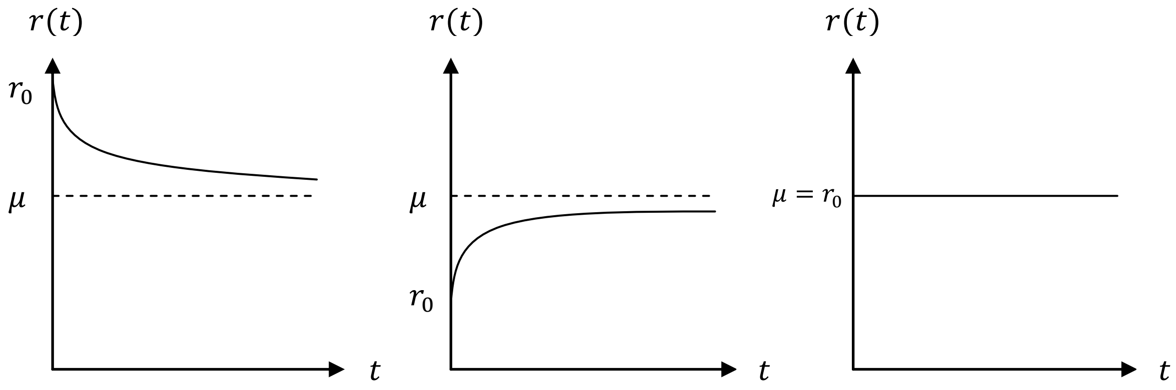


Figura 6

En la Figura 6 representamos el comportamiento del tipo de interés instantáneo a lo largo del tiempo, en los diferentes casos comentados previamente.

Esta es la razón por la que se suele describir el μ como el valor hacia el que tienden a largo plazo los tipos de interés, y el parámetro k , mide la rapidez con la que el tipo de interés instantáneo tiende hacia su valor a largo plazo, es decir, a su equilibrio.

Una vez descontada la dinámica del tipo de interés, pasamos a obtener a partir de ella la ETTI. Teniendo en cuenta la relación con el precio de un bono cupón cero.

$$P(t,T) = e^{-\int_t^T r(s)ds},$$

y la ecuación (3.1), tenemos que

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T r(s)ds$$

Sustituyendo en esta última relación la igualdad (4.1) e integrando, obtenemos

$$R(t,T) = \mu + \frac{r(t)-\mu}{k(T-t)}(1-e^{-k(T-t)})$$

Así pues, fijando un instante de tiempo t y considerando diferentes vencimientos, obtenemos la estructura temporal de los tipos de interés para el caso determinista considerado.

4.2 MODELOS ESTOCÁSTICOS

En los años sesenta en los mercados financieros se produjeron muchas fluctuaciones en los tipos de interés. Este hecho hizo ver la necesidad de considerar los modelos de la ETTI en un entorno estocástico en los tipos de interés.

En esta sección describimos brevemente modelos clásicos en la literatura de la ETTI desde el punto de vista estocástico.

Incluimos un término afectado por el parámetro σ, que recoge la volatilidad del tipo de interés junto con un proceso de Wiener, véase Oksendal (2005), donde $W(t)$ es una función aleatoria que depende del tiempo $W(0) = 0$ y sus incrementos siguen una Gaussiana de media 0 y varianza Δt, verificando las siguientes propiedades:

- $E[W(t + \Delta t) - W(t)] = 0,$
- $Var[W(t + \Delta t) - W(t)] = \Delta t,$
- Tiene incrementos independientes,
  $$E\big[\big(W(t + \Delta t) - W(t)\big)\big(W(t + j\Delta t) - W(t + (j - 1)\Delta t)\big)\big] = 0, \qquad j > 1.$$
- Las trayectorias $W(t)$ son continuas pero no diferenciables.

Entre los modelos clásicos de la ETTI se encuentran los comentados a continuación.

Vasiceck (1977) considera el proceso de difusión siguiente para describir la dinámica del tipo de interés,

$$dr(t) = k\big(\mu - r(t)\big)dt + \sigma dW(t), \qquad k, \sigma > 0, \mu \geq 0,$$

donde dW es un proceso de Wiener estándar, que recoge la aleatoriedad.

Aquí la tendencia, descrita por el primer término, describe una reversión a la media μ y la volatilidad, descrita por el segundo término, es constante, siendo independiente del nivel de los tipos de interés. Este hecho hace muy criticable este modelo ya que la idea más aceptada es que la volatilidad de los tipos de interés es mayor cuanto mayor sean éstos. Además, en este modelo nada impide que los tipos de interés puedan llegar a ser negativos.

Posteriormente, Cox, Ingersoll y Ross (1981) consideran en el siguiente proceso estocástico para describir la dinámica del tipo de interés,

$$dr(t) = k\big(\mu - r(t)\big)dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t); \qquad k, \sigma, \mu > 0$$

En este caso, la volatilidad es variable y creciente con la raíz de los tipos de interés.

Brennan y Schwartz (1982) consideran también un proceso estocástico con volatilidad variable proporcional al tipo de interés, de la forma:

$$dr(t) = k\big(\mu - r(t)\big)dt + \sigma r(t)dW(t); \quad k, \sigma > 0;\ \mu \geq 0\,.$$

En los modelos de Cox, Ingersoll y Ross (1981) y en el modelo de Brennan y Schwartz (1982), los procesos estocásticos representan barreras reflectantes desde arriba, eso hace que los tipos de interés nuca pueda ser negativos. Para ambos modelos la volatilidad sí depende del nivel de los tipos de interés.

En estos modelos, tras un razonamiento de no arbitraje, obtienen una forma cerrada de la solución, $R(t, r; T)$, es decir, de la ETTI; que depende del tipo de interés instantáneo.

5. APLICACIÓN EMPÍRICA

En este capítulo realizamos una aplicación empírica de lo expuesto de forma teórica anteriormente. En primer lugar, veremos la evolución de los tipos de interés en Estado Unidos desde 1995 hasta 2014, realizamos el estudio por separado de tres periodos de tiempo de esos 20 años, analizamos primero los datos y después estimamos los parámetros, analizando y comparando los resultados. Finalmente realizamos un análisis de sensibilidad de los parámetros, sometiéndolos a pequeños cambios, y comprobamos lo que implicarían pequeños errores en la estimación en la curva de tipos de interés.

5.1 DATOS

Para realizar este estudio hemos utilizado datos de los tipos de interés mensuales a tres meses, obtenidos de la Reserva Federal de Estados Unidos: http://www.federalreserve.gov/releases/h15/data.htm y http://www.federalreserve.gov/datadownload/Build.aspx?rel=H15.

En la Figura 7 se puede observar la evolución de los tipos de interés entre los años 1995 y 2014.

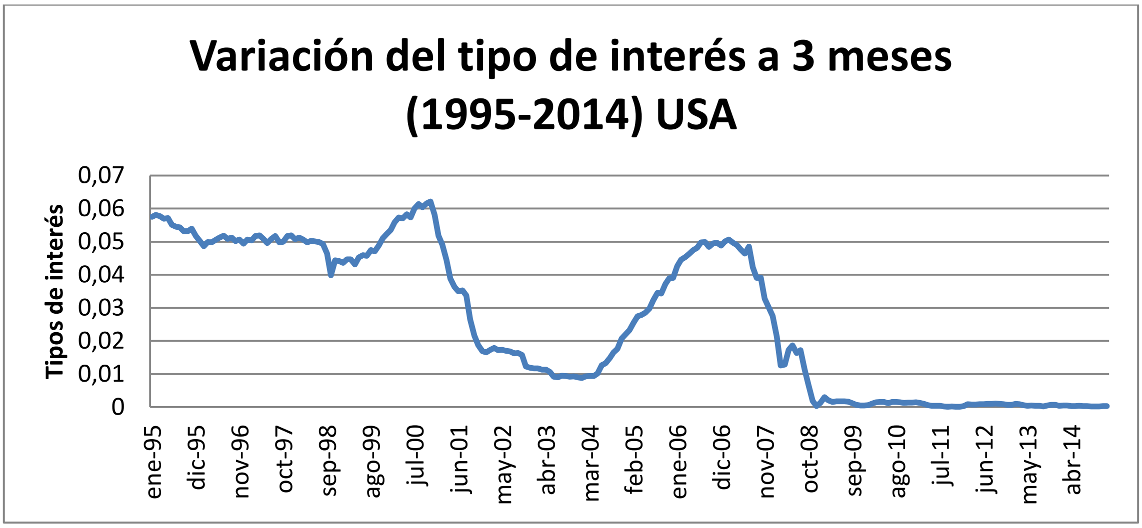


Figura 7

La Figura 7 describe una tendencia decreciente. En estos 20 años se ha producido una bajada de los tipos de interés desde el 5,75% en enero de 1995 hasta acabar en diciembre del 2014 situándose en 0,03%.

Como podemos observar, los tipos de interés mensuales hasta el año 2000 se mantuvieron en torno al 5%, sufriendo un pequeño repunte en ese último año llegando al 6,218% en noviembre de ese año. Posteriormente, sufrieron una caída hasta el 1% en mayo del 2003, para mantenerse en torno a ese valor hasta junio del año 2004, volviendo progresivamente a crecer al 5,06% en febrero de 2007, para decrecer después por debajo del 0,5% en estos últimos años alcanzando el 0,03% en diciembre de 2014.

Para realizar un trabajo más analítico hemos separado los 20 años en tres periodos para estudiarlos por separado: 1995 – 1999, 2000 – 2007 y 2008 -

2014. Para analizar las distintas series de tiempo de los tipos de interés hemos escogido una serie de estadísticos recogidos a continuación en la Tabla 1.

	PERIODOS		
	1995-1999	2000-2007	2008-2014
Media	0,0503	0,0319	0,0027
Mediana	0,0506	0,0326	0,0009
Varianza	1,39e-05	0,0003	2,89e-05
Coeficiente de variación	0,0742	0,5432	1,9968
Valor mínimo	0,0398	0,0088	0,0001
Valor máximo	0,0581	0,0622	0,0276

Tabla 1

El valor mínimo y el valor máximo nos indica cuál ha sido el menor y el mayor valor, respectivamente, alcanzado en cada periodo de tiempo considerado. Como podemos observar, los valores más bajos obtenidos, tanto para mínimos como para máximos, se encuentran en el último periodo de tiempo, donde los tipos de interés se mantienen entre el 0,01% y el 2,76%.

La media nos indica el valor medio obtenido de las observaciones para cada periodo de tiempo, que también va disminuyendo a lo largo del tiempo, debido a la tendencia decreciente.

La varianza es una medida vinculada a la dispersión o la variabilidad de la serie temporal, y se encarga de expresar la variabilidad de una distribución a través de un número en los casos en que los valores del tipo de interés, en este caso, están muy alejados o no de la media. Como podemos observar en la Tabla 1 la varianza es mayor en el periodo intermedio (2000-2007) por lo que podemos concluir que la dispersión o variabilidad de los tipos de interés es mayor en ese periodo que en los otros dos, donde los datos de los tipos de interés siguen una distribución más homogénea.

El coeficiente de variación es una medida de la dispersión relativa del conjunto de datos y se obtiene dividiendo la desviación típica de dicho conjunto entre su media aritmética. Es una medida independiente de las unidades de medición y es el mejor método para comparar conjuntos de datos, como en nuestro caso tres periodos de tiempo distintos, ya que nos dirá donde existe una mayor precisión. En la Tabla 1 vemos que el mayor dato de coeficiente de variación se encuentra en el último periodo, y que entre los otros dos el del periodo intermedio es mayor que el primero, por lo que podemos decir que los datos, presentan una variabilidad o dispersión relativa menor en el primer periodo de tiempo que en el intermedio, y a su vez ésta es menos en el intermedio que en el último. Aunque hay que tener en cuenta que la media en el último periodo es muy baja y, por tanto, el coeficiente de variación aumenta. El periodo 1995 – 1999 es en el que los datos se mantiene en un intervalo menor.

5.2 ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

La estimación de los parámetros la hemos realizado mediante la técnica de mínimos cuadrados. Los mínimos cuadrados es una técnica de análisis numérico, basada en la optimización dinámica, en la que a partir de la variable independiente, las variables dependientes y un conjunto de funciones, se intenta encontrar una función que sea continúa que se aproxime a los datos observados de la mejor manera posible, es decir, con el mejor ajuste, de acuerdo con el criterio del mínimo error cuadrático.

El método consiste en minimizar los residuos o errores al cuadrado, que se generan de la diferencia que existe entre los valores que se obtienen de la regresión propuesta y los valores de los datos observados en el periodo de tiempo concreto, de esta manera se nos proporciona la mejor estimación de los parámetros de la regresión.

La técnica de mínimos cuadrados se usa habitualmente para el ajuste de curvas, como es nuestro caso, donde con los datos observados de los tipos de interés a lo largo del tiempo, intentaremos ajustarla de la manera más adecuada a una curva de la forma:

$$r(s) = \mu - (\mu - r(t))e^{-k(s-t)}$$

Los parámetros que vamos a estimar para el ajuste de la curva son μ y k. Para obtener una aproximación de éstos parámetros hemos utilizado la opción Solver incorporada en el Excel, realizando los pasos descritos a continuación.

En primer lugar, hemos ajustado los datos mensuales observados de cada uno de los tres periodos: 1995 - 1999, 2000 – 2007, 2008 – 2014, a la forma de la curva propuesta para estimar en cada uno de ellos los parámetros μ y k. Para ello, hemos calculado el error absoluto y el error relativo para cada observación, y sus correspondientes cuadrados, obteniendo posteriormente una celda del Excel, el sumatorio de los errores al cuadrado que se muestra para cada periodo en la Tabla 2.

	PERIODOS		
	1995-1999	**2000-2007**	**2008-2014**
Suma de los errores al cuadrado	0,0003	0,0219	0,0003

Tabla 2

En tercer lugar, con la opción Solver del Excel, mencionada anteriormente, hemos minimizado el sumatorio de los errores absolutos al cuadrado para obtener las estimaciones de los parámetros μ y k. A modo demostración, la Figura 8 muestra la ventana del Solver para el primer periodo.

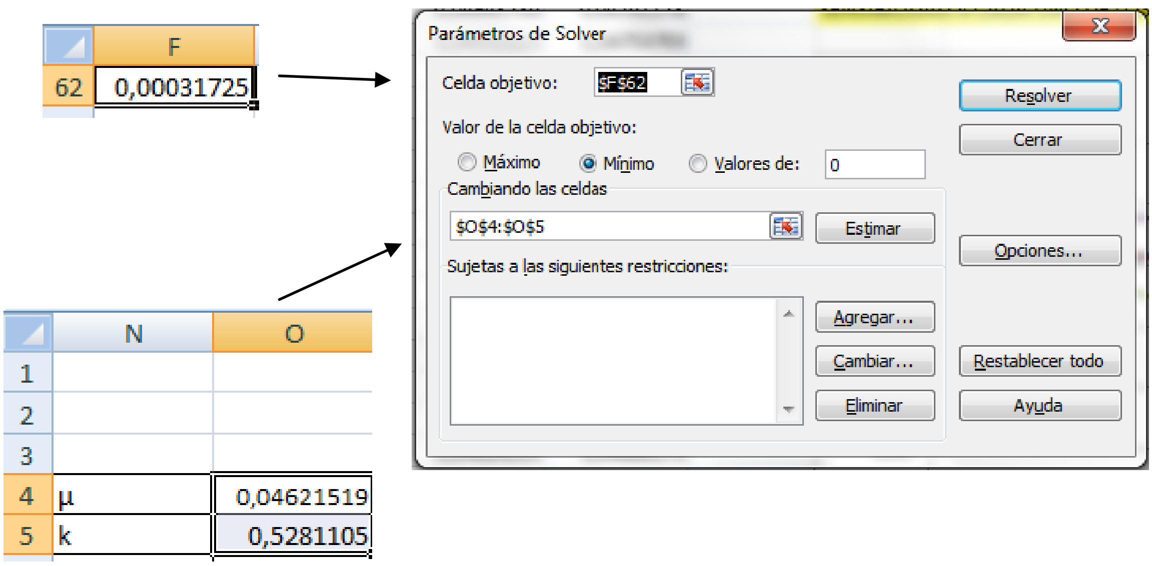


Figura 8

El apartado de celda objetivo se refiere a la celda la cual hemos minimizado, siendo en nuestro caso el sumatorio de los errores absolutos al cuadrado de los datos, por ello, en valor de la celda objetivo hemos seleccionado mínimo, ya que lo que queremos es minimizar ese error. El apartado de cambiar celdas se refiere a las celdas donde se encuentran los valores de μ y k, los cuales se estimarán de acuerdo a nuestra selección.

En cuarto lugar, hemos calculado el error cuadrático medio y la bondad de ajuste, para poder ver la precisión de las estimaciones.

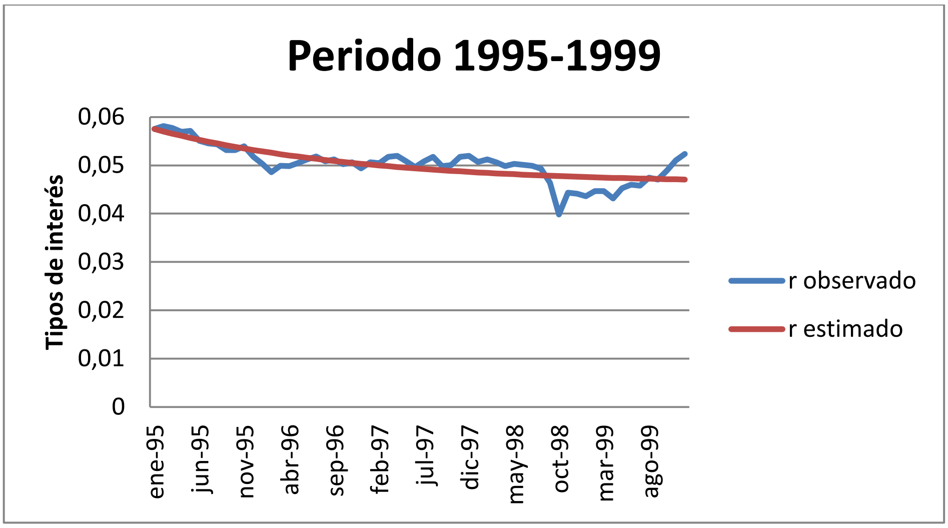
Este mecanismo se ha realizado para cada uno de los tres periodos. Se han obtenido para cada periodo de tiempo los resultados mostrados en la Tabla 3.

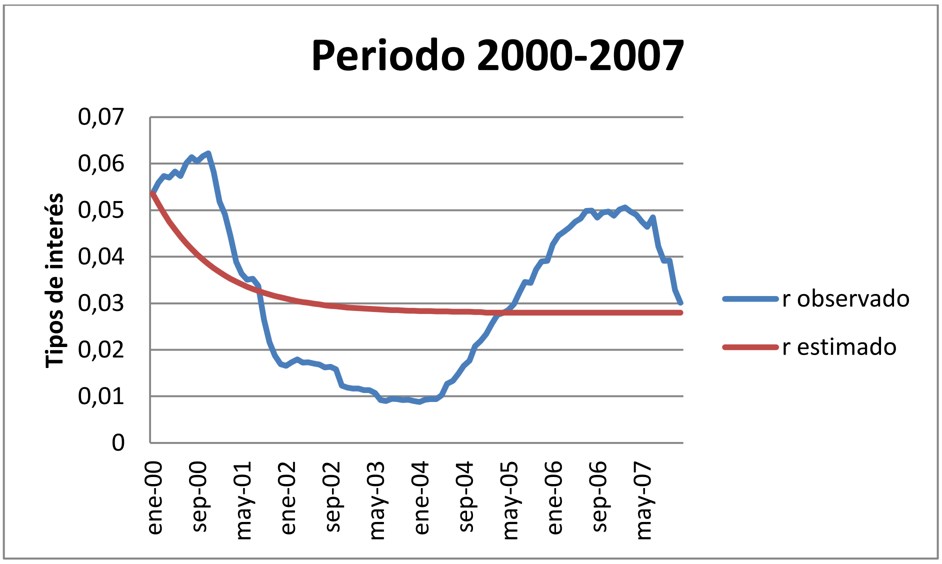
	PERIODOS		
	1995-1999	**2000-2007**	**2008-2014**
μ	0,0462	0,0280	0,0005
k	0,5281	1,0756	1,8909
RMSE	0,0023	0,0151	0,0019
R^2	0,8423	0,8553	0,9102

Tabla 3

Como ya hemos explicado en el Sección 4.1, el parámetro μ mide el valor a largo plazo al que tiende el tipo de interés instantáneo en cada periodo y k mide la rapidez a la que se tiende a ese equilibrio para cada uno de ellos. Si comparamos cada valor del parámetro μ de la Tabla 2 vemos que el mayor se corresponde con el primer periodo, después el intermedio y el menor con el último, por lo que concuerda con lo dicho anteriormente de que los tipos de interés disminuyen a lo largo del periodo 1995 – 2014, ya que el valor al que se tiende en cada periodo va decreciendo según se avanza en el tiempo. Al comparar los valores de los parámetros k vemos que el mayor valor se corresponde con el periodo 2008 – 2014, lo que también concuerda con que los tipos de interés sufren una caída más rápida hacia la media en ese periodo. En los otros dos periodos restantes la tendencia hacia la media se produce de una forma más progresiva.

Para observar de una forma visual como se han ajustado los datos a la curva en cada periodo, hemos realizado la Figura 9, donde podemos ver gráficamente lo expuesto anteriormente.


Periodo 1995-1999
Tipos de interés
0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0
ene-95
jun-95
nov-95
abr-96
sep-96
feb-97
jul-97
dic-97
may-98
oct-98
mar-99
ago-99
r observado
r estimado


Periodo 2000-2007
Tipos de interés
0,07
0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0
ene-00
sep-00
may-01
ene-02
sep-02
may-03
ene-04
sep-04
may-05
ene-06
sep-06
may-07
r observado
r estimado

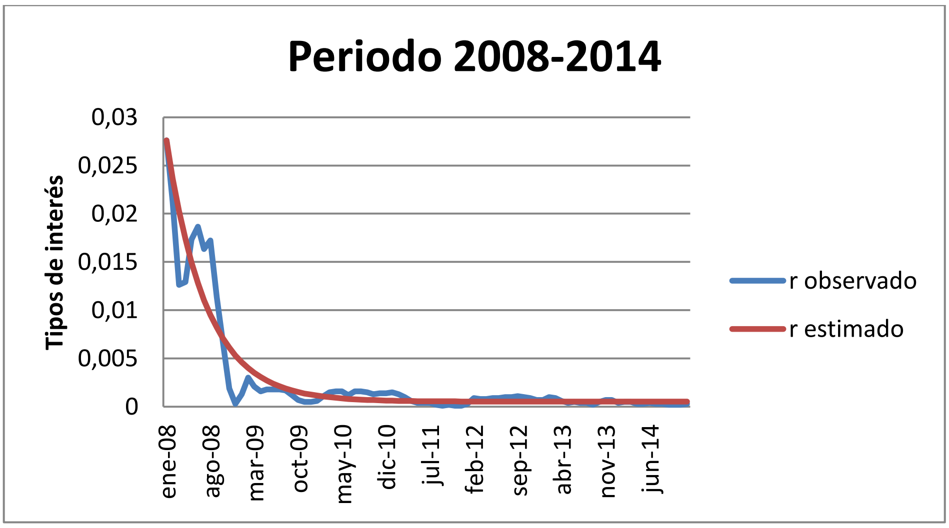

Periodo 2008-2014
Tipos de interés
0,03
0,025
0,02
0,015
0,01
0,005
0
ene-08
ago-08
mar-09
oct-09
may-10
dic-10
jul-11
feb-12
sep-12
abr-13
nov-13
jun-14
r observado
r estimado

Figura 9

Si comparamos los valores de R^2 del primer y segundo periodo y miramos las gráficas correspondientes de la Figura 9 de cada periodo, vemos que a pesar de que los datos se ajustan mejor en la primera gráfica, éste posee un R^2 menor, puede deberse a que en el primer periodo son 60 datos mensuales y en el segundo son 96 datos.

Si comparamos las tres gráficas podemos observar que la de menor error cuadrático se establece en el último periodo, 2008-2014, donde los tipos de interés sufren una caída desde el 3% a principio del periodo hasta llegar al 0,03% en diciembre de 2014 de forma progresiva y más o menos homogénea, debido a que los datos se ajustan mejor a la curva. Debido a lo anterior, se establece una mejor bondad de ajuste de la regresión en dicho periodo respecto a los otros dos, es decir, es el periodo que tiene un mayor R^2, siendo éste de 0,9102, lo que nos indica un buen ajuste de los datos a la forma de la curva propuesta.

En los tres periodos distintos recogidos en la Figura 9, la curva sigue una forma decreciente donde $r(t_0) > \mu$, por lo que, $dr(t)/dt < 0$, los tipos de interés caen en cada serie de tiempo, y por tanto también a lo largo de los 20 años.

5.3 SENSIBILIDAD DE LOS PARÁMETROS

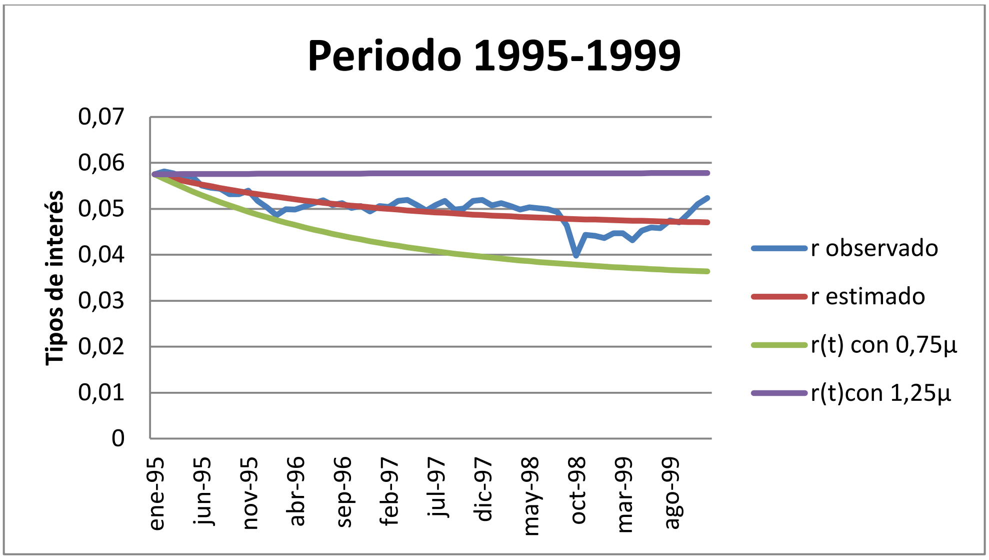
Para ver la sensibilidad de la curva a cambios en los parámetros μ y k, hemos realizado un estudio posterior, donde hemos planteado para cada periodo un cambio en los parámetros, correspondiente a multiplicarlos por distintos valores como 0,75 y 1,25, para así tener valores un 25% más pequeños y un 25% más grandes de cada uno de los parámetros en los tres periodos, de esta forma comprobaremos como se comportan los tipos de interés si se producen pequeñas modificaciones en los valores de los estimadores.

En primer lugar, trabajamos con el periodo 1995 – 1999. Hemos procedido al cálculo de la curva con la modificación en los parámetros mencionada anteriormente, con lo que hemos obtenido la Figura 10.

Como podemos observar, para dichas modificaciones del parámetro μ, la curva ya no se ajusta a los datos, les deja todos por encima o por debajo de la curva.

Esto implica que pequeños errores en la estimación de μ conllevan un cambio grande en el cálculo de la curva de los tipos de interés, por lo que lleva a errores grandes.

Si observamos la modificación propuesta en el parámetro k, la rapidez con la que se tiende al equilibrio no cambia significativamente a lo largo del periodo. Por tanto, un pequeño error en la estimación de k no supondría un gran cambio en la curva de tipos de interés para ese periodo de tiempo.



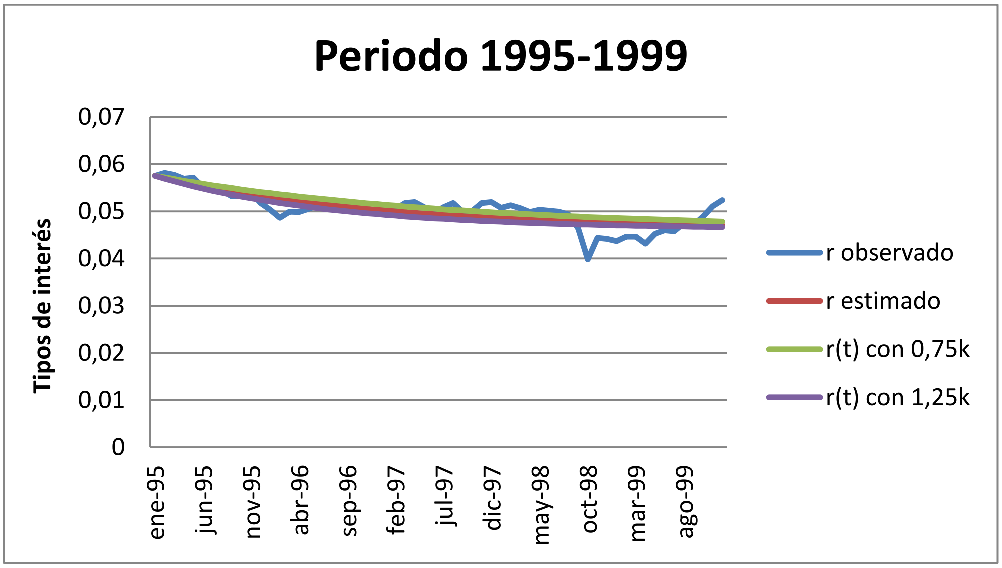
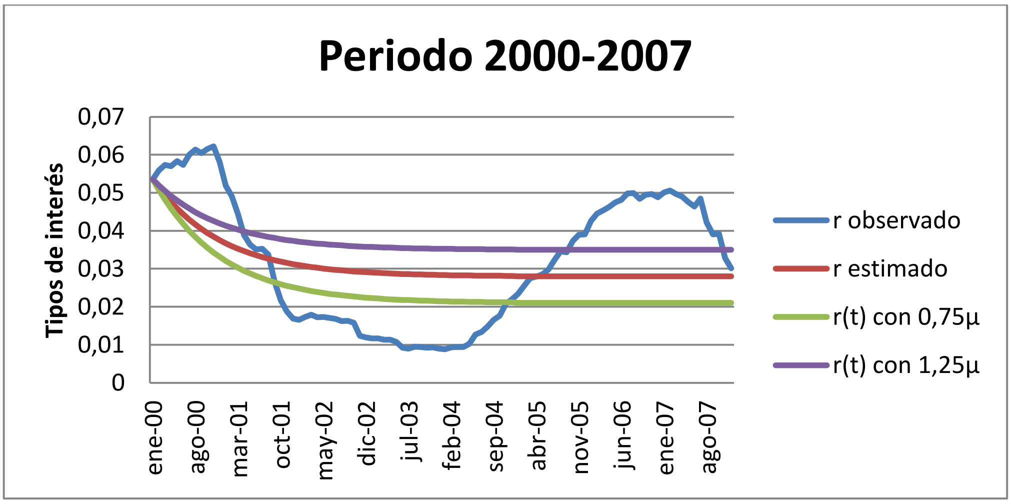


Figura 10

En segundo lugar trabajamos con el periodo 2000 – 2007. Realizando el cálculo de la curva con los cambios propuestos en los parámetros obtenemos la curva dibujada en la Figura 11.

Se puede ver que para pequeños cambios de la estimación del parámetro μ conlleva, de nuevo, un cambio más amplio en la curva de tipos de interés, aunque en este caso, la curva se sigue encontrando entre el margen de los datos observados.

Cuando modificamos el parámetro k, la rapidez con la que se tiende al equilibrio, el cambio de los tipos de interés solo se aprecia en el periodo de tiempo 2000 – 2002 donde se produce un cambio en la curva de tipos de interés, quedando el cálculo de éstos similar el resto del periodo.



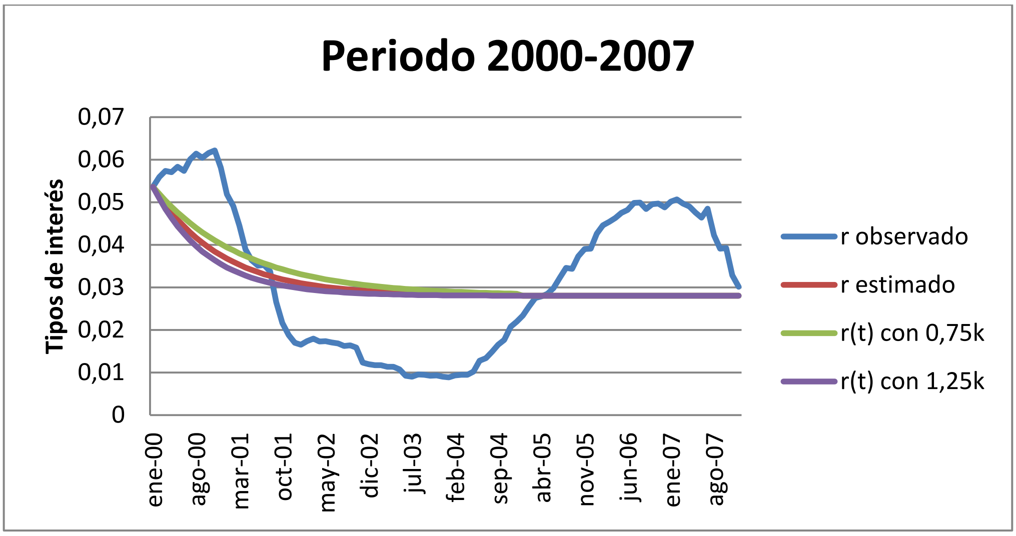
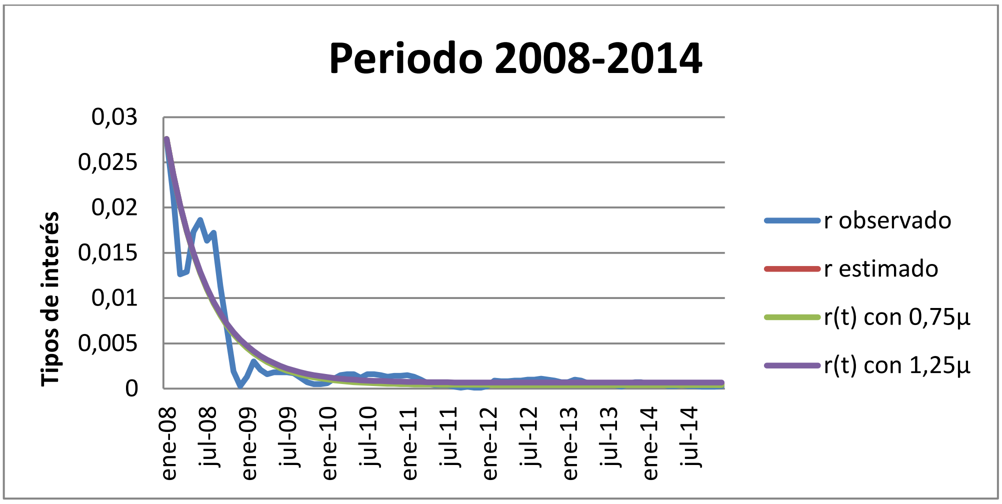


Figura 11

En tercer lugar, trabajamos con el periodo 2008 – 2014. Procedemos al cálculo de la curva con la modificación en los parámetros al igual que en los otros dos periodos anteriores para así obtener la Figura 12.

Como se puede observar, para dichas modificaciones del parámetro μ, la curva de tipos apenas cambia de la curva estimada inicialmente, por lo que pequeños errores en la estimación de μ, no lleva a grandes cambios en el cálculo de la curva de tipos de interés.

Si observamos la modificación propuesta en el parámetro k, la rapidez con la que se tiende al equilibrio, la curva de tipos cambia considerablemente en los primeros años, que es donde los tipos de interés son un poco mayores y sufren una caida.



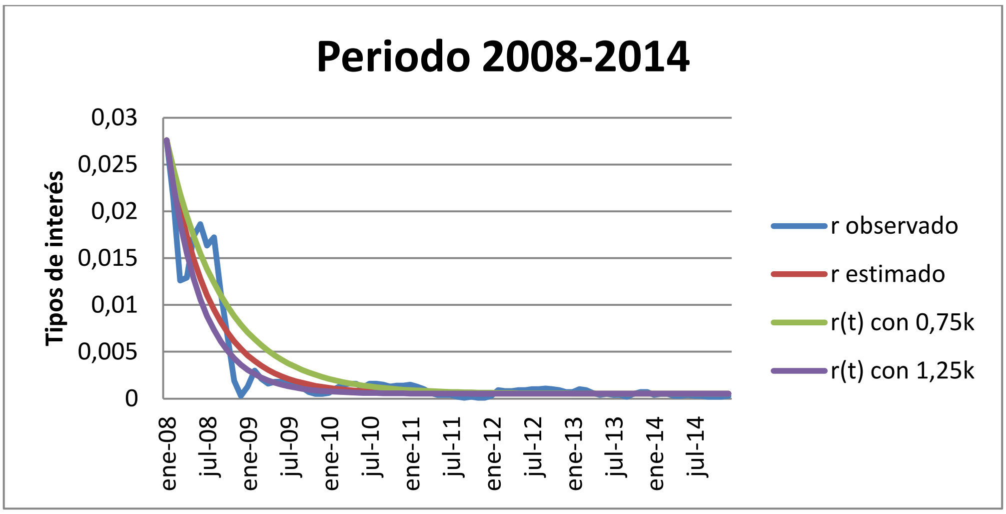


Figura 12

6. CONCLUSIONES

A lo largo del tiempo han sido muchos los enfoques que han surgido en la literatura para intentar describir la ETTI, basados principalmente en la valoración mediante un modelo estocástico en ausencia de arbitraje, con el cual también se pueden valorar los activos derivados de los tipos de interés.

Para intentar determinar cuál es el número óptimo de variables que puede realizar una mejor explicación de la ETTI se han realizado también numerosos estudios empíricos basados en Análisis de Componentes Principales.

Finalmente se ha concluido que la mayoría de variabilidad de los tipos de interés a los distintos vencimientos puede ser bien explicada por uno, dos o tres factores ortogonales, es decir, independientes, de tal manera que el primer factor explicaría el origen, el segundo la pendiente, y el tercero sería la curvatura.

Claramente para obtener una buena estimación de la ETTI es necesario tener una buena modelización y estimación de la dinámica de la curva de tipos de interés.

A este tipo de modelos se le puede añadir la ventaja de que obtener la información necesaria es menos costoso que obtener información de más variables para las instituciones financieras. De esta forma se obtienen los precios de los derivados de una forma más rápida, exacta y eficiente.

También se puede decir que dependiendo del tipo de datos que se observen y el país del que pertenezcan se deben elegir uno u otro modelo existentes en la literatura de la ETTI.

El estudio que hemos realizado en este trabajo es un estudio inicial en el cual hemos utilizado un modelo determinista, es decir, en el que no tenemos en cuenta la volatilidad del tipo de interés explicada por un proceso de Wiener. Sin embargo, puede servir para obtener una primera aproximación y entender los problemas que puede provocar una mala estimación y modelización. Por ello, posteriormente, en nuestro trabajo, hemos realizado un estudio de cuales serían las consecuencias de que se produjeran pequeños cambios en los parámetros.

Este análisis puede ayudar a tener en cuenta los posibles errores cometidos al calcular la curva de tipos de interés cuando la estimación de alguno de los parámetros no es muy precisa.

En nuestro trabajo hemos podido comprobar que situaciones estables en las que los tipos de interés observados siguen una dinámica más homogénea, se puede conseguir una curva de tipos, la cual se ajusta de una forma bastante precisa a los datos de los tipos de interés. Sin embargo, una estimación no precisa de los parámetros, en general, lleva a cambios en el cálculo de la curva de tipos de interés, y podría producir errores grandes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ahn, D. H., y B. Gao. (1999): “A parametric nonlinear model of the term structure dynamics.” *The Review of Financial Studies* 12 (4), pp. 712–762.

Black, F., y M. Scholes. (1973): “The pricing of options and corporate liabilities.” *Journal of Political Economy* 81 (3), pp. 637–654.

Brennan, M. J., y E. S. Schwartz. (1979): “A continuous time approach to the pricing of bonds.” *Journal of Banking and Finance* 3, pp. 133–155

Chan, K.C., G. A. Karolyi, F. A. Longstaff, y A. B. Sanders. (1992): “An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rates.” *Journal of Finance* 47 (3), pp. 1209–1228.

Cox, J.C., J.E. Jr. Ingersoll, y S.A. Ross. (1985): “A theory of the term structure of interest rates.” *Econometrica* 53, pp. 385–407.

Jiang, G. J. (1998): “Nonparametric modeling of U.S. interest rate term structure dynamics and implications on the prices of derivative securities.” *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 33 (4), pp. 465–497.

Merton, R. C. (1973): “Theory of rational option pricing.” *Bell Journal of Economics and Management Science* 4 (1), pp. 141–183.

Mirantes, A.G., Población, J. y Serna, G. (2014): “Commodity derivative valuation under a factor model with time – varying market prices of risk”, *Rev Deriv Res* 18, pp. 75-93.

Navarro, E. y Nave, J. M. (2001): “Fundamentos de Matemáticas Financieras”, B Antoni Bosch Editor.

González Velasco, C. y Presa Robles, M. A. (2005): “Matemática Financiera para la Profesión Actuarial”, Editorial Aranzadi.

Hull, J., y A. White. (1990): “Pricing interest-rate derivative securities.” *Review of Financial Studies 3* (4), pp. 573–592.

Oksendal, B. (2005): “Sthocastic Differential Equations. An Introduction with Applications”, Sexta edición. Editorial Springer. New York.

Reserva Federal de los Estados Unidos, base de datos (2015): datos disponibles en: http://www.federalreserve.gov/releases/h15/data.htm [última consulta: 10/07/2015] y http://www.federalreserve.gov/datadownload/Build.aspx?rel=H15 [última consulta: 10/07/2015].

Stanton, R. (1997): "A nonparametric model of the term structure dynamics and the market price of interest rate risk." *The Journal of Finance*

Vasiceck, O. (1977): "An equilibrium characterization of the term structure." *Journal of Financial Economics* 5, pp. 177–188.