Universidad de Valladolid

ESCUELA DE CIENCIAS EMPRESARIALES Y DEL TRABAJO DE SORIA

Grado en Administración y Dirección de Empresas

TRABAJO FIN DE GRADO

Determinación y cálculo de áreas de influencia de empresas comerciales en un espacio periurbano circular

Presentado por Pedro Manuel Gómez Gil

Tutelado por: Fernando J. Díaz Martínez

Soria, 1 de septiembre de 2014

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

Para satisfacer las necesidades de información de un establecimiento o centro comercial a la hora de conocer el espacio territorial que puede abarcar y la competitividad espacial que reflejan, no basta con un simple mapa. Si le sumamos la existencia de diferentes factores que pueden afectar a la decisión de compra de un bien o servicio, como es el precio, la distancia, etc. Es necesario de un análisis más complejo para obtener datos concluyentes. La herramienta a utilizar es un estudio de sus áreas de influencia y el cálculo de su cuota de mercado.

Dicha área de influencia, es el espacio geográfico que logra atraer clientes y generar ventas. Su estudio es flexible, permitiendo la personalización de cada consulta en función de las necesidades en cada momento. Ayudando así a una mejor planificación y toma de decisiones por parte de los establecimientos o centros comerciales.

Otro punto a tener en cuenta es la localización comercial, vendrá determinada por la actividad que desarrolle. Para maximizar los beneficios y llegar a un mercado más grande, el análisis de las áreas de influencia, para obtener una ubicación que se ajuste a sus necesidades se muestra indispensable para conseguir atraer al mayor número de clientes.

El empleo de métodos cuantitativos para el cálculo de áreas de influencia se está extendiendo y ampliando, siendo un campo de estudio que está en continuo desarrollo.

El presente TFG pretende desarrollar un modelo matemático limitado para el cálculo de áreas de influencia, reduciendo las múltiples variables que influyen en la decisión del cliente a la hora de elegir una empresa comercial para adquirir un bien, a dos de ellas de especial relevancia: el precio del bien y la distancia (en nuestro caso, en línea recta) del domicilio del cliente a la empresa comercial y partiendo de supuestos tales como una distribución homogénea de los clientes en el espacio urbano y periurbano, y que el mismo sea circular.

Para ello, consideraremos en nuestro modelo que dos empresas comerciales están situadas en **cualquier punto** del espacio urbano/periurbano. Las ciudades suelen presentar un perímetro amorfo en torno al centro histórico; sin embargo, para simplificar los cálculos nuestro espacio es circular.

Estimaremos, como hemos mencionado, que el gasto realizado por un consumidor, al adquirir un bien en una empresa comercial, es la suma del precio de dicho bien adquirido más el coste de transporte del consumidor desde su domicilio hasta el establecimiento y viceversa. Dicho coste de transporte se calculará en base a la distancia en línea recta entre el domicilio del consumidor y la empresa comercial, siendo el coste de transporte por unidad de longitud recorrida constante.

Bajo estos supuestos, el trabajo se centrará en calcular numéricamente, para un determinado bien, con ayuda de la hoja de cálculo y GeoGebra, cuál es el área de influencia de cada empresa comercial, en función de la diferencia entre los precios de dicho bien en ambos establecimientos, entendiendo por área de influencia de una empresa para un bien, el lugar geométrico de todos los puntos de la ciudad en los que, al ser menor el gasto, un consumidor opta por dicha empresa para adquirir el bien.

Palabras clave: área de influencia, localización, empresa comercial, hoja de cálculo, GeoGebra, métodos gravitatorios

2. JUSTIFICACIÓN

La principal razón en la elección del tema a desarrollar el presente Trabajo de Fin de Grado es la posibilidad de aplicar los procedimientos y las técnicas desarrolladas con la empresa en la que actualmente estoy trabajando, Grupo Villar, S. A., estoy en el departamento de administración en el área de señalización vertical y balizamiento, donde los productos están muy estandarizados y normalizados, ya que todos tienen que cumplir con elevados estándares de calidad y acordes con la norma U.N.E. 135.332 recogida en el art. 701 del P.G.3. Siendo un mercado con pocas empresas comercializadoras, con productos con las mismas características, con una gran competitividad en precios. Al ser a nivel nacional, influye también el coste de transporte, que depende a su vez del volumen y peso de compra. Este estudio nos puede ayudar a tener una orientación de la importancia de una buena tarifación en precios y buena localización de los almacenes. La actual situación en la que estamos nos obliga a ser cada día más competitivos.

Otro punto importante es la temática a estudiar, ya que el modelo que se va a plantear se antoja de relevancia para cualquier empresa o establecimiento comercial. Esta información puede ser útil en la ayuda de tomas de decisiones y consecución de objetivos, con lo que obtendremos una visión clara de cómo las políticas de precios y la localización comercial pueden resultar más o menos exitosas.

El presente trabajo asume precisamente la aceptación del concepto de área de influencia, estudiando cómo se reparten la cuota de mercado dentro de un espacio urbano dos establecimientos comerciales.

La actualización de las áreas de influencia determinadas por los flujos comerciales de los consumidores o desplazamientos de los mismos desde su domicilio a los puntos de venta para realizar sus compras, viene siendo estudiado y desarrollado continuamente. Uno de los centros más comprometidos y dedicados, aplicando Métodos de Encuesta y Modelos de Gravitación Comercial, desde el año 1.992, es el Instituto Lawrence R. Klein.

El cálculo de las áreas de influencia y su cuota de mercado predice, analiza y describe un área en un futuro más o menos próximo, en función de la densidad de población y el potencial de mercado. Se intenta conseguir describir y predecir algunos de los comportamientos de la interacción del consumidor con los establecimientos de venta, que se presta a la metáfora de la “gravedad física”. Estos modelos analizan el área de influencia en un futuro más o menos próximo.

La importancia y la utilidad de estudiar el área de influencia y su cuota de mercado radica en la posibilidad de tener mayor información a la hora de la toma de decisiones y así obtener mayores beneficios.

El análisis y determinación de áreas de influencia para empresas comerciales proporciona herramientas muy útiles para intentar conocer el mercado y a los competidores, establecer condiciones económicas y políticas de precios más favorables, estimar la demanda prevista, prever los posibles cambios y planificación de los desvíos necesarios para superarlos, permitir encontrar nuevas vías que lleven a los objetivos deseados, permitir ver con claridad la diferencia entre lo planificado y lo que realmente está sucediendo, una mayor organización y temporalidad, analizar los problemas y las oportunidades futuras. En suma, este tipo de análisis se presenta como un campo de estudio tremendamente interesante y potencialmente provechoso en el ámbito de las empresas comerciales, su localización y posterior gestión de política de precios.

En la realización del presente Trabajo Fin de Grado, se han tenido que desarrollar las siguientes competencias del Grado en Administración y Dirección de Empresas:

GENERALES

G2. Saber aplicar los conocimientos adquiridos a su trabajo de forma profesional, y poseer las competencias que suelen demostrarse mediante la elaboración y defensa de argumentos y la resolución de problemas de carácter económico-empresarial.

G4. Poder transmitir (oralmente y por escrito) información, ideas, problemas y soluciones relacionados con asuntos económicos-empresariales, a públicos especializados y no especializados de forma, ordenada, concisa, clara, sin ambigüedades y siguiendo una secuencia lógica.

G5. Poseer las habilidades de aprendizaje necesarias que permitan emprender estudios posteriores con un alto grado de autonomía.

ESPECÍFICAS

E4. Conocer los instrumentos y herramientas disponibles, así como sus ventajas e inconvenientes, para diseñar políticas y estrategias empresariales en el ámbito general de la organización o en cuanto a financiación e inversión, operaciones, capital humano y comercialización, a la vez que comprender sus efectos sobre los objetivos empresariales y el reflejo contable de sus resultados.

E6. Poseer conocimientos sobre los diferentes métodos cuantitativos y cualitativos para el análisis, evaluación y predicción en la administración y dirección de empresas y otras organizaciones.

E8. Recopilar e interpretar diversas fuentes de información (bibliográficas, estadísticas, etc.) mediante diferentes herramientas.

E9. Aplicar con rigor la técnica de análisis adecuada en la resolución de problemas en la administración y dirección de empresas y otras organizaciones.

TRANSVERSALES

T1. Capacidad para comunicarse de forma fluida, tanto oral como escrita, en castellano.

T3. Alcanzar las habilidades propias del manejo básico de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs).

3. OBJETIVOS

Los objetivos del presente Trabajo Fin de Grado son:

1.- Definir y modelizar matemáticamente, de forma sencilla, las áreas de influencia de dos empresas comerciales en competencia para la venta de un bien sobre una población con un espacio urbano de forma circular.

2.- Determinar geométricamente las áreas de influencia de dos empresas comerciales en un espacio urbano de forma circular, permitiendo que las mismas estén ubicadas en cualquier punto del espacio urbano/periurbano.

3.- Implementar el modelo con ayuda de software accesible (GeoGebra y Excel), para una mayor sencillez de cálculo, comprensión y análisis del mismo.

4.- Reflexionar sobre las implicaciones que del modelo se derivan, en base a simulaciones con diferentes inputs.

4. METODOLOGÍA

El trabajo comienza realizando una contextualización teórica, en la que se define el concepto de área de influencia y se realiza un repaso de los principales métodos y modelos de formación de áreas comerciales, valorando en cada caso sus ventajas y desventajas. Se hace énfasis especial en el Modelo de Fressin, la Ley de Reilly y el Modelo Gravitacional de Huff.

Es necesario destacar que los métodos descritos son de bastante complejidad de implementación y que en el presente trabajo se ha optado por desarrollar un modelo más sencillo y limitado, con menor presencia de variables condicionantes, pero que puede ser objeto de un análisis exhaustivo y pormenorizado.

Posteriormente, se reflejan los principales factores para la localización empresarial, poniendo en evidencia la relevancia creciente de la maximización de áreas de influencia entre los mismos.

La contextualización teórica finaliza con un breve análisis de la relación existente entre la política de precios de una empresa y la evolución de sus áreas de influencia.

La segunda parte del trabajo, consiste en desarrollar e implementar, con la ayuda de Excel y GeoGebra, el modelo planteado para la determinación del área de influencia de dos empresas comerciales ubicadas en cualquier punto de un espacio urbano/periurbano circular.

Primeramente, se desarrolla el modelo desde el punto de vista algebraico y geométrico. Para ello, se analiza el gasto que supone para una persona la compra de un bien en una empresa comercial cualquiera. Seguidamente se igualan gastos y a partir de ahí se realizan los cálculos necesarios para llegar a la ecuación de la curva de indiferencia, es decir aquellos puntos en los que a una persona le es indiferente comprar en una empresa u otra. Con el empleo de Excel y GeoGebra, se implementa el modelo de modo que se puedan visualizar las áreas de influencia y se procede a la realización de los cálculos necesarios para poder resolver su obtención numérica mediante cálculo geométrico e integral.

El trabajo incluye la presentación en soporte papel de todos los cálculos y algoritmos empleados en la implementación informática, así como, a modo de ejemplo, una simulación en un escenario dado. Sin embargo, lo más relevante del mismo son los archivos de Excel y GeoGebra[1] creados al efecto, incluidos en el CD aportado, que permiten realizar simulaciones en cualquiera de los escenarios posibles.

Para finalizar el trabajo, se exponen una serie de conclusiones y se analizan las deficiencias y limitaciones del modelo realizado, así como un análisis de posibles estudios futuros siguiendo la misma línea de investigación.

[1] Para poder ejecutar los archivos GeoGebra (.ggb) y Excel (.xls) es necesario tener instalados en el ordenador los correspondientes programas.

5. CONTEXTUALIZACIÓN TEÓRICA

5.1. Concepto de área de influencia

El Trabajo Fin de Grado se basa en el estudio de áreas de influencia, se va a dar una pequeña definición, siendo un término muy versátil por la cantidad de factores que pueden modificar la decisión de compra. También hay diversas áreas, tanto comerciales, culturales, tecnológicas, de ocio, etc. y cada uno de los diferentes factores influirán de manera distinta, por eso se suelen medir por frecuencias o posibilidades de desplazamiento de los residentes al adquirir un bien o servicio. Lo que se pretende es dar una visión más amplia de lo importante que es el área de influencia y la cuota de mercado para una empresa comercial, con la finalidad de que se entienda mejor el desarrollo matemático y las dos variables tan importantes a la hora de su estudio como son el precio y la distancia.

Sabiendo que, la probabilidad de ir a un centro comercial decrece de forma exponencial a la distancia recorrida de ida y vuelta al centro, con lo que podemos decir, que el alcance es la mayor extensión del área de influencia, y los puntos de atracción tienden a forma circular.

Teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente, se da como definición simple de área de influencia: "la zona geográfica dentro de la cual un establecimiento logra atraer clientes y generar ventas." *Picaza Fraile, Roberto (2006)*

Aun así, siempre quedan muchas preguntas que podemos hacernos, ¿qué nuevas zonas puedo cubrir con una nueva localización?, ¿cuánto mercado puedo sacarle a otro local propio existente?, ¿cómo maximizar la cobertura dentro de una ciudad?, ¿qué precio poner a un producto para tener mayor cuota de mercado?, etc. Con este estudio intentaremos profundizar en algunas de ellas.

5.2. Métodos de creación de un área de influencia

Existen diversos métodos para la creación de áreas de influencia de un establecimiento o centro comercial, van desde métodos sencillos y poco costosos a modelos más complicados, costosos y precisos. A continuación se va a detallar algunos de ellos.

- **Área circular**: Se realiza un círculo en torno a cada centro analizado. Es un método de aproximación sencillo y la forma de implantar es fácil, en contraposición se deja muchos datos de analizar como la red de carreteras. Como el trayecto no suele ser en línea recta no será tan preciso, suele dar buenos resultados cuando el número de establecimientos no es muy elevado y siempre hay que asumir que la capacidad de atracción es inversa de la cantidad de competencia. Otro inconveniente es el radio que tendría que tener este círculo. Se puede calcular definiendo distintos radios en función de las características de los puntos de venta y el área en que se encuentran.

- Área isócrona: también se le suele denominar *Drivetime*. Marca la zona estableciendo un tiempo máximo hasta llegar al centro donde se quiere comprar el bien o servicio. Es un método más preciso que el anterior y realista, teniendo en cuenta que se puede realizar el recorrido en un transporte o andando. Un punto fuerte de este sistema es que refleja fielmente la resistencia del cliente a desplazarse, en contraposición suele ser un modelo más costoso y complejo

- Área simple o múltiple: Consiste en marcar varias áreas de influencia para cada centro o establecimiento y clasificarlas en primaria, secundaria y terciaria. Es un método bueno cuando son grandes superficies y centros comerciales ya que pueden estar interesados una mayor cantidad.

- Área empírica: también denominada procedencia real de los clientes. Puede sustituir a los distintos métodos de calcular las áreas teóricas, su enorme utilidad está en que se compara entre procedencia real y área teórica, intentado encontrar imprevistos y áreas de mejora. Su mayor inconveniente es que se necesita una gran precisión y cantidad de datos de los clientes, aunque es el método más real.

- Polígonos Theissen y Diagrama de Voronoi. Se obtienen el tamaño de las áreas comerciales y su forma óptima para asignar los clientes a cada establecimiento, trazando las áreas comerciales según la cercanía al más próximo, siendo la capacidad de atracción del establecimiento constante. Este método no contempla muchos factores como el precio, variedad, entramado de carreteras, etc. Es eficaz para negocios con entrega a domicilio, con productos de las mismas características.

- Modelos de gravitación comercial. El problema de la limitación de los mercados, independientemente de las divisiones político-administrativas existentes, se lo planteó por primera el profesor Reilly, fue entonces cuando se empezaron a utilizar técnicas y modelo matemáticos y econométricos empleados para delimitar las áreas de mercado de los establecimientos comerciales. Basados en que guardan proporción a la capacidad de influencia de un centro de oferta con su atractivo, e inversamente proporcional a la distancia respecto al punto de demanda. La **Ley de Reilly** aporta mediante investigaciones cuantitativas la influencia comercial que ejercidas entre dos áreas asignadas y el **modelo de Huff** que contempla la probabilidad de que la competencia se interponga entre el establecimiento y los consumidores. Además los gastos ponderados por la probabilidad de compra reproducen estimaciones más exactas de las ventas de los establecimientos*. (Modelos que se verán más detallados en el siguiente punto)* (*Chasco Lafuente, Pedro 2000)*

- Modelo Multiplicativo de Interacción Competitiva (MMIC). Basado en el modelo de Huff (Nakanishi y Cooper 1974), incorpora un conjunto de variables significativas para ofrecer una respuesta más precisa para la atracción del cliente. Este modelo tiene en cuenta variables tanto objetivas como subjetivas. Por ej.: El caso de un gran centro comercial, tendríamos factores a analizar cómo pueden ser, la superficie del local, el número de plazas del parking, notoriedad de la marca, amplitud del surtido de productos, otros servicios complementarios…

5.3. Modelo de Fressin, Ley de Reilly y modelo gravitacional de Huff

Entre los modelos de análisis que existen en la literatura de formación de áreas de influencia, se van a exponer tres de los más importantes, siguiendo el enfoque del Instituto Kleinp L. R. (*Chasco Lafuente, Pedro 2000*)

Modelo Fressin

El modelo Fressin está determinado por dos variables que influyen en el comportamiento del cliente:

La distancia y el tiempo a la empresa comercial.

Una variable psicológica relacionada con la imagen de la empresa.

En la relación entre la personalidad del cliente y el acto de compra influyen las motivaciones, el conocimiento y el aprendizaje. Eso lo estudia la psicología del consumidor.

La formulación del Modelo Fressin es costosa y compleja, por lo que su aplicación en la práctica es escasa, y omite además la explicación de los elementos que crean una imagen de marca de la empresa.

Ley Reilly (1931)

El profesor W.J.Reilly de la Universidad de Texas publicó su ley de gravitación del comercio "The Law of Retail Gravition" que supuso una revolución en los análisis de los flujos comerciales, fue el primer autor en modelizar la atracción que sufre una ciudad por parte de otras dos situadas en polos opuestos. La formulación de Reilly puede ser utilizada para delimitar áreas de influencia y para medir la atracción de ciudades o empresas comerciales.

La ley de Reilly se enuncia así: "Dos ciudades atraen compradores de artículos específicos (de compra no habitual) de cualquier población ubicada en las cercanías del punto límite aproximadamente en razón directa al censo de población de las dos ciudades e inversamente al cuadrado de las distancias que median entre ambas ciudades y la población intermedia.”

Se resume en la siguiente expresión matemática:

$$\frac{B_a}{B_b} = \left(\frac{P_a}{P_b}\right)^N x \left(\frac{D_b}{D_a}\right)^n$$

donde:

B_a= actividad absorbida por la ciudad a.

B_b= actividad absorbida por la ciudad b.

P_a = población de la ciudad a.

P_b= población de la ciudad b.

D_a= distancia entre la ciudad a y la ciudad intermedia

D_b = distancia entre la ciudad b y la ciudad intermedia

$N =$ exponente que indica la tasa de incremento del comercio externo atraído por una ciudad a medida que la población de dicha ciudad aumenta.

$n =$ exponente que indica la tasa de disminución del comercio externo atraído por una ciudad a medida que disminuye la población de dicha ciudad.

Los parámetros anteriores N y n, se pueden equiparar o igualar a 1 y 2 respectivamente. Son datos obtenidos empíricamente en estudios realizados en localidades estadounidenses.

Así pues se puede expresar de la forma:

$$\frac{B_a}{B_b} = \left(\frac{P_a}{P_b}\right)^1 x \left(\frac{D_b}{D_a}\right)^2$$

Si consideramos el caso concreto en que se igualan los valores de B_a y B_b; es decir $B_a = B_b$, por tanto $\frac{B_a}{B_b} = 1$; llegamos a la expresión siguiente después de unas sencillas operaciones:

$$D_{aI} = \frac{D}{1 + \sqrt{\frac{P_b}{P_a}}}$$

siendo:

D_{aI}= límite del area o subárea comercial de la localidad o municipio a, medido en kilómetros a lo largo de la carretera que conduce a la localidad o municipio b. Dicha distancia es, por tanto, el punto de indiferencia (I) entre las localidades, en el cual los consumidores serían indiferentes a comprar en cualquiera de las dos localidades.

D= distancia en kilómetros a lo largo de la carretera más importante entre a y b.

En el modelo de Reilly se puede sustituir la variable “distancia en km” por la de “tiempo de viaje”, si el caso concreto que el municipio situado entre “a” y “b” está comunicado por carreteras de distinta categoría, superior o inferior, con los municipios “a” y “b”.

Modelo Gravitacional de Huff (1963)

Quien abre una nueva perspectiva en los modelos de gravitación comercial: la estructuración de un modelo en el que son los consumidores, y no los establecimientos comerciales, el centro de atención.

El modelo de Huff se basa en el comportamiento espacial del consumidor basado en un principio probabilístico. Puesto que el consumidor puede visitar más de una empresa, la probabilidad de visitar una empresa determinada es igual a la razón de utilidad de ese establecimiento dividida por la suma de utilidades de todas las empresas consideradas por los consumidores. La expresión matemática es:

$$P_{ij} = \frac{U_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} U_{ij}}$$

donde:

P_{ij}= probabilidad de que un consumidor i visite la empresa j.

$U_{ij} = A_j^{\alpha} \cdot D_{ij}^{-\beta} =$ utilidad de la empresa j para el consumidor i

A_j^{α} = medida del atractivo de la empresa j

D_{ij} = distancia que separa la empresa j del consumidor i

n = número de tiendas consideradas por el consumidor

α = parámetro que muestran la sensibilidad del cliente a la atracción de la tienda.

β = parámetro que muestran la sensibilidad del cliente a la distancia.

Conclusiones a los modelos de Reilly y Huff

Los modelos expuestos por Reilly y Huff están encuadrados dentro de los Modelos de Gravitación Comercial, son de gran utilidad para la determinación de zonas de influencias de centros comerciales o de las áreas de mercado. Una de sus mayores ventajas es que son aptos para toda clase de centros, ya sea para el conjunto de establecimientos comerciales de un municipio, los cuales se constituyen en un núcleo central sobre otros municipios, formándose luego las denominadas áreas y subáreas; o para la determinación del área de mercado de un gran Centro Comercial o simplemente para un solo establecimiento, como pueden ser: tienda especializada, gran almacén, supermercado, hipermercado, etc.

Otra ventaja, es que son modelos que se pueden utilizar también para la determinación de áreas de mercado de otros tipos de establecimientos, no sólo de los comerciales, también es factible para hospitales, agencias de viajes, bancos, estaciones de servicio, etc. Precisando que para estos casos es conveniente el análisis cambiando las variables de coste de transporte y la población, por otras que se serían de mayor impacto para el centro a analizar, como pueden ser el número de empleados, la imagen, la disponibilidad de productos, el coste de transporte, etc.

Por último, el conocimiento de las áreas de mercado de un centro comercial, banco, etc. constituye una información importante no sólo para la planificación de la expansión de nuevas sucursales o establecimientos, sino que sirve de ayuda importante para sus políticas comerciales y de marketing; por ejemplo, la cobertura de las acciones publicitarias y promocionales de un establecimiento debería centrarse en los límites territoriales del área de mercado o zona de influencia.

5.4. Localización de una empresa comercial: factores

En este punto, basándonos en la orientación del Trabajo Fin de Grado, se va a dar un enfoque más bien descriptivo, se proporcionará una visión general de dos aspectos muy importantes que son: la relevancia que tiene la localización y los diferentes factores que pueden influir en la toma de decisión**.** Se va a analizar cada punto por separado, ya que la transcendencia a la hora de comprender los parámetros analizados va a ser determinante.

La localización es una variable estratégica, constituyendo un fuerte estímulo para la demanda. Cuanto más especializado es el sector, más importancia tiene. Por eso muchos comercios lo que hacen es ubicarse estratégicamente para tener mayor presencia y ser más competitivos, ya sea localizándose en una misma zona comercial ó asociaciones como pueden ser mercados, galerías, centros comerciales y calles comerciales.

Hasta 1755 la organización social venía determinada por la fertilidad de la tierra y el trabajo humano que se hacía en la misma, y fue Cantillón quien introdujo unos efectos espaciales en la economía y el primero en reconocer la interdependencia entre gasto y consumo, con lo cual propuso:

“Los flujos existentes entre ellos implican necesariamente un multiplicador espacial. Las variaciones cuantitativas y las modificaciones cualitativas de la demanda determinan, junto con el efecto multiplicador, la naturaleza de los cultivos, la extensión espacial y, finalmente, el número de localizaciones y su población asociada.”

Posteriormente Smith (1776) dio mayor relevancia al coste de transporte, tanto la ruta y las dificultades, teniendo también presente la fertilidad de las tierras, extensión del mercado y el nivel de población, con lo que cual introduce un valor y ya no sólo el factor precio.

No hubo cambio teórico significativo hasta Marshall, quien apunta que se puede hacer una estimación en términos monetarios de las ventajas de localización y la relación entre coste de transporte y la distancia del centro de producción al mercado.

La teoría de la localización ha experimentado un constante proceso de evolución a lo largo de los últimos años. Originariamente, Weber (1909), que fue considerado padre de esta teoría, basaba sus principios en los costes de transporte; más adelante siguieron y ampliaron sus teorías autores como Lösch (1940), Palander (1935) y Hoover (1948). La evolución de la teoría de la localización está íntimamente ligada a los grandes cambios estructurales que ha experimentado la actividad industrial, tales como las modificaciones en el tamaño de las empresas, la incorporación de nuevas tecnologías y la extensión y ampliación de los mercados. Poco tienen en común los factores que consideraban las pequeñas empresas de la pasada revolución industrial, centrados en el coste del transporte, la obtención de materias primas y la optimización de la energía, frente a decisiones actuales que se centran en la apertura de nuevos mercados, especialmente en los países asiáticos, aunque es cierto que todavía en la actualidad sigue habiendo una fuerte presencia del factor coste.

Hoy en día, los comercios, hoteles, bancos y otras empresas de servicios se preocupan, sobre todo, de asegurar que sus productos o servicios sean muy accesibles para sus clientes: la proximidad permite un contacto directo y un servicio post-venta y hacen de éste el factor clave de la decisión de localización.

La localización es considerada una variable de gran importancia estratégica en la distribución comercial. En el caso del comercio especializado se convierte en el eje fundamental, constituyendo un fuerte estímulo para la demanda. Al ser éste un comercio que posee un surtido estrecho pero profundo su oferta podría resultar poco atractiva para el consumidor en caso de encontrarse aislado.

Los factores a considerar al elegir la ubicación de una empresa comercial así como los trámites jurídicos relacionados con ella (contrato de arrendamiento y licencias de apertura y obras), las dividimos en dos grupos, dependiendo de la oferta y la demanda, que son:

a) Factores de demanda: a continuación se enumeran y explican brevemente los factores que implican al consumidor:

Población: es uno de los factores que se antoja necesario conocer para determinar la localización de la empresa. Por ello, necesitaremos datos como el número de habitantes, la edad de los mismos, etc. Esos datos se obtienen de los Censos de Población de estadísticas elaboradas por administraciones públicas.

Nivel de gasto/consumo: mediante encuestas realizadas por la propia empresa a los consumidores y datos obtenidos por encuestas realizadas por la administración pública, se puede llegar a obtener el grado de preferencia que tienen los consumidores hacia los productos y así obtener el gasto que ello supone.

Hábitos de consumo: explican la cantidad de productos que necesitan ofertar los establecimientos a los clientes.

Nivel de empleo: un alto nivel de empleo en la zona implica un alto poder de compra.

Expansión de la ciudad: factor imprescindible dentro de la estrategia de localización. Es importante saber hacia que zona se expandirá la ciudad en los siguientes años, pues ello podría implicar un cambio del lugar de compra.

Tráfico peatonal: una zona peatonal próxima a la localización del establecimiento es importante, pues reportaría más beneficios.

Características del espacio elegido. Comprueba que el espacio cumple la normativa legal y las medidas necesarias de seguridad, que permite un correcto desarrollo de tu actividad, que tiene buenos accesos y está bien comunicado. Y no olvides valorar en detalle las reformas que necesitas hacer, los costes de instalación y la posibilidad de ampliar el espacio en el futuro.

b) Factores de oferta: a continuación se enumeran y comentan brevemente factores relacionados con la empresa:

Competencia: la competencia existente y las características de los establecimientos indican el nivel de oferta que existe en la zona. Para conocer la competencia se pueden utilizar datos de censos de establecimientos. Interesa que haya el menor número posible de competidores en el área de influencia.

Imagen de la zona: cuanto mejor sean los accesos, disponibilidad de aparcamiento gratuito, comodidad de transportes, mayor será la probabilidad de que los consumidores compren en el área comercial.

Cambios en el entorno urbano: son aspectos importantes a tener en cuenta en este factor los posibles cambios que sufra la red de comunicación como transporte público o el desarrollo de otra área comercial cercana.

Distancia y accesibilidad: la buena accesibilidad sin barreras naturales como ríos o montañas, sin barreras humanas como un elevado índice de inseguridad ciudadana o que no haya barreras artificiales como son los semáforos, los medios de transporte, hacen que el consumidor se sienta atraído por el área comercial.

Restricciones legales: son limitaciones legales impuestas por los ayuntamientos que dificultan la implantación del área comercial.

Impuestos: se consideran impuestos de apertura de local, licencias, recogida de basuras, suministros de luz y de agua.

Visibilidad del local: barrios y zonas comerciales concurridas y dentro de ellos determinadas calles, plazas y galerías.

Facilidad de comunicaciones y accesos: tener cerca paradas de autobús, metro, trenes de cercanías o aparcamientos aumenta el radio de acción del negocio.

También se presenta como un factor relevante y gran interés para la localización comercial, **la maximización del área de influencia para cada bien comercializado**. Así lo refleja la *Cámara de Comercio de España (2012),* "el área comercial mide el radio de atracción de una localidad sobre los residentes en los alrededores para que realicen sus compras en ella. Cuanto mayor sea el área comercial de una localidad, más público objetivo estará dentro de su alcance y más atractiva será como ubicación de un nuevo comercio". Eso sí, habiendo realizado previamente un estudio profundo y detallado de los demás factores y características de los residentes de la zona.

5.5. Área de influencia y política de precios

Siguiendo el discurso de Muñiz González, R. (2010), en su obra *Marketing en el Siglo XXI (3ª edición)*, el precio en muchos casos es la variable del marketing que resume la política comercial de la empresa. Se puede analizar desde dos puntos de vista, primero en cuanto a las necesidades del mercado, siendo el producto el que lo determina, siendo muy habitual que se tengan las mismas características y el otro punto de vista es el proceso de producción, obteniendo su coste de fabricación y sumándole la rentabilidad deseada. En principio es la empresa la que se tiene que encargar de poner el precio que se considere más adecuado.

La percepción del valor del producto por parte de los consumidores atiende tanto a términos subjetivos como objetivos, y serán ellos los que decidirán la compra según las necesidades y la relación entre el precio y los atributos del producto que consideran más valiosos. En el marketing mix de la empresa, un elemento muy importante es el precio, junto con el producto, la distribución y la promoción.

Así se puede definir el precio como la “estimación cuantitativa que se efectúa sobre un producto y que, traducido a unidades monetarias, expresa la aceptación o no del consumidor hacia el conjunto de atributos de dicho producto, atendiendo a la capacidad para satisfacer necesidades” Muñiz, R. (2010).

Lo que nos lleva a establecer unos precios, persiguiendo siempre obtener los mayores beneficios posibles. Los términos precio del producto nos determinarán los ingresos de la empresa, por las ventas que se harán del producto, que está fuertemente relacionado con los beneficios, aunque influyen muchos más factores, es decir, tener unas ventas altas, no implica necesariamente que se vaya a conseguir unos mayores beneficios. Por eso el precio es una variable más a la hora de determinar el beneficio y se necesita de una adecuada determinación y equilibrio entre todas las denominadas “áreas de beneficios”.

Dichas áreas pueden clasificarse en internas y externas, tal y como muestra el siguiente cuadro:

Áreas internas	**Áreas externas**
• Costes. • Cantidad. • Precios. • Beneficios fijados. • Medios de producción.	• Mercados. • Tipos de clientes. • Zonas geográficas. • Canales de distribución. • Promoción.

Fuente: **Marketing en el Siglo XXI (3ª edición)**

Por lo tanto hay que hacer una política de precios racional, adaptándose a las diferentes circunstancias del mercado en cada momento, y no solo al cálculo de precio del producto, ni tampoco del beneficio, tienen que ser una relación entre todas las áreas tanto internas, como externas, para la determinación de los Objetivos de la empresa.

No obstante, y como puede observarse, el precio (interna) y el área de influencia (externa) entendida como zona geográfica de influencia, se presentan como dos áreas de beneficio importantes y reconocidas para la empresa.

Pero la relación entre política de precios y determinación de áreas de influencia presenta un doble enfoque:

En primer enfoque es referente a la política interna de la empresa respecto al precio de un bien o servicio, determinar el punto de equilibrio para nivelar las ventas y los costes, consiguiendo un nivel de rentabilidad y determinar así su solvencia. Una vez que ya se sabe con qué niveles de precios se puede trabajar, la empresa dispone de una herramienta muy importante a la hora de poder ganar cuota de mercado y poder así maximizar sus beneficios.

El segundo enfoque hace referencia a que la competencia varíe su precio y existan variaciones en las cuotas de mercado, en esta nueva situación la empresa puede tener una posición conservadora, ya que esa baja puede no ser significativa para la empresa y bajando el precio puede que se gane muy poco, o puede que esa bajada de la competencia obligue a la empresa a reducir el precio con lo que tendría que hacer una restructuración para conseguir el anteriormente llamado punto de equilibrio, volviendo a modificar sus áreas de beneficio ante esta nueva situación.

El modelo que se propone en el presente Trabajo Fin de Grado, pretende poner en relación ambas áreas de beneficio, el precio del bien y área de influencia, entendida esta última como zona geográfica, en el entendimiento de que un cálculo efectivo de áreas de influencia permite a la empresa comercial hacer simulaciones para calcular el impacto que pueden suponer ciertos cambios de precio en un **bien comercializado**, ya sea en la propia empresa o en la competencia.

6. DETERMINACIÓN DEL ÁREA DE INFLUENCIA

6.1. Descripción del modelo matemático

Se suponen dos empresas comerciales E_1 y E_2 que se encuentran situadas en **cualquier punto de un espacio urbano o periurbano circular**. Se ha elegido de forma circular para simplificar los cálculos, y es de resaltar, con respecto a estudios anteriores, que los establecimientos E_1 y E_2 ya no se colocan necesariamente en los extremos de un diámetro del espacio periurbano, y por consiguiente, **se produce un gran avance al no restringir su localización**. Evidentemente, es de esperar que el modelo se complique considerablemente, aunque aumente drásticamente en flexibilidad y versatilidad.

Esto es, a modo de ejemplo:

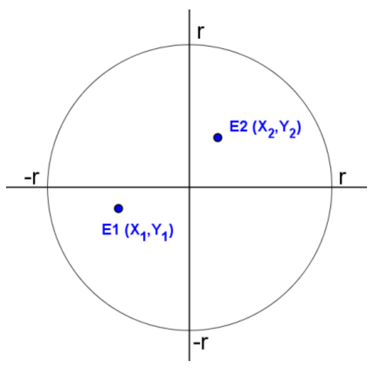


Figura 1

Para la modelización, se va estimar que el gasto que realiza un individuo, es decir el consumidor, para adquirir un determinado bien en una empresa comercial, es la suma del coste de transporte desde el domicilio habitual del consumidor al lugar de venta multiplicado por dos (ida y vuelta), más el precio del bien que desea comprar. El coste de transporte se calcula en base a la distancia en línea recta entre el domicilio y la empresa comercial, y para ello tendremos en cuenta que el coste de transporte por unidad de longitud es constante para todo el trayecto.

En base a lo anterior, obtenemos la siguiente expresión:

$$G_i = p_i + 2\tau d_i \ \ con \ \ i = 1,2$$

donde:

G_i = gasto realizado por el consumidor situado en un punto genérico (x,y) del espacio urbano al adquirir el bien en la empresa

p_i= precio del bien en la empresa comercial $E_{i,}$ con i=1, 2

τ = coste de transporte por unidad de longitud recorrida

d_i =distancia a E_i en línea recta de un punto genérico (x,y) del espacio urbano

6.2. Desarrollo geométrico del modelo

En función de los precios del bien en ambas empresas comerciales, p_1 y p_2, se presentan dos casos claramente diferenciados:

6.2.1. Caso General: $p_2 > p_1$

6.2.1.1. Cálculo de la curva de indiferencia

Teniendo en cuenta estas premisas, se va a calcular y determinar cuál es el área de influencia de cada empresa comercial, en función de la diferencia de precios que exista entre ambas empresas y de la distancia del lugar de residencia del comprador al punto de venta.

Se puede entender en este contexto por ***área de influencia*** de una empresa para un determinado producto o servicio, el lugar geométrico de todos los puntos de la cuidad en los que, al ser menor el gasto, un consumidor opta por dicha empresa para adquirir el producto o servicio.

Para el desarrollo, en primer lugar se va a igualar la expresión matemática señalada anteriormente para cada una de las empresas, logrando así los puntos del espacio urbano en los cuales al consumidor le es indiferente ir a una empresa comercial o a otra empresa para adquirir el bien, se va a obtener la denominada ***curva de indiferencia:***

$$G_1 = G_2 \;\Leftrightarrow\; p_1 + 2\tau d_1 = p_2 + 2\tau d_2 \;\Leftrightarrow\; 2\tau(d_1 - d_2) = p_2 - p_1 \Leftrightarrow d_1 - d_2 = \frac{\nabla p}{2\tau}$$

siendo:

$0 \leq d_1 \leq 2r$ i= 1, 2 (considerando el espacio periurbano con forma circular de radio *r*). Esto implica que tanto $d_1 - d_2$ como $d_2 - d_1$sean siempre menores o iguales que *2r*.

$p_2 - p_1 = \nabla p =$ diferencial de precio del bien entre ambas empresas comerciales.

Se va a suponer que las empresas se ubican en puntos cualesquiera del espacio urbano o periurbano. Sean $E_1(X_1, Y_1)$ y $E_2(X_2, Y_2)$ sus coordenadas. Entonces dado un punto $P(x, y)$ cualquiera de dicho espacio urbano o periurbano, para dicho punto (ver figura 2):

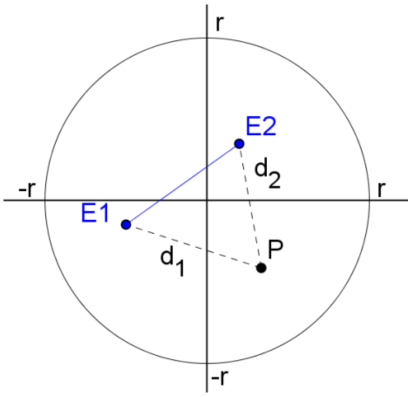


Figura 2

$$G_1 = G_2 \quad \Leftrightarrow \quad d_1 - d_2 = \frac{\nabla p}{2\tau} \quad \Leftrightarrow \quad d(P, E_1) - d(P, E_2) = \frac{\nabla p}{2\tau} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x - X_1)^2 + (y - Y_1)^2} - \sqrt{(x - X_2)^2 + (y - Y_2)^2} = \frac{\nabla p}{2\tau}$$

A $\frac{\nabla p}{2\tau}$ se le denomina $\lambda(p, \tau)$ y, operando en la igualdad anterior:

$$\sqrt{(x - X_1)^2 + (y - Y_1)^2} = \lambda(p, \tau) + \sqrt{(x - X_2)^2 + (y - Y_2)^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\sqrt{(x-X_1)^2+(y-Y_1)^2}\right]^2 = \left[\lambda(p,\tau)+ \sqrt{(x-X_2)^2+(y-Y_2)^2}\right]^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-X_1)^2+(y-Y_1)^2 =$$
$$= \lambda(p,\tau)^2+(x-X_2)^2+(y-Y_2)^2+2\lambda(p,\tau)\sqrt{(x-X_2)^2+(y-Y_2)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-X_1)^2+(y-Y_1)^2- (x-X_2)^2 - (y-Y_2)^2- \lambda(p,\tau)^2 =$$
$$= 2\lambda(p,\tau)\sqrt{(x-X_2)^2+(y-Y_2)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+X_1^2-2X_1x+y^2+Y_1^2-2Y_1y-x^2-X_2+2X_2x-y^2-Y_2^2++2Y_2y-\lambda(p,\tau)^2 =$$
$$= 2\lambda(p,\tau)\sqrt{(x-X_2)^2+(y-Y_2)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(X_2-X_1)x+2(Y_2-Y_1)y+[(X_1^2+Y_1^2)-(X_2^2+Y_2^2]-\lambda(p,\tau)^2 =$$
$$= 2\lambda(p,\tau)\sqrt{(x-X_2)^2+(y-Y_2)^2} \Leftrightarrow$$

Si denominamos:

$$A = 2(X_2-X_1)$$
$$B = 2(Y_2-Y_1)$$
$$C = [(X_1^2+Y_1^2)-(X_2^2+Y_2^2)]-\lambda(p,\tau)^2$$

entonces, la ecuación queda de la siguiente manera:

$$Ax+By+C = 2\lambda(p,\tau)\sqrt{(x-X_2)^2+(y-Y_2)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (Ax+By+C)^2 = 4\lambda(p,\tau)^2\,[(x-X_2)^2+(y-Y_2)^2]$$

Denominando $D = 4\lambda(p,\tau)^2$:

$$(Ax+By+C)^2 = D[(x-X_2)^2+(y-Y_2)^2] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ [(Ax+By)^2+C^2+2C(Ax+By)] = D[(x-X_2)^2+(y-Y_2)^2] \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ [(Ax+By)^2+C^2+2C(Ax+By)] = D\left(x^2+{X_2}^2-2X_2x+y^2+{Y_2}^2-2Y_2y\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ A^2x^2+B^2y^2-2ABxy+C^2+2ACx+2BCy =$$
$$= \ Dx^2+DX_2^2-2DX_2x+Dy^2+DY_2^2-2DY_2y \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ (A^2-D)x^2+2ABxy+(B^2-D)y^2+2(AC+DX_2)x+2(BC+DY_2)y+\ (C^2-DX_2^2-D{Y_2}^2)=0$$

Resumiendo, se ha obtenido que $G_1 = G_2$ para un punto genérico (x,y) del espacio urbano o periurbano si y sólo si:

$$ax^2+2kxy+by^2+cx+dy+e=0$$

donde:	siendo:
a = A^2-D	A = $2(X_2-X_1)$
k= AB	B = $2(Y_2-Y_1)$
b = B^2-D	C= $[(X_1^2+Y_1^2)-(X_2^2+Y_2^2)]-\ \lambda(p,\tau)^2$
c = $2(AC+DX_2)$	D = $4\lambda(p,\tau)^2$
d = $2(BC-DY_2)$	
e = $C^2-D{X_2}^2-D{Y_2}^2$	

La expresión anterior corresponde a la curva de indiferencia, que como se aprecia, es una *cónica*. Para determinar a qué tipo de cónica corresponde, se realiza el estudio del signo del discriminante de la misma: $\Delta = (2k)^2 - 4ac$ según se contempla en el Anexo I. De dicho estudio se deriva que la cónica obtenida como curva de indiferencia es, siempre que se cumpla la condición de que $\boldsymbol{p_2 - p_1} < 2\boldsymbol{d}(\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_2})\boldsymbol{\tau}$, una ***hipérbola,*** como no podía ser de otra manera, pues, dada la construcción del modelo, dicha curva es el lugar geométrico de los puntos del plano para los que la diferencia de distancias a las empresas comerciales es constante. Dicha hipérbola está centrada en el punto medio del segmento que une a ambas empresas, que son, evidentemente, sus focos, tal y como se observa en la figura 3.

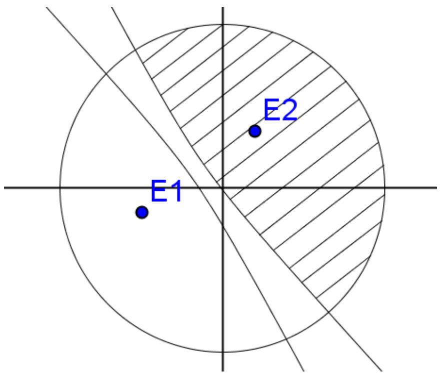


Figura 3

Sólo una rama de la hipérbola (la más cercana a la empresa de **mayor precio**, en nuestro caso E_2) es la curva de indiferencia. La otra rama sería la curva de indiferencia en el caso de que la diferencia de precios fuese la misma pero a favor de la otra empresa, E_1. Por tanto, para mantener la coherencia geométrica de la cónica obtenida, representaremos siempre, en adelante, las dos ramas, entendiendo que no supone obstáculo alguno para entender e interpretar el modelo y los resultados obtenidos.

El objetivo del trabajo, -calcular las áreas de influencia de cada empresa-, se traduce entonces en calcular el área rayada en la figura 3 (el área de influencia de la segunda empresa es la restante hasta completar el área de todo el espacio urbano circular). Para ello, se va a proceder a la obtención de la *expresión reducida de eje vertical de la curva de indiferencia con E_2 en el semieje positivo de ordenadas y a la correspondiente traslación y giro del espacio periurbano en las mismas condiciones*, de manera que las áreas de influencia buscadas no varíen en la nueva disposición espacial, pero sean de obtención asequible mediante cálculo geométrico e integral.

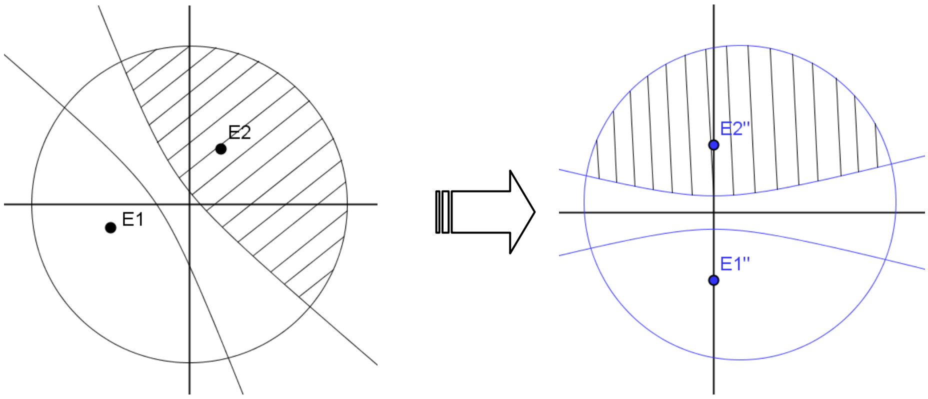


Figura 4

Previamente, y con el fin de simplificar todo el proceso, se van a establecer unas instrucciones previas a seguir antes de introducir los inputs del modelo. Dichas instrucciones afectan a la denominación de ambas empresas, a la obligatoria traslación al primer cuadrante al menos de la empresa E_2 y a la acotación del diferencial de precios para que exista competencia entre ambas empresas, según se indica en la figura 5:

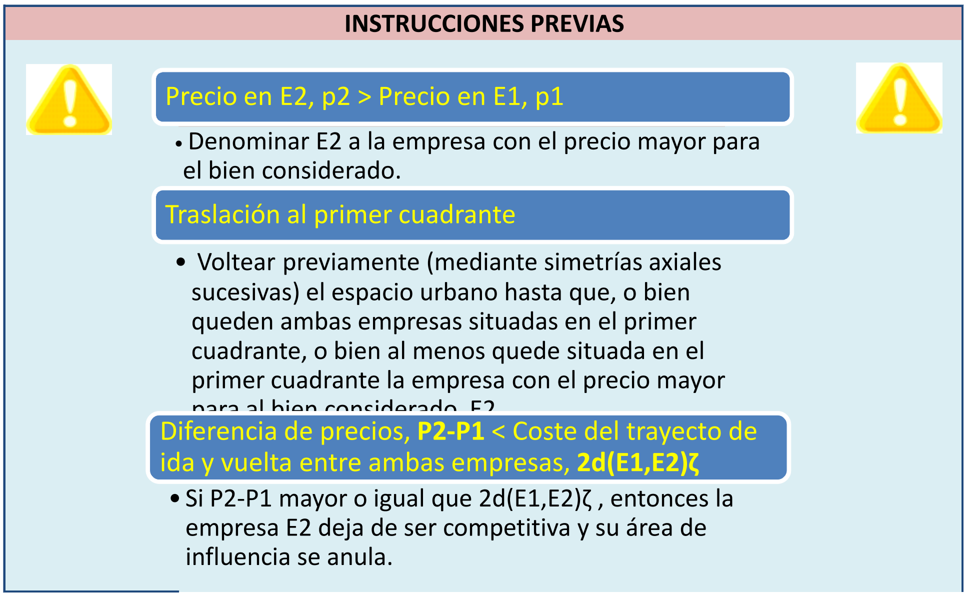


Figura 5

Dichas instrucciones tienen la siguiente motivación:

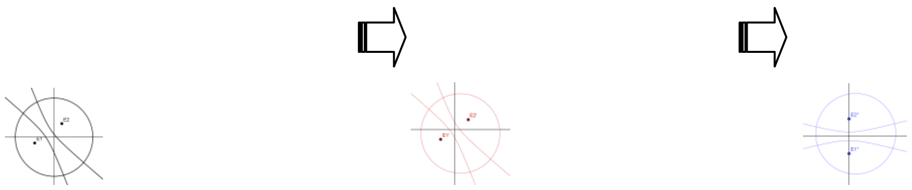
1) *Denominar E_2 a la empresa con el precio mayor para el bien considerado* $\rightarrow$ garantiza que sea más fácil calcular su área de influencia una vez que se haya llegado a la expresión reducida de eje vertical de la curva de indiferencia con E_2 en el semieje positivo de ordenadas.

2) *Voltear previamente (mediante simetrías axiales sucesivas) el espacio urbano hasta que, o bien queden ambas empresas situadas en el primer cuadrante o, al menos, quede situada en el primer cuadrante la empresa con el precio mayor para al bien considerado, E2* $\rightarrow$ consigue, sin menoscabo del correcto cálculo de las áreas de influencia buscadas, pues, evidentemente, dichas áreas son un invariante ante este proceso, reducir enormemente la casuística relativa a la posición inicial de ambas empresas, simplificando y facilitando la implementación del modelo.

3) *Acotar el diferencial de precios* $p_2 - p_1 = \nabla p < 2d(E_1, E_2)\tau$ $\rightarrow$ como ya se ha mencionado, y tal y como se refleja en el Anexo I, de no cumplirse esta condición la empresa E_2 deja de ser competitiva para el bien considerado y su área de influencia se anula, ya que al cliente, sea cual sea su ubicación en la ciudad, le resulta más barato acudir a E_1. Esto se debe a que en E_2 el sobreprecio es tal que dicha cantidad le permite compensar en cualquier caso el gasto en el desplazamiento de ida y vuelta a E_1… ¡incluso si el cliente se ubica en E_2!

6.2.1.2. Cálculo de la expresión reducida de eje vertical de la curva de indiferencia con E_2 en el semieje positivo de ordenadas

A continuación, lo primero a realizar será un cambio de sistema de referencia (traslación) de manera que el nuevo centro sea el punto medio del segmento que une ambas empresas (en lugar del origen de coordenadas). En segundo lugar, una vez realizada dicha traslación, se procederá a cambiar de nuevo el sistema de referencia (giro), girando el ángulo necesario para que el nuevo eje de abscisas sea la recta que une ambas empresas y el eje de coordenadas la perpendicular pasando por el punto medio de ambas (manteniendo el mismo centro tras efectuar la traslación). Por último, se girará de nuevo 90 grados el sistema de referencia para de esta forma, obtener la expresión reducida de eje vertical de la curva de indiferencia, con E_2 en el semieje positivo de ordenadas y el espacio periurbano consecuentemente trasladado y/o girado. Todo ello con el fin de, como veremos posteriormente, poder calcular las áreas de influencia de las dos empresas.



Curvas Base **Curvas Trasladadas** **Curvas Giradas**

Figura 6

Según lo dicho, partiendo de la expresión en el sistema de referencia habitual (O, x, y):

$$ax^2 + 2kxy + by^2 + cx + dy + e = 0 \qquad \text{(I)}$$

Paso 1:

Se realizan los cálculos necesarios para efectuar la **traslación,** de modo que el nuevo centro del sistema de referencia (O', x', y') sea el punto medio del segmento que une ambas empresas:

$$O' = (O_1, O_2) = \left(\frac{X_1 + X_2}{2}, \frac{Y_1 + Y_2}{2}\right)$$

Las ecuaciones de dicha traslación son:

$$x = x' + O_1$$

$$y = y' + O_2$$

Por lo que, sustituyendo en la expresión (I) se obtiene:

$$a(x' + O_1)^2 + 2k(x' + O_1)(y' + O_2) + b(y' + O_2)^2 + c(x' + O_1) + d(y' + O_2) + e = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ a(x'^2 + {O_1}^2 + 2O_1x')^2 + 2k(x'y' + O_2x' + O_1y' + O_1O_2) + b\left(y'^2 + {O_2}^2 + 2O_2y'\right)^2 + cx' + cO_1 + dy' + dO_2 + e = 0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ ax'^2 + 2kx'y' + by'^2 + (2aO_1 + 2kO_2 + c)x' + (2bO_2 + 2kO_1 + d)y' + \left(a{O_1}^2 + b{0_2}^2 + 2kO_1O_2 + cO_1 + dO_2 + e\right) = 0$$

Por tanto, la ecuación de la hipérbola en el nuevo sistema de referencia (O', x', y') es:

$$\alpha x'^2 + 2kx'y' + \beta y'^2 + \gamma x' + \delta y' + \varepsilon = 0$$

siendo:

$$\alpha = a$$

$$\beta = b$$

$$\gamma = 2aO_1 + 2kO_2 + c$$

$$\delta = 2bO_2 + 2kO_1 + d$$

$$\varepsilon = a{O_1}^2 + b{O_2}^2 + 2kO_1O_2 + cO_1 + dO_2 + e$$

Tal y como se demuestra en el Anexo II, tanto γ como δ valen 0, lo cual es totalmente coherente con el fin buscado, puesto dicha hipérbola ya no está trasladada con respecto a su centro. Por tanto, la expresión queda:

$$\alpha x'^2 + 2kx'y' + \beta y'^2 + \varepsilon = 0$$

Paso 2:

Se busca realizar un **giro** de ángulo θ para que, manteniendo el mismo punto O' como origen del sistema de coordenadas, <u>el eje de abscisas coincida con la recta que une las dos empresas</u> y el eje de ordenadas sea la perpendicular que pasa por dicho punto.

Denominando (O', x'', y'') al nuevo sistema de referencia y partiendo de la expresión:

$$\alpha x'^2 + 2kx'y' + \beta y'^2 + \varepsilon = 0 \quad \text{(II)}$$

se aplican las ecuaciones del giro:

$$x' = x'' \cos\theta - y''\operatorname{sen}\theta$$

$$y' = x'' \operatorname{sen}\theta + y''\cos\theta$$

y sustituyendo en (II) se obtiene:

$$\alpha(x''\cos\theta - y''\operatorname{sen}\theta)^2 + 2k(x''\cos\theta - y''\operatorname{sen}\theta)(x''\operatorname{sen}\theta + y''\cos\theta) +$$

$$+ \beta(x''\operatorname{sen}\theta + y''\cos\theta)^2 + \varepsilon = 0 \;\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\; \alpha(\cos^2\theta x''^2 + \operatorname{sen}^2\theta y''^2 - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\, y''x'') + 2k(\operatorname{sen}\theta\cos\theta x''^2 + \cos^2\theta\, x''y'' - \operatorname{sen}^2\theta\, x''y'' - \operatorname{sen}\theta\cos\theta\, y''^2) + \beta(\operatorname{sen}^2\theta x''^2 + \cos^2\theta\, y''^2 + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta x''\, y'') + \varepsilon = 0 \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha\cos^2\theta + 2k\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \beta\operatorname{sen}^2\theta)\, x''^2 + (-2\,\alpha\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 2k\cos^2\theta - 2k\operatorname{sen}^2\theta + 2\beta\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\, x''y'' + (\alpha\operatorname{sen}^2\theta - 2k\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \beta\cos^2\theta)\, y''^2 + \varepsilon = 0$

Puesto que buscamos que la hipérbola no esté girada, entonces el termino $x''y''$ ha de anularse, con lo que forzando que se anule dicho término, se puede obtener el ángulo θ que han de girarse los ejes:

$$-2\alpha\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 2k\cos^2\theta - 2k\operatorname{sen}^2\theta + 2\beta\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2[(\beta - \alpha)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + k(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)] = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (\beta-\alpha)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + k\,(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(\beta-\alpha)\operatorname{sen}2\theta + \mathrm{k}\cos 2\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{k}\cos 2\theta = \frac{1}{2}(\alpha-\beta)\operatorname{sen}2\theta \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{2k}{\alpha-\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \tan 2\theta = \frac{2k}{\alpha-\beta} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \theta = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2k}{\alpha-\beta}\right) \quad con\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \quad y \quad \alpha \neq \beta$$ [2]

Comprobamos que el resultado obtenido para θ es coherente, puesto que, geométricamente, es evidente que $\tan\theta = \frac{Y_2-Y_1}{X_2-X_1} = \frac{B/2}{A/2} = \frac{B}{A}$, de lo cual se deduce que:

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2(B/A))}{1-\left(\frac{B}{A}\right)^2} = \frac{2\left(\frac{B}{A}\right)}{\frac{(A^2-B^2)}{A^2}} == \frac{2AB}{A^2-B^2} = \frac{2AB}{(A^2-D)-(B^2-D)} = \frac{2k}{\alpha-\beta}\ .$$

Por tanto, en aras de la sencillez, calcularemos, en primera instancia, θ como:

$$\theta = arctan\frac{Y_2-Y_1}{X_2-X_1}, si\ X_1 \neq X_2 \quad (\theta = \pm 45°, si\ X_1 = X_2)$$

De esta manera, al aplicar dicho ángulo θ giro en (II), la expresión reducida de eje horizontal de la curva de indiferencia obtenida sería:

$$Mx''^2 + Ny''^2 + E = 0 \quad \text{(III)}$$

con

$$M = \alpha\cos^2\theta + 2k\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \beta\operatorname{sen}^2\theta$$

$$N = \alpha\operatorname{sen}^2\theta - 2k\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \beta\cos^2\theta$$

$$E = \varepsilon$$

Paso 3:

Llegados a este punto, se observa que en el sistema de referencia (O', x'', y''), como se ha comentado anteriormente, el eje de abscisas coincide con la recta que une las dos empresas y el eje de ordenadas es la perpendicular que pasa por dicho punto. Sin embargo, dependiendo de la posición de ambas

[2] $Si\ \alpha = \beta$ entonces es fácil deducir que $\theta = \pm 45º$

empresas, en algunos casos E_2 queda ubicada en el semieje positivo de abscisas y en otros casos en el semieje negativo.

Con el fin de que E_2 se ubique siempre en el mismo semieje[3] (se opta por el **semieje positivo**, pero podría haber sido igualmente el negativo), se pasa a corregir el ángulo θ, de acuerdo con el diagrama de decisión adjunto (ver figura 7), para obtener el *ángulo corregido* θ_c:

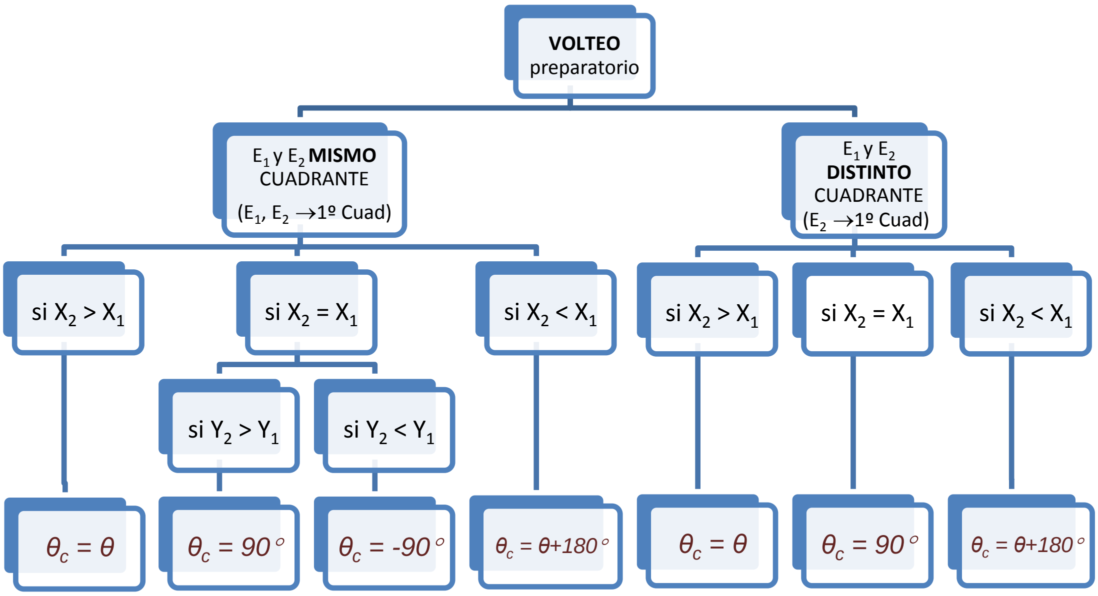


Figura 7

De esta manera, al aplicar dicho ángulo de giro corregido θ_c en (III), se tiene ya la certeza de llegar a la expresión reducida de eje horizontal de la curva de indiferencia, con E_2 ubicada en el semieje positivo de abscisas, que es:

$$Mx''^2 + Ny''^2 + E = 0$$

con

$$M = \alpha \cos^2 \theta_c + 2k \operatorname{sen} \theta_c \cos \theta_c + \beta \operatorname{sen}^2 \theta_c$$

$$N = \alpha \operatorname{sen}^2 \theta_c - 2k \operatorname{sen} \theta_c \cos \theta_c + \beta \cos^2 \theta_c$$

$$E = \varepsilon$$

[3] Así se podrá determinar con certeza el giro posterior (paso 4), necesario para obtener la finalmente buscada expresión reducida de eje vertical de la curva de indiferencia, con E_2 en el semieje positivo de ordenadas.

Paso 4:

Se realiza un último **giro** añadido de -90°, de modo que el ángulo final de giro sea $\theta_f = \theta_c - 90°$, para que, manteniendo el mismo punto O' como origen del sistema de coordenadas, el eje de ordenadas coincida con la recta que une las dos empresas (con E_2 en el semieje positivo vertical y E_1 en el semieje negativo vertical) y el eje de abscisas sea la perpendicular que pasa por dicho punto.

Denominando (O', x''', y''') al nuevo sistema de referencia y partiendo de la expresión:

$$Mx''^2 + Ny''^2 + E = 0$$

se aplican las ecuaciones del giro añadido de (-90°):

$$x'' = x''' \cos(-90°) - y''' \operatorname{sen}(-90°) = y'''$$

$$y'' = x''' \operatorname{sen}(-90°) + y''' \cos(-90°) = -x'''$$

y sustituyendo se obtiene:

$$M' x'''^2 + N' y'''^2 + E = 0$$

con

$$N' = M = \alpha \cos^2 \theta_c + 2k \operatorname{sen} \theta_c \cos \theta_c + \beta \operatorname{sen}^2 \theta_c$$

$$M' = N = \alpha \operatorname{sen}^2 \theta_c - 2k \operatorname{sen} \theta_c \cos \theta_c + \beta \cos^2 \theta_c$$

$$E = \varepsilon$$

Tras este proceso en cuatro pasos, se obtiene la ***expresión reducida de eje vertical de la curva de indiferencia con E_2 en el semieje positivo del eje de ordenadas***, lo cual supone finalmente “situar” a la hipérbola en la mejor posición para realizar el cálculo geométrico e integral del objetivo del trabajo, esto es, de las áreas de influencia de ambas empresas.

6.2.1.3. Cálculo de la nueva expresión del espacio periurbano

Al trasladar y girar la hipérbola, el área entre la hipérbola y la circunferencia se ha modificado, por eso del mismo modo, a dicha circunferencia se le ha de realizar, en primer lugar, una traslación igual a la que se realizó en la hipérbola y, en segundo lugar, se ha de girar el mismo ángulo θ respecto al origen, de manera que el área de influencia buscada no varíe.

Partiendo de la expresión del espacio periurbano en el sistema de referencia habitual (O, x, y):

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Paso 1:

Se realizan los siguientes cálculos para efectuar la **traslación,** de modo que el nuevo centro del sistema de referencia sea el ya conocido (O', x', y'):

Las ecuaciones de dicha traslación son,:

$$x = x' + O_1$$

$$y = y' + O_2$$

con $O' = (O_1, O_2) = \left(\frac{X_1+X_2}{2}, \frac{Y_1+Y_2}{2}\right)$

Aplicando dicha traslación a la expresión del espacio periurbano:

$$(x' + O_1)^2 + (y' + O_2)^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x'^2 + {O_1}^2 + 2O_1x' + y'^2 + {O_2}^2 + 2O_2y' = r^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x'^2 + y'^2 + 2O_1x' + 2O_2y' + ({O_1}^2 + {O_2}^2 - r^2) = 0$$

Por tanto, la ecuación de la circunferencia del espacio periurbano en el nuevo sistema de referencia (O', x', y') es:

$$x'^2 + y'^2 + \lambda x' + \mu y' + \eta = 0$$

siendo:

$$\lambda = 2O_1$$

$$\mu = 2O_2$$

$$\eta = {O_1}^2 + {O_2}^2 - r^2$$

Pasos 2 y 3

Al igual que con la hipérbola de la curva de indiferencia, se realiza un **giro** de ángulo θ_c para que, manteniendo el mismo punto O' como origen del sistema de coordenadas, el eje de abscisas coincida con la recta que une las dos empresas y el eje de ordenadas sea la perpendicular que pasa por dicho punto.

Denominando (O', x'', y'') al nuevo sistema de referencia y partiendo de la expresión:

$$x'^2 + y'^2 + \lambda x' + \mu y' + \eta = 0$$

se aplican las conocidas ecuaciones del giro:

$$x' = x'' \cos\theta_c - y'' \operatorname{sen}\theta_c$$

$$y' = x'' \operatorname{sen}\theta_c + y'' \cos\theta_c$$

y sustituyendo se obtiene:

$$(x'' \cos\theta_c - y'' \operatorname{sen}\theta_c)^2 + (x'' \operatorname{sen}\theta_c + y'' \cos\theta_c)^2 + 2O_1(x'' \cos\theta_c - y'' \operatorname{sen}\theta_c) + 2O_2(x'' \operatorname{sen}\theta_c + y'' \cos\theta_c) + ({O_1}^2 + {O_2}^2 - r^2) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2\theta_c\, x''^2 + \operatorname{sen}^2\theta_c\, y''^2 - 2\operatorname{sen}\theta_c \cos\theta_c\, x''y'' + \operatorname{sen}^2\theta_c\, x''^2 + \cos^2\theta_c\, y''^2 + 2\operatorname{sen}\theta_c \cos\theta_c\, x''y'' + 2O_1 \cos\theta_c\, x'' - 2O_1 \operatorname{sen}\theta_c\, y'' + 2O_2 \operatorname{sen}\theta_c\, x'' + 2O_2 \cos\theta_c\, y'' + {O_1}^2 + {O_2}^2 - r^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (\cos^2\theta_c + \operatorname{sen}^2\theta_c)\, x''^2 + (\operatorname{sen}^2\theta_c + \cos^2\theta_c)\, y''^2 + (2O_1 \cos\theta_c + 2O_2 \operatorname{sen}\theta_c)\, x'' + (-2O_1 \operatorname{sen}\theta_c + 2O_2 \cos\theta_c)\, y'' + \left({O_1}^2 + {O_2}^2 - r^2\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x''^2 + y''^2 + 2(O_1 \cos\theta_c + O_2 \operatorname{sen}\theta_c)\, x'' + 2(-O_1 \operatorname{sen}\theta_c + O_2 \cos\theta_c)\, y'' + \left({O_1}^2 + {O_2}^2 - r^2\right) = 0$$

esto es:

$$x''^2 + y''^2 + Rx'' + Sy'' + T = 0$$

con:

$$R = 2(O_1 \cos\theta_c + O_2 \operatorname{sen}\theta_c)$$

$$S = 2(-O_1 \operatorname{sen}\theta_c + O_2 \cos\theta_c)$$

$$T = \left({O_1}^2 + {O_2}^2 - r^2\right)$$

Paso 4:

Se realiza el último **giro** añadido de -90°, de modo que el ángulo final de giro sea, como en el caso de la hipérbola, $\theta_f = \theta_c - 90°$.

Denominando (O', x''', y''') al nuevo sistema de referencia y partiendo de la expresión:

$$x''^2 + y''^2 + Rx'' + Sy'' + T = 0$$

se aplican las ecuaciones del giro añadido de (-90°):

$$x'' = x''' \cos(-90°) - y'''\mathrm{sen}(-90°) = y'''$$

$$y'' = x''' \,\mathrm{sen}(-90°) + y'''\cos(-90°) = -x'''$$

y sustituyendo se obtiene:

$$y'''^2 + x'''^2 + R'x''' + S'y''' + T = 0$$

con:

$$S' = R = 2(O_1 \cos\theta_c + O_2 \,\mathrm{sen}\,\theta_c)$$

$$R' = -S = (-2)(-O_1 \,\mathrm{sen}\,\theta_c + O_2 \cos\theta_c)$$

$$T = \left({O_1}^2 + {O_2}^2 - r^2\right)$$

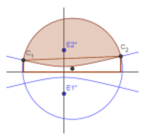
Tras este proceso en cuatro pasos, se obtiene la **nueva expresión del espacio periurbano, tras haber sido objeto de la misma traslación y giro que la hipérbola.**

6.2.1.4. Cálculo de las áreas de influencia

Una vez obtenidas la *expresión reducida de eje vertical de la curva de indiferencia con E_2 en el semieje positivo de ordenadas y la correspondiente expresión tras la traslación y el giro del espacio periurbano*, las áreas de influencia buscadas no varían en la nueva disposición espacial con respecto a las originales, pero son de obtención asequible mediante cálculo geométrico e integral.

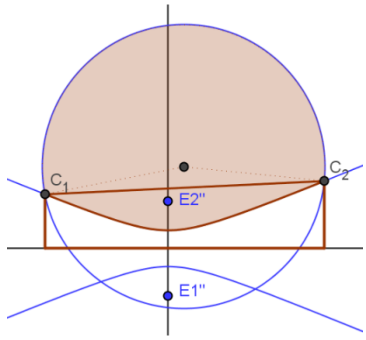
El objetivo es, pues, calcular el área de influencia de ambas empresas, teniendo en cuenta que los inputs son: $E_1(X_1, Y_1), E_1(X_2, Y_2), p_1, p_2, r$ y τ, y para ello se realizarán los cálculos **a partir de las ecuaciones de ambas curvas, una vez trasladadas y giradas.**

Las distintas disposiciones espaciales que pueden aparecer se articulan en torno a dos casos:



Caso 1

Centro circunferencia por debajo puntos de corte



Caso 2

Centro circunferencia por encima puntos de corte

Figura 8

Se emplearán en ambos casos procedimientos muy similares, pero no idénticos, para calcular, en primer lugar, el área de influencia de E_2, que como puede observarse, coincide con las zonas sombreadas en la figura 8. Posteriormente, se obtendrá fácilmente el área de influencia de E_1 como el área del círculo correspondiente al espacio urbano menos el área de influencia de E_2 y bastará con multiplicar por 100 los datos obtenidos para tener finalmente el área de influencia de cada empresa en tanto por ciento.

En ambos casos se puede observar que el área de influencia de E_2 puede descomponerse en tres subáreas, claramente determinadas por los puntos de corte, $C_1 = (C_{11}, C_{12})$ y $C_2 = (C_{21}, C_{22})$, de la rama positiva de la hipérbola con la circunferencia:

1) **Área del segmento circular C_1C_2, (ASgC).**

   Dicha área viene determinada por dos elementos: el radio de la circunferencia, *r*, y el ángulo *α* que forman los vectores con origen en el centro de la circunferencia y final en los puntos de corte C_1 y C_2 con la circunferencia. Dicha área es igual al área del sector circular menos el área de la porción triangular y se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$Area\ segmento\ circular = \frac{r^2}{2}(\alpha - sen\ \alpha)$$

   Se calcula *α*, haciendo uso del producto escalar de vectores, aplicado a los vectores que unen los puntos de corte de la curva de indiferencia con el espacio periurbano:

$$\overrightarrow{C_1} = (C_{11}, C_{12})$$

$$\overrightarrow{C_2} = (C_{21}, C_{22})$$

   α = ángulo entre $\overrightarrow{C_1}$ y $\overrightarrow{C_2}$

$$C_{11}\,C_{21} + C_{12}C_{22} \;=\; \langle\,\overrightarrow{C_1}, \overrightarrow{C_2}\rangle \;=\; |\,\overrightarrow{C_1}||\overrightarrow{C_2}|\cos\alpha$$

de donde se obtiene que:

$$\cos\alpha \;= \frac{C_{11}\,C_{21} + C_{12}C_{22}}{|\,\overrightarrow{C_1}||\overrightarrow{C_2}|} \;=\; \frac{C_{11}\,C_{21} + C_{12}C_{22}}{\sqrt{{C_{11}}^2 + {C_{12}}^2}\sqrt{{C_{21}}^2 + {C_{22}}^2}}$$

y por tanto:

$$\alpha = \operatorname{arc}\cos\frac{C_{11}\,C_{21} + C_{12}C_{22}}{\sqrt{{C_{11}}^2 + {C_{12}}^2}\sqrt{{C_{21}}^2 + {C_{22}}^2}}$$

Los puntos de corte se obtendrán con GeoGebra, y el cálculo de esta subárea se realizará en Excel una vez traspasados dichos puntos de corte. No obstante, es aquí donde surgen los dos casos, puesto que la función ACOS () de Excel siempre devuelve el ángulo entre 0° y 180°. Dicho ángulo es el correcto, siempre y cuando el centro de la circunferencia quede por encima de la cuerda que une los dos puntos de corte; en caso contrario, obtenemos el área del segmento circular “complementario” al buscado, por lo se deberá computar πr^2 menos dicha área.

2) **Área del trapecio determinado por los puntos de corte y sus proyecciones sobre el eje de abscisas (ATrp).**

Dicha área es igual a la semisuma de las bases por la altura, siendo el valor de las bases C_{12} y C_{22} y la altura la diferencia entre C_{21} y C_{11}, esto es:

$$Area\ trapecio = \frac{(C_{12} + C_{22})}{2}(C_{21} - C_{11})$$

3) **Área encerrada entre la rama positiva de la hipérbola y el eje de abscisas, entre las abscisas de los puntos de corte (AHip).**

Dicha área se puede obtener a partir del cálculo integral.

Las abscisas de los puntos de corte (extremos de integración) son C_{11} y C_{21}, y la expresión de la hipérbola a integrar es:

$$M'x'''^2 + N'y'''^2 + E = 0$$

con:

$$N' = M = \alpha \cos^2 \theta_c + 2k \operatorname{sen} \theta_c \cos \theta_c + \beta \operatorname{sen}^2 \theta_c$$

$$M' = N = \alpha \operatorname{sen}^2 \theta_c - 2k \operatorname{sen} \theta_c \cos \theta_c + \beta \cos^2 \theta_c$$

$$E = \varepsilon$$

Explicitando la rama positiva que nos interesa integrar:

$$y = +\sqrt{\frac{-M'}{N'}x^2 - \frac{E}{N'}} = +\sqrt{\mathbb{A}x^2 - |\mathbb{B}|}$$

siendo:

$$\mathbb{A} = \frac{-M'}{N'} \qquad \mathbb{B} = \frac{E}{N'} \qquad \mathbb{A} > 0 \quad \mathbb{B} < 0$$

Por tanto, la integral a calcular es:

$$\int_{C_{11}}^{C_{21}} \sqrt{\mathbb{A}x^2 - |\mathbb{B}|}\, dx$$

Para realizar esta integral, se emplea el cambio de variable:

$$x = \frac{\sqrt{|\mathbb{B}|}}{\sqrt{\mathbb{A}}} \cosh t \,; \;\; dx = \frac{\sqrt{|\mathbb{B}|}}{\sqrt{\mathbb{A}}} \sinh t$$

El siguiente paso es calcular los nuevos límites de integración en función de t.

Como $x = \frac{\sqrt{\mathbb{B}}}{\sqrt{\mathbb{A}}} \cosh t$ y por definición $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, sustituyendo el valor de $\cosh t$ en la ecuación anterior:

$$x = \frac{\sqrt{|\mathbb{B}|}}{\sqrt{\mathbb{A}}} \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{2} \Leftrightarrow e^t + e^{-t} = \frac{2\sqrt{\mathbb{A}}\, x}{\sqrt{|\mathbb{B}|}}$$

Al cociente $\frac{2\sqrt{\mathbb{A}}\, x}{\sqrt{\mathbb{B}}}$ se le denota como M(x); por tanto:

$$e^t + e^{-t} = M(x) \;\Leftrightarrow\; e^t + \frac{1}{e^t} = M(x) \;\Leftrightarrow\; e^t \cdot e^t + 1 = M(x) \cdot e^t \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (e^t)^2 - M(x) \cdot e^t + 1 = 0$$

Se presenta una ecuación de segundo grado en la que si hacemos $e^t = y$, queda: $y^2 - M(x)y + 1 = 0$, con soluciones:

$$y = \frac{M(x) \pm \sqrt{(-M(x))^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \;\Leftrightarrow\; y = \frac{M(x) \pm \sqrt{M(x)^2 - 4}}{2}$$

Se sustituye el valor de M(x) y se sigue operando:

$$y = \frac{\frac{2\sqrt{\mathbb{A}}\,x}{\sqrt{|\mathbb{B}|}} \pm \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{\mathbb{A}}\,x}{\sqrt{|\mathbb{B}|}}\right)^2 - 4}}{2} \iff y = \frac{\frac{2\sqrt{\mathbb{A}}\,x}{\sqrt{|\mathbb{B}|}}}{2} \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{\mathbb{A}}\,x}{\sqrt{|\mathbb{B}|}}\right)^2 - 4}}{2} \iff$$

$$\iff y = \frac{x\,\sqrt{\mathbb{A}}}{\sqrt{|\mathbb{B}|}} \pm \sqrt{\frac{\left(\frac{2\,x\,\sqrt{\mathbb{A}}}{\sqrt{|\mathbb{B}|}}\right)^2 - 4}{4}} \iff y = \frac{x\,\sqrt{\mathbb{A}}}{\sqrt{|\mathbb{B}|}} \pm \sqrt{\frac{\frac{4x^2\mathbb{A}}{|\mathbb{B}|}}{4} - 1} \iff$$

$$\iff y = \frac{x\,\sqrt{\mathbb{A}}}{\sqrt{|\mathbb{B}|}} \pm \sqrt{\frac{\mathbb{A}x^2}{|\mathbb{B}|} - 1}$$

Puesto que $e^t = y$:

$$y = \frac{x\,\sqrt{\mathbb{A}}}{\sqrt{|\mathbb{B}|}} \pm \sqrt{\frac{\mathbb{A}x^2}{|\mathbb{B}|} - 1} \iff e^t = \frac{x\,\sqrt{\mathbb{A}}}{\sqrt{|\mathbb{B}|}} \pm \sqrt{\frac{\mathbb{A}x^2}{|\mathbb{B}|} - 1}$$

Tomando logaritmo neperiano para despejar el valor de t:

$$t = \ln(y) \iff t = \ln\left(\frac{x\,\sqrt{\mathbb{A}}}{\sqrt{|\mathbb{B}|}} \pm \sqrt{\frac{\mathbb{A}x^2}{|\mathbb{B}|} - 1}\right)$$

A la expresión anterior, con la opción + la denotaremos como:

$$t = \ln\left(\frac{x\,\sqrt{\mathbb{A}}}{\sqrt{|\mathbb{B}|}} + \sqrt{\frac{\mathbb{A}x^2}{|\mathbb{B}|} - 1}\right) = \theta[x]$$

Tras los anteriores cálculos ya es posible obtener los límites superiores e inferiores de la integral tras el cambio de variable, que serán:

límite inferior: $\theta[C_{11}]$

límite superior: $\theta[C_{21}]$

Retomando la integral inicial y teniendo en cuenta el cambio de variable, se procede a su resolución:

$$\int_{C_{11}}^{C_{21}} \sqrt{\mathbb{A}x^2 - |\mathbb{B}|}\,dx = \int_{\theta[C_{11}]}^{\theta[C_{21}]} \sqrt{\mathbb{A}\left(\frac{\sqrt{|\mathbb{B}|}}{\sqrt{\mathbb{A}}}\cosh t\right)^2 - \mathbb{B}} \cdot \frac{\sqrt{|\mathbb{B}|}}{\sqrt{\mathbb{A}}}\sinh t\,dt =$$

$$= \int_{\theta[C_{11}]}^{\theta[C_{21}]} \sqrt{\frac{\mathbb{A}\,|\mathbb{B}|\ \cosh^2 t}{\mathbb{A}} - \mathbb{B}}\ \cdot\ \frac{\sqrt{|\mathbb{B}|}}{\sqrt{\mathbb{A}}} \sinh t\, dt =$$

$$= \frac{\sqrt{|\mathbb{B}|}}{\sqrt{\mathbb{A}}} \int_{\theta[C_{11}]}^{\theta[C_{21}]} \sqrt{|\mathbb{B}|\ \cosh^2 t - |\mathbb{B}|} \cdot \sinh t\, dt =$$

$$= \frac{\sqrt{|\mathbb{B}|}}{\sqrt{\mathbb{A}}} \int_{\theta[C_{11}]}^{\theta[C_{21}]} \sqrt{|\mathbb{B}|\,(\ \cosh^2 t - 1)} \cdot \sinh t\, dt =$$

$$= \frac{\sqrt{|\mathbb{B}|}}{\sqrt{\mathbb{A}}} \int_{\theta[C_{11}]}^{\theta[C_{21}]} \sqrt{\mathbb{B}\sinh^2 t}\ \cdot \sinh t\, dt\ =\ \frac{\sqrt{|\mathbb{B}|}}{\sqrt{\mathbb{A}}} \sqrt{|\mathbb{B}|}\ \int_{\theta[C_{11}]}^{\theta[C_{21}]} \sinh^2 t\ dt =$$

$$= \frac{\sqrt{|\mathbb{B}|}}{\sqrt{\mathbb{A}}} \sqrt{|\mathbb{B}|}\ \int_{\theta[C_{11}]}^{\theta[C_{21}]} \left(\frac{e^{\ t} - e^{-t}}{2}\right)^2 dt\ =\ \frac{\sqrt{|\mathbb{B}|}}{\sqrt{\mathbb{A}}} \sqrt{|\mathbb{B}|}\ \int_{\theta[C_{11}]}^{\theta[C_{21}]} \left(\frac{e^{\ 2t} + e^{-2t} - 2}{4}\right) dt =$$

$$= \frac{|\mathbb{B}|}{4\sqrt{\mathbb{A}}} \left[\left(\frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{t}{2}\right)\right]_{\theta[C_{11}]}^{\theta[C_{21}]}$$

En conclusión:

Área de influencia de E_2 = ASgC + ATrp - AHip

6.2.2. Caso Particular: $p_2 = p_1$

6.2.2.1. Cálculo de la curva de indiferencia

Se observa que en este caso, las áreas de influencia de ambas empresas son *segmentos circulares,* pues la curva de indiferencia es la mediatriz del segmento que une ambas empresas. Obviamente, sólo será necesario calcular el área de influencia de una de ellas, pues la otra será el resultado de restar la anterior al área total del espacio urbano.

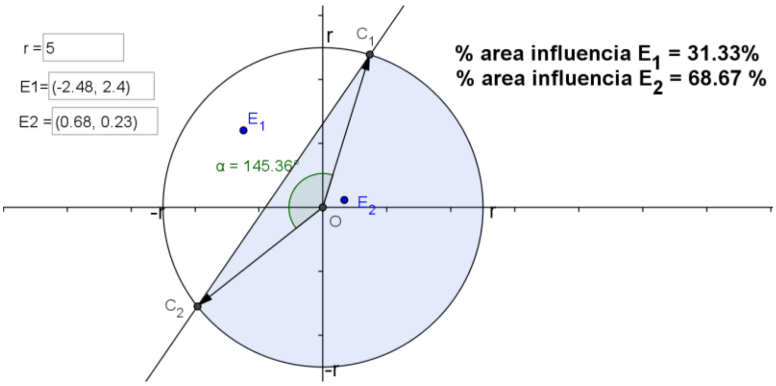


Figura 8

6.2.2.2. Cálculo de las áreas de influencia

Como ya se ha mencionado con anterioridad, el área de un segmento circular viene determinada por dos elementos: el radio de la circunferencia, *r*, y el ángulo *α* que forman los radios con origen en *O* y final en los puntos de corte C_1 y C_2 de la cuerda con la circunferencia. Dicha área es igual al área del sector circular menos el área de la porción triangular y se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$Area\ de\ influencia = \ Area\ segmento\ circular = \frac{r^2}{2}(\alpha - sen\ \alpha)$$

Por tanto, para calcular las áreas de influencia de cada empresa en el caso que nos ocupa (precios del bien en ambas empresas iguales), puesto que el radio *r* del espacio urbano es un dato conocido, sólo se ha de calcular el ángulo *α* que forman los vectores con origen en *O* y final en los puntos de corte, denominados C_1 y C_2. Para ello, en la correspondiente construcción de GeoGebra, se ha seguido el siguiente proceso paso a paso:

1. Se halla el punto medio O' del segmento que une a las empresas E_1 y E_2 :

$$O' = \left(\frac{X_1 + X_2}{2}, \frac{Y_1 + Y_2}{2}\right) = (O_1, O_2)$$

2. Se halla la recta que pasa por E_1 y E_2:

$$\frac{Y - Y_1}{Y_2 - Y_1} = \frac{\mathrm{X} - \mathrm{X}_1}{\mathrm{X}_2 - \mathrm{X}_1} \Leftrightarrow \mathrm{Y} - \mathrm{Y}_1 = \frac{\mathrm{Y}_2 - \mathrm{Y}_1}{\mathrm{X}_2 - \mathrm{X}_1}(\mathrm{X} - \mathrm{X}_1)$$

cuya pendiente, como se puede observar, es $m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$.

3. Se halla la ecuación de la mediatriz del segmento que une E_1 y E_2 , que obviamente, es la curva de indiferencia. Dicha recta pasa por O' y tiene por pendiente, al ser perpendicular a la anterior:

$$-\frac{1}{m} = \frac{X_1 - X_2}{Y_2 - Y_1}$$

por lo que su expresión es:

$$y - \frac{Y_1 + Y_2}{2} = \frac{X_1 - X_2}{Y_2 - Y_1}\left(x - \frac{X_1 + X_2}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ y - \mathrm{O}_2 = -\frac{1}{m}(x - \mathrm{O}_1)$$

4. Se hallan los puntos de corte *C₁* y *C₂* de la mediatriz (curva de indiferencia) con la circunferencia (espacio periurbano), resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y - \mathrm{O}_2 = -\dfrac{1}{m}(x - \mathrm{O}_1) \\ \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

Se despeja $y = \mathrm{O}_2 - \frac{1}{m}(x - \mathrm{O}_1)$ en la primera ecuación y se sustituye dicho valor en la segunda:

$$x^2 + \left[\mathrm{O}_2 - \frac{1}{m}(x - \mathrm{O}_1)\right]^2 = r^2 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x^2 + \mathrm{O}_2{}^2 + \frac{1}{m^2}(x - \mathrm{O}_1)^2 - \frac{2\mathrm{O}_2}{m}(x - \mathrm{O}_1) = r^2 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \mathrm{O}_2{}^2 + \frac{1}{m^2}\left(x^2 + \mathrm{O}_1{}^2 - 2\mathrm{O}_1 x\right) - \frac{2\mathrm{O}_2}{m}x + \frac{2\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2}{m} = r^2 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{m^2}\right) x^2 - 2\left(\frac{\mathrm{O}_1}{m^2} + \frac{\mathrm{O}_2}{m}\right)x + \left(\mathrm{O}_2{}^2 + \frac{\mathrm{O}_1{}^2}{m^2} + \frac{2\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2}{m}\right) = r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{m^2}\right) x^2 - 2\left(\frac{\mathrm{O}_1}{m^2} + \frac{\mathrm{O}_2}{m}\right)x + \left(\frac{\mathrm{O}_1}{\mathrm{m}} + \mathrm{O}_2\right)^2 - r^2 = 0$$

Se llega, como se puede observar, a una ecuación de 2º grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con:

$$a = \left(1 + \frac{1}{m^2}\right)$$

$$b = -2\left(\frac{\mathrm{O}_1}{m^2} + \frac{\mathrm{O}_2}{m}\right)$$

$$c = \left(\frac{\mathrm{O}_1}{\mathrm{m}} + \mathrm{O}_2\right)^2 - r^2$$

donde:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $C_1 = (C_{11}, C_{12})$ y $C_2 = (C_{21}, C_{22})$, entonces:

$$C_{11} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$C_{21} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$C_{12} = \mathrm{O}_2 - \frac{1}{m}(C_{11} - \mathrm{O}_1)$$

$$C_{22} = \mathrm{O}_2 - \frac{1}{m}(C_{21} - \mathrm{O}_1)$$

5. Por último, se calcula α, haciendo uso del producto escalar de vectores, aplicado a los vectores que unen los puntos de corte de la curva de indiferencia con el espacio periurbano:

$$\overrightarrow{C_1} = (C_{11}, C_{12})$$

$$\overrightarrow{C_2} = (C_{21}, C_{22})$$

α = ángulo entre $\overrightarrow{C_1}$ y $\overrightarrow{C_2}$

$$C_{11} C_{21} + C_{12} C_{22} = \langle \overrightarrow{C_1}, \overrightarrow{C_2} \rangle = |\overrightarrow{C_1}||\overrightarrow{C_2}| \cos\alpha$$

de donde se obtiene que:

$$\cos\alpha = \frac{C_{11} C_{21} + C_{12} C_{22}}{|\overrightarrow{C_1}||\overrightarrow{C_2}|} = \frac{C_{11} C_{21} + C_{12} C_{22}}{\sqrt{{C_{11}}^2 + {C_{12}}^2}\sqrt{{C_{21}}^2 + {C_{22}}^2}}$$

y por tanto:

$$\alpha = \arccos \frac{C_{11}\, C_{21} + C_{12} C_{22}}{\sqrt{{C_{11}}^2 + {C_{12}}^2} \sqrt{{C_{21}}^2 + {C_{22}}^2}} \quad \text{con} \quad 0 < \alpha < \pi$$

Recapitulando, se ha obtenido que, para el caso particular estudiado (precios del bien en ambas empresas iguales), las áreas de influencia serán, conocido *r* y calculado *α*:

$$Area\ de\ influencia\ 1 = \frac{r^2}{2}(\alpha - sen\ \alpha)$$

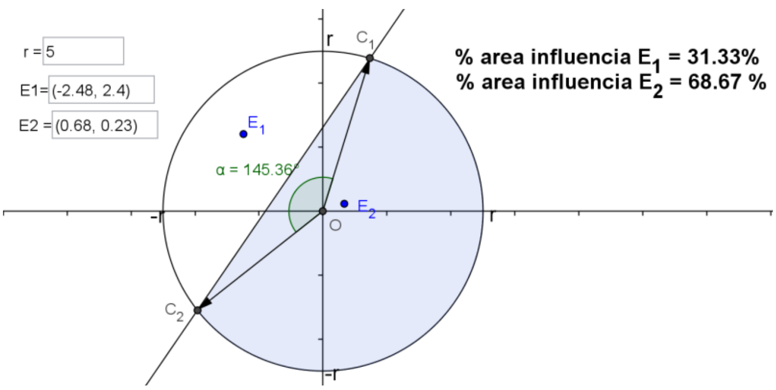
$$Area\ de\ influencia\ 2 = \pi r^2 - area\ de\ influencia\ 1$$

siendo trivial determinar, dada la posición en el plano de ambas empresas, a cuál corresponde cada una de ellas.

7. IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO CON GEOGEBRA Y HOJA DE CÁLCULO EXCEL

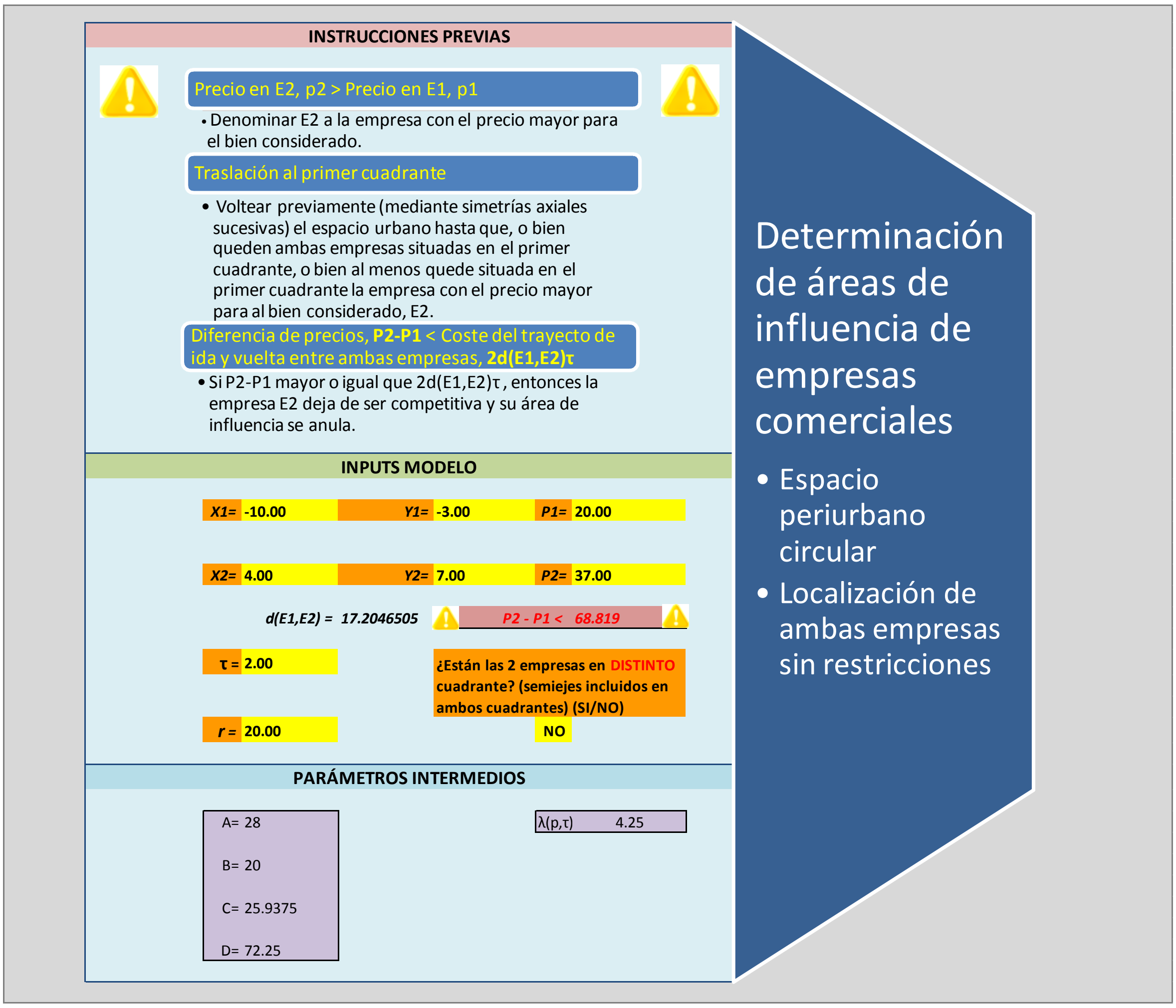
El modelo se ha implementado con la ayuda de los programas GeoGebra y Excel, tanto para el caso de precios diferentes como iguales. Para realizar cualquier prueba del modelo, basta con entrar en el archivo .xls de Excel y en los archivos .ggb (uno para el caso de precios distintos y otro para el caso de precios iguales) que hay en el CD ROM anexo.

Para el caso de **precios iguales**, no es necesario emplear Excel y entrando en el archivo correspondiente de Geogebra se puede simular dinámicamente con el modelo, obteniendo información gráfica y numérica sobre las áreas de influencia analizadas (ver archivo Áreas de Influencia (Precios Iguales).ggb).



Para el caso de **precios diferentes**, el proceso pasa por entrar primero en la primera hoja de cálculo del libro Excel (archivo Áreas de Influencia.xls), introducir los inputs y copiar en GeoGebra los coeficientes de la cónica base saliente. Será entonces en Geogebra donde se podrá observar cómo es geométricamente el caso y trasladar y girar solidariamente a ambas curvas. También nos proporcionará los puntos de corte entre las curvas giradas, que deberemos copiar en la segunda hoja del libro Excel, que calculará entonces los porcentajes de área de influencia de cada empresa.

Siguiendo el proceso anteriormente descrito, se ha implementado en una hoja de cálculo todo el algoritmo, de modo que de ésta se obtiene una salida como la siguiente (a modo de ejemplo):



CURVA DE INDIFERENCIA BASE

a= 711.75000	k= 560.00000	b= 327.75000	c= 2030.50000	d= 2049.00000	e= -4023.49609
	2k= 1120.00000				

$ax^2 + 2k\,xy + by^2 + cx + dy + e = 0$

CURVA DE INDIFERENCIA TRASLADADA O1 = -3 O2 = 2

α= 711.75000	K= 560.00000	β= 327.75000	γ= 0.00000	δ= 0.000000	ε= -5020.24609
	2K= 1120.00000				

$\alpha x^2 + 2K\,xy + \beta y^2 + \varepsilon = 0$

CURVA DE INDIFERENCIA TRASLADADA Y GIRADA θ = 35.54 θ corregido = -54.46 -1.0 radianes

M'= -72.25000		N'= 1111.75000			E= -5020.24609

$M'x^2 + N'y^2 + E = 0$

ESPACIO PERIURBANO BASE

$x^2 + y^2 = r^2$

ESPACIO PERIURBANO TRASLADADO O1 = -3 O2 = 2

			λ= -6.00000	μ= 4.000000	η= -387.00000

$x^2 + y^2 + \lambda x + \mu y + \eta = 0$

ESPACIO PERIURBANO TRASLADADO Y GIRADO θ = 35.54 θ corregido = -54.46 -1.0 radianes

			R'= -6.74236	S'= -2.557448	T= -387.00000

$x^2 + y^2 + R'x + S'y + T = 0$

ÁREA SEGMENTO CIRCULAR

PUNTOS DE CORTE HIPÉRBOLA/CIRCUNFERENCIA

	X	Y
C_1 =	-16.34	4.68
C_2 =	22.76	6.18

ÁNGULO α = 148.84

CENTRO CIRCUNFERENCIA= 3.3712 1.2787

Y* = 5.433731052

ÁREA SEGMENTO CIRCULAR = 416.07

ÁREA COMPLEMENTARIO SEGMENTO CIRCULAR = 840.57

ASgC = 416.06797

ÁREA TRAPECIO

ATrp = 212.21726

ÁREA INTEGRAL

$\mathbb{A}$ = 0.06498763

$|\mathbb{B}|$ = 4.515625

$\theta(C_{11})$ = -56.293562

$\theta(C_{21})$ = -0.33768792

AHip= -129.334

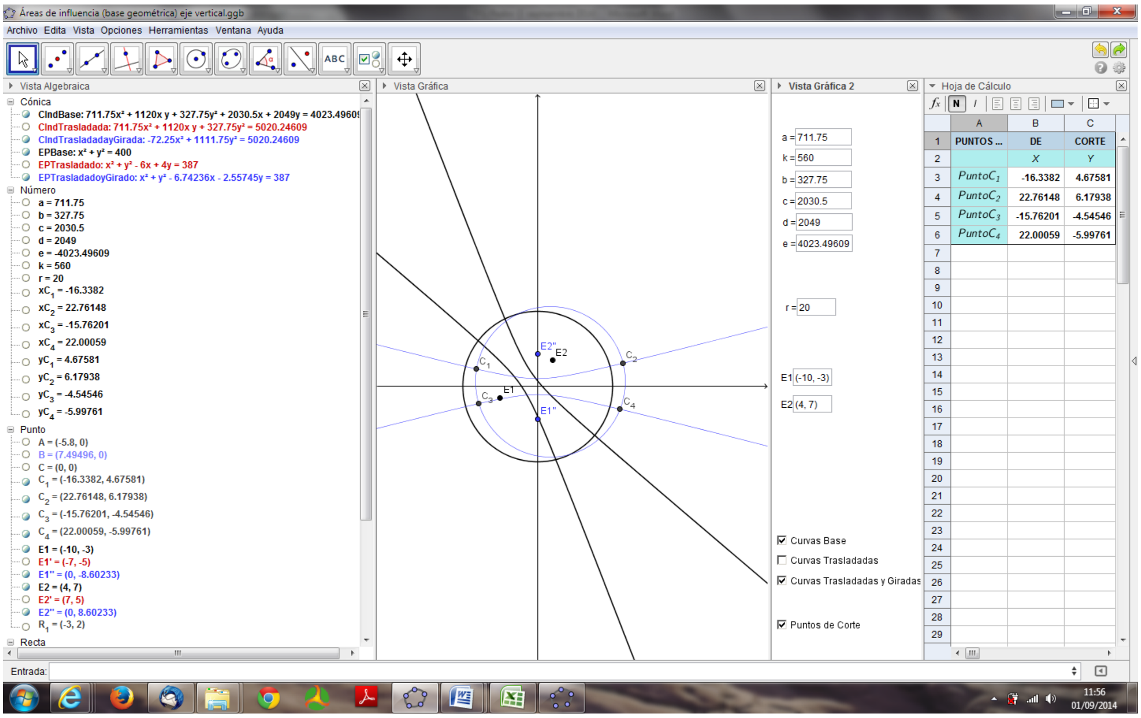
Área de influencia de E_1 = 757.69

Área de influencia de E_2 = 498.95

% área de influencia E_1 = **60.29**

% área de influencia E_2 = **39.71**

y se ha implementado parte del modelo y su resolución en GeoGebra, como se observa en la siguiente figura, también a modo de ejemplo (ver archivo Áreas de Influencia (Precios Diferentes)):



8. CONCLUSIONES

Si volvemos la vista atrás, a los objetivos iniciales del trabajo, se puede decir que se han alcanzado, pues se han definido y modelizado matemáticamente, de forma sencilla, las áreas de influencia de dos empresas comerciales en competencia para la venta de un bien sobre una población con un espacio urbano de forma circular. Asimismo, se han determinado geométricamente las áreas de influencia de dos empresas comerciales en un espacio urbano de forma circular, aún permitiendo que las mismas estén ubicadas en cualquier punto del espacio urbano/periurbano. También se ha implementado el modelo con ayuda de software accesible (GeoGebra y Excel), lo cual nos ha permitido alcanzar una mayor sencillez de cálculo, comprensión y análisis del mismo y se ha reflexionado sobre las implicaciones que del modelo se derivan, en base a simulaciones con diferentes inputs.

Con la realización del presente trabajo se ha dado un gran paso en la determinación del área de influencia de empresas comerciales, pues mejora sustancialmente trabajos anteriores realizados, en los que se consideraba a las empresas diametralmente enfrentadas en un espacio periurbano circular o axialmente enfrentadas en un espacio periurbano elíptico. Tal grado de libertad en los inputs ha complicado grandemente, como no podía ser de otra manera, la resolución matemática del modelo, pero la introducción del programa GeoGebra ha resultado de grandísimo y crucial provecho.

Justo es reconocer que, del mismo modo que se ha avanzado en el estudio de la determinación de áreas comerciales, el trabajo tiene limitaciones, por lo que sigue dejando una puerta abierta a la investigación en la línea analizada.

La población de las ciudades suele presentar un perímetro amorfo en torno al centro histórico. Sin embargo y para facilitar los cálculos en nuestro estudio el espacio periurbano es regular, es decir se distribuye de forma uniforme. Es por ello que está es una de las limitaciones del estudio, como el de otros anteriores (aunque el paso a un espacio periurbano elíptico, más flexible, supuso un notable avance). Para intentar asemejarse a la realidad de la distribución de la población en las ciudades y realizar nuevos modelos mucho más fiables, sería conveniente realizar un escaneo del perfil periurbano de la zona escogida y realizar así una integración numérica para determinar de forma exacta el área de la ciudad y por consiguiente las áreas de influencia de las empresas comerciales. Se considera prioritario realizar la ampliación de este modelo a un espacio periurbano elíptico, manteniendo la ausencia de restricciones en la ubicación de las empresas.

Otra de las limitaciones es el número de variables o inputs que están incluidas en el modelo, claramente insuficientes. Se podrían añadir variables como el gusto por las compras del consumidor, la percepción visual del centro comercial por parte del consumidor, la localización, la zona aledaña al centro comercial, etc, variables éstas que recogerían con más precisión los factores que realmente tienen en cuenta los consumidores, pero que aumentarían enormemente la complejidad del modelo rebasando el objetivo de nuestro trabajo.

Al seguir analizando las limitaciones del modelo, hemos de señalar que se ha trabajado sólo con dos empresas comerciales; pero en un espacio urbano no solamente hay dos empresas si no que existen decenas de ellas, por lo que desde este punto de vista el modelo también es limitado.

Reseñar también que una línea de trabajo pasaría por modificar la hipótesis de distribución homogénea de la población en la ciudad, pues hay que insistir en que estos modelos pueden ser de gran ayuda para las empresas comerciales, de cara a establecer políticas de precios en los diferentes bienes que ofertan, analizando los precios de las empresas de la competencia, o a la hora de decidir la localización comercial de la empresa.

Por último, y tal y como indicaba Molina (2012), "las herramientas informáticas diseñadas a partir de ellos se revelan de gran utilidad en la toma de decisiones de las empresas, pues permiten realizar simulaciones y hallar y determinar áreas de influencia en el espacio urbano en el que están insertas, consiguiendo que la complejidad matemática del modelo resulte transparente al usuario, que puede ser por tanto totalmente inexperto en la materia".

9. BIBLIOGRAFÍA

ANUARIO ECONOMICO (2013). *Indicadores de distribución geográfica de flujos comerciales. Publicado por la Caixa.*

AULAFACIL.COM. Cursos on-line gratuitos. *Curso de Cónicas Matemáticas.* Tomado de http://cursosgratis.aulafacil.com/matematicas-conicas/curso/Conicas.htm

CAMARA DE COMERCIO, INDUSTRIA Y NAVEGACIÓN DE GRAN CANARIA (2012). *Elabora tu plan de Empresa. Decidir la locación de la empresa.*

CASARES, J.; ET AL. (1987). *La economía de la distribución comercial*. Ariel Economía. Barcelona.

CHASCO Y RIGOYEN, M. DEL CORO (1996). *Aplicación de los modelos de gravitación comercial a la determinación de áreas de mercado*. Investigación y marketing.

CHASCO LAFUENTE, PEDRO (2000). *Modelos de gravitación comercial: una aplicación al anuario comercial de España*

DÍAZ MARTÍNEZ, F.J. (2004). *"Determinación geométrica del área de influencia de empresas comerciales diametralmente enfrentadas en un espacio periurbano circular". XII Jornadas de ASEPUMA, Murcia: 10.*

DÍAZ MARTÍNEZ, F.J. (2006*).* *"Determinación numérica con hoja de cálculo del área de influencia de empresas comerciales diametralmente enfrentadas en un espacio periurbano circular". XIV Jornadas de ASEPUMA, Badajoz: 13*

DIEZ DE CASTRO, E. (1997). *Distribución Comercial*. McGraw-Hill, Madrid

DUCH BROWN, NESTOR (2009). *La teoría de la localización. Universidad de Barcelona.*

JUAN VIGARAY, M. D. DE (2004). *Comercialización y Retailing. Distribución Comercial Aplicada.* Pearson Prentice Hall. Madrid.

JUAN VIGARAY, M. D. DE (1998). *La atracción que ejercen los centros comerciales sobre los consumidores.* Universidad de Alicante. Alicante.

MARTÍN, P; ÁLVAREZ J; GARCÍA, A; GETINO, J; GONZÁLEZ, A. B. y LÓPEZ D. J. (2005): *Cálculo. Delta, Madrid.*

MELVIN LIZANO ARAYA (2008). *Teorías de la localización y la teoría neoclásica del comercio. Escuela universitaria de Geografía.*

MOLINA MORENO, ALBERTO (2012). *Análisis matemático de áreas de influencia: un estudio teórico-práctico.*

MUÑIZ GONZALEZ, RAFAEL (2010). *Marketing del siglo XXI (3ª edición). Centros de Estudios Financieros.*

PICAZA FRAILE, ROBERTO (2006). *Estudio de Mercado en el comercio minorista.*

SANTESMASES MESTRE, M. (2007). *Marketing. Conceptos y estrategias*. Pirámide. Madrid.

STEINBERG, J.(2004*).* *La nueva del centro comercial internacional y la política comercial estratégica. Universidad Autónoma de Madrid.*

ANEXOS

ANEXO I

Dada la ecuación general de una cónica:

$$ax^2 + 2kxy + by^2 + cx + dy + e = 0$$

se define el discriminante de la misma como $\Delta = 4k^2 - 4ab = 4(k^2 - ab)$.

El discriminante de una cónica permite clasificarla, de tal manera que si[4]:

$\Delta > 0 \rightarrow$ hipérbola

$\Delta = 0 \rightarrow$ parábola

$\Delta < 0 \rightarrow$ elipse o circunferencia

Para estudiar el signo del discriminante, basta con estudiar el signo de:

$$k^2 - ab = (AB)^2 - (A^2 - D)(B^2 - D) = A^2B^2 - (A^2B^2 - A^2D - B^2D + D^2) =$$

$$= D(A^2 + B^2) - D^2$$

a) Si $\boxed{D(A^2 + B^2) - D^2 > 0}$ es una **hipérbola**, pero esto sólo ocurre cuando $0 < D < A^2 + B^2$. Esto es:

$$4\lambda(p,\tau)^2 < 4(X_2 - X_1)^2 + 4(Y_2 - Y_1)^2 \Leftrightarrow \lambda(p,\tau)^2 < (X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2$$

O lo que es lo mismo:

$$\frac{(p_2 - p_1)}{2\tau} < d(E_1, E_2) \Leftrightarrow (p_2 - p_1) < 2d(E_1, E_2)\tau$$

es decir, siempre y cuando la diferencia de precio no supere el coste del desplazamiento de ida y vuelta entre las empresas.

b) Si $\boxed{D(A^2 + B^2) - D^2 = 0}$ es una **parábola**, pero esto sólo ocurre cuando $D = 0 \ \ o \ \ D = A^2 + B^2$.
Esto es, o bien $p_2 = p_1$ y la curva de indiferencia es la mediatriz del segmento que une las dos empresas (solución degenerada), o bien $\frac{(p_2 - p_1)}{2\tau} = d(E_1, E_2) \Leftrightarrow (p_2 - p_1) = 2d(E_1, E_2)\tau$, y E_2 deja de ser competitiva, salvo para los clientes ubicados en E_2 a los que les es indiferente acudir a una u otra empresa.

[4] Pudiéndose dar el caso de ser cónicas degeneradas.

c) Si $\boxed{D(A^2+B^2)-D^2<0}$ es una **elipse** o **circunferencia**, pero esto sólo ocurre cuando $D>A^2+B^2$ puesto que $D>0$.

Esto es:

$$\frac{(p_2-p_1)}{2\tau}>d(E_1,E_2) \Leftrightarrow (p_2-p_1)>2d(E_1,E_2)\tau$$

y E_2, aún con más razón que el caso anterior, deja de ser competitiva, con área de influencia nula.

ANEXO II

$$\gamma = 2a0_1 + 2k0_2 + c = 0 \quad (1)$$

$$\delta = 2b0_2 + 2k0_1 + d = 0 \quad (2)$$

Demostración (1):

$$2aO_1 + 2kO_2 + C = 2(A^2 - D)\frac{X_1 + X_2}{2} + 2AB\frac{Y_1 + Y_2}{2} + 2(AC + DX_2) =$$

$$= (A^2 - D)(X_1 + X_2) + AB(Y_1 + Y_2) + 2(AC + DX_2) =$$

$$= \left(A^2(X_1 + X_2) + D(2X_2 - (X_1 + X_2)\right) + AB(Y_1 + Y_2) + 2AC =$$

$$= (A^2(X_1 + X_2) + D(X_2 - X_1) + AB(Y_1 + Y_2) + 2AC =$$

$$= 4D(X_2 - X_1)^2(X_1 + X_2) + D(X_2 - X_1) + 4(X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1)(Y_1 + Y_2) + 4(X_2 - X_1)\left[\left({X_1}^2 + {Y_1}^2\right) - \left({X_2}^2 + {Y_2}^2\right) - \frac{D}{4}\right] =$$

$$= 4(X_2 - X_1)^2(X_1 + X_2) + 4(X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1)(Y_1 + Y_2) + 4(X_2 - X_1)\left({X_1}^2 + {Y_1}^2\right) - 4(X_2 - Y_1)\left({X_2}^2 + {Y_2}^2\right) =$$

$$= 4(X_2 - X_1)\left[(X_2 - X_1)(X_1 + X_2) + (Y_2 - Y_1)(Y_1 + Y_2) + \left({X_1}^2 + {Y_1}^2\right) - \left({X_2}^2 + {Y_2}^2\right)\right] =$$

$$= 4(X_2 - X_1)\left[{X_2}^2 - {X_1}^2 + {Y_2}^2 - {Y_1}^2 + {X_1}^2 + {Y_1}^2 - {X_2}^2 - {Y_2}^2\right] = 0$$

Demostración (2):

$$2bO_2 + 2kO_1 + c = 2(B^2 - D)\frac{Y_1+Y_2}{2} + 2AB\frac{X_1+X_2}{2} + 2(BC + DY_2) =$$

$$= (B^2 - D)(Y_1 + Y_2) + AB(X_1 + X_2) + 2BC + 2Y_2 =$$

$$= B^2(Y_1 + Y_2) + D\big(2Y_2 - (Y_1 + Y_2)\big) + AB(X_1 + X_2) + 2BC =$$

$$= B^2(Y_1 + Y_2) + D(Y_2 - Y_1) + AB(X_1 + X_2) + 2BC =$$

$$= 4(Y_2 - Y_1)^2(Y_1 + Y_2) + D(Y_2 - Y_1) + (X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1)(X_2 - X_1) + 4(Y_2 - Y_1)\left[(X_1^2 + Y_1^2) - (X_2^2 + Y_2^2) - \frac{D}{4}\right] =$$

$$= 4(Y_2 - Y_1)^2(Y_1 + Y_2) + 4(X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1)(X_2 - X_1) + 4(Y_2 - Y_1)(X_1^2 + Y_1^2) - 4(Y_2 - Y_1)(X_2^2 + Y_2^2) =$$

$$= 4(Y_2 - Y_1)[(Y_2 - Y_1)(Y_1 + Y_2) + (X_2 - X_1)(X_1 + X_2) + (X_1^2 + Y_1^2) - (X_2^2 + Y_2^2)] =$$

$$= 4(Y_2 - Y_1)(Y_2^2 - Y_1^2 + X_2^2 - X_1^2 + X_1^2 + Y_1^2 - X_2^2 - Y_2^2) = 0$$