



UNIVERSIDAD DE VALLADOLID



DEPARTAMENTO DE TEORÍA DE LA SEÑAL Y COMUNICACIONES  
E INGENIERÍA TELEMÁTICA

*TESIS DOCTORAL*

**ESTIMACIÓN ADAPTATIVA BAYESIANA  
APLICADA A LA LOCALIZACIÓN  
DE USUARIOS MÓVILES**

AUTOR:

JAVIER PRIETO TEJEDOR

DIRECTORES:

DRA. PATRICIA FERNÁNDEZ REGUERO  
(UNIVERSIDAD DE VALLADOLID)

DR. SANTIAGO MAZUELAS FRANCO  
(MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY)

JULIO 2012





UNIVERSIDAD DE VALLADOLID



DEPARTAMENTO DE TEORÍA DE LA SEÑAL Y COMUNICACIONES  
E INGENIERÍA TELEMÁTICA

**ESTIMACIÓN ADAPTATIVA BAYESIANA  
APLICADA A LA LOCALIZACIÓN  
DE USUARIOS MÓVILES**

AUTOR:

JAVIER PRIETO TEJEDOR

DIRECTORES:

DRA. PATRICIA FERNÁNDEZ REGUERO  
(UNIVERSIDAD DE VALLADOLID)

DR. SANTIAGO MAZUELAS FRANCO  
(MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY)

**TRIBUNAL**

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Suplentes:

FECHA DE LECTURA:

CALIFICACIÓN:



*A Beatriz y a mi familia*



*“Bayesiano es quien, esperando vagamente un  
caballo, y vislumbrando un burro, concluye  
sólidamente que ha visto una mula.”*

STEPHEN SENN





## Resumen

La popularidad de los sistemas de posicionamiento satelitales en espacios abiertos ha generado una fuerte demanda de sistemas que los suplan en entornos complejos, donde estos fallan. Sin embargo, las características del canal de propagación inalámbrico en estos entornos son dinámicas e impredecibles. A su vez, existen situaciones en las que no hay una infraestructura inalámbrica operativa. En esta Tesis Doctoral, presentamos un marco teórico y algoritmos para la fusión de datos en sistemas de localización inalámbrica desplegados en entornos complejos. Las técnicas presentadas hacen uso de modelos adaptativos para acomodarse a las condiciones cambiantes del canal de propagación. Estas técnicas fusionan información previa y medidas de tiempo de llegada, potencia recibida, fuerza y velocidad angular, de manera óptima desde un punto de vista Bayesiano. Para evaluar los métodos propuestos, hemos utilizado medidas recogidas por dispositivos inalámbricos comerciales y sensores inerciales de bajo coste. Así mismo, hemos comparado el rendimiento obtenido con el de implementaciones convencionales y con el límite teórico provisto por la cota de Cramér-Rao. Tanto los resultados empíricos como de simulación muestran una importante mejora respecto a los enfoques convencionales, obteniendo un error próximo a la cota de Cramér-Rao.



## Abstract

The popularity of positioning satellite systems in open areas has led to a high demand for systems suitable for harsh environments, where the former fail. However, the characteristics of the wireless propagation channel in such environments are dynamic and unpredictable. Moreover, there exist situations where a wireless infrastructure is not available. In this Doctoral Thesis, we present a theoretical framework and algorithms for data fusion in wireless localization systems that are deployed in harsh environments. The presented techniques use adaptive models to handle the changeable characteristics of the propagation channel. These techniques fuse prior information and measurements of time of arrival, received signal strength, force and angular velocity, in an optimal way from a Bayesian point of view. To assess the proposed methods, we utilized commercial wireless devices and low-cost inertial sensors. We likewise compared the achieved performance with the performance of conventional implementations, and with the theoretical limit provided by the Cramér-Rao lower bound. Both empirical and simulation results show a remarkable improvement with respect to conventional approaches, achieving an error close to the Cramér-Rao lower bound.



## **Agradecimientos**

Quiero mostrar mi agradecimiento a mis tutores por su orientación y ayuda en la revisión de esta Tesis Doctoral, y a todos los compañeros que han colaborado en este trabajo, tanto desde el Grupo de Comunicaciones Ópticas de la Universidad de Valladolid, como desde el Wireless Communication and Network Sciences Laboratory del Massachusetts Institute of Technology.

Este proyecto de investigación ha sido financiado en parte por la Consejería de Fomento y la Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León, el proyecto nacional LEMUR (TIN2009-14114-C04-02) y el Fondo Social Europeo.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación de la investigación . . . . .	2
1.2. Objetivos de la Tesis Doctoral . . . . .	8
1.3. Metodología . . . . .	9
1.4. Estructura de la Tesis Doctoral . . . . .	10
<b>2. Localización y Navegación. Algoritmos, Cotas y Limitaciones</b>	<b>13</b>
2.1. La Pila de Localización . . . . .	14
2.1.1. Localización inalámbrica . . . . .	16
2.1.2. Navegación inercial . . . . .	23
2.2. Algoritmos de localización/navegación . . . . .	30
2.2.1. Localización estática . . . . .	32
2.2.2. Localización dinámica . . . . .	35
2.3. Cotas teóricas y limitaciones prácticas . . . . .	37
2.3.1. Cantidad de Información de Fisher . . . . .	37
2.3.2. Error cuadrático medio. Cota de Cramér-Rao . . . . .	38
2.3.3. Información de Fisher equivalente . . . . .	41
2.A. Anexo: autocalibración mediante ML para localización con TOA . . . . .	47
2.A.1. Autocalibración de la relación entre TOA y distancia . . . . .	48
2.A.2. Caso 1: MLE con sesgo NLOS Gaussiano . . . . .	49
2.A.3. Caso 2: MLE con sesgo NLOS Uniforme . . . . .	50
2.A.4. Escenario de simulación y experimentación . . . . .	51
2.A.5. Resultados mediante simulación . . . . .	53
2.A.6. Resultados experimentales . . . . .	55

---

<b>3. Técnicas de Estimación Recursiva Bayesiana</b>	<b>57</b>
3.1. Cadena de Markov oculta . . . . .	58
3.2. Estimación Recursiva Bayesiana . . . . .	62
3.2.1. Algoritmos óptimos . . . . .	67
3.2.2. Algoritmos subóptimos. Enfoque local y enfoque global . . .	70
3.3. Cota de Cramér-Rao <i>a posteriori</i> . . . . .	73
3.3.1. Efecto de medidas de posición sobre EFIM de filtrado . . .	77
3.3.2. Efecto de medidas de distancia sobre EFIM de filtrado . . .	78
3.3.3. Efecto de recursión hacia atrás sobre EFIM de suavizado .	82
3.A. Anexos . . . . .	83
3.A.1. Demostración de la Proposición 3.8 . . . . .	83
3.A.2. Demostración del Corolario 3.10 . . . . .	84
3.A.3. Demostración de la Proposición 3.12 . . . . .	85
<b>4. Localización Dinámica Inalámbrica en Entornos Complejos</b>	<b>87</b>
4.1. Descripción del problema . . . . .	89
4.2. Modelo dinámico . . . . .	89
4.3. Modelo de observación . . . . .	92
4.3.1. Potencia recibida . . . . .	92
4.3.2. Tiempo de llegada . . . . .	93
4.4. Verosimilitud adaptativa . . . . .	94
4.4.1. Verosimilitud no-paramétrica . . . . .	95
4.4.2. Fusión de información . . . . .	100
4.5. Filtro de partículas adaptativo (ALPA) . . . . .	101
4.6. Resultados experimentales . . . . .	105
4.6.1. Efecto de las condiciones de propagación LOS/NLOS . . .	107
4.6.2. Comparación con métodos de estimación de distancia . . .	109
4.6.3. Comparación con métodos de estimación de posición . . .	112
4.7. Resultados mediante simulación . . . . .	115
4.8. Complejidad . . . . .	116
4.9. Discusión . . . . .	121
4.A. Anexo: distribución de las medidas RSS y TOA para simulación . .	123
4.A.1. Distribución de las medidas de RSS . . . . .	123
4.A.2. Distribución de las medidas del TOA . . . . .	124



---

<b>5. Navegación Inercial en Entornos Complejos</b>	<b>127</b>
5.1. Descripción del problema . . . . .	129
5.2. Modelo dinámico . . . . .	132
5.3. Modelo de observación . . . . .	134
5.3.1. Aceleración . . . . .	134
5.3.2. Velocidad angular . . . . .	134
5.3.3. Distancia . . . . .	135
5.4. Información <i>a priori</i> . . . . .	135
5.5. Suavizado Bayesiano . . . . .	138
5.5.1. Fusión de información . . . . .	138
5.5.2. Suavizado de Kalman <i>unscented</i> . . . . .	140
5.6. Resultados experimentales . . . . .	144
5.6.1. Efecto de fusionar localización/navegación . . . . .	146
5.6.2. Efecto de eliminar el sesgo del estado . . . . .	148
5.6.3. Comparación UKS/EKS . . . . .	149
5.7. Resultados mediante simulación . . . . .	151
5.8. Complejidad . . . . .	153
5.9. Discusión . . . . .	154
5.A. Anexo: operaciones con cuaterniones . . . . .	157
<b>6. Conclusiones y Líneas Futuras de Investigación</b>	<b>159</b>
6.1. Conclusiones . . . . .	159
6.2. Líneas Futuras de Investigación . . . . .	161
<b>Bibliografía</b>	<b>163</b>
<b>A. Convenciones y Notación</b>	<b>171</b>
A.1. Lista de acrónimos y abreviaturas . . . . .	171
A.2. Símbolos y notación matemática . . . . .	173
<b>B. Patentes y Publicaciones</b>	<b>175</b>



## Índice de figuras

2.1. Pila de Localización . . . . .	16
2.2. Escenario típico de propagación inalámbrica . . . . .	18
2.3. Distribución del error en estimación de distancia con TOA . . . . .	20
2.4. Técnicas de estimación de posición según métrica . . . . .	21
2.5. Funcionamiento de los sensores basados en tecnología MEMS . . . . .	24
2.6. Definición de orientación . . . . .	25
2.7. Elipse de información . . . . .	43
2.8. Estimación de la relación TOA/distancia mediante ML . . . . .	53
3.1. Evolución de estado y medidas como cadena de Markov oculta . . . . .	60
3.2. Proceso de filtrado en estimación de distancia y de posición . . . . .	65
3.3. Tipos de estimación Bayesiana . . . . .	66
3.4. Tipos de suavizado . . . . .	67
3.5. KF vs. ML en estimación de distancias . . . . .	70
3.6. Suavizado vs. Filtrado vs. ML en la cota de Cramér-Rao . . . . .	76
3.7. Escenario empleado en el Ejemplo 3.11 . . . . .	81
4.1. Diagrama de flujo para localización inalámbrica . . . . .	90
4.2. Histogramas normalizados y densidades de medidas RSS . . . . .	96
4.3. Histogramas normalizados y densidades de medidas TOA . . . . .	97
4.4. Verosimilitud mediante fusión adaptativa de RSS y TOA . . . . .	101
4.5. Densidad de transición <i>a priori</i> y función de verosimilitud . . . . .	104
4.6. Adaptador WLAN y obtención del TOA . . . . .	106
4.7. Diferentes escenarios donde evaluamos el filtro ALPA . . . . .	108

---

4.8. Error en estimación de distancias para el filtro ALPA . . . . .	110
4.9. Posiciones estimadas mediante el filtro ALPA . . . . .	112
4.10. Error en estimación de posiciones para el filtro ALPA . . . . .	114
4.11. Cota de Cramér-Rao <i>a posteriori</i> para filtrado . . . . .	116
4.12. Verosimilitud después de reducir la complejidad . . . . .	121
4.13. Función de densidad RSS para simulación . . . . .	124
4.14. Función de densidad TOA para simulación . . . . .	125
5.1. Diagrama de flujo para navegación inercial . . . . .	130
5.2. Información <i>a priori</i> en el sistema de navegación inercial . . . . .	137
5.3. Expansión en serie de Taylor frente a transformación <i>unscented</i> . . . . .	145
5.4. Posiciones estimadas mediante navegación inercial . . . . .	146
5.5. Error mediante UKS en navegación inercial . . . . .	148
5.6. Efecto del sesgo en navegación inercial . . . . .	149
5.7. Navegación inercial con diferentes implementaciones . . . . .	150
5.8. Cota de Cramér-Rao <i>a posteriori</i> para suavizado . . . . .	152
5.9. Cota de Cramér-Rao vs. navegación inercial . . . . .	153

## Introducción

### Contenido

---

1.1. Motivación de la investigación . . . . .	2
1.2. Objetivos de la Tesis Doctoral . . . . .	8
1.3. Metodología . . . . .	9
1.4. Estructura de la Tesis Doctoral . . . . .	10

---

La inteligencia ha dejado de ser una cualidad atribuida casi en exclusividad a los seres humanos, hasta el punto de ser una exigencia a los objetos que nos rodean y a los espacios en que nos movemos. Probablemente el término *smart* ha sido uno de los adjetivos más utilizados tanto en los últimos congresos de electrónica de consumo (con *smartphones*, *smart TVs* o *smart fridges*), como en organismos públicos e investigaciones científicas (con *smart cities*, *smart buildings* o *smart grids*) (European Comission 2009). Para la creación de estos espacios inteligentes, la localización del usuario y otros objetos que le rodean es un factor clave (Roy et al. 2007). Por ello, es necesario desarrollar una tecnología y algoritmia capaces de proveer localización precisa con independencia del contexto.

La necesidad de determinar posiciones, puesta de manifiesto por las llamadas tecnologías inteligentes, no es, sin embargo, algo nuevo. Por ejemplo, en torno al año 600 a.C., los fenicios utilizaban *Polaris* (actual Estrella Polar) como referencia para su localización. La posición de esta estrella en el cielo es tan cercana al eje de rotación de la Tierra que aparece estática cada noche. Esto era utilizado por los fenicios como un indicador fiable de la situación del Polo Norte, lo que les serviría de guía en el transporte de estaño por barco.

Esta introducción hace un repaso a los avances orientados a localización que se han producido a lo largo de la Historia, distinguiendo entre avances tecnológicos y científicos.<sup>1</sup> Como veremos, las tecnologías existentes no cubren todo el espectro de entornos, lo que motiva la investigación de nuevas técnicas para construir sistemas robustos que provean localización precisa en entornos complejos, objetivo principal de esta Tesis Doctoral. Así, la Sección 1.1 presenta estos avances en localización; la Sección 1.2 desgrana el objetivo principal en varios objetivos específicos; la Sección 1.3 detalla la metodología seguida para alcanzar dichos objetivos; y, finalmente, la Sección 1.4 describe la estructura del resto de esta Tesis Doctoral. Utilizaremos los términos localización o navegación para referirnos a la estimación de la posición de un usuario móvil en un instante o intervalo de tiempo, respectivamente. Así mismo, emplearemos el término posicionamiento cuando sea aplicable a ambos casos.

## 1.1. Motivación de la investigación

La evolución de los sistemas de posicionamiento ha llevado una trayectoria inversa a la de los medios de transporte. Así, mientras estos últimos han evolucionado hacia el recorrido de distancias cada vez más lejanas, los sistemas de posicionamiento han evolucionado desde lo grande a lo pequeño. Los primeros sistemas de posicionamiento, empleados para navegación marítima, fueron sucedidos por sistemas orientados a aplicaciones militares, para finalmente desembocar en los sistemas actuales utilizados en numerosas aplicaciones civiles. Cada uno de estos sistemas de posicionamiento aúna distintos avances tecnológicos y científicos que se han alternado en el tiempo.

Como hemos mencionado anteriormente, los primeros sistemas de **navegación marítima** utilizaban estrellas polares para orientarse (Bowditch 2002). El primer avance tecnológico en estos sistemas se produciría con la aparición de la brújula. En el año 868, el vikingo Flokke Vilgerdersen utilizó en su viaje desde Rogaland (Noruega) hasta Gadersholm (Islandia) una brújula primitiva, llamada *leiðarsteinn*, que podría considerarse el primer dispositivo de posicionamiento. Ya en el siglo XII aparecen las primeras referencias escritas sobre el

---

<sup>1</sup>Fue D. de Solla Price uno de los primeros historiadores científicos en establecer esta diferencia. Price entendía que la diferencia entre quien trabaja en tecnología frente al que trabaja en ciencia es que el resultado del primero es algo físico que puede ser vendido, y el resultado del segundo es conocimiento que ha de ser difundido (de Solla Price 1970).

compás magnético, utilizado por los chinos para navegar por los mares de la India cuando la Estrella Polar se ocultaba entre las nubes.

Poco a poco los sistemas de posicionamiento requerirían mayor conocimiento científico. Junto con la ayuda de las estrellas, los marineros portugueses y españoles utilizaban el astrolabio como guía en sus expediciones, incluida la de Cristóbal Colón en su viaje a América en 1492. Más que tecnológico este era un avance científico, ya que implicaba un amplio conocimiento astronómico para la conversión en latitud de los ángulos medidos por el astrolabio. La contribución de hombres como Isaac Newton o John Hadley evolucionaría el astrolabio al cuadrante y, posteriormente, al sextante.

Sin embargo, al mismo tiempo que se incorpora mayor conocimiento científico, también los retos tecnológicos son mayores. A diferencia de la latitud, determinar la longitud constituyó un problema durante largo tiempo debido al movimiento de rotación de la Tierra. Ilustres científicos, como Galileo Galilei, intentaron sin éxito su resolución. En 1714, el Gobierno Británico ofreció 20 000 libras a quien fuese capaz de solucionar el problema de la longitud. Una de las tecnologías exploradas era determinar la longitud mediante una medición precisa del tiempo. Así, un reloj que marcase con precisión la hora de Londres podría servir para determinar la diferencia en longitud de cualquier otro punto. Sin embargo, la medición precisa del tiempo en el mar es, así mismo, difícil. Un reloj típico a principios del siglo XVIII tenía un error de entre 5 y 10 minutos al día que, traducido a longitud después de varios días de navegación, equivale a una desviación de cientos de kilómetros. Sería el cronómetro H4 de John Harrison el gran avance tecnológico que en el año 1761 conseguiría errores de 1 segundo al día convirtiéndose, junto con el sextante, en un instrumento imprescindible en la navegación durante los dos siglos posteriores. A pesar de esto, Harrison nunca recibiría el premio del Gobierno Británico completo, pues el jurado consideró que el reloj funcionaba por azar. Casualmente, solo dos años más tarde de que Harrison probase oficialmente su cronómetro, fue publicado a título póstumo el teorema de Bayes, un avance científico que sería fundamental en los algoritmos de navegación modernos.

Las técnicas de posicionamiento están basadas en mediciones de fenómenos físicos. Así, podemos distinguir los avances tecnológicos y científicos según estén orientados a la obtención o a la utilización de medidas, respectivamente. Dichas técnicas no experimentarían grandes avances hasta que se empiezan

a comprender los fenómenos electromagnéticos. El dominio científico del electromagnetismo dará lugar al control de fenómenos físicos cuya medición puede ser utilizada para determinar posiciones. Mahlon Loomis es quien daría el primer paso hacia el desarrollo de las comunicaciones inalámbricas en 1866, año en que afirmó haber transmitido señales utilizando dos cometas como antenas (Kendal 2011). Pero la gran brecha en estos sistemas viene producida por un avance científico y otro tecnológico: el primero, la publicación en 1873 de las teorías de James C. Maxwell sobre la existencia de ondas electromagnéticas (Maxwell 1873), que demostró Heinrich Hertz en 1887; el segundo, la construcción del primer sistema de radio por Marconi, que usó en la transmisión de señales a través del Atlántico en 1901.

Los primeros sistemas de posicionamiento basados en fenómenos electromagnéticos utilizaban sistemas de baja frecuencia. El interés hacia los sistemas de baja frecuencia tenía su origen en la navegación marítima, ya que estos sistemas proveían un alcance mucho mayor y rodeaban la Tierra, frente al requisito de visión directa y propagación en línea recta que tenían los sistemas de alta frecuencia. En 1909 Reginald Fessenden logró patentar un método de localización para barcos basado en técnicas de multilateración, que se considera la primera aportación a la localización hiperbólica inalámbrica.

Con la Segunda Guerra Mundial comienza el interés por los sistemas de posicionamiento para **aplicaciones militares**. Al avance tecnológico producido gracias a los experimentos realizados con giróscopos por Robert H. Goddard en 1932, habrá que sumar el dominio de algoritmos de navegación inercial que serán utilizados en el guiado de misiles alemanes. Finalizada la Segunda Guerra Mundial, se producen importantes progresos tecnológicos con la aparición del radar, empleado tanto en navegación marítima como aviación. Esto dará lugar al sistema de radionavegación británico Gee, al que seguirán otros como *long-range navigation* (LORAN), desarrollado por el *Massachusetts Institute of Technology*, o como Decca u Omega. Estos sistemas empleaban multilateración, como ya intentase Fessenden, y transmisores de baja frecuencia (Blanchard 1991). Su precisión iba desde unos pocos kilómetros (Omega), hasta unas decenas de metros (LORAN-C) (Enge et al. 1995). De estos, solo una versión renovada de LORAN (eLORAN), compatible con el sistema ruso Chayka, está operativa actualmente.

Las mediciones de fenómenos físicos tienen siempre un carácter aleatorio.



Dicha aleatoriedad hace difícil la obtención de información posicional. Por ello, al mismo tiempo que se producían los anteriores avances tecnológicos y científicos relativos a la física, era necesario profundizar en inferencia estadística. Así, por ejemplo, la limitada precisión de las medidas realizadas con los primeros giróscopos podría ser compensada con una mejor descripción de su comportamiento, dando lugar a estimaciones más precisas. A comienzos de siglo, Andréi A. Márkov define un tipo de procesos con los que pueden ser descritos la mayoría de problemas de posicionamiento actuales. Ya en la década de los 40, Norbert Wiener y Andréi N. Kolmogórov realizan importantes avances científicos en inferencia estadística y filtrado estocástico. Sus investigaciones culminarán en 1960 con la publicación, por parte de Rudolf E. Kálmán, del célebre filtro que lleva su nombre (Kalman 1960). Se cumplían entonces casi dos siglos desde que Gauss utilizara el análisis por mínimos cuadrados para predecir el movimiento de los planetas (Gauss and Davis 1857). También el filtro de Kalman puede ser descrito como un proceso de mínimos cuadrados constituyendo, a su vez, un caso especial de filtrado Bayesiano bajo circunstancias lineales y Gaussianas, lo cual fue puesto de manifiesto por Ho y Lee en 1964 (Ho and Lee 1964). Gracias en gran parte a los avances tecnológicos en procesado digital, el filtro de Kalman será la base de los futuros sistemas de navegación. Es Stanley F. Schmidt quien lleva a cabo la primera implementación de un filtro de Kalman tras una visita de su inventor al centro de investigación de la NASA (McGee and Schmidt 1985). Este filtro sería incluido en el ordenador de navegación dentro del programa Apollo para estimación de la trayectoria, encargando el diseño y producción del sistema de navegación al *Massachusetts Institute of Technology* junto a Delco Electronics, división de General Motors, que producirá las unidades de medida inercial (IMUs - *inertial measurement units*).

Así mismo, en dichas décadas, el empuje militar seguía produciendo importantes avances tecnológicos. Así, tiene lugar una nueva ola de sistemas de posicionamiento a partir de la llegada de los sistemas de navegación por satélite (GNSS - *global navigation satellite systems*). El primer GNSS desarrollado en todo el mundo fue el sistema Transit, al que han seguido GPS y GLONASS, creados por los departamentos de defensa americano y ruso, respectivamente. La deriva de los relojes atómicos empleados en sus satélites es de aproximadamente 1 nanosegundo al día, o lo que es lo mismo, estos relojes son mil

millones de veces más precisos que el cronómetro de Harrison. La precisión en el posicionamiento de los sistemas GNSS es de entre 1.0 y 3.9 metros en el plano horizontal, y entre 1.6 y 6.3 metros en el plano vertical (Groves 2008). Aunque estos sistemas tienen su origen en la navegación militar, hoy en día son usados para un amplio abanico de **aplicaciones civiles**, como los servicios de localización de emergencia E-112 y E-911 (FCC 1996). Tanto es así, que el futuro Galileo, puesto en marcha por la Unión Europea, tendrá control y uso principalmente civil. Con el desarrollo de estos sistemas, se cubre la necesidad de determinar la localización en distancias más cortas, y actualmente son un elemento fundamental en los desplazamientos en coche de cientos de millones de personas en todo el mundo.<sup>2</sup>

Al igual que ocurrió con la navegación marítima y con las aplicaciones militares, la apertura de los sistemas de posicionamiento a millones de personas propiciará nuevos avances tecnológicos y científicos. Uno de los avances tecnológicos más importantes sería la fabricación integrada de mecanismos. En 1987 se acuñó el término *microelectromechanical systems* (MEMS) para referirse a esta tecnología. La tecnología MEMS permite la fabricación de IMUs de bajo coste, cuyas dimensiones rondan el centímetro, frente a las utilizadas en aplicaciones militares de coste muy superior, con dimensiones superiores al metro. Esto hizo posible acercar a multitud de usuarios los sistemas de navegación inercial como los utilizados en el programa Apollo. Así, hoy en día es fácil encontrar *smartphones* que integren tanto receptores GPS como acelerómetros y giróscopos MEMS, dando lugar a que los sistemas de navegación satelital e inercial converjan. De esta manera, ha aparecido un extenso abanico de soluciones híbridas, como navegadores GPS que utilizan la información de un acelerómetro cuando la señal se pierde, por ejemplo, en túneles.

Todos los avances tecnológicos y científicos citados anteriormente, tanto desde un punto de vista físico como algorítmico, han cubierto necesidades de posicionamiento a gran escala. Así, actualmente es posible el establecimiento dinámico de rutas marítimas y aéreas (militares o civiles), el cálculo automático del camino más corto desde la posición actual de un vehículo, o la recepción de información en la pantalla de un móvil acerca del edificio que se está enfocan-

---

<sup>2</sup>NAVTEQ estimaba en Septiembre de 2009 que en Europa y Norteamérica se superaban los 125 millones de usuarios de GPS. Un estudio más conservador, de la consultora ABI Research, estimaba en 57 millones los usuarios en el mundo en julio de 2010, esperando superar los 370 millones en el año 2015.

do con la cámara. Sin embargo, la popularidad alcanzada por los sistemas de posicionamiento, desde su apertura a aplicaciones civiles, requiere que estos cubran también las necesidades a pequeña escala. El desarrollo de la tecnología y ciencia correspondientes daría lugar a importantes servicios como sistemas de guiado de invidentes, monitorización de discapacitados cognitivos, o sistemas domóticos más inteligentes (*smart*).

A la hora de cubrir dichas necesidades a pequeña escala, los avances tecnológicos anteriores tienen en común que son efectivos, cada uno en su medida, en lugares extensos, áreas abiertas y, en general, en entornos libres de perturbaciones. Sin embargo, estos sistemas no son robustos en entornos complejos, como áreas densas urbanas o en interiores de edificios. Por ejemplo, los sistemas satelitales necesitan receptores de muy alta sensibilidad o repetidores que reflejen la señal exterior en el interior de edificios, siendo insuficiente su rendimiento en una amplia gama de entornos (Watson et al. 2005). Así mismo, el sistema radar se ha basado tradicionalmente en el rebote de la señal en línea de visión directa, aunque se prevén avances hacia un radar cognitivo que extraiga información de las señales que han seguido otros caminos (Haykin 2006). Finalmente, el compás magnético sufre alteraciones debidas a elementos metálicos y fuentes de calor presentes en numerosos edificios.

A su vez, en el marco de los avances científicos, es en este punto donde se ponen de manifiesto las limitaciones de los filtros de Kalman, utilizados durante décadas. Estos filtros son óptimos siempre y cuando los modelos sean lineales y Gaussianos. Sin embargo, tales asunciones no son adecuadas en entornos complejos donde empiezan a ser predominantes los efectos de la propagación multicamino o la falta de visión directa en las señales inalámbricas (Qi 2006). Además, la rápida variación de estos efectos en el tiempo requiere que los modelos estáticos, encontrados habitualmente en los sistemas de posicionamiento, sean sustituidos por modelos dinámicos que se adapten a estos cambios. La asunción estática, lineal y Gaussiana tampoco resulta válida cuando las medidas son recogidas por acelerómetros y giróscopos de bajo coste (MEMS) que acumulan un gran error en unos pocos segundos (Woodman 2009). Todos estos problemas son acrecentados cuando, además, el tipo de medidas recibidas cambia en cada instante de tiempo, necesitando algoritmos que fusionen toda esta información independientemente de la naturaleza del sensor del que provenga. Para la resolución de estos problemas, dinámicos, no-lineales y no-

Gaussianos, los filtros de partículas se han tornado cada vez más populares desde su publicación en 1993 (Gordon et al. 1993).

Este es el marco en el que se encuadra la Tesis Doctoral, en el avance científico hacia nuevos algoritmos de localización y navegación para entornos complejos, donde los sistemas actuales se vuelven inservibles. Para alcanzar este objetivo final, la siguiente Sección describe los objetivos específicos en que se divide el primero.

## 1.2. Objetivos de la Tesis Doctoral

El objetivo principal de esta Tesis Doctoral es **diseñar e implementar sistemas de posicionamiento robusto que se adapten dinámicamente a las condiciones cambiantes de entornos complejos**, como áreas densas urbanas o interiores de edificios. Estos sistemas deben utilizar dispositivos comerciales existentes de bajo coste, como adaptadores inalámbricos o sensores inerciales. Por lo tanto, partiendo de una tecnología existente, el avance necesario es principalmente científico. En concreto, esta Tesis Doctoral se centra en el desarrollo de técnicas de estimación Bayesiana que superen las limitaciones de los sistemas de posicionamiento actuales, eliminando las asunciones no realistas para estos entornos como modelos estáticos o errores Gaussianos. Este objetivo general se divide en los siguientes objetivos específicos:

- Diseñar e implementar un algoritmo adaptativo de localización a partir de las señales electromagnéticas intercambiadas en una red inalámbrica.
- Desarrollar un método de fusión de información cuando las mediciones realizadas sobre las señales electromagnéticas son de distinta naturaleza.
- Definir un marco general que permita reducir los efectos causados por la propagación multicamino o la falta de visión directa (NLOS - *non-line of sight*)
- Diseñar e implementar un sistema de navegación de personas en tiempo real empleando dispositivos inerciales.
- Encontrar un método efectivo que mitigue el efecto del sesgo inherente a los sensores inerciales fabricados con tecnología MEMS.

- Desarrollar un método de fusión de información cuando esta proviene de mediciones realizadas con sensores de distinta naturaleza.
- Evaluar experimentalmente los algoritmos desarrollados en un entorno complejo utilizando dispositivos comerciales.
- Obtener óptimos teóricos (cotas) fiables con los que comparar, mediante simulación, los algoritmos desarrollados.

### 1.3. Metodología

El logro de los objetivos planteados en la Sección anterior conlleva el siguiente programa de tareas:

- **Definición clara y precisa del problema**, averiguando dónde centrar el esfuerzo de investigación, y estableciendo los límites dentro de los que desarrollaremos la Tesis Doctoral.
- **Revisión profunda del estado del arte** en estimación Bayesiana, adquiriendo un conocimiento general de la técnica, y señalando dónde falla cuando ha sido aplicada a los sistemas de localización en entornos complejos.
- Desarrollo de un **algoritmo de localización inalámbrica** basado en estimación recursiva Bayesiana, que se adapte dinámicamente a las condiciones de propagación cambiantes en entornos complejos.
- Desarrollo de un **algoritmo de navegación inercial** basado en estimación recursiva Bayesiana y dispositivos de bajo coste MEMS, que se complemente con mediciones realizadas sobre señales inalámbricas.
- **Evaluación empírica** de la bondad de los algoritmos desarrollados a partir de las mediciones realizadas con dispositivos comerciales en un entorno complejo, y comparación con otros métodos de localización habituales.
- **Evaluación** de los algoritmos desarrollados **mediante cotas teóricas**, encontrando una función de densidad con la que generar medidas que incluyan las mismas fuentes de error que las registradas en entornos complejos reales.

- **Extracción de las conclusiones** oportunas, analizando en qué hemos mejorado los sistemas existentes hasta la realización de esta Tesis Doctoral, y estableciendo líneas de actuación futuras que cubran posibles frentes abiertos pero no abarcados.

## 1.4. Estructura de la Tesis Doctoral

En los siguientes Capítulos, partiendo de un repaso al estado del arte, nos adentraremos en los algoritmos de localización y navegación. Pondremos el foco en las técnicas de estimación Bayesiana para llegar a las principales contribuciones de esta Tesis Doctoral que son, respectivamente:

- Un filtro Bayesiano adaptativo para localización de usuarios móviles. Este filtro fusiona de manera dinámica la información acerca de los niveles de potencia y los tiempos de llegada de las señales inalámbricas intercambiadas entre los nodos de una red.
- Un algoritmo de suavizado Bayesiano para navegación de personas. Este algoritmo fusiona a su vez la información obtenida por sensores inerciales y la extraída de señales inalámbricas.

Para culminar en estos dos sistemas el Capítulo 2 define el problema de posicionamiento y sus soluciones óptimas; el Capítulo 3 detalla su solución desde el punto de vista Bayesiano; el Capítulo 4 presenta el sistema de localización inalámbrica; el Capítulo 5 describe el sistema de navegación inercial; y, finalmente, el Capítulo 6 expone las conclusiones extraídas de la Tesis Doctoral.

El Capítulo 2 define el problema de localización y navegación sobre el cual versa la Tesis Doctoral. Este Capítulo hace una revisión de la literatura que trata de dar una respuesta a la necesidad de localización en entornos complejos. Pone un énfasis especial en aquellas soluciones que utilizan técnicas de inferencia Bayesiana, y en la mejora que suponen frente a estimaciones basadas en máxima-verosimilitud. Finalmente, muestra cómo cuantificar la información disponible acerca de un estimador y justifica la necesidad de obtener, a partir de ella, cotas teóricas para evaluar estos sistemas.

El Capítulo 3 analiza el problema de posicionamiento desde el punto de vista Bayesiano. Este Capítulo utiliza un modelo de Markov oculto para establecer las

relaciones entre las variables aleatorias implicadas en el posicionamiento. Analiza los algoritmos óptimos que son aplicables en entornos abiertos, y justifica la necesidad de algoritmos subóptimos para entornos complejos. Finalmente, muestra cómo obtener las cotas teóricas de rendimiento bajo el marco Bayesiano, a partir de las cuales obtiene nuevos resultados útiles en el diseño de sistemas de posicionamiento.

El Capítulo 4 presenta un nuevo algoritmo para localización inalámbrica en entornos complejos basado en estimación Bayesiana adaptativa. Muestra cómo fusionar las medidas de potencia recibida y de tiempo de llegada extraídas de las señales inalámbricas intercambiadas en una red. Evalúa el algoritmo presentado en un entorno complejo real, utilizando para ello medidas realizadas con dispositivos inalámbricos comerciales. Finalmente, obtiene la cota de Cramér-Rao para cuantificar la mejora alcanzada respecto a métodos convencionales.

El Capítulo 5 desarrolla un método de navegación inercial de personas en tiempo real. Este Capítulo propone un marco general para la fusión de información inercial e inalámbrica basado en suavizado Bayesiano. Evalúa el algoritmo presentado en un entorno complejo, a partir de medidas realizadas con dispositivos inerciales e inalámbricos comerciales. Finalmente, obtiene la cota de Cramér-Rao para el problema de suavizado, y cuantifica mediante simulación la mejora introducida respecto a técnicas de navegación habituales.

Para concluir la Tesis Doctoral, el Capítulo 6 discute la importancia de las contribuciones y resultados presentados. Este Capítulo cuantifica el grado de consecución de los objetivos propuestos y, en base a esto, sugiere posibles líneas de investigación hacia las que dirigir el trabajo futuro.

El contenido teórico de la Tesis Doctoral se complementa con ejemplos y casos prácticos con el objetivo de facilitar su comprensión. La notación y los acrónimos empleados a lo largo de la Tesis Doctoral son definidos la primera vez que aparecen en el texto, estando así mismo recogidos en el Apéndice A. Por último, el Apéndice B enumera las solicitudes de patente y publicaciones científicas resultantes de esta investigación.





## Localización y Navegación. Algoritmos, Cotas Teóricas y Limitaciones

### Contenido

---

2.1. La Pila de Localización . . . . .	14
2.2. Algoritmos de localización/navegación . . . . .	30
2.3. Cotas teóricas y limitaciones prácticas . . . . .	37
2.A. Anexo: autocalibración mediante ML para localización con TOA	47

---

La estadística inferencial se utiliza para extraer conclusiones acerca de muchos procesos de la vida, más allá del conocimiento aportado por los datos en bruto. Es decir, la estadística inferencial deduce propiedades acerca de una población, a partir de una pequeña muestra de la misma. Por ejemplo, el Instituto Nacional de Estadística extrae conclusiones acerca del parámetro *desempleo del país* a partir de la Encuesta de Población Activa (EPA), realizada trimestralmente a una muestra de 60 000 familias.

En este proceso de estimación, es posible que los valores observados presenten un error sistemático o sesgo. Por ejemplo, el desempleo presenta una componente estacional que le hace disminuir en la campaña de verano y aumentar en otoño, y también puede verse reducido ante una catástrofe natural ya que crea nuevos puestos de trabajo para la reconstrucción. Pero estas variaciones desaparecerán cuando la correspondiente etapa finalice. Si queremos extraer conclusiones acerca del rendimiento de las políticas de empleo, necesitamos desestacionalizar el desempleo y corregir las desviaciones por causas temporales, esto es, eliminar el sesgo en las observaciones.

De forma análoga, un sistema de posicionamiento estima el parámetro *posición del usuario móvil* a partir de ciertas mediciones realizadas, por ejemplo, sobre las señales electromagnéticas transmitidas, como pueden ser mediciones del tiempo de llegada (TOA - *time of arrival*) de la señal. En un entorno complejo, estas observaciones incluirán cierto error sistemático debido a la propagación multicamino o al NLOS, y este error además cambiará en el tiempo de manera impredecible. Por ejemplo, si medimos el TOA en NLOS, las observaciones incluirán siempre un error positivo debido al mayor tiempo que emplea la señal en llegar rebotada al receptor o en ser transmitida por distintos medios a menor velocidad de propagación que en el aire (Prieto et al. 2009c).

Desde el marco de la estadística inferencial, en este Capítulo analizamos el problema del posicionamiento de un usuario móvil a partir de las observaciones obtenidas mediante señales inalámbricas o inerciales, qué técnicas se han empleado tradicionalmente para resolverlo, y las limitaciones teóricas que encuentran. Para la definición del problema empleamos la estructura de capas ofrecida por la *Pila de Localización*, que nos permite abstraernos de la tecnología concreta utilizada, definiendo así un marco común de resolución de los problemas de posicionamiento.

El resto del Capítulo presenta la siguiente estructura: la Sección 2.1 repasa el estado del arte en localización inalámbrica y navegación inercial, siguiendo la jerarquía establecida por la *Pila de Localización*; la Sección 2.2 presenta los algoritmos utilizados para resolver el problema de posicionamiento desde el enfoque máximo-verosímil y desde el enfoque Bayesiano; y la Sección 2.3 describe herramientas para cuantificar el máximo rendimiento teórico de cualquier sistema de posicionamiento.

## 2.1. La Pila de Localización

El objetivo de los sistemas de posicionamiento es estimar la localización de un usuario móvil, independientemente del entorno en el que se encuentra. Para realizar dicha estimación, estos sistemas emplean la información extraída de ciertos sensores. Desde el punto de vista del usuario, cobra más importancia la fiabilidad de la estimación de su posición y las actividades programadas en función de esta, siendo habitualmente indiferente a la tecnología sensorial empleada. Bajo esta filosofía aparece la Pila de Localización, la cual define una

serie de capas que capturan las abstracciones necesarias en cualquier sistema de posicionamiento (Hightower et al. 2002, 2003).

La Pila de Localización fue propuesta por primera vez en 2002 por Hightower et al., tomando como referencia los beneficios aportados por el modelo OSI para las redes de ordenadores. La Figura 2.1 muestra la disposición de las capas que componen dicha pila, y que son:

1. *Sensores*: incluye el *hardware* necesario para detectar las variaciones de los fenómenos físicos. Por ejemplo, la entrada a esta capa sería un cambio en el rumbo y la velocidad de un barco y la salida el nuevo ángulo medido por el astrolabio, o la nueva diferencia de tiempo con Londres medida por el cronómetro de Harrison.
2. *Medidas*: transcribe la información en bruto del sensor en información interpretable por las capas superiores del sistema de posicionamiento (distancia, ángulos, posición, etc.) junto con su incertidumbre. Por ejemplo, el ángulo medido por el astrolabio sería traducido a latitud en esta capa, y la hora local sería convertida a longitud.
3. *Fusión*: hibrida las medidas de las capas anteriores obteniendo una estimación de la localización del usuario y su incertidumbre. Continuando con los ejemplos anteriores, en esta capa la latitud y la longitud serían fusionadas para estimar la localización del barco.
4. *Disposición*: relaciona las estimaciones de posición individuales de múltiples nodos. Por ejemplo, la entrada a esta capa sería la posición estimada por dos barcos en la capa anterior, y la salida sería la probabilidad de que la expedición se encuentre a cinco millas náuticas de la costa.
5. *Fusión contextual*: combina la información relativa a la localización y disposición con otra información relacionada con el contexto del usuario. Por ejemplo, esta capa fusionaría la probabilidad de estar a cinco millas de la costa con la velocidad del viento.
6. *Actividades*: clasifica la información contextual en estados semánticos, definiendo actividades a realizar en función de estos estados. Esta capa recibiría como información de entrada la probabilidad de estar a cinco millas de la costa y la velocidad del viento, y en función de lo anterior el marinero podría decidir, por ejemplo, arriar las velas.



**Figura 2.1:** Esta Tesis Doctoral se centrará en las tres capas inferiores de la Pila de Localización (Hightower et al. 2003).

En esta Tesis Doctoral, las contribuciones más significativas corresponden a las tres capas inferiores de la Pila de Localización. Así, a partir de sensores inalámbricos e inerciales (Capa 1), obtendremos información relacionada con la posición o la orientación (Capa 2), que será fusionada en el tiempo mediante técnicas de estimación Bayesiana (Capa 3). Todo ello estará orientado a paliar las carencias de los sistemas de posicionamiento actuales para entornos complejos, de manera que podamos extrapolar a este tipo de espacios los rendimientos obtenidos en las tres capas superiores para entornos abiertos. Las siguientes Secciones describen las tres capas inferiores para los sistemas de posicionamiento tratados en esta Tesis Doctoral: localización inalámbrica y navegación inercial.

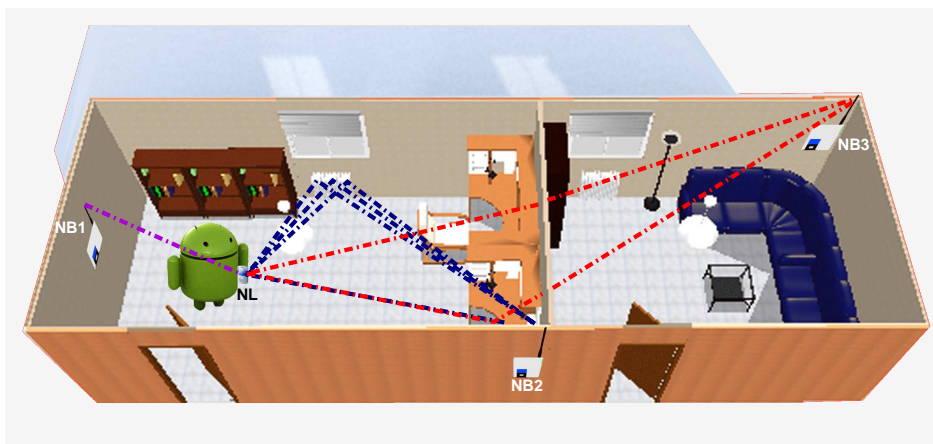
### 2.1.1. Localización inalámbrica

En la localización inalámbrica, el objetivo es estimar la posición del nodo a localizar (NL) a partir de mediciones realizadas sobre las señales transmitidas entre los nodos de la red (Gustafsson and Gunnarsson 2005, Falsi et al. 2006, Patwari et al. 2003). Es decir, en la **Capa 1** de los sistemas de locali-

zación inalámbrica (ver Figura 2.1) nos encontramos dispositivos capaces de extraer información de las señales inalámbricas que esté relacionada con la posición. Entre las tecnologías que se han utilizado para este tipo de localización en entornos de interior destacan las basadas en infrarrojos (Petrellis et al. 2006), visión artificial (DeSouza and Kak 2002), ultrasonidos (de Marziani et al. 2009) y radiofrecuencia (Qi 2006). Nosotros nos ceñiremos a esta última debido a la proliferación de las redes inalámbricas de área local (WLAN - *wireless local area network*), no siendo necesario el despliegue de una nueva infraestructura de localización en los entornos que tengan este tipo de red instalada. Al mismo tiempo, garantizamos un bajo coste y alta disponibilidad de los dispositivos comerciales, así como mayor escalabilidad y versatilidad al permitir la localización en ausencia de visión directa o NLOS.

En los sistemas de radiofrecuencia, de los distintos fenómenos físicos que se pueden medir en la Capa 1, los más empleados son el TOA, la potencia de señal recibida (RSS - *received signal strength*), el ángulo de llegada de la señal (AOA - *angle of arrival*), o la diferencia entre tiempos de llegada (TDOA - *time difference of arrival*) (Gustafsson and Gunnarsson 2005). La sincronización de los dispositivos cuando se utilizan las métricas basadas en tiempo, TOA y TDOA, y la integración de arrays de antenas para la obtención del AOA, requieren una alta complejidad *hardware*. Esto aleja estas técnicas de uno de nuestros objetivos que es utilizar dispositivos comerciales de bajo coste (ver Sección 1.2). En esta Tesis Doctoral, utilizaremos el tiempo vuelo de ida y vuelta de la señal (RTT - *round-trip time*) y el RSS ya que, como detallaremos en el Capítulo 4, mantienen el compromiso de obtener el rendimiento requerido con un coste apropiado (Bahillo et al. 2009a, Mazuelas et al. 2009a, Prieto et al. 2012b). En adelante, cuando hablemos del TOA, nos referiremos al obtenido mediante el RTT.

El principal problema a la hora de utilizar dichas métricas es la naturaleza compleja de las señales inalámbricas en entornos de interior. Esta naturaleza compleja provoca un comportamiento impredecible y cambiante en el tiempo de los valores medidos. La Figura 2.2 muestra un escenario típico de localización inalámbrica en un entorno de interior. En este escenario, el NL estimaría su posición a partir de la información extraída de las señales inalámbricas transmitidas con varios nodos baliza (NBs) de posición conocida. En la Figura 2.2, el NL se encuentra en línea de visión directa (LOS - *line of sight*) con un NB y en NLOS con varios NBs. Por lo tanto, habrá señales que viajen desde los NBs



**Figura 2.2:** En un escenario típico de interior algunas señales llegarán por el camino directo después de atravesar varios medios, y otras llegarán reflejadas. Además, *clusters* de objetos producirán *clusters* de componentes multicamino (Prieto et al. 2009c).

al NL por el camino directo a velocidad aproximada constante; otras llegarán, más atenuadas, por este camino atravesando varios medios a distinta velocidad; mientras que habrá otras que alcancen el destino tras ser reflejadas. Con lo que el multicamino y el NLOS serán las principales barreras para conseguir rendimientos similares a los obtenidos en entornos abiertos.

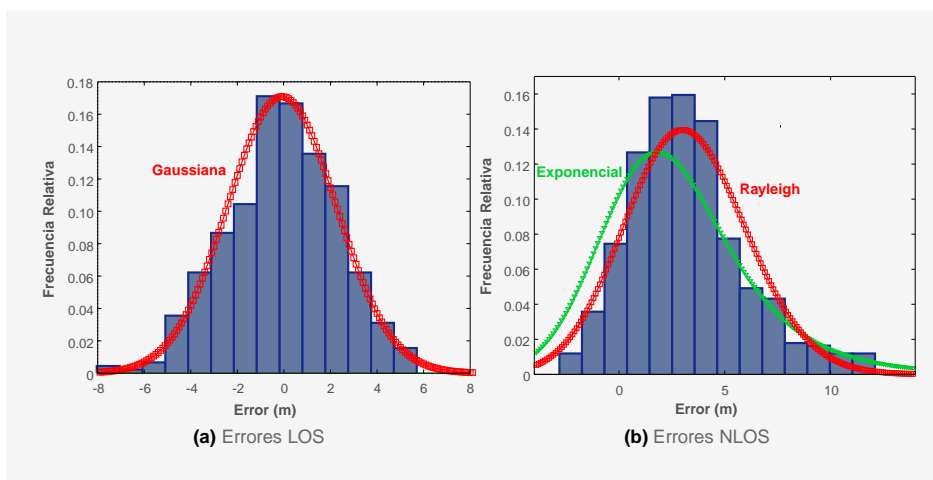
Con las métricas anteriores como entradas a la **Capa 2** de la Pila de Localización, la información que obtenemos como salida está relacionada con la distancia (o rango) entre los nodos cuando empleamos valores de TOA (Falsi et al. 2006, Qi 2006, Bahillo et al. 2009a) o de RSS (Patwari et al. 2003, Qi 2003, Mazuelas et al. 2009a, Weiss 2003). Sin embargo, esta información también puede estar relacionada con el ángulo que forman los nodos en la topología física de red si utilizamos el AOA, o con diferencias de distancias cuando extraemos la información del TDOA (Caffery 1999, Gustafsson and Gunnarsson 2005, Rappaport et al. 1996).

En esta Tesis Doctoral, la salida de la Capa 2 (proveniente de las métricas RSS y TOA) está relacionada con la distancia entre el NL y los NBs. La estimación de distancias es, así mismo, un problema de inferencia en el que las observaciones son las medidas obtenidas por los dispositivos inalámbricos (en este caso RSS o TOA). Desde el punto de vista Bayesiano, el enfoque óptimo es determinar la distribución *a posteriori* de las distancias dadas las observaciones

y estimar las distancias como el máximo-*a-posteriori* (MAP) o el valor de mínimo error cuadrático medio (MMSE - *minimum mean square error*), estadísticos que definiremos más adelante (Kay 1993, Van Trees 1968). Sin emplear ningún conocimiento *a priori* acerca de las distancias, el enfoque anterior deriva en el estimador máximo-verosímil (MLE - *maximum likelihood estimator*) (Patwari et al. 2003). Sin embargo, podemos obtener mejores estimaciones si consideramos la relación de las distancias en el tiempo. Esta evolución en el tiempo se puede modelar como información *a priori* que puede ser incorporada secuencialmente en el proceso de inferencia utilizando el teorema de Bayes, dando como resultado las técnicas de filtrado o de seguimiento (*tracking*), que describiremos en el siguiente Capítulo (Gustafsson et al. 2002, Mihaylova et al. 2007, Nicoli et al. 2008, Chen and Wu 2009, Song and Yu 2008, Chen et al. 2009).

Los métodos mencionados están basados en el conocimiento de la función de verosimilitud, esto es, su rendimiento depende del ajuste entre el modelo asumido para la relación entre medidas y distancias, y el comportamiento real de las medidas. Los modelos basados en verosimilitudes Gaussianas fijas, explican con precisión el comportamiento de las medidas solo en entornos abiertos (Ristic et al. 2004, Prieto et al. 2009a, Mazuelas et al. 2009b, Qi 2003). Sin embargo, el comportamiento de la propagación de señales inalámbricas en entornos complejos causa que dichas asunciones no sean realistas. Por lo tanto, el empleo de modelos simples y estáticos para las medidas deriva, en muchas ocasiones, en rendimientos inadecuados e insuficientes (Ristic et al. 2004, Qi 2003).

Para tratar de explicar el comportamiento cambiante de las medidas en entornos inalámbricos complejos, se han propuesto diversas técnicas. En el caso del TOA, el sesgo provocado por el NLOS se traduce en una sobreestimación de la distancia entre los nodos (ver Figura 2.3), de manera que un procedimiento común es detectar y eliminar las medidas que proceden de NLOS (Chen 1999); otras técnicas emplean conocimiento *a priori* acerca del error NLOS para eliminarlo antes de estimar la posición, y ajustan las medidas al valor que deberían tener en condiciones de LOS (Wylie and Holtzman 1996, Mazuelas et al. 2009b). En el caso RSS, el rendimiento depende de la estimación correcta del modelo de propagación que caracteriza la relación entre distancias y medidas para el entorno concreto en cada instante de tiempo (Mazuelas et al. 2009a, Qi 2003). Algunos enfoques tratan la naturaleza dinámica de la métrica RSS a tra-



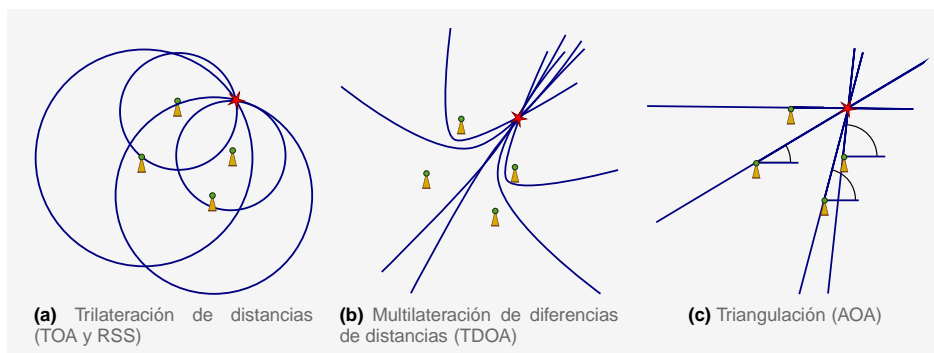
**Figura 2.3:** En condiciones de propagación en LOS (a) los errores en la estimación de distancias a partir del TOA se distribuyen en torno a cero. En el caso de NLOS (b) se obtiene un mayor número de errores positivos.

vés de *fingerprinting* o *machine learning* (Kushki et al. 2010, Roos et al. 2002, Kushki et al. 2007, Kushki 2008). Sin embargo, su precisión es sensible a cambios rápidos del entorno, y no consideran la fusión de información proveniente de diferentes métricas.

Una vez estimada la distancia entre los nodos en la Capa 2, los sistemas de localización obtienen la posición del NL en la **Capa 3**. El procedimiento empleado habitualmente para estimar esta posición es conocido como trilateración (Foy 1976, Gustafsson and Gunnarsson 2005). Este consiste en encontrar el punto en el que se cortan las circunferencias trazadas en torno a las posiciones conocidas de los NBs con radio las distancias estimadas (Caffery 1999).<sup>1</sup> En el caso de utilizar diferencias de distancias, las curvas resultantes son hipérbolas, y el proceso de determinación del punto de corte se denomina multilateración. Cuando el punto de corte lo marcan las líneas rectas que definen los ángulos de llegada, el proceso de estimación de la posición se denomina triangulación. La Figura 2.4 muestra *a grosso modo* los procesos anteriores indicando la métrica o métricas empleadas en cada caso.

<sup>1</sup> Cuando el posicionamiento se realiza en tres dimensiones en lugar de en dos, las circunferencias en torno a los NBs se convierten en esferas.





**Figura 2.4:** Técnicas de obtención de la posición a partir de distintas métricas extraídas de las señales de radiofrecuencia (Gustafsson and Gunnarsson 2005).

**Ejemplo 2.1.** *A partir de medidas de TOA o de RSS, un NL estima que la distancia a 4 NBs (cuya posición es conocida) es 4 m, 5 m, 7 m y 10 m, respectivamente. A partir de estas distancias el NL desea obtener su posición en  $D$  dimensiones,  $D = \{2, 3\}$ . El método clásico de resolución de este problema es plantear las ecuaciones dadas por las condiciones anteriores (distancia a cada NB), y resolver el problema sobredeterminado mediante mínimos cuadrados (LS - least-squares).*

*Así, si  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^D$  es la posición del NL (desconocida), y  $\mathbf{x}_l \in \mathbb{R}^D$  la del  $l$ -ésimo NB (conocida), dado el sistema de ecuaciones:*

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\| \\ 5 = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2\| \\ 7 = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_3\| \\ 10 = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_4\| \end{array} \right.$$

*si las distancias fuesen exactas, solo  $(D + 1)$  ecuaciones serían independientes, y tendríamos un sistema determinado con una única solución. Sin embargo, cuando empleamos estimaciones que presentan cierto error, habitualmente el sistema es sobredeterminado, y debemos aproximar su solución. En este caso, asumiendo que los errores en todas las estimaciones anteriores están incorrelados y se distribuyen como un error Gaussiano de media cero y varianza constante, podemos obtener la solución óptima, como veremos más adelante, mediante máxima verosimilitud (ML - maximum likelihood). El sistema entonces lo resolveríamos utilizando algún método de LS*

*no-lineal, o linealizando las ecuaciones anteriores para emplear LS lineal. En este último caso, geoméricamente el problema se convierte en encontrar el punto de intersección de varios planos (Murphy and Hereman 1995).*

En Capítulos sucesivos, veremos que el rendimiento de la estimación de distancias y de posiciones se puede mejorar explotando la correlación de la posición del NL en el tiempo, y combinando de manera óptima la información de las medidas a través del proceso conocido como filtrado Bayesiano. Las técnicas habituales basadas en filtros de Kalman (KF - *Kalman filter*) recaen en modelos lineales y Gaussianos que no son adecuados para entornos complejos. Para solucionarlo, se han propuesto distintos métodos basados en variantes de estos filtros, así como en filtros de partículas (PFs - *particle filters*): en (Nicoli et al. 2008, Chen and Wu 2009) se considera estimación recursiva Bayesiana junto con los efectos del multicamino y el NLOS; en (Hatami and Pahlavan 2006, Catovic and Sahinoglu 2004, McGuire et al. 2005) se lleva a cabo fusión de datos provenientes de TOA y RSS; y en (Song and Yu 2008) se explota la hibridación de información por medio de filtrado de partículas. Finalmente, todos estos puntos son tratados en (Chen et al. 2009). Sin embargo, dichos métodos emplean asunciones no-realistas para entornos inalámbricos complejos tales como canales estáticos y errores Gaussianos.

El rendimiento de los procesos involucrados en las tres capas inferiores de la Pila de Localización determina la fiabilidad de la estimación de la posición del NL (Sharp et al. 2009, Shen and Win 2008, Mazuelas et al. 2010). En la Capa 1 la resolución y fiabilidad de las medidas depende de la tecnología y los dispositivos comerciales elegidos. En la Capa 2, el rendimiento está relacionado directamente con el algoritmo utilizado para estimar distancias a partir de las métricas extraídas de las señales electromagnéticas transmitidas. Y finalmente, en la Capa 3, el resultado depende de la técnica desarrollada para la fusión de la información relativa a distancia cuando proviene de métricas distintas.

Para hacer frente a la problemática mencionada, en el Capítulo 4 presentamos un marco para fusión adaptativa de información proveniente de diferentes métricas e instantes de tiempo. Las técnicas que proponemos en dicho Capítulo estiman adaptativamente distancias y posiciones en entornos complejos a partir del modelado no paramétrico y del filtrado de partículas, dando lugar al filtro que denominamos ALPA (*adaptive likelihood particle filter*).

### 2.1.2. Navegación inercial

Los sistemas anteriores de localización inalámbrica presentan dos grandes inconvenientes que limitan su uso:

1. Requieren información acerca de la infraestructura o el despliegue de una nueva dedicada a localización, lo cual no es posible en aplicaciones de rescate o de emergencia en las que se accede a un escenario desconocido (Foxlin 2005);
2. Su rendimiento cae drásticamente en entornos con condiciones de propagación NLOS y multicamino severas, tales como fábricas con recubrimiento metálico o minas (Boutin et al. 2008).

Por consiguiente, los sistemas de localización inalámbrica actuales que consiguen precisiones aceptables para su uso práctico requieren un despliegue de infraestructura prohibitivo. Esto nos hace pensar en acudir a la **Capa 1** para buscar otro tipo de sensores que provean métricas que mejoren la precisión alcanzada por este tipo de sistemas.

La navegación basada en sensores inerciales está adquiriendo cada vez más popularidad, especialmente tras la irrupción de las unidades de medida inercial (IMUs) basadas en la tecnología MEMS (Titterton and Weston 2004). Las IMUs contienen habitualmente tres acelerómetros mutuamente ortogonales y tres giróscopos alineados con los primeros. Estos sensores proveen medidas de la fuerza instantánea que actúa sobre el sensor y de su velocidad angular, respectivamente. Las métricas anteriores pueden ser transformadas, en la capa superior, para obtener la aceleración y la velocidad angular del NL y, posteriormente, integradas para estimar su posición. Tradicionalmente, el uso de los sensores inerciales ha estado alejado de la localización de usuarios móviles debido a la dificultad y coste de fabricación de IMUs de reducido tamaño que puedan ser portadas por estos. Por ejemplo, los sistemas de navegación militares estadounidenses utilizan IMUs de altas prestaciones, cuyo precio ronda los 100 000 euros, y tienen un tamaño estándar de 178×178×249 mm. Estas IMUs se diseñan para cumplir los requisitos marcados por el estándar SNU-84-1, que establece una deriva máxima de la posición en el plano horizontal de 1,5 km tras una hora de operación. Un error similar presentan las IMUs utilizadas en líneas aéreas comerciales (Groves 2008). Es aquí donde hace su aparición la tecnología MEMS, que aprovecha los procesos de fabricación electrónica para

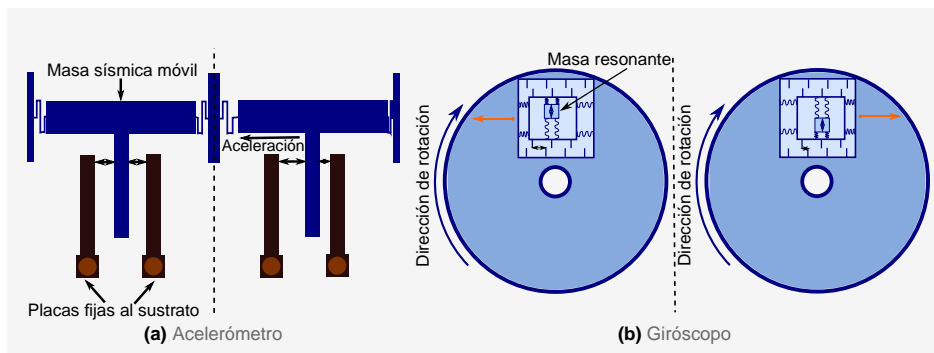
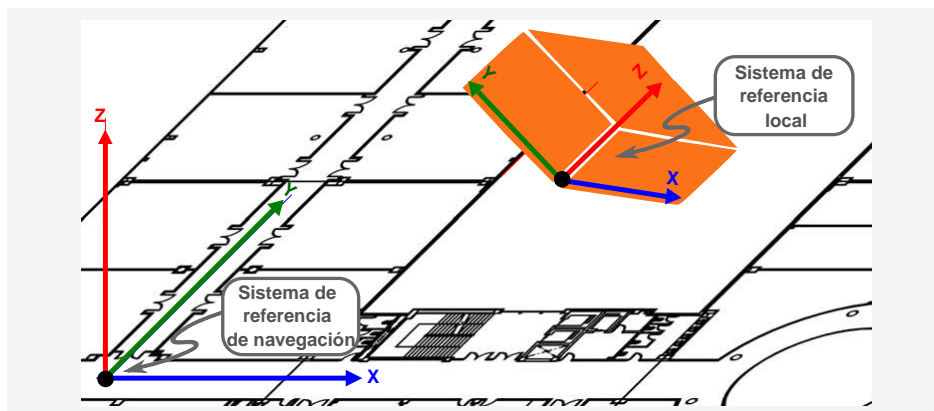


Figura 2.5: Funcionamiento de los sensores basados en tecnología MEMS.

conseguir estructuras mecánicas diminutas y de bajo coste. Las IMUs basadas en tecnología MEMS tienen un coste y tamaño reducido, pero también un bajo rendimiento y estabilidad. Esto hace que no sea posible su uso en sistemas de navegación convencionales, como aviación militar y comercial. Sin embargo, como veremos, sí pueden ser utilizadas para obtener la posición de una persona conocida su posición anterior, lo que se conoce popularmente como navegación de personas o *pedestrian dead reckoning*.

La Figura 2.5 esboza el funcionamiento típico de un acelerómetro y un giróscopo integrados mediante MEMS. Para el caso del primero, al sufrir una aceleración, una masa sísmica móvil se desplaza con respecto a dos electrodos fijos unidos al sustrato, de manera que varía la capacidad eléctrica del conjunto, pudiendo medir este cambio (Bernstein 2003). Para el giróscopo, una masa resonante se hace vibrar en una única dirección (vertical en la imagen). Al igual que le ocurre a una persona caminando de fuera hacia dentro de un tiovivo, la velocidad en la dirección perpendicular a la vibración, respecto a la superficie de rotación, será mayor cerca del extremo que del centro, por lo que habrá una aceleración que provoque esta diferencia. Esta es la componente tangencial de la aceleración de Coriolis, cuyo sentido está marcado en naranja en la Figura 2.5b, y cuyo módulo será mayor cuanto mayor sea la velocidad angular de la base. Dejando libertad para desplazarse a la masa y el marco que la contiene en esta dirección tangencial (horizontal en la imagen), se produce de nuevo un cambio en la capacidad eléctrica del conjunto que también será medible, pudiendo determinar así la velocidad de giro (Geen and Krakauer 2003).



**Figura 2.6:** En esta Tesis Doctoral nos referiremos como orientación a la rotación desde el sistema de referencia local del sensor al sistema de referencia de navegación.

Uno de los principales obstáculos al utilizar sensores inerciales en la Capa 1 es que las medidas de fuerza y velocidad angular que producen están referidas al sistema de referencia local del sensor, el cual es variable y en principio desconocido. En la **Capa 2**, estas medidas deben ser transformadas al sistema de referencia de navegación, fijo, para poder ser interpretadas en las capas superiores (ver Figura 2.6). Por lo tanto, en cada instante de tiempo, los sistemas de navegación inercial deben estimar, junto con la posición, la correspondencia entre ambos sistemas, es decir, la orientación del dispositivo inercial. El rendimiento final del sistema dependerá en gran medida del tipo de representación elegido para esta orientación, y del modelo utilizado en la Capa 2 para transformar los datos en bruto obtenidos por acelerómetros y giróscopos a información interpretable.

En (Shuster 1993) se citan hasta doce maneras distintas de representar la orientación junto con sus dominios de aplicación. Estas representaciones abarcan desde vectores tridimensionales hasta matrices de rotación de nueve elementos. En general, la mejor opción es aquella que implica una complejidad menor, esto es, la de menores dimensiones y que conlleve transformaciones lineales. Sin embargo, las opciones que representan la orientación mediante un vector de tres dimensiones implican modelos no-lineales. Esto es debido a que, o bien imponen restricciones en los valores que pueden tomar sus componentes (es el caso de los ángulos de Euler), o bien porque presentan singularidades (como ocurre en la ecuación de Bortz para el vector de rotación) (Bortz 1971,

Wu 2012). En el lado contrario tendríamos las matrices de rotación, que tienen un uso menor. Además de su elevada dimensión, imponen restricciones para mantener su ortogonalidad y su determinante unitario (Shuster 1993). Por estas razones, la opción preferida para la representación de la orientación en sistemas de navegación en tiempo-real es el cuaternión unitario, de cuatro dimensiones, ya que ofrece una parametrización libre de singularidades, e implica modelos bastante sencillos (Lefferts et al. 1982).<sup>2</sup>

Una vez que se accede a la **Capa 3**, los valores de aceleración y velocidad angular del NL son integrados para obtener como salida su posición y su orientación. El hecho de que las medidas realizadas en la Capa 1 presenten cierto error, mayor cuando son fabricados con tecnología MEMS, se traduce en un error que se acumula en el tiempo en la Capa 3, conocido como deriva (Groves 2008). Esto se pone de manifiesto en el Ejemplo 2.2 (Foxlin 2005, Ojeda and Borenstein 2007).

**Ejemplo 2.2.** *A partir de la estimación de una componente de la velocidad del NL,  $\hat{v}_{k-1} \in \mathbb{R}$ , en el instante  $t_{k-1}$ , queremos obtener su valor en  $t_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Sabemos que,*

$$v_k = v_{k-1} + \Delta t a(\xi_0),$$

donde  $\Delta t = t_k - t_{k-1} \in \mathbb{R}$  es el intervalo de muestreo,  $a \in \mathbb{R}$  es la componente correspondiente de la aceleración del NL, y  $\xi_0 \in \mathbb{R}$  es el valor en el intervalo  $[t_{k-1}, t_k]$  donde evaluamos la aceleración.

Con un acelerómetro medimos que la aceleración en  $t_k$  es  $z_k^a$ . Asumimos que el error en esta medida,  $n_k^a = z_k^a - a(\xi_0)$ , se distribuye como una variable Gaussiana de media cero y desviación típica, por ejemplo,  $1 \text{ m/s}^2$  (es decir,  $n_k^a \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$ ). Por lo tanto, podemos aproximar  $v_k$  como,

$$\hat{v}_k = \hat{v}_{k-1} + \Delta t z_k^a.$$

El error en esta aproximación viene dado por,

$$\begin{aligned} n_k^v &= \hat{v}_k - v_k = \hat{v}_{k-1} + \Delta t z_k^a - (v_{k-1} + \Delta t a(\xi_0)) \\ &= \hat{v}_{k-1} - v_{k-1} + \Delta t n_k^a = \hat{v}_0 - v_0 + \Delta t \sum_{i=1}^k n_i^a, \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Los números cuaterniónicos fueron definidos por William R. Hamilton como una extensión de los números complejos. El cuaternión se define como  $\bar{q} = [q_0, \mathbf{q}]^T$ , donde  $q_0 \in \mathbb{R}$  (parte escalar) y  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$  (parte vectorial) (Wu et al. 2005b).

donde observamos que  $n_k^v \rightsquigarrow \mathcal{N}(\widehat{v}_0 - v_0, \sqrt{k}\Delta t)$ .<sup>3</sup> Es decir, la varianza del error en la estimación de la velocidad ( $k\Delta t^2$ ) crece de manera lineal en el tiempo.

De forma análoga, a partir de la estimación de una componente de la posición  $\widehat{x}_{k-1} \in \mathbb{R}$ , en  $t_{k-1}$ , podemos estimar su valor en  $t_k$ , sabiendo que,

$$x_k = x_{k-1} + \Delta t v(\xi_1),$$

siendo  $\xi_1 \in \mathbb{R}$  algún punto del intervalo  $[t_{k-1}, t_k]$  donde evaluamos la velocidad. Utilizando la velocidad estimada anterior para obtener la posición, tenemos que,

$$\widehat{x}_k = \widehat{x}_{k-1} + \Delta t \widehat{v}_k.$$

El error en esta estimación viene dado por,

$$\begin{aligned} n_k^x &= \widehat{x}_k - x_k = \widehat{x}_{k-1} + \Delta t \widehat{v}_k - (x_{k-1} + \Delta t v(\xi_1)) = \widehat{x}_{k-1} - x_{k-1} + \Delta t n_k^v \\ &= \widehat{x}_0 - x_0 + \Delta t \sum_{i=1}^k n_i^v = \widehat{x}_0 - x_0 + \Delta t \sum_{i=1}^k \left( \widehat{v}_0 - v_0 + \Delta t \sum_{j=1}^i n_j^a \right) \\ &= \widehat{x}_0 - x_0 + k\Delta t (\widehat{v}_0 - v_0) + \Delta t^2 \sum_{i=1}^k i n_{k-(i-1)}^a, \end{aligned}$$

de donde concluimos que  $n_k^x \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x)$ , siendo  $\mu_x$  y  $\sigma_x$ ,

$$\begin{aligned} \mu_x &= \widehat{x}_0 - x_0 + k\Delta t (\widehat{v}_0 - v_0), \\ \sigma_x &= \Delta t^2 \sqrt{\sum_{i=1}^k i^2} = \Delta t^2 \sqrt{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}. \end{aligned}$$

Es decir, el error en la posición se acumula con el tiempo, creciendo la varianza con el cubo del índice temporal, motivo por el que este error es comúnmente conocido como deriva.

Como ya comentamos para los sistemas de localización inalámbrica, la regla de Bayes permite incorporar información de manera secuencial. Bajo esta

<sup>3</sup>Dadas las constantes  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , y las variables aleatorias  $a \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_a, \sigma_a)$  y  $b \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_b, \sigma_b)$ , la transformación lineal  $c = \alpha a + \beta b + \gamma$ , se distribuye como  $c \rightsquigarrow \mathcal{N}(\alpha\mu_a + \beta\mu_b + \gamma, \sqrt{\alpha^2\sigma_a^2 + \beta^2\sigma_b^2})$ .

premisa trabajan los sistemas de navegación inercial, que utilizan como información *a priori* la posición y orientación iniciales. En el caso concreto de navegación de personas con sensores de tecnología MEMS, los sistemas que mejores resultados obtienen explotan el hecho de que, cuando una persona camina, uno de sus pies está detenido durante cierto intervalo de tiempo. De esta manera, situando la IMU en el pie de la persona, estos sistemas incorporan actualizaciones de velocidad cero (ZUPT - *zero-velocity updates*) cuando detectan que el pie está parado, para reiniciar la estimación acerca de la velocidad del pie, corrigiendo así la deriva acumulada (Foxlin 2005, Ojeda and Borenstein 2007, Zhou et al. 2010, 2011, Jiménez et al. 2011, Woodman 2009). Como veremos en el Capítulo 5, bajo el marco Bayesiano, este conocimiento puede ser incorporado al problema de estimación como información *a priori*.

Las implementaciones más comunes que utilizan ZUPT se pueden encontrar en (Foxlin 2005) y (Ojeda and Borenstein 2007), donde la fase de parada del pie se detecta mediante la propia IMU portada en el pie. Estos algoritmos utilizan una ventana de medidas desde el tiempo  $t_{k-l}$  hasta  $t_{k+l}$  para detectar la fase de parada en el instante  $t_k$ . De esta manera, se evitan posibles errores de detección debido a medidas atípicas o valores inerciales momentáneos similares a los obtenidos cuando el pie está estático. Sin embargo, después de detectar la fase de parada, estos sistemas únicamente emplean las medidas obtenidas hasta el instante de tiempo  $t_k$  para estimar la posición y la orientación del NL, mientras que se dispone y desaprovechan  $l$  medidas adicionales. Por lo tanto, estas implementaciones no utilizan toda la información disponible en cada instante de tiempo. En el Capítulo 3 describimos el proceso de suavizado (o *smoothing*) Bayesiano, que utilizamos en el Capítulo 5 para incorporar, de manera óptima, las  $l$  medidas desde  $t_{k+1}$  hasta  $t_{k+l}$  en el proceso de estimación.

El empleo de ZUPT ha demostrado no ser suficiente para compensar el efecto de la deriva tras un periodo largo de estimación. Esto ha llevado inevitablemente a la búsqueda de sistemas que combinen navegación inercial con localización inalámbrica, sin incrementar substancialmente la complejidad y el coste (Fischer and Gellersen 2010). Así, incorporando medidas relacionadas con la posición a la navegación inercial, se consigue que la información total disponible crezca con el tiempo y, por lo tanto, se reduzca el error. Este tipo de sistemas híbridos se han propuesto no solo para zonas de exterior con nave-



gación inercial y GPS (Groves 2008), sino también para entornos complejos de interior: en (Zhou et al. 2010) y (Zhou et al. 2011) se utilizan sensores radar y de radiofrecuencia de bajo consumo para realizar ZUPT; en (Fang et al. 2005) se propone un sistema de navegación inercial ayudado de una infraestructura inalámbrica y técnicas de coincidencia de mapas; en (Jiménez et al. 2012) los autores llevan a cabo ZUPT asistido con medidas RSS; y en (Woodman 2009) se utiliza información procedente del mapa y de una red WiFi junto con ZUPT y una solución tipo Kalman.

Como mencionamos anteriormente, al utilizar dispositivos inalámbricos, las condiciones de propagación multicamino y NLOS obligan a la implementación de modelos que traten la no-linealidad y no-Gaussianidad de las medidas relacionadas con distancias (Mazuelas et al. 2009a, Prieto et al. 2012b). Podemos tratar la falta de linealidad por medio de variantes del filtro de Kalman (KF): como el KF extendido (EKF - *extended KF*) (Sorenson 1985), el *unscented* KF (UKF) (Julier et al. 2000), o el *cubature* KF (CKF) (Arasaratnam and Haykin 2009); o por medio de sus versiones para suavizado: suavizado de Kalman extendido (EKS - *extended Kalman smoother*) (Briers et al. 2009), *unscented* (UKS - *unscented Kalman smoother*) (Särkkä 2008) o *cubature* (CKS - *cubature Kalman smoother*) (Solin 2010) (ver Capítulo 3). Sin embargo, para tratar la no-Gaussianidad debemos buscar aproximaciones tales como los filtros de partículas (Ristic et al. 2004, Prieto et al. 2012b) o su versión para suavizado (Vo et al. 2012). El coste computacional de estos filtros para problemas que estiman vectores de grandes dimensiones, y los requerimientos en cuanto al tiempo de respuesta de las aplicaciones de emergencia, comprometen la elección del algoritmo final.

De nuevo, el rendimiento de las tres capas inferiores determina la fiabilidad de la estimación de la posición final. En la Capa 1 es determinante la tecnología de fabricación y la colocación del sensor inercial. En la Capa 2, el rendimiento lo fijan las transformaciones realizadas para convertir las medidas del sensor inercial en aceleración y velocidad angular del NL expresadas en el sistema de referencia de navegación. Y finalmente, en la Capa 3, el resultado depende de nuevo de la técnica empleada para fusionar la información *a priori* y la información obtenida en las capas inferiores, proveniente tanto de sensores inerciales como inalámbricos.

En el Capítulo 5, tras presentar un marco general para solucionar de manera óptima el problema de navegación inercial, particularizaremos este marco para alguna de las variantes del KF, garantizando una respuesta en tiempo real del sistema de navegación (Fischer and Gellersen 2010). De entre los algoritmos mencionados, el EKF es la solución más extendida para navegación inercial (Foxlin 2005, Jiménez et al. 2012), aunque se han implementado otros métodos como UKF escalado con cuaterniones (Khoder et al. 2008). En el caso de sistemas híbridos con medidas relacionadas con la distancia, EKF es incluso más popular (Jiménez et al. 2012, Woodman 2009). Sin embargo, a pesar de la amplia aceptación del EKF, como mostraremos en el Capítulo 5, el UKF presenta un coste computacional similar, con al menos el mismo rendimiento y mayor sencillez de implementación.

## 2.2. Algoritmos de localización/navegación

Los métodos de localización o navegación mencionados en la Sección anterior tienen un mismo objetivo común: tratan de obtener la posición del NL a partir de un conjunto de medidas (Gustafsson and Gunnarsson 2005). Matemáticamente, dada la observación o conjunto de medidas,  $\mathbf{z}$ , cuya distribución depende de la posición o de un conjunto de parámetros,  $\mathbf{y}$ , deseamos determinar y mediante algún algoritmo, lo que equivale a obtener el estimador,

$$\hat{\mathbf{y}} = f(\mathbf{z})$$

siendo  $f(\cdot)$  alguna función evaluada en su argumento (Kay 1993). Puesto que además las medidas se obtienen en instantes de tiempo discretos  $t_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , el problema se convierte en la estimación de un parámetro basado en una serie temporal, o lo que es lo mismo, en un proceso discreto en el tiempo. En el instante de tiempo  $t_k$ , las medidas  $\mathbf{z}_k$  estarán relacionadas con el parámetro o conjunto de parámetros a estimar,  $\mathbf{y}_k$ , mediante una función  $h(\cdot)$  y algún error  $\mathbf{n}_k^m$ ,

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{y}_k) + \mathbf{n}_k^m. \quad (2.1)$$

Entre la gran cantidad de métodos de estimación disponibles para resolver el problema anterior, los más utilizados en sistemas de localización y navegación

son (Kay 1993, Patwari et al. 2003):

- *Mínimos cuadrados* (LS): en el que se minimiza la suma de los cuadrados de los errores entre la observación (las medidas) y el valor asumido como libre de ruido,

$$\hat{\mathbf{y}}_k^{LS} = \arg \min_{\mathbf{y}_k} \|\mathbf{z}_k - h(\mathbf{y}_k)\|^2 = \arg \min_{\mathbf{y}_k} [\mathbf{z}_k - h(\mathbf{y}_k)]^T [\mathbf{z}_k - h(\mathbf{y}_k)]. \quad (2.2)$$

Este es un caso particular del método de mínimos cuadrados ponderados (WLS - *weighted least squares*). LS es la mejor opción si los errores son variables Gaussianas i.i.d.,<sup>4</sup> mientras que WLS lo será si los errores siguen diferentes distribuciones o están correlados. Por ejemplo, en localización, WLS será el mejor estimador si las medidas presentan correlación espacial, si la naturaleza del error en las medidas es distinta, o si el tipo de sensores con los que estas se han realizado es diferente. En WLS existirá una matriz de correlación de las medidas,  $\mathbf{R}_k$ , diferente de  $\sigma_k^2 \mathbf{I}$ , que ponderará la norma anterior,

$$\hat{\mathbf{y}}_k^{WLS} = \arg \min_{\mathbf{y}_k} [\mathbf{z}_k - h(\mathbf{y}_k)]^T \mathbf{R}_k^{-1} [\mathbf{z}_k - h(\mathbf{y}_k)].$$

- *Máxima verosimilitud* (ML): el valor estimado es escogido como aquel que produce nuestro conjunto de medidas con mayor probabilidad,

$$\hat{\mathbf{y}}_k^{ML} = \arg \max_{\mathbf{y}_k} \mathcal{L}(\mathbf{y}_k | \mathbf{z}_k) \quad (2.3)$$

siendo  $L(\mathbf{y}_k | \mathbf{z}_k)$  la función de verosimilitud de  $\mathbf{y}_k$  dadas las medidas  $\mathbf{z}_k$ .

- *Mínimo error cuadrático medio* (MMSE): que es básicamente la versión Bayesiana del estimador LS,

$$\hat{\mathbf{y}}_k^{MMSE} = \arg \min_{\mathbf{y}_k} \mathbb{E}_{\mathbf{y}_k, \mathbf{z}_{1:k}} \{\|\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k\|^2\} = \mathbb{E}_{\mathbf{y}_k | \mathbf{z}_{1:k}} \{\mathbf{y}_k\},$$

donde  $\mathbb{E}_{\mathbf{z}}\{\cdot\}$  denota la esperanza matemática con respecto a  $\mathbf{z}$ .

- *Máximo a posteriori* (MAP): que es el equivalente Bayesiano del estimador

---

<sup>4</sup>En estadística y probabilidad, una secuencia o colección de variables aleatorias se dice que es independiente e idénticamente distribuida (i.i.d.) si cada variable aleatoria tiene la misma distribución de probabilidad que el resto y son mutuamente independientes.

ML, y es definido como el valor más probable de  $\mathbf{y}_k$  dadas las medidas y la distribución *a priori*,<sup>5</sup>

$$\hat{\mathbf{y}}_k^{MAP} = \arg \max_{\mathbf{y}_k} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{z}_{1:k})$$

donde  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{z}_{1:k})$  es la función *a posteriori*<sup>6</sup> y  $\mathbf{z}_{1:k} = [\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_k]$ .

En ciertos problemas, algunos de estos estimadores son equivalentes dependiendo de la distribución elegida para la observación y del enfoque elegido para resolverlo, estático o dinámico, como exponemos a continuación.

### 2.2.1. Localización estática

Quando hablamos de localización estática nos referimos al caso en el que no consideramos la posible correlación temporal de la posición. Con lo cual, el vector de posición es una secuencia incorrelada de parámetros estimados de manera instantánea. Eliminaremos el subíndice temporal  $k \in \mathbb{N}$  en este apartado para reflejar este hecho. Este enfoque estático suele estar más relacionado con la localización inalámbrica, frente a la navegación inercial, donde la manera de obtener la posición del NL en la Capa 3 es utilizando precisamente la dependencia temporal de dichas posiciones.

Bajo este punto de vista de estimación paramétrica (también denominado Fisheriano o frecuentista), los parámetros no son vistos como variables aleatorias sino que son vistos como incógnitas de un valor determinado (desconocido). Este valor explícito del parámetro afectará a las propiedades estadísticas de la observación (las medidas) de una manera conocida (Bergman 1999). La conexión entre las medidas y el parámetro (e.g., la posición  $\mathbf{x}$ ) viene definida por la función de densidad para el vector  $\mathbf{z}$  parametrizada por el vector  $\mathbf{x}$ . Denotamos esta función de verosimilitud como  $p(\mathbf{z}|\mathbf{x})$  o, también por  $\mathcal{L}(\mathbf{x}|\mathbf{z})$  para enfatizar el hecho de que puede ser vista como una función de  $\mathbf{x}$  después de

<sup>5</sup>La distribución de probabilidad *a priori* es la distribución de probabilidad que expresa la incertidumbre acerca de una cantidad desconocida que se quiere estimar, antes de que la observación o las medidas sean tenidas en cuenta. Esta cantidad desconocida puede ser un parámetro o una variable aleatoria.

<sup>6</sup>La distribución de probabilidad *a posteriori* es la distribución de probabilidad que expresa la incertidumbre acerca de una cantidad desconocida que se quiere estimar, después de que la observación o las medidas sean tenidas en cuenta. Esta cantidad desconocida puede ser un parámetro o una variable aleatoria.

insertar la observación  $\mathbf{z}$  en la función. La forma habitual de resolver este problema es, como refleja (2.3), encontrando el valor de  $\mathbf{x}$  que hace máxima esta función, el cual se denomina estimador máximo-verosímil (MLE).

**Ejemplo 2.3.** Consideremos la misma situación del Ejemplo 2.1, en la que un NL estima su posición,  $\mathbf{x}$ , a partir de mediciones de distancia realizadas sobre las señales transmitidas entre este y  $L$  NBs con posiciones conocidas. Sea  $p(z_l|d_l)$  la función de verosimilitud de la distancia desde el NL al  $l$ -ésimo NB,  $d_l$ , obtenida a partir de una medida  $z_l$  (ya sea proveniente de RSS o de TOA). Si realizamos una medición a cada uno de los  $L$  NBs con los que se comunica el NL, puesto que todas las medidas pueden ser consideradas i.i.d. dada la distancia real, la función de verosimilitud de la posición del NL en cada instante de tiempo viene dada por,

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}|\mathbf{z}) = \prod_{l=1}^L p(z_l|\mathbf{x}).$$

Por lo que la posición del NL se puede obtener como el máximo de la función anterior, esto es,

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}|\mathbf{z}) = \arg \max_{\mathbf{x}} \prod_{l=1}^L p(z_l|\mathbf{x}) = \arg \max_{\mathbf{x}} \sum_{l=1}^L \ln p(z_l|\mathbf{x}).$$

En el Ejemplo 2.1 veíamos que la solución óptima al problema planteado en el Ejemplo 2.3 anterior la podemos obtener empleando un método de mínimos cuadrados (LS o WLS) cuando el error en (2.1) es Gaussiano, de media cero, varianza constante, e incorrelado en el tiempo. Esto queda reflejado en el Ejemplo 2.4.

**Ejemplo 2.4.** Sea  $\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{n}^m$  la relación de un conjunto de medidas i.i.d.,  $\mathbf{z}$ , con la posición del NL,  $\mathbf{x}$ , la cual queremos estimar por ML. Si el error  $\mathbf{n}^m$  se distribuye como una variable aleatoria Gaussiana de media cero, el MLE

vendrá dado por,

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{x}}^{ML} &= \arg \max_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}|\mathbf{z}) = \arg \min_{\mathbf{x}} \frac{1}{\mathcal{L}(\mathbf{x}|\mathbf{z})} = \arg \min_{\mathbf{x}} -\ln(\mathcal{L}(\mathbf{x}|\mathbf{z})) \\
 &= \arg \min_{\mathbf{x}} -\ln \left( \frac{1}{(2\pi)^{D/2} |\mathbf{R}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{z} - h(\mathbf{x}))^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{z} - h(\mathbf{x}))\right) \right) \\
 &= \arg \min_{\mathbf{x}} (\ln |\mathbf{R}| + (\mathbf{z} - h(\mathbf{x}))^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{z} - h(\mathbf{x}))),
 \end{aligned}$$

para los casos en los que  $\mathbf{R}$  depende de la posición. La expresión anterior coincide con el estimador bajo el criterio WLS más un término,  $\ln |\mathbf{R}|$ , que previene de la elección de posiciones con mucha incertidumbre (valor grande para  $\mathbf{R}$ ). Si  $\mathbf{R}$  no depende de la posición, el término  $\ln |\mathbf{R}|$  es constante, por lo que el resultado coincidirá con el de WLS. Y si además la matriz  $\mathbf{R}$  es de la forma  $\sigma^2 \mathbf{I}$ , el MLE coincidirá con el estimador bajo el criterio LS dado por (2.2) (Smith and Abel 1987, Gustafsson and Gunnarsson 2005).

En el ejemplo de la Sección 2.A anexa a este Capítulo, mostramos que es posible obtener un modelo adecuado para la relación entre TOA y distancia, a partir de mediciones realizadas en las señales intercambiadas entre los NBs de una red inalámbrica, sin la necesidad de llevar a cabo ninguna etapa previa de calibración. Puesto que el valor de los parámetros de esta relación no cambiará significativamente a menos que cambien los NBs o haya variaciones en su rendimiento, la manera óptima de resolver este problema es el empleo de técnicas de ML. Esta potente característica puede ser útil, por ejemplo, para añadir la habilidad de localización a una infraestructura inalámbrica preexistente, el cual es uno de los objetivos de esta Tesis Doctoral. De igual forma, si se produjese un cambio en los NBs utilizados, podríamos aplicar este mismo método para obtener los nuevos parámetros del modelo automáticamente.

Pese a la bondad del enfoque máximo-verosímil en casos como el del ejemplo de la Sección 2.A anexa, de manera general, los problemas de localización y navegación requieren una solución que considere la relación de las posiciones en el tiempo. Incluyendo esta información en el algoritmo elegido obtendremos mejores estimaciones. Es lo que se conoce como localización dinámica, que presentamos en el siguiente apartado.

### 2.2.2. Localización dinámica

La localización dinámica, o navegación, es la determinación, no solo de la posición, sino también de la velocidad, aceleración, orientación y/o velocidad angular del NL (Groves 2008). El factor clave de la localización dinámica es la inclusión de estos parámetros (que forman el vector de estado  $\mathbf{y}_k$  en el tiempo  $t_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ) en un modelo dinámico de manera que podemos realizar predicciones de la siguiente posición (Gustafsson et al. 2002). Así, en lugar de tener únicamente un *modelo de observación* (o una función de verosimilitud  $p(\mathbf{z}_k|\mathbf{y}_k)$ ) que relacione las medidas obtenidas en un instante de tiempo con el vector de estado, tenemos también un *modelo dinámico* que relaciona el vector de estado en un instante de tiempo,  $t_k$ , con el vector de estado en el instante de tiempo siguiente,  $t_{k+1}$ . En algunas ocasiones las medidas estarán relacionadas únicamente con la posición, como es el caso de medidas de RSS o TOA. En otras ocasiones estas medidas estarán relacionadas con el resto de parámetros del vector de estado, como ocurre con las medidas provistas por sensores Doppler o por una IMU. De ahí que la localización inercial esté ligada a este tipo de localización dinámica, ya que la estimación se realiza mediante la relación en el tiempo de la posición (y otros de los parámetros mencionados) a partir de estas medidas inerciales.

Desde este punto de vista dinámico, el enfoque Bayesiano es más adecuado, y tanto los parámetros a estimar como las medidas son variables aleatorias. Por lo tanto, en la localización dinámica, el problema consiste en obtener en cada instante de tiempo la función de densidad *a posteriori*,  $p(\mathbf{y}_k|\mathbf{z}_{1:k})$ , a partir de la función de verosimilitud,  $p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k)$ , y el modelo dinámico. Gracias a la regla de Bayes, esto se puede llevar a cabo de manera recursiva cada vez que hay nuevas medidas disponibles, sin necesidad de almacenar todas las medidas recibidas en instantes de tiempo anteriores, por lo que la localización dinámica habitualmente recibe el nombre de estimación recursiva Bayesiana (Ristic et al. 2004).

Bajo el marco Bayesiano, los criterios de estimación LS y ML son sustituidos por los estimadores MMSE y MAP. Como veremos en el siguiente Capítulo, cuando el modelo dinámico y de observación son lineales y Gaussianos, la distribución *a posteriori* será también Gaussiana. En este caso, como muestra el Ejemplo 2.5, los estimadores MMSE y MAP son equivalentes (Van Trees 1968, Chen 2005).

**Ejemplo 2.5.** Cuando la distribución a posteriori  $p(\mathbf{y}_k|\mathbf{z}_{1:k})$  coincide con la de una variable aleatoria Gaussiana, el MMSE viene dado por,

$$\hat{\mathbf{y}}_k^{MMSE} = \arg \min_{\mathbf{y}_k} \mathbb{E}_{\mathbf{y}_k, \mathbf{z}_{1:k}} \{ \|\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k\|^2 \} = \mathbb{E}_{\mathbf{y}_k|\mathbf{z}_{1:k}} \{ \mathbf{y}_k \} = \int \mathbf{y}_k p(\mathbf{y}_k|\mathbf{z}_{1:k}) d\mathbf{y}_k,$$

por lo que el estimador buscado será la esperanza de  $p(\mathbf{y}_k|\mathbf{z}_{1:k})$ . Si ahora queremos obtener el MAP, este será,

$$\hat{\mathbf{y}}_k^{MAP} = \arg \max_{\mathbf{y}_k} p(\mathbf{y}_k|\mathbf{z}_{1:k}).$$

En el caso de una distribución Gaussiana el máximo anterior coincidirá con la esperanza, o lo que es lo mismo, con  $\hat{\mathbf{y}}_k^{MMSE}$ .

Este procesamiento iterativo es el adecuado en problemas en los que los parámetros (el vector de estado) tienen propiedades dinámicas que cambian con el tiempo, o en sistemas en los que se requieren actualizaciones de la estimación con una frecuencia dada basadas en una secuencia de medidas observadas hasta el momento. Estos dos preceptos se cumplen en la localización en entornos complejos, por lo que la localización dinámica obtendrá resultados superiores a la localización estática en los problemas que manejaremos en esta Tesis Doctoral. Es decir, las técnicas de estimación recursiva Bayesiana serán las utilizadas en el Capítulo 4 y el Capítulo 5 para resolver el problema de localización inalámbrica e inercial, respectivamente, de ahí que se dedique todo el Capítulo 3 a estas técnicas. El Capítulo 3 analizará este tipo de problemas mediante una cadena de Markov que utiliza un modelo dinámico y un modelo de observación para relacionar todas las variables involucradas. Puesto que en el Capítulo 4 emplearemos estas técnicas dinámicas para obtener distancias entre nodos, y a partir de ellas posiciones, nos referiremos a este problema como localización dinámica inalámbrica. Por su parte, en el Capítulo 5 estimaremos de manera dinámica directamente la posición del NL, por lo que nos referiremos a este sistema como sistema de navegación inercial.



## 2.3. Cotas teóricas y limitaciones prácticas

Los métodos de localización y navegación presentados hasta el momento emplean métricas extraídas de las señales inalámbricas, o provenientes de sensores inerciales. Sin embargo, estas métricas pueden descartar información relevante para la localización (Shen and Win 2010). Esto puede ser debido al tipo de sensores utilizado (por limitaciones de tecnología, de presupuesto, etc.) o a la complejidad derivada de emplear otro tipo de métricas o modelos más completos. La información recogida por las métricas determinará el rendimiento máximo que se puede obtener en la Capa 3 de *Fusión*. Los siguientes apartados muestran cómo cuantificar la información disponible a través de la matriz de información de Fisher (FIM - *Fisher information matrix*), qué interpretación geométrica tiene, y cómo obtener a partir de esta un límite teórico con el que comparar nuestras estimaciones.

### 2.3.1. Cantidad de Información de Fisher

El concepto de información que vamos a emplear data de mediados de la década de 1920, cuando Fisher investigaba cuánta información se tiene sobre un parámetro a partir de un conjunto de muestras (Fisher 1922, 1925). Por ejemplo, cuando tenemos muestras de una variable aleatoria, estas pueden aportar más o menos información acerca de la distribución subyacente, y esto es lo que Fisher trataba de cuantificar. El resultado de esta investigación es lo que se conoce como *información de Fisher*, referida como FIM para problemas multidimensionales (Kay 1993).

La FIM con respecto a un parámetro,  $\mathbf{y}$ , se define como (Van Trees 1968, Poor 1994):

$$\mathcal{I}(\mathbf{y}) = \mathbb{E}_{\mathbf{z}}\{[\nabla_{\mathbf{y}} \ln p(\mathbf{z}, \mathbf{y})][\nabla_{\mathbf{y}} \ln p(\mathbf{z}, \mathbf{y})]^T\},$$

o, de manera equivalente

$$\mathcal{I}(\mathbf{y}) = -\mathbb{E}_{\mathbf{z}}\{\nabla_{\mathbf{y}}[\nabla_{\mathbf{y}} \ln p(\mathbf{z}, \mathbf{y})]^T\},$$

siendo  $p(\mathbf{z}, \mathbf{y})$  la función de densidad de probabilidad (pdf - *probability density function*) conjunta de la observación  $\mathbf{z}$  y el parámetro  $\mathbf{y}$ .

**Ejemplo 2.6.** Consideremos un problema de estimación de la distancia entre dos nodos, en el que disponemos de  $M$  medidas de esta distancia i.i.d.,  $z_i$ , provenientes de una distribución Gaussiana con media la distancia real  $d$  (desconocida) y varianza constante, por ejemplo, igual a 1 metro. La función de verosimilitud del conjunto de medidas viene dada por,

$$p(\mathbf{z}|d) = \prod_{i=1}^M p(z_i|d),$$

por lo tanto, tenemos que,

$$\ln p(\mathbf{z}|d) \propto -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^M (z_i - d)^2,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial d^2} \ln p(\mathbf{z}|d) = -M,$$

y la FIM en este caso será,

$$\mathcal{I}(d) = \mathbb{E}_{\mathbf{z}} \left\{ -\frac{\partial^2}{\partial d^2} \ln p(\mathbf{z}|d) \right\} = M.$$

La FIM es una matriz definida positiva y además simétrica, de dimensión  $D \times D$ , siendo  $D$  la dimensión del parámetro a estimar. Por ejemplo, si estamos estimando la posición del NL en dos dimensiones (2D), la dimensión de la FIM será  $2 \times 2$ . En los problemas de navegación que veremos en esta Tesis Doctoral, estimaremos junto con la posición del NL, también su velocidad y aceleración en 2D, y en algunos casos en tres dimensiones (3D), junto con su orientación y velocidad angular. En estos casos, la dimensión de la FIM es elevada, lo que resulta problemático si queremos obtener una cota para el error de estimación que, como veremos en el siguiente apartado, requiere invertir la FIM.

### 2.3.2. Error cuadrático medio. Cota de Cramér-Rao

Habitualmente, los distintos sistemas de localización son comparados en términos de precisión y exactitud (Scharf 1990). Puesto que estos términos son utilizados indistintamente en numerosas ocasiones, conviene establecer la dife-

rencia entre ellos:

- *Exactitud*: refleja cómo de cerca están las estimaciones de posición de su valor real.
- *Precisión*: es el grado con el que repeticiones de una misma medición bajo las mismas condiciones ofrecen los mismos resultados.

La exactitud y la precisión están directamente ligadas al sesgo y a la variabilidad de las medidas, respectivamente, o lo que es lo mismo, al error sistemático y al error aleatorio. Estas dos fuentes de error aparecen en todo sistema de medición, incluidos los sistemas de localización, cualquiera que sea la tecnología usada (Saarnisaari and Bräysy 2006):

- *Error sistemático*: es el sesgo introducido en la medición que provoca que la media de varias medidas aisladas difiera significativamente del valor real del parámetro medido. Se produce, por ejemplo, debido a la mala calibración del dispositivo de medida, o al mayor tiempo que implica una transmisión NLOS. El error sistemático empeora la exactitud del sistema.
- *Error aleatorio*: es la incertidumbre experimental que se pone de manifiesto al repetir una medición de un mismo atributo constante, y que provoca que estas mediciones sean inconsistentes. Ejemplos de este tipo de error son el desvanecimiento de la señal a causa del multicamino, o del efecto de sombra debido al tránsito de personas. El error aleatorio reduce la precisión de las estimaciones.

Por ello, el estadístico utilizado con frecuencia para comparar sistemas de localización es el error cuadrático medio (MSE - *mean squared error*). Como muestra el Ejemplo 2.7, el MSE informa acerca tanto de la varianza o error aleatorio (precisión) como del sesgo o error sistemático (exactitud) (Scharf 1990).

**Ejemplo 2.7.** *El MSE de un estimador  $\hat{y}$  con respecto al parámetro estimado  $y$  vienen dado por:*

$$\begin{aligned}
 MSE(\hat{y}) &= \mathbb{E}\{(\hat{y} - y)^2\} = \mathbb{E}\{\hat{y}^2\} + \mathbb{E}\{y^2\} - 2 \cdot \mathbb{E}\{\hat{y}y\} = \\
 &= \mathbb{E}\{\hat{y}^2\} - \mathbb{E}\{\hat{y}\}^2 + y^2 - 2y \cdot \mathbb{E}\{\hat{y}\} + \mathbb{E}\{\hat{y}\}^2 = \\
 &= (\mathbb{E}\{\hat{y}^2\} - \mu^2) + (y - \mathbb{E}\{\hat{y}\})^2 = \\
 &= Var(\hat{y}) + Bias^2(\hat{y}).
 \end{aligned}$$

Además, si el parámetro a estimar es de dimensión  $D$ , el MSE es,

$$\mathbb{E}\{[\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}]^T [\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}]\} = \sum_{i=1}^D \mathbb{E}\{[\hat{y}_i - y_i]^2\} = \text{trace}(\text{Var}(\hat{\mathbf{y}})) + \|\text{Bias}(\hat{\mathbf{y}})\|^2.$$

Luego el MSE incluye tanto una medida del error aleatorio (la varianza) como del error sistemático (el sesgo). Comúnmente se emplea su raíz cuadrada (RMSE - root mean square error), ya que además permite comparar el error en las mismas unidades que el parámetro de interés.

En algunas ocasiones no disponemos de medidas reales con las que poder calcular el MSE, o de implementaciones de otros algoritmos para comparar la mejora obtenida en el MSE con nuestro sistema. En otras ocasiones, estaremos interesados en conocer cuánto podemos mejorar nuestras estimaciones sin incorporar en la Capa 1 nuevos o mejores sensores (Hendebly 2008). Para todos estos casos, existen cotas de rendimiento con las que comparar los resultados obtenidos por nuestro sistema de forma teórica.

La cota inferior de Cramér-Rao (CRLB - *Cramér-Rao lower bound*) establece el límite inferior en el error cuadrático medio para cualquier estimador insesgado de un parámetro (Scharf 1990). Esta ha sido utilizada tradicionalmente como *benchmark* para la comparación de algoritmos y la evaluación de los efectos de las aproximaciones introducidas (Ristic et al. 2004). Supone una importante herramienta de diseño ya que permite predecir el mejor rendimiento alcanzable incluso antes de construir un sistema (Reuven and Messer 1997, Dardari et al. 2009). Sin embargo, el cálculo de dicha cota no siempre resulta sencillo, especialmente para el caso del filtrado no-lineal (Ristic et al. 2004).

La CRLB viene determinada por la inversa de la FIM, esto es,<sup>7</sup>

$$\mathbb{E}\{[\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}][\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}]^T\} \succeq \mathcal{I}(\mathbf{y})^{-1}.$$

**Ejemplo 2.8.** Para el mismo problema de estimación de distancias planteado en el Ejemplo 2.6, la CRLB vendrá dada por el inverso de la FIM, esto es,

$$CRLB = \mathcal{I}(d)^{-1} = \frac{1}{M}.$$

<sup>7</sup>Sean las matrices  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{D \times D}$  y  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{D \times D}$ . Escribimos  $\mathbf{A} \succeq \mathbf{B}$  si la matriz  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$  es semidefinida positiva. De forma análoga,  $\mathbf{A} \succ \mathbf{B}$  significa que  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$  es definida positiva.

Si ahora calculamos el MLE de la distancia, tenemos que

$$\hat{d}^{ML} = \arg \max_d \ln p(\mathbf{z}|d) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M z_i.$$

Obteniendo el MSE de este estimador llegamos a,

$$MSE = \mathbb{E}\{(\hat{d}^{ML} - d)^2\} = \frac{1}{M}$$

que coincide con la CRLB. Luego para este problema, si no tenemos más información, no podemos obtener un estimador mejor que el MLE, ya que alcanza la CRLB.

En los Capítulos 4 y 5, resolvemos el problema de la obtención de la CRLB para un sistema de localización basado en filtrado y suavizado no-lineal, respectivamente. Esta CRLB servirá para comparar las implementaciones propuestas con el óptimo teórico, lo cual da una idea de la idoneidad de las soluciones, sin necesidad de compararlas con otras propuestas previamente (en caso de existir).

### 2.3.3. Información de Fisher equivalente

El apartado anterior nos mostraba cómo obtener la CRLB a partir de la FIM. En los problemas en que estimamos un vector de estado compuesto por la posición del NL y otros parámetros, como su velocidad, aceleración, orientación y/o velocidad angular, la FIM será de dimensión elevada. Para obtener la CRLB tendremos que invertir esta FIM y quedarnos únicamente con el bloque correspondiente a la posición (por ejemplo, en 2D nos quedaríamos con un bloque de dimensión  $2 \times 2$ ) (Ristic et al. 2004). El proceso de inversión para dimensiones elevadas de la FIM puede resultar problemático. Sin embargo, el Ejemplo 2.9 muestra que es posible obtener el bloque que realmente nos interesa para la CRLB sin necesidad de invertir la FIM completa (Shen and Win 2010).

**Ejemplo 2.9.** Queremos estimar la posición,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , y la velocidad,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ,

de un NL. La FIM en este caso será de dimensión  $6 \times 6$  y de la forma:

$$\mathcal{I}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{bmatrix},$$

donde  $\mathbf{y} = [\mathbf{x}, \mathbf{v}]^T$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Podemos obtener la inversa de la FIM mediante inversión por bloques como (Bernstein 2009),

$$\mathcal{I}(\mathbf{y})^{-1} = \begin{bmatrix} \Delta_{\mathbf{x}}^{-1} & -\Delta_{\mathbf{x}}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1} \\ \Delta_{\mathbf{v}}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1} & \Delta_{\mathbf{v}}^{-1} \end{bmatrix},$$

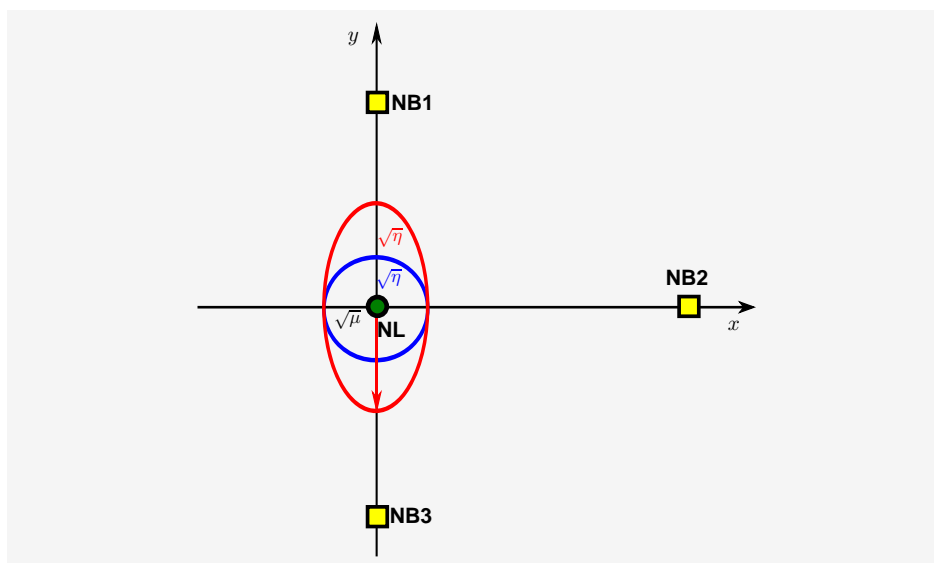
donde  $\Delta_{\mathbf{x}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^T$  y  $\Delta_{\mathbf{v}} = \mathbf{C} - \mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$  reciben el nombre de complemento de Schur del bloque  $\mathbf{C}$  y del bloque  $\mathbf{A}$ , respectivamente (Zhang 2005). Toda la información relativa a posición está contenida en el bloque superior izquierdo  $\Delta_{\mathbf{x}}^{-1}$ . A partir de este bloque se puede obtener el error mínimo alcanzable respecto a la posición (Qi 2006).

En (Shen and Win 2010) se define la inversa del bloque resultante en el Ejemplo 2.9,  $\Delta_{\mathbf{x}}$ , como la FIM equivalente (EFIM) de la posición, pues contiene toda la información necesaria para obtener la correspondiente CRLB. Esta EFIM tiene una interpretación geométrica en la localización que facilita el análisis de los sistemas de localización, el diseño de algoritmos, y el despliegue de redes orientadas a localización (Shen et al. 2010). Si  $\mu$  y  $\eta$  son los autovalores de la EFIM, y sus autovectores coinciden con la primera y segunda columna de la matriz  $\mathbf{U}_{\vartheta}$ ,

$$\mathbf{U}_{\vartheta} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix},$$

entonces la EFIM en 2D se corresponde con una elipse de información, rotada un ángulo  $\vartheta$  con respecto al sistema de coordenadas de referencia, cuyos ejes mayor y menor vienen dados por  $\sqrt{\mu}$  y  $\sqrt{\eta}$ , respectivamente.

**Ejemplo 2.10.** Un NL, con posición  $\mathbf{x} = [x, y]^T$ , obtiene 1 medida de distancia,  $z_l$ , de cada uno de los  $L$  NBs con los que se comunica. Las medidas correspondientes al  $l$ -ésimo NB, con posición  $\mathbf{x}_l$  conocida, se distribuyen como una variable aleatoria Gaussiana de media la distancia real del NL al NB, y desviación típica 1 m.



**Figura 2.7:** Recibir una medida respecto al NB3 añade información a la elipse original (en azul) en la dirección que une el NL y el nuevo NB (Shen et al. 2010).

La EFIM aportada por las medidas respecto a la posición  $\mathbf{x}$  coincidirá en este caso con la FIM, al ser la posición el único parámetro a estimar. De manera similar al Ejemplo 2.6, podemos obtener la FIM como,

$$p(\mathbf{z}|\mathbf{x}) = \prod_{l=1}^L p(z_l|\mathbf{x}),$$

por lo tanto, tenemos que,

$$\ln p(\mathbf{z}|\mathbf{x}) \propto -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^L (z_l - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_l\|)^2,$$

y la FIM en este caso es,

$$\mathcal{I}(\mathbf{x}) = -\mathbb{E}_{\mathbf{z}} \{ \nabla_{\mathbf{x}} [\nabla_{\mathbf{x}} \ln p(\mathbf{z}|\mathbf{x})]^T \} = \sum_{l=1}^L \mathbf{u}_l \mathbf{u}_l^T,$$

siendo  $\mathbf{u}_l = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_l}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_l\|}$  el vector de dirección unitario del NL al  $l$ -ésimo NB, lo que refleja el hecho de que cada medida de distancia solo provee información

sobre la posición en la dirección que une el NL con el correspondiente NB (Shen and Win 2010).

Si el NL está situado en el punto  $(0, 0)$  y recibe medidas de  $L = 2$  NBs situados en  $(0, 2)$ , y  $(3, 0)$ , la FIM será:

$$\mathcal{I}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que tiene 1 como autovalor doble correspondiente a los autovectores  $[1 \ 0]^T$  y  $[0 \ 1]^T$ , por lo tanto  $\vartheta = 0$  rad. En este caso, la elipse de información es la circunferencia azul de la Figura 2.7.

Si disponemos un tercer NB situado en el punto  $(0, -2)$  con el que llevamos a cabo una nueva medición, la FIM es,

$$\mathcal{I}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

con autovalores 1 y 2, correspondientes a los autovectores  $[1 \ 0]^T$  y  $[0 \ 1]^T$ , respectivamente, por lo que de nuevo  $\vartheta = 0$  rad. La información crecerá debida a la nueva medida en la dirección  $\mathbf{u}_3$ . Esto queda reflejado por el aumento de la superficie encerrada por la elipse en esa dirección, resultando en la línea roja de la Figura 2.7.

Si además nos interesa conocer la CRLB para poder comparar el error en nuestras estimaciones de posición, la podemos obtener como,

$$CRLB(RMSE) = \sqrt{\Delta_x^{-1} + \Delta_y^{-1}}, \quad (2.4)$$

donde  $\Delta_x$  y  $\Delta_y$  son la EFIM correspondiente a cada coordenada. Por lo tanto, en este caso  $CRLB(RMSE) = \sqrt{1,5}$  m, mientras que cuando solo disponíamos de 2 NBs la cota en el error era  $CRLB(RMSE) = \sqrt{2}$  m.

El Ejemplo 2.10 solo estima la posición del NL, pero habrá situaciones en las que nos interese estimar también la velocidad. Para estos casos, aunque la FIM es de mayores dimensiones, obtener la CRLB para el error en la estimación de la posición solo implica invertir la EFIM correspondiente a la posición. Esta EFIM viene dada por el complemento de Schur del bloque de la FIM correspondiente



a velocidad, de manera que evitamos tener que invertir la FIM completa.

Utilizaremos la EFIM en el Capítulo 3 para conocer cómo varía en el tiempo la información disponible en función de la calidad de las medidas relativas a posición o distancias, y de si realizamos filtrado o suavizado.



## 2.A. Anexo: autocalibración mediante ML para localización basada en TOA

En todos los sistemas de posicionamiento que presentamos en esta Tesis Doctoral, incluiremos medidas acerca del TOA de las señales inalámbricas. En un medio homogéneo (como el aire), la relación entre la distancia entre dos nodos inalámbricos,  $d$ , y las medidas de TOA,  $z$ , definido como el tiempo de ida y vuelta (RTT), viene dada por (Prieto et al. 2012b)

$$z = \alpha_\tau + \beta_\tau d + n, \quad (2.5)$$

donde  $\alpha_\tau$  y  $\beta_\tau$  son constantes obtenidas previamente para cada entorno; y  $n$  es un término de error, modelado habitualmente como una variable aleatoria Gaussiana de media cero en caso de propagación LOS (Bahillo et al. 2010, Prieto et al. 2009c), mientras que bajo circunstancias NLOS, este error puede seguir otro tipo de distribuciones positivas (Qi 2006, 2003, Mazuelas et al. 2009b, Prieto et al. 2009b).

Estos sistemas, basados en estimar distancias a partir de medidas de TOA, no requieren la ardua campaña *off-line* de calibración para obtener una huella del entorno, como sí necesitan los sistemas basados en *fingerprinting*. Sin embargo, deben estimar el valor de  $\alpha_\tau$  y  $\beta_\tau$  en (2.5), por ejemplo, a partir de una regresión lineal de medidas previas obtenidas en condiciones de LOS, lo que al final supone una fase de calibración *off-line* (Bahillo et al. 2010, Prieto et al. 2009c). Aunque existen otras técnicas que estiman estos parámetros a partir del conocimiento del tiempo de procesamiento, esto no es posible con dispositivos de bajo coste (Golden and Bateman 2007). En los sistemas de localización inalámbrica que estiman distancias a partir del TOA entre el NL y ciertos NBs, estos NBs habitualmente también pueden medir el TOA entre ellos. A continuación mostramos cómo, mediante ML, esta característica puede ser explotada para obtener los parámetros  $\alpha_\tau$  y  $\beta_\tau$ , sin necesidad de etapa previa alguna ni de emplear una topología diferente a la utilizada para llevar a cabo el proceso de localización (Prieto et al. 2012a).<sup>8</sup>

---

<sup>8</sup>Para el ejemplo de la Sección 2.A consideramos NBs homogéneos en la red inalámbrica, dando lugar a únicamente dos parámetros desconocidos  $\alpha_\tau$  y  $\beta_\tau$ . Sin embargo, podríamos generalizar el problema de manera directa para una red con NBs de  $T$  tipos diferentes, dando lugar a  $2T$  parámetros desconocidos.

### 2.A.1. Autocalibración de la relación entre TOA y distancia

En un escenario en 2D, donde un usuario móvil se comunica con  $L$  NBs con posiciones conocidas, suponemos que estos NBs son capaces de realizar mediciones del TOA entre ellos. En total, disponemos de  $N$  conjuntos de  $M_j$  medidas, para  $j = 1, \dots, N$ , cada uno de ellos correspondiente a la distancia entre cualquier par de NBs. Puesto que todas estas medidas pueden asumirse i.i.d. dadas las distancias reales, podemos obtener la función de verosimilitud de los parámetros  $\alpha_\tau$  y  $\beta_\tau$ ,  $\mathcal{L}(\alpha_\tau, \beta_\tau | \mathbf{z}, \mathbf{d})$ , a partir del conocimiento de las distancias reales entre los pares de NBs,  $\{d_j, j = 1, \dots, N\}$ , como sigue,

$$\mathcal{L}(\alpha_\tau, \beta_\tau | \mathbf{z}, \mathbf{d}) = \prod_{j=1}^N \left( \prod_{i=1}^{M_j} p(z_{i,j} | d_j, \alpha_\tau, \beta_\tau) \right) = \prod_{j=1}^N \left( \prod_{i=1}^{M_j} p(z_{i,j} | \alpha_\tau + \beta_\tau d_j) \right) \quad (2.6)$$

siendo  $p(z_{i,j} | d_j, \alpha_\tau, \beta_\tau)$  la función de verosimilitud de la  $j$ -ésima distancia,  $d_j$ , obtenida de la  $i$ -ésima medida correspondiente a esa distancia,  $z_{i,j}$ . Entonces,

$$\ln(\mathcal{L}(\alpha_\tau, \beta_\tau | \mathbf{z}, \mathbf{d})) = \sum_{j=1}^N \left( \sum_{i=1}^{M_j} \ln p(z_{i,j} | \alpha_\tau + \beta_\tau d_j) \right), \quad (2.7)$$

pudiendo obtener los valores de  $\alpha_\tau$  y  $\beta_\tau$  que maximizan (2.7) a partir del sistema de ecuaciones formado por las derivadas parciales,

$$\sum_{j=1}^N \left( \sum_{i=1}^{M_j} \frac{p'(z_{i,j} | \alpha_\tau + \beta_\tau d_j)}{p(z_{i,j} | \alpha_\tau + \beta_\tau d_j)} \right) = 0, \quad (2.8)$$

y

$$\sum_{j=1}^N \left( \sum_{i=1}^{M_j} d_j \frac{p'(z_{i,j} | \alpha_\tau + \beta_\tau d_j)}{p(z_{i,j} | \alpha_\tau + \beta_\tau d_j)} \right) = 0. \quad (2.9)$$

La expresión concreta para estos MLEs variará en función de la distribución que elijamos para el error en (2.5). En los siguientes apartados mostramos una expresión aproximada para el MLE para el caso en que el error aleatorio se distribuye como una variable aleatoria Gaussiana y de media cero, distinguiendo dos casos para el sesgo (debido al NLOS): cuando este se distribuye como una variable aleatoria Gaussiana positiva, o cuando lo modelamos co-

mo una variable Uniforme positiva.<sup>9</sup> Comprobaremos también la bondad de estos estimadores mediante simulación y mediante experimentación en una red IEEE 802.11b/g desplegada en un entorno complejo de interior.

## 2.A.2. Caso 1: MLE con sesgo NLOS Gaussiano

Consideremos el caso en que el término de error en (2.5) se distribuye como la suma de una variable aleatoria Gaussiana de media cero,  $\mathcal{N}(0, \sigma_1)$ , y de otra de media distinta de cero,  $\mathcal{N}(\mu, \sigma_2)$ , correspondientes al error en LOS y NLOS, respectivamente, i.e.,  $n \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$ . Dada la distancia  $d_j$ , sabemos que la  $i$ -ésima medida de TOA,  $z_{i,j}$ , se distribuye como,

$$p(z_{i,j}|d_j, \alpha_\tau, \beta_\tau) = \int p(z_{i,j}, b|d_j, \alpha_\tau, \beta_\tau) db = \int p(z_{i,j}|d_j, \alpha_\tau, \beta_\tau, b)p(b) db,$$

siendo  $b$  el sesgo en el modelo. Por lo que la distribución de la  $i$ -ésima medida de TOA,  $z_{i,j}$ , dada la correspondiente  $j$ -ésima distancia,  $d_j$ , cuando modelamos el sesgo como una Gaussiana  $\mathcal{N}(\mu, \sigma_2)$ , viene dada por,

$$p(z_{i,j}|d_j, \alpha_\tau, \beta_\tau) = \varphi_{(\alpha_\tau + \beta_\tau d_j + \mu, \sigma)}(z_{i,j}), \quad (2.10)$$

donde  $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ , y  $\varphi_{(\mu, \sigma)}(\cdot)$  es la pdf de una variable aleatoria Gaussiana  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ . Entonces, a partir de (2.8), (2.9) y (2.10), podemos obtener una solución aproximada para  $\alpha_\tau$  y  $\beta_\tau$  como,

$$\hat{\alpha}_\tau = \frac{1}{\sum_{j=1}^N M_j} \left( \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} z_{i,j} - \hat{\beta}_\tau \cdot \sum_{j=1}^N M_j d_j \right) - \mu,$$

y,

$$\hat{\beta}_\tau = \frac{\frac{1}{\sum_{j=1}^N M_j} \left( \sum_{j=1}^N M_j d_j \right) \left( \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} z_{i,j} \right) - \sum_{j=1}^N \left( d_j \sum_{i=1}^{M_j} z_{i,j} \right)}{\frac{1}{\sum_{j=1}^N M_j} \left( \sum_{j=1}^N M_j d_j \right)^2 - \sum_{j=1}^N M_j d_j^2}.$$

<sup>9</sup>Modelamos el sesgo NLOS como una variable aleatoria Gaussiana de media positiva, y como una variable uniforme positiva, respectivamente, en concordancia con los modelos utilizados en otros trabajos (Mazuelas et al. 2009b, Prieto et al. 2012b), sin embargo, podríamos seguir un procedimiento paralelo eligiendo cualquier otra distribución.

En el caso específico donde tenemos el mismo número de medidas relativas a cada distancia (i.e.,  $M_1 = M_2 = \dots = M_N = M$ ), obtenemos

$$\hat{\alpha}_\tau = \overline{(\overline{z_M})_N} - \hat{\beta}_\tau \cdot \overline{d_N} - \mu,$$

y,

$$\hat{\beta}_\tau = \frac{\overline{d_N} \sum_{j=1}^N (\overline{z_M})_j - \sum_{j=1}^N (\overline{z_M})_j \cdot d_j}{\overline{d_N} \sum_{j=1}^N d_j - \sum_{j=1}^N d_j^2},$$

donde  $\overline{z_M}$  denota la media muestral de  $\{z_i, i = 1, \dots, M\}$ .

### 2.A.3. Caso 2: MLE con sesgo NLOS Uniforme

Podemos seguir el mismo desarrollo que en el apartado anterior, pero para el caso en que modelamos el error  $n$  como la suma de un error Gaussiano de media cero,  $\mathcal{N}(0, \sigma_1)$ , y una variable positiva uniforme,  $\mathcal{U}(0, \gamma)$ , debida al error en propagación NLOS.

Entonces, dada la  $j$ -ésima distancia  $d_j$ , y un sesgo  $b$ , podemos expresar la distribución de la medida  $z_{i,j}$  como,

$$p(z_{i,j} | d_j, \alpha_\tau, \beta_\tau, b) = \varphi_{(\alpha_\tau + \beta_\tau d_j + b, \sigma)}(z_{i,j}),$$

donde  $b \rightsquigarrow \mathcal{U}(0, \gamma)$ . De esta manera, tenemos que,

$$p(z_{i,j} | d_j, \alpha_\tau, \beta_\tau) = \int p(z_{i,j} | d_j, \alpha_\tau, \beta_\tau, b) p(b) db = \Phi_{(\alpha_\tau + \beta_\tau d_j + \gamma, \sigma)}(z_{i,j}) - \Phi_{(\alpha_\tau + \beta_\tau d_j, \sigma)}(z_{i,j}), \quad (2.11)$$

siendo  $\Phi_{(\mu, \sigma)}(\cdot)$  la distribución de probabilidad de una variable aleatoria Gaussiana  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ .

Finalmente, de (2.8), (2.9) y (2.11), podemos aproximar  $\alpha_\tau$  y  $\beta_\tau$  como,

$$\hat{\alpha}_\tau = \frac{1}{\sum_{j=1}^N M_j} \left( \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} z_{i,j} - \hat{\beta}_\tau \cdot \sum_{j=1}^N M_j d_j \right) - \gamma/2,$$

y,

$$\hat{\beta}_\tau = \frac{1}{\sum_{j=1}^N M_j} \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} z_{i,j} - \frac{1}{\sum_{l=1}^N M_l} \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{M_l} z_{k,l}}{d_j - \frac{1}{\sum_{l=1}^N M_l} \sum_{l=1}^N M_l d_l}.$$

Si cada NB en la red realiza el mismo número de medidas de TOA,  $M$ , a cada uno de los NBs restantes, estos estimadores se reducen a,

$$\hat{\alpha}_\tau = \overline{(\overline{z_M})_N} - \hat{\beta}_\tau \cdot \overline{d_N} - \gamma/2,$$

y

$$\hat{\beta}_\tau = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{(\overline{z_M})_j - \overline{(\overline{z_M})_N}}{d_j - \overline{d_N}},$$

destacando la similitud de  $\hat{\alpha}_\tau$  con el obtenido en la Sección 2.A.2.

## 2.A.4. Escenario de simulación y experimentación

Consideraremos un escenario con  $L = 4$  NBs situados en un edificio de oficinas abarrotado con objetos y personas moviéndose libremente en la zona. Asumimos que cada NB recoge una medida ( $M_1 = M_2 = \dots = M_N = 1$ ) de cada uno del resto de NBs, por lo tanto, tenemos  $N = L \cdot (L - 1)$  conjuntos de una medida. Cada medida la obtenemos como la media muestral de 100 medidas de TOA para garantizar que se cumple el modelo dado por (2.5) (es decir, para esas 100 medidas consideramos un mismo sesgo NLOS) (Bahillo et al. 2010, Prieto et al. 2012b). Entonces, en una primera etapa de autocalibración, estimamos los exponentes  $\alpha_\tau$  y  $\beta_\tau$  tras obtener las  $N$  medidas promediadas (simuladas o empíricas). Distinguimos dos casos diferentes en función de si el sesgo NLOS es Gaussiano o Uniforme:

- *Sesgo Gaussiano*: para los resultados de simulación, generamos el sesgo como una variable Gaussiana  $\mathcal{N}(\gamma/2, \gamma/4)$ . Para obtener  $\alpha_\tau$  y  $\beta_\tau$  utilizamos las expresiones de la Sección 2.A.2.
- *Sesgo Uniforme*: de manera equivalente, consideramos como error sistemático una Uniforme  $\mathcal{U}(0, \gamma)$ . Para estimar los parámetros del modelo empleamos las expresiones de la Sección 2.A.3.

Tras obtener los parámetros del modelo (2.5),  $\alpha_\tau$  y  $\beta_\tau$ , los utilizaremos para estimar la posición de un NL que mide el TOA a los 4 NBs anteriores. En esta segunda etapa de localización, implementaremos un sistema sencillo basado en ML, a partir de las expresiones del Ejemplo 2.3. Con las estimaciones de posición resultantes, cuantificaremos el error introducido al emplear los parámetros obtenidos en la etapa de autocalibración. Aunque en el Capítulo 4 veremos un sistema más elaborado de estimación dinámica que obtendría mejores estimaciones de la posición, este no es el objetivo de este apartado.

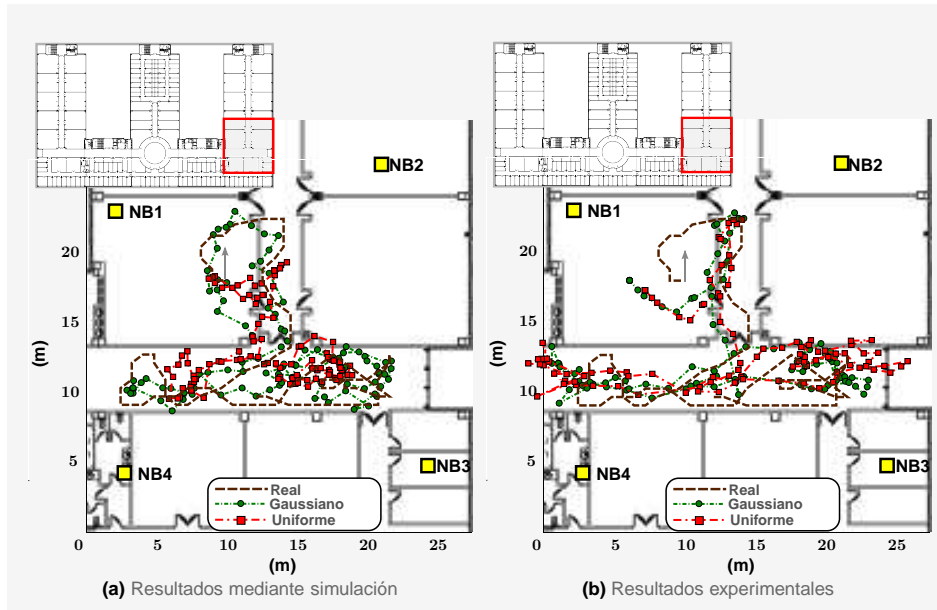
Por lo tanto, después de obtener  $\alpha_\tau$  y  $\beta_\tau$ , estimamos la posición del NL a lo largo de un recorrido de aproximadamente 85 metros, que cubre en 100 segundos. Para la fase de localización, de nuevo el sistema recibe una medida promediada (a partir de 100 medidas de TOA) procedente de cada NB, con una frecuencia de 1 Hz. Ya que podemos asumir todas las medidas i.i.d. dadas las distancias reales, la función de verosimilitud de la posición del NL,  $\mathbf{x}$ , en cada instante de tiempo, viene dada por,

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}|\mathbf{z}) = \prod_{l=1}^L p(z_l|\mathbf{x}, \alpha_\tau, \beta_\tau), \quad (2.12)$$

siendo  $p(z_l|\mathbf{x}, \alpha_\tau, \beta_\tau)$  la función de verosimilitud de la posición del NL,  $\mathbf{x}$ , a partir de la medida promediada,  $z_l$ , correspondiente al  $l$ -ésimo NB. Por lo tanto, las estimaciones de posición se obtendrán como el valor de ML de (2.12), empleando para  $p(z_l|\mathbf{x}, \alpha_\tau, \beta_\tau)$  los mismos modelos que en las Secciones 2.A.2 y 2.A.3.

En base a trabajos previos, elegimos como desviación típica para el error en LOS  $\sigma = 0,5$  ciclos de reloj, y para el sesgo NLOS  $\gamma = 2$  ciclos de reloj, siendo 44 MHz la frecuencia de reloj del adaptador WLAN (Bahillo et al. 2010). Para obtener los resultados de simulación, las medidas se generan de acuerdo a los modelos de las Secciones 2.A.2 y 2.A.3, mientras que para los resultados empíricos, se recogieron medidas de TOA en una WLAN desplegada en un entorno de interior real (Bahillo et al. 2010). En este último caso, el NL es un ordenador portátil transportado por una persona caminando. El ordenador portátil está equipado con un adaptador IEEE 802.11b que se comunica con 4 puntos de acceso IEEE 802.11b/g que actúan como NBs. Para medir el TOA, el NL envía tramas *request-to-send* (RTS) periódicamente a cada NB, y guarda el número de ciclos de reloj transcurridos hasta que recibe la correspondiente respuesta *clear-to-send* (CTS) del NB (para lo que utiliza un contador de ciclos de reloj)





**Figura 2.8:** Los parámetros estimados por medio de las expresiones derivadas en la Sección 2.A.2 para un sesgo Gaussiano mejoran los resultados obtenidos para un sesgo Uniforme en la Sección 2.A.3

(Bahillo et al. 2010).<sup>10</sup> La Figura 2.8 muestra las posiciones de los 4 NBs así como el camino aleatorio seguido por el NL.

### 2.A.5. Resultados mediante simulación

Para la evaluación mediante simulación, generamos las medidas de acuerdo a los modelos con sesgo Gaussiano o Uniforme en cada caso, tanto para las medidas entre NBs de la etapa de autocalibración, como para las medidas entre el NL y los NBs de la etapa de localización.

En primer lugar, estimamos los parámetros  $\alpha_\tau$  y  $\beta_\tau$  a partir de las  $N$  medidas promediadas generadas entre los NBs. La Tabla 2.1 muestra los parámetros estimados junto con los elegidos para simulación (teóricos). Como se refleja, ob-

<sup>10</sup>RTS/CTS es un mecanismo opcional que permite reservar un medio compartido en las redes IEEE 802.11 (IEEE 802.11 2007). Presenta la ventaja de que la respuesta CTS se produce siempre tras esperar el intervalo más corto posible en esta red (SIFS - *short inter-frame space*), lo que evita introducir en la medición mayores fuentes de error. En caso de que la red no implemente este mecanismo, podemos medir el tiempo transcurrido desde que se envía una trama de datos de longitud constante hasta que se recibe el correspondiente asentimiento por parte del NB, ya que también se produce tras esperar un tiempo SIFS (Gast 2002).

**Tabla 2.1:** Parámetros estimados mediante simulación para la relación entre medidas de TOA y distancia. Los valores para  $\alpha$  están expresados en ciclos de reloj, mientras que  $\beta$  representa ciclos de reloj por metro.

	$\alpha_\tau$	$\beta_\tau$
Valores teóricos	6991.97	0.389268
Sesgo Gaussiano	6991.57	0.357177
Sesgo Uniforme	6995.86	0.163598

**Tabla 2.2:** Cuartiles del error en la estimación de la posición, RMSE y desviación típica muestral ( $\sigma_\varepsilon$ ), obtenidos mediante simulación para los diferentes sesgos. Todos los valores están en metros.

Parámetros teóricos	Cuartiles	RMSE ( $\sigma_\varepsilon$ )
Sesgo Gaussiano	1.59-2.51-3.33	2.88 (1.31)
Sesgo Uniforme	1.98-2.79-4.09	3.48 (1.58)
Parámetros estimados	Cuartiles	RMSE ( $\sigma_\varepsilon$ )
Sesgo Gaussiano	1.62-2.19-3.27	2.80 (1.29)
Sesgo Uniforme	1.97-3.00-3.94	3.36 (1.43)

tenemos los mejores resultados utilizando un sesgo Gaussiano, sin embargo, diferentes autores han puesto de manifiesto la no-Gaussianidad del error NLOS (Qi 2006, 2003, Mazuelas et al. 2009b, Prieto et al. 2009b), por lo tanto, los resultados empíricos podrían diferir de los mostrados en estos la Tabla 2.1 (ver siguiente apartado).

La Figura 2.8a dibuja, junto con el camino seguido por el NL, las posiciones estimadas para ambos sesgos, Gaussiano y Uniforme. Para completar el análisis, la Tabla 2.2 resume el error obtenido en la estimación de la posición con los parámetros de la Tabla 2.1, teóricos y estimados. La Tabla 2.2 refleja tanto los cuartiles de este error, como el RMSE y su desviación típica muestral (ver Sección 2.3.2). Por conveniencia para el lector, la Figura 2.8 dibuja los resultados de localización después de aplicar un KF sencillo a las posiciones estimadas. Sin embargo, los errores en la Tabla 2.2 corresponden a las posiciones estimadas sin filtrar, como ocurrirá también en la siguiente sección con los valores de la Tabla 2.4.

De la Figura 2.8a y la Tabla 2.2 podemos señalar que los resultados de localización alcanzados con los parámetros estimados son similares a los obtenidos mediante sus valores teóricos, siendo notablemente menor el error cuando el sesgo es Gaussiano.

**Tabla 2.3:** Parámetros estimados empíricamente para la relación entre medidas de TOA y distancia. Los valores para  $\alpha$  están expresados en ciclos de reloj, mientras que  $\beta$  representa ciclos de reloj por metro.

	$\alpha$	$\beta$
Valores teóricos	6991.97	0.389268
Sesgo Gaussiano	6989.68	0.466185
Sesgo Uniforme	6985.76	0.604847

**Tabla 2.4:** Cuartiles del error en la estimación de la posición, RMSE y desviación típica muestral ( $\sigma_\varepsilon$ ), obtenidos experimentalmente para los diferentes sesgos. Todos los valores están en metros.

Parámetros mediante regresión	Cuartiles	RMSE ( $\sigma_\varepsilon$ )
Sesgo Gaussiano	2.11-3.09-4.31	3.77 (1.77)
Sesgo Uniforme	2.34-3.05-4.35	3.81 (1.75)
Parámetros estimados	Cuartiles	RMSE ( $\sigma_\varepsilon$ )
Sesgo Gaussiano	1.62-2.74-3.74	3.23 (1.54)
Sesgo Uniforme	1.65-3.01-4.31	3.87 (2.03)

## 2.A.6. Resultados experimentales

Siguiendo un procedimiento paralelo, obtenemos valores empíricos para los parámetros  $\alpha_\tau$  y  $\beta_\tau$  así como para las posiciones del NL. Para este apartado, realizamos medidas de TOA en las mismas 100 posiciones que las del camino aleatorio simulado. La Tabla 2.3 muestra los valores obtenidos en trabajos anteriores mediante una regresión lineal de medidas de TOA en LOS tomadas a diferentes distancias (referidos como teóricos) (Bahillo et al. 2010, Prieto et al. 2009c). Junto a estos valores, la Tabla 2.3 muestra también los parámetros estimados por medio de las expresiones derivadas en los apartados anteriores. De nuevo, obtenemos los mejores resultados para el caso de sesgo NLOS Gaussiano.

En lo que se refiere a los resultados de localización, la Figura 2.8b representa las posiciones estimadas obtenidas mediante medidas de TOA (experimentales), para los dos tipos de sesgo, Gaussiano y Uniforme. Al igual que en el caso anterior, la Tabla 2.4 muestra los cuartiles del error en esta estimación junto con el RMSE y su desviación típica muestral.

De la Figura 2.8b y la Tabla 2.4 podemos concluir que los resultados de localización con el método propuesto son muy cercanos a los obtenidos mediante los parámetros calculados en una etapa previa de calibración basada en una

regresión lineal (Bahillo et al. 2010). Cabe destacar también que los parámetros  $\alpha_\tau$  y  $\beta_\tau$  en el caso Gaussiano mejoran los resultados alcanzados por los parámetros obtenidos mediante regresión.

En definitiva, los resultados tanto del escenario simulado como del experimental ponen del manifiesto que el método propuesto de ML es una valiosa opción para autocalibración de la relación entre TOA y distancia, siendo posible eliminar la ardua tarea previa de calibración.

## Técnicas de Estimación Recursiva Bayesiana

### Contenido

---

3.1. Cadena de Markov oculta . . . . .	58
3.2. Estimación Recursiva Bayesiana . . . . .	62
3.3. Cota de Cramér-Rao <i>a posteriori</i> . . . . .	73
3.A. Anexos . . . . .	83

---

Continuando con el ejemplo de la EPA del Capítulo anterior, el desempleo, una vez desestacionalizado, presenta unas propiedades dinámicas que pueden ser incluidas en un proceso recursivo para estimar si el número de personas sin trabajo aumentará o disminuirá en el próximo mes. En los procesos de estimación recursiva, el conocimiento inferido acerca del parámetro se actualiza según se recogen nuevas observaciones. Esto resulta adecuado en problemas en los que el parámetro a estimar tiene propiedades dinámicas que le hacen cambiar en el tiempo (e.g., una tendencia creciente del desempleo en época de recesión). En los problemas de localización, la posición del NL posee estas propiedades dinámicas, ya que no puede cambiar de manera abrupta en un periodo corto de tiempo.

Los problemas anteriores se resuelven habitualmente bajo el paradigma de la estimación Bayesiana, donde tanto el parámetro a estimar como las observaciones son variables aleatorias, frente al punto de vista de estimación Fisheriana, donde el parámetro era un valor desconocido pero determinista. El punto de vista Bayesiano da como resultado un marco común de resolución de los problemas de estimación, donde lo que se infiere es una función de densidad del parámetro condicionada en la observación ([Bar-Shalom et al. 2001](#)).

Este Capítulo hace un repaso a la teoría de estimación recursiva desde el punto de vista Bayesiano, y sienta las bases teóricas sobre las que recaen los dos Capítulos siguientes. Para ello, analizamos el carácter dinámico del parámetro a estimar en un sistema de localización y su relación con las observaciones; estudiamos los métodos habituales de estimación Bayesiana; y obtenemos la CRLB bajo este enfoque. A partir de lo anterior, en este Capítulo presentamos las siguientes contribuciones:

- modelamos el problema de posicionamiento del NL como una cadena de Markov cuya solución óptima se obtiene bajo el marco Bayesiano;
- encontramos el enfoque de estimación Bayesiana que mejor se adapta a los sistemas de posicionamiento que desarrollamos en esta Tesis Doctoral;
- obtenemos qué condición deben cumplir las medidas relacionadas con la posición del NL para que el error mínimo alcanzable no aumente con el tiempo;
- particularizamos el resultado anterior para un sistema de localización inalámbrica que realiza mediciones de la distancia del NL a ciertos NBs;
- demostramos que el error mínimo alcanzable empleando medidas de instantes posteriores al de estimación (suavizado) nunca es mayor que sin utilizarlas.

El Capítulo 3 está organizado como sigue: la Sección 3.1 describe los procesos de Markov ocultos, utilizados para establecer la relación entre las variables involucradas en el posicionamiento; la Sección 3.2 resuelve el problema de estimar posiciones desde el punto de vista Bayesiano, y presenta los algoritmos habituales utilizados para tal fin; finalmente, la Sección 3.3 obtiene los mencionados resultados acerca del error mínimo alcanzable, los cuales utilizaremos para diseñar sistemas de posicionamiento.

### 3.1. Cadena de Markov oculta

Para extraer información acerca del estado de un sistema a partir de observaciones, necesitamos tener un modelo que describa la relación estados/obser-

vaciones. Dado el comportamiento aleatorio de las observaciones, dicho modelo ha de ser probabilístico, es decir, ha de describir cómo de probables son diferentes eventos o estados del sistema (Robert 2007). En esta Sección, estudiaremos cómo modelar en general la distribución conjunta de una secuencia temporal estados/observaciones. Como veremos, este modelado permite inferir estados a partir de observaciones de forma eficiente (Barber and Cemgil 2010).

En lo que sigue, consideraremos que disponemos de observaciones o medidas en instantes de tiempo discretos  $t_k, k \in \mathbb{N}$ , por lo que estaremos interesados en estimar la secuencia de estados  $\{\mathbf{y}_k\}$  a partir de una secuencia de medidas  $\{\mathbf{z}_k\}$ . Para ello utilizaremos un modelo espacio-estado. En este, el vector de estado,  $\mathbf{y}_k$ , contiene toda la información sobre el sistema en el instante de tiempo  $t_k$  que es necesaria para determinar su comportamiento futuro dada una entrada al sistema (Doucet et al. 2001).<sup>1</sup> En los problemas de localización, el vector de estado puede contener, por ejemplo, la distancia entre el NL y un NB, las coordenadas de la posición del NL, su orientación, o derivadas de las anteriores.

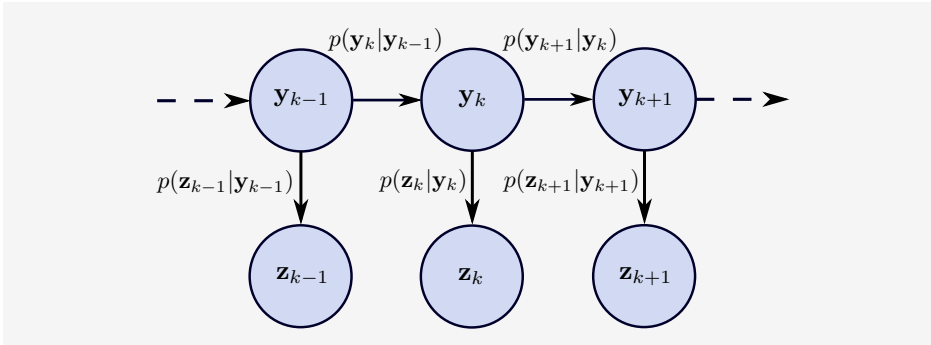
Este modelo espacio-estado puede ser representado por una cadena de Markov oculta (HMM - *hidden Markov model*), como muestra la Figura 3.1. Un HMM es un proceso discreto bivariado  $\{\mathbf{y}_k, \mathbf{z}_k\}$ , donde  $\{\mathbf{y}_k\}$  es una cadena de Markov<sup>2</sup> y, condicionada en  $\{\mathbf{y}_k\}$ ,  $\{\mathbf{z}_k\}$  es una secuencia de variables aleatorias independientes. De este modo, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , la distribución condicionada de  $\mathbf{z}_k$  solo depende de  $\mathbf{y}_k$  (Cappé et al. 2005).

**Ejemplo 3.1.** *En un sistema de posicionamiento, estamos interesados en estimar la secuencia de posiciones del NL  $\{\mathbf{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  a partir de la secuencia de medidas  $\{\mathbf{z}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . La posición del NL no puede cambiar de manera abrupta en el tiempo, es decir, la secuencia  $\{\mathbf{x}_k\}$  presenta una alta correlación en el tiempo. Este hecho nos permite modelar la evolución en el tiempo de la posición como una función analítica (Bar-Shalom et al. 2001).*

*Por ejemplo, siendo  $x_k$  una componente de la posición o de la orientación, o la distancia con respecto a un NB, podemos aproximar su valor en el instante de tiempo  $t_{k+1}$  utilizando el desarrollo en serie de Taylor de orden  $n$*

<sup>1</sup>El término *espacio-estado* hace referencia al espacio cuyos ejes son las variables de estado, donde el estado del sistema se puede representar como un vector dentro de ese espacio.

<sup>2</sup>Un proceso de Markov es aquel en el que “*el futuro es independiente del pasado si el presente es conocido*” (Bar-Shalom et al. 2001), lo que equivale a decir que  $p(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{y}_{1:k}) = p(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{y}_k)$ , donde  $\mathbf{y}_{1:k} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k]$ .



**Figura 3.1:** Evolución del estado y las medidas como una cadena de Markov oculta. La relación entre  $y_k$  e  $y_{k-1}$ , y la relación entre  $z_k$  e  $y_k$  son los únicos dos tipos de dependencia.

en  $t_k$ ,

$$x_{k+1} \approx x_k + x'_k \Delta t + x''_k \frac{\Delta t^2}{2} + \dots + x_k^{(n)} \frac{\Delta t^n}{n!}, \quad (3.1)$$

donde  $\Delta t = (t_{k+1} - t_k) \in \mathbb{R}$  es el intervalo de muestreo, y  $f^{(n)}(\cdot)$  es la  $n$ -ésima derivada de la función real  $f$  evaluada en su argumento. El error en la aproximación anterior viene dado por

$$x^{(n+1)}(\xi_0) \frac{\Delta t^{n+1}}{(n+1)!},$$

y  $\xi_0$  es un punto en el intervalo  $[t_k, t_{k+1}]$ . Por lo tanto, el error en la aproximación (3.1) depende directamente del intervalo de muestreo  $\Delta t$ , de la suavidad de  $x(t)$ , representada por la derivada  $(n+1)$ -ésima, y del orden en la aproximación.

La correlación en el tiempo expresada en (3.1) implica que la secuencia  $\{x_k\}$  no es un proceso de Markov, es decir, la distancia o posición actuales no dependen únicamente de su valor en el instante de tiempo anterior. Sin embargo, siendo  $y_k$  el vector de estado formado por la distancia o la posición, y sus  $n$  derivadas, la secuencia  $\{y_k\}$  sí puede ser considerada una cadena de Markov. Además, dado el vector de estado actual,  $y_k$ , podemos suponer que el vector de medidas recibidas en el instante de tiempo  $t_k$ ,  $z_k$ , es independiente del resto de variables aleatorias. Es decir, dado el vector de estado actual,  $z_k$  es independiente de todos los vectores de estado y de medidas previos y futuros (Bar-Shalom et al. 2001).

Por lo tanto, podemos construir un HMM en el que la secuencia de vec-



tores de estado,  $\{\mathbf{y}_k\}$ , forma una cadena de Markov no observable, mientras que la secuencia de vectores de medidas,  $\{\mathbf{z}_k\}$ , sí puede ser observada. Esta secuencia de medidas está ligada a la cadena de Markov en el sentido de que  $\mathbf{y}_k$  gobierna la distribución de  $\mathbf{z}_k$  (ver Figura 3.1).

Las asunciones de independencia condicionada reflejadas en la Figura 3.1 establecen únicamente dos tipos de dependencia entre las variables aleatorias (Rabiner and Juang 1986):

- *modelo dinámico*: establece la relación entre el vector de estado en el tiempo  $t_k$  y el vector de estado en el tiempo  $t_{k-1}$ , es decir,  $p(\mathbf{y}_k|\mathbf{y}_{k-1})$ , denominado con frecuencia *densidad de transición*;
- *modelo de observación*: establece la relación entre las medidas y el vector de estado en cada instante de tiempo, es decir,  $p(\mathbf{z}_k|\mathbf{y}_k)$ , referido habitualmente como *verosimilitud*.

De lo anterior, se deduce que la distribución conjunta de todas las variables aleatorias involucradas en el proceso (el modelo probabilístico) viene dada por,<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}_{1:k}, \mathbf{z}_{1:k}) &= p(\mathbf{y}_1)p(\mathbf{z}_1|\mathbf{y}_1) \prod_{i=2}^k p(\mathbf{y}_i|\mathbf{y}_{i-1})p(\mathbf{z}_i|\mathbf{y}_i) \\ &= p(\mathbf{y}_k|\mathbf{y}_{k-1})p(\mathbf{z}_k|\mathbf{y}_k)p(\mathbf{y}_{1:k-1}, \mathbf{z}_{1:k-1}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

En los sistemas de localización tratados en los Capítulos 4 y 5, describiremos los modelos dinámico y de observación para entornos de propagación complejos, mostrando que podemos asumir el modelo dinámico,  $p(\mathbf{y}_k|\mathbf{y}_{k-1})$ , lineal y Gaussiano con gran generalidad. Esta misma asunción para el modelo de observación,  $p(\mathbf{z}_k|\mathbf{y}_k)$ , resulta imprecisa en entornos complejos.

**Ejemplo 3.2.** Consideremos un sistema de una dimensión en el que el vector de estado,  $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^2$ , está formado por la posición del NL,  $x_k \in \mathbb{R}$ , y la velocidad,  $v_k \in \mathbb{R}$ , ( $\mathbf{y}_k = [x_k, v_k]^T$ ), y en el que realizamos una medición de la distancia entre el NL y un NB,  $z_k$ , en cada instante de tiempo,  $t_k$ . A partir

<sup>3</sup>Este modelo es una generalización del enfoque máximo-verosímil estudiado en el Capítulo 2, en el que realizábamos la estimación para un único instante temporal,  $t_k$ , sin considerar estimaciones previas o futuras. Para este enfoque, de la expresión (3.2), tenemos que  $p(\mathbf{y}_k, \mathbf{z}_k) \propto p(\mathbf{z}_k|\mathbf{y}_k)$ .

de (3.1) podemos expresar el modelo dinámico como un camino aleatorio o proceso discreto de Wiener de velocidad,<sup>4</sup>

$$\mathbf{y}_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}_k + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \Delta t^2 a(\xi_0) \\ \Delta t a(\xi_1) \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

donde  $a \in \mathbb{R}$  es la aceleración del NL y  $\xi_0, \xi_1 \in \mathbb{R}$  son diferentes valores en el intervalo  $[t_k, t_{k+1}]$ . El error viene determinado por la aceleración, siendo una asunción habitual considerarlo ruido blanco Gaussiano. Es decir, este modelo dinámico es lineal y Gaussiano.

Por su parte, el modelo de observación será,

$$z_k^x = \|x_k - x_l\| + n_k^x, \quad (3.4)$$

siendo  $x_l \in \mathbb{R}$  la posición del NB (fija), y  $n_k^x \in \mathbb{R}$  el error en las medidas que, como veremos, no siempre podremos considerarlo ruido blanco Gaussiano (Qi 2006). Por lo tanto, el modelo de observación es no-lineal y posiblemente no-Gaussiano.

Como mostraremos en la siguiente Sección, el modelado como un HMM expresado en la factorización (3.2) hace posible inferir la distribución *a posteriori*,  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{z}_{1:k})$ , a través de un proceso recursivo. En el caso concreto en el que los modelos dinámicos y de observación en el HMM son lineales y Gaussianos, la distribución *a posteriori* es también Gaussiana, y podemos realizar la inferencia Bayesiana del vector de estado de manera óptima a través del conocido KF (Ristic et al. 2004).

## 3.2. Estimación Recursiva Bayesiana

En el contexto mencionado en la Sección anterior, la tarea consiste en determinar la función de distribución *a posteriori* del estado dada la observación, esto es, dadas las medidas  $\mathbf{z}_{1:k}$ . Esto lo debemos conseguir a partir del conocimiento de la función *a priori*,  $p(\mathbf{y}_k)$ , y de la función de verosimilitud,  $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{y}_k)$ , empleando para ello la regla de Bayes (Ristic et al. 2004, Neapolitan 2003). El conocimiento acerca de la distribución *a priori*,  $p(\mathbf{y}_k)$ , puede venir de diferentes

<sup>4</sup>Un proceso de Wiener es también un proceso de Markov.

fuentes como, por ejemplo, información acerca del entorno. En este Capítulo, emplearemos como conocimiento *a priori* los estados inferidos en instantes anteriores de tiempo, según el marco ofrecido por el HMM visto anteriormente (ver Figura 3.1). Sin embargo, podemos añadir cualquier otro tipo de información *a priori* de forma análoga.

En el caso de modelar la evolución del estado y las medidas como un HMM, la expresión (3.2) provee una manera de determinar la distribución *a posteriori*,  $p(\mathbf{y}_{1:k}|\mathbf{z}_{1:k})$ , de forma iterativa, como sigue

$$p(\mathbf{y}_1|\mathbf{z}_1) = \frac{p(\mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1)}{p(\mathbf{z}_1)} = \frac{p(\mathbf{z}_1|\mathbf{y}_1) \cdot p(\mathbf{y}_1)}{p(\mathbf{z}_1)},$$

y para  $k > 1$ ,

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}_{1:k}|\mathbf{z}_{1:k}) &= \frac{p(\mathbf{y}_{1:k}, \mathbf{z}_{1:k})}{p(\mathbf{z}_{1:k})} \\ &= \frac{p(\mathbf{z}_k|\mathbf{y}_k)p(\mathbf{y}_k|\mathbf{y}_{k-1})p(\mathbf{y}_{1:k-1}, \mathbf{z}_{1:k-1})}{p(\mathbf{z}_{1:k})} \\ &= \frac{p(\mathbf{z}_k|\mathbf{y}_k)p(\mathbf{y}_k|\mathbf{y}_{k-1})}{p(\mathbf{z}_k|\mathbf{z}_{1:k-1})}p(\mathbf{y}_{1:k-1}|\mathbf{z}_{1:k-1}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

A partir de la distribución *a posteriori*,  $p(\mathbf{y}_{1:k}|\mathbf{z}_{1:k})$ , podemos estimar  $\mathbf{y}_k$  como,

$$p(\mathbf{y}_k|\mathbf{z}_{1:k}) = \int p(\mathbf{y}_{1:k}|\mathbf{z}_{1:k}) d\mathbf{y}_{1:k-1}, \quad (3.6)$$

dando como resultado el proceso conocido como *filtrado*. Sustituyendo (3.5) en (3.6) obtenemos,

$$p(\mathbf{y}_k|\mathbf{z}_{1:k}) = \frac{p(\mathbf{z}_k|\mathbf{y}_k) \int p(\mathbf{y}_k|\mathbf{y}_{k-1})p(\mathbf{y}_{1:k-1}|\mathbf{z}_{1:k-1}) d\mathbf{y}_{1:k-1}}{p(\mathbf{z}_k|\mathbf{z}_{1:k-1})}. \quad (3.7)$$

Suponiendo que disponemos de la función de densidad *a posteriori* en  $t_{k-1}$ ,  $p(\mathbf{y}_{1:k-1}|\mathbf{z}_{1:k-1})$ , podemos descomponer el proceso de filtrado dado por (3.7) en dos etapas:

1. *Predicción*: utilizamos el modelo dinámico para obtener la predicción del estado en el instante  $t_k$ , dadas las medidas hasta  $t_{k-1}$ ,

$$p(\mathbf{y}_k|\mathbf{z}_{1:k-1}) = \int p(\mathbf{y}_k|\mathbf{y}_{k-1})p(\mathbf{y}_{k-1}|\mathbf{z}_{1:k-1}) d\mathbf{y}_{k-1}. \quad (3.8)$$

La ecuación (3.8) recibe el nombre de ecuación Chapman-Kolmogorov (Ristic et al. 2004).

2. *Actualización*: en el instante de tiempo  $t_k$ , cuando disponemos de un nuevo vector de medidas,  $\mathbf{z}_k$ , corregimos la predicción anterior. Para ello, obtenemos la densidad *a posteriori* utilizando la función de verosimilitud definida por el modelo de observación,  $p(\mathbf{z}_k|\mathbf{y}_k)$ , y el Teorema de Bayes,

$$p(\mathbf{y}_k|\mathbf{z}_{1:k}) = \frac{p(\mathbf{z}_k|\mathbf{y}_k)p(\mathbf{y}_k|\mathbf{z}_{1:k-1})}{p(\mathbf{z}_k|\mathbf{z}_{1:k-1})}, \quad (3.9)$$

donde la constante de *normalización*,

$$p(\mathbf{z}_k|\mathbf{z}_{1:k-1}) = \int p(\mathbf{z}_k|\mathbf{y}_k)p(\mathbf{y}_k|\mathbf{z}_{1:k-1}) d\mathbf{y}_k,$$

depende también de la función de verosimilitud.

El objetivo es, por tanto, inferir los vectores de estado ocultos en cada instante de tiempo, utilizando la información aportada por las medidas y la relación entre las variables en el tiempo. La inferencia recursiva Bayesiana provista por el HMM evita la necesidad de reprocesar toda la información almacenada cada vez que tenemos nuevos datos, permitiendo obtener las distribuciones *a posteriori* de forma recursiva. La Figura 3.2 describe gráficamente la evolución de las funciones de densidad involucradas en el proceso de filtrado, para el problema de estimación de la distancia del NL a un NB, y para el problema de localización del NL cuando recibe medidas de tres NBs.

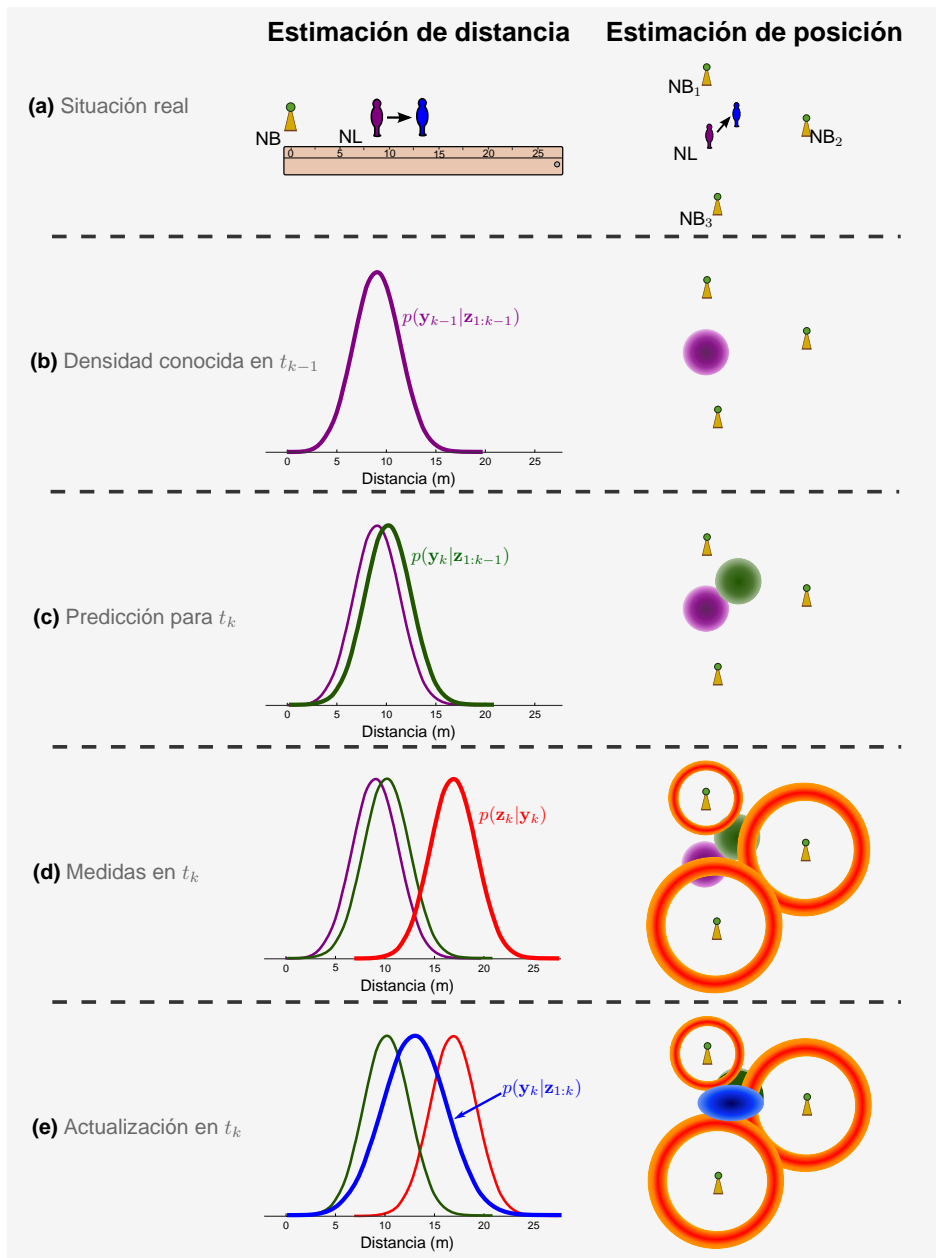
En general, el vector de estado,  $\mathbf{y}_k$ , también puede ser estimado utilizando las medidas hasta el instante de tiempo  $t_{k+l}$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ , dando como resultado el proceso conocido como *suavizado* si  $l > 0$ ,

$$p(\mathbf{y}_k|\mathbf{z}_{1:k+l}) = \int p(\mathbf{y}_{1:k+l}|\mathbf{z}_{1:k+l}) d\mathbf{y}_{1:k-1} d\mathbf{y}_{k+1:k+l}, \quad (3.10)$$

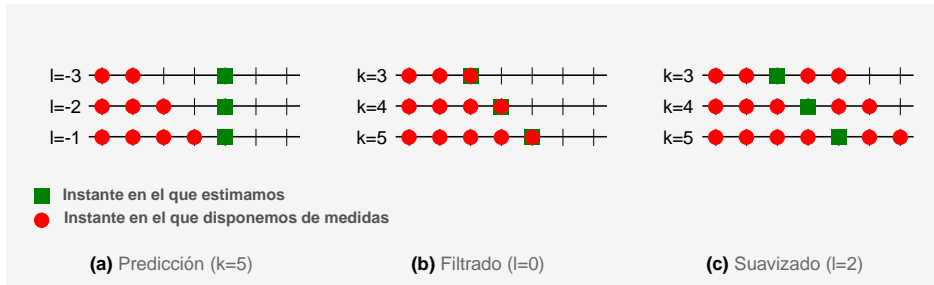
o *predicción* si  $l < 0$ ,

$$p(\mathbf{y}_k|\mathbf{z}_{1:k+l}) = \int p(\mathbf{y}_{1:k}|\mathbf{z}_{1:k+l}) d\mathbf{y}_{1:k-1}, \quad (3.11)$$

que es una generalización de la predicción de un paso vista en la primera etapa de filtrado (ver Figura 3.3) (Briers et al. 2009).



**Figura 3.2:** Densidades envueltas en el proceso de filtrado para estimación de distancia y de posición: (a) el NL se desplaza en  $t_k$  respecto a su posición en  $t_{k-1}$ ; (b) la densidad *a posteriori* en  $t_{k-1}$  es conocida; (c) en base al modelo dinámico y la densidad conocida realizamos la predicción; (d) en  $t_k$  recibimos nuevas medidas de las que obtenemos la verosimilitud; (e) a partir de la verosimilitud actualizamos la predicción para obtener la densidad *a posteriori* en  $t_k$ . Las zonas más oscuras en estimación de posición son las de mayor probabilidad.



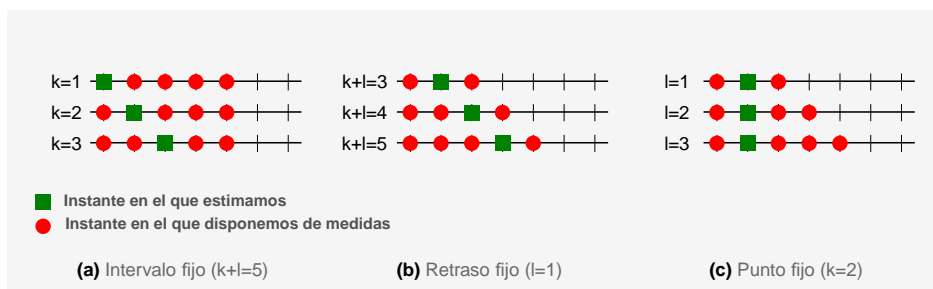
**Figura 3.3:** De los tres tipos de estimación Bayesiana, el suavizado es el que emplea una mayor cantidad de información aportada por las medidas para estimar el estado, y la predicción el que emplea la menor.

En el Capítulo 4, el sistema de localización inalámbrica implementará un método de filtrado con medidas hasta el instante de estimación, mientras que en el Capítulo 5, el sistema de navegación inercial utilizará un proceso de suavizado incluyendo medidas posteriores a dicho instante de estimación.

Además, en el caso de que empleemos suavizado, nos podemos encontrar en tres situaciones distintas (ver Figura 3.4) (Briers et al. 2009, del Moral 2004):

1. *Intervalo fijo:* es la situación más común, en la que disponemos de un número fijo de medidas y queremos obtener el estado suavizado en todos los instantes de tiempo anteriores utilizando todas las medidas (por ejemplo, podemos realizar un recorrido y almacenar todas las medidas del TOA para después procesarlas).
2. *Retraso fijo:* estimamos el estado en el instante de tiempo  $t_k$  con un retraso constante,  $\lambda$ , con respecto al instante hasta el que disponemos de medidas,  $t_{k+\lambda}$ . Por ejemplo, en el sistema de navegación inercial, cada vez que recibimos una nueva medida de la IMU en  $t_{k+\lambda}$ , obtendremos también una nueva estimación suavizada para el instante  $t_k$ , donde  $k$  se incrementa en una unidad con cada medida recibida, mientras que  $\lambda$  permanece constante.
3. *Punto fijo:* en este caso estimamos siempre el vector de estado en un instante fijo de tiempo,  $t_{\kappa}$ , mientras que el número de medidas aumenta con el tiempo (es decir, recibimos medidas en  $t_{\kappa+l}$ , donde  $\kappa$  es constante, mientras que  $l$  crece en el tiempo).

Una vez que obtenemos la función de densidad *a posteriori* mediante predic-



**Figura 3.4:** El suavizado de intervalo fijo obtiene el estado en  $t_{k^*}$  a partir del estado filtrado en  $t_{k+l}$ . Bajo esta misma filosofía es posible resolver los otros dos tipos de suavizado.

ción, filtrado o suavizado, la solución óptima<sup>5</sup> consiste en obtener un estimador respecto a algún criterio, siendo lo más común utilizar los estimadores MMSE o MAP descritos en el Capítulo 2. Sin embargo, el marco de estimación Bayesiana definido hasta ahora es solamente un concepto teórico, en el sentido de que en general no podemos determinar las expresiones anteriores de manera analítica. El siguiente apartado describe los tres únicos casos en los que podemos encontrar una solución óptima y las restricciones que implican, mientras que el apartado que le sigue expone algunas aproximaciones utilizadas cuando no podemos emplear soluciones óptimas.

### 3.2.1. Algoritmos óptimos

La estimación Bayesiana es óptima en el sentido de que busca la distribución *a posteriori* que integra toda la información disponible expresada mediante probabilidades. Sin embargo, conforme avanza el tiempo, se necesitan una capacidad de procesamiento y memoria infinitas para calcular la solución óptima, excepto en algunos casos especiales (Ristic et al. 2004):

1. cuando tanto el modelo dinámico como el de observación son lineales con errores Gaussianos. En este caso la recursión dada por (3.8) y (3.9) deriva en el KF (Kalman 1960, Bar-Shalom et al. 2001).
2. si el vector de estado puede tomar solo un número finito de estados. Los métodos que proveen la solución óptima son los filtros basados en una

<sup>5</sup>Bajo el marco de estimación Bayesiana, un algoritmo óptimo es aquel que resuelve el problema de caracterizar de manera exacta y completa la función de densidad *a posteriori* de manera recursiva.

rejilla de probabilidad (Fox et al. 1999).

3. para ciertas subclases de problemas no-lineales. Estos problemas y su solución exacta analítica fueron puestas de manifiesto por Benes y Daum (Benes 1981, Daum 1986).

El Ejemplo 3.3 utiliza el KF y el suavizado de Kalman (KS - *Kalman smoother*) como soluciones óptimas al problema de filtrado y suavizado, respectivamente, de la distancia entre un NB y el NL a partir de medidas de TOA en condiciones de LOS.

**Ejemplo 3.3.** *Queremos estimar, durante 5 segundos consecutivos, la distancia entre un NB y un NL,  $d_k$ , y la velocidad con la que este último se aleja del primero,  $v_k$ . Para ello realizamos una medición del TOA,  $z_k^T$ , cada segundo, en la correspondiente señal que transmite el NB al NL. Ambos nodos se encuentran en un entorno abierto en condiciones de LOS, y lo suficientemente lejos del suelo como para descartar cualquier señal que llegue reflejada.*

*Como modelo dinámico podemos considerar el mostrado en el Ejemplo 3.2, dado por (3.3), esto es,*

$$\mathbf{y}_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}_k + \mathbf{n}_k^d = \mathbf{F}_k \mathbf{y}_k + \mathbf{n}_k^d, \quad (3.12)$$

siendo  $\mathbf{y}_k = [d_x, v_k]^T$ , y  $\mathbf{n}_k^d \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k)$ , donde

$$\mathbf{Q}_k = \begin{pmatrix} \frac{\Delta t^4}{4} & 0 \\ 0 & \Delta t^2 \end{pmatrix} \sigma_{d'}^2.$$

Por lo tanto, la densidad de transición es  $p(\mathbf{y}_{k+1} | \mathbf{y}_k) = \varphi_{(\mathbf{F}_k \mathbf{y}_k, \mathbf{Q}_k)}(\mathbf{y}_{k+1})$ , siendo  $\varphi_{(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})}(\cdot)$  la pdf de una variable Gaussiana  $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  evaluada en su argumento.

Considerando que la señal transmitida viaja a la velocidad de la luz,  $c$ , el modelo de observación será,

$$z_k^T = \frac{1}{c} d_k + n_k^m, \quad (3.13)$$

donde  $n_k^m \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma_m)$ . A partir de este modelo, la función de verosimilitud viene dada por  $p(z_k^T | d_k) = \varphi_{(\frac{d_k}{c}, \sigma_m)}(z_k^T)$ .



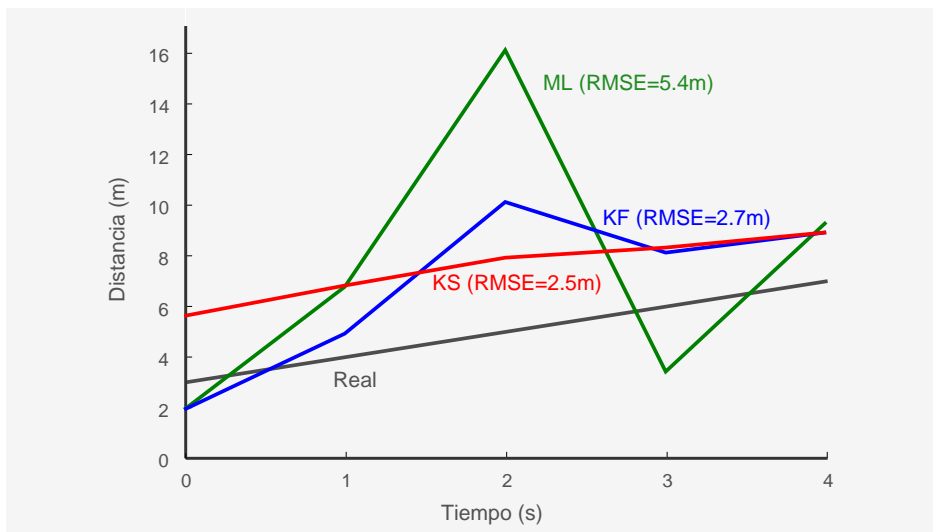
*El NL y el NB se encuentran inicialmente separados 3 m, y el NL se aleja del NB a una velocidad de 1 m/s. Mediante algún reloj leemos los siguientes valores de TOA: 6,3, 22,5, 53,7, 11,3 y 30,9 ns. El fabricante del reloj especifica que la desviación típica de las medidas de TOA es  $\sigma_m = 5$  ns. Fijaremos  $\sigma_{d'} = 0,5m/s^2$ .<sup>6</sup>*

*Utilizando el criterio de ML obtenemos, como estimaciones de distancia, los valores que resultan de multiplicar el TOA medido por la velocidad de la luz, ya que será en el punto donde  $p(z_k^T | d_k)$  se hace máxima. Resolviendo el problema bajo el marco Bayesiano, podemos emplear un KF, puesto que tanto el modelo dinámico como de observación son lineales y con errores Gaussianos. Asumimos como distribución inicial para la distancia la verosimilitud obtenida de las medidas, y para la velocidad inicial,  $v_0 \rightsquigarrow \mathcal{N}(1, 0,25)$  m/s, independiente de la distancia. La Figura 3.5 refleja la diferencia entre las estimaciones obtenidas mediante ML (en verde) en comparación con las obtenidas mediante el KF (en azul), junto con la distancia real. Como pone de manifiesto la Figura 3.5, el KF elimina gran parte de la aleatoriedad presente en las estimaciones de ML, es decir, mejora la precisión del sistema.*

*Si además consideramos que en cada instante de tiempo tenemos disponibles las 5 medidas, podemos resolver este problema mediante KS de intervalo fijo, utilizando el método Rauch-Tung-Striebel (Rauch et al. 1965). La Figura 3.5 muestra que el suavizado (en rojo) reduce aún más la variabilidad de la estimación.*

Los algoritmos óptimos que cubren las tres situaciones anteriores no son aplicables en la mayoría de sistemas de posicionamiento, debido a que o bien implican asunciones no realistas, o bien requieren una capacidad de procesamiento muy elevada. A pesar de ello, la generalización del KF para el caso no-lineal, mediante desarrollo en serie de Taylor (EKF), es el algoritmo para filtrado no-lineal más empleado en aplicaciones reales (Hartikainen et al. 2011, Chui and Chen 2009). En el Capítulo 5, utilizaremos esta y otras variantes del KF para resolver el problema no-lineal de navegación inercial. En la siguiente Sección, estudiamos aproximaciones propuestas como solución subóptima al problema Bayesiano. Dichas aproximaciones son útiles en situaciones reales, habitualmente más complejas que las cubiertas por los algoritmos óptimos.

<sup>6</sup>Debemos fijar el valor de  $\sigma_{d'}$  en (3.12) entre el 50 % y el 100 % del valor máximo que pueda adquirir la primera derivada de la distancia (Bar-Shalom et al. 2001).



**Figura 3.5:** El KF mejora la precisión de un sistema de estimación de distancias en comparación con el resultado obtenido mediante ML. El KS reduce aún más la variabilidad de la estimación.

### 3.2.2. Algoritmos subóptimos. Enfoque local y enfoque global

Lo más habitual en los problemas del mundo real es que no nos encontremos en ninguna de las situaciones cubiertas por los algoritmos óptimos. Como veremos en los dos siguientes Capítulos, este es el caso de los sistemas de posicionamiento desplegados en entornos complejos. En tales escenarios, no es posible encontrar una solución con una forma cerrada para las expresiones de predicción y actualización, (3.8) y (3.9), respectivamente. Para afrontar este problema, podemos optar por dos alternativas: asumir conocida la forma de la distribución *a posteriori*, o aproximar esta distribución sin realizar ninguna asunción (Bergman 1999). Atendiendo a este criterio podemos clasificar los numerosos algoritmos propuestos para tratar con generalidad los problemas de estimación Bayesiana bajo condiciones de no-linealidad y/o no-Gaussianidad (Sorenson 1985, Chen 2003, Ristic et al. 2004, Daum 2005):

1. *Enfoque local:* en él se encuentran los métodos que asumen conocida la forma de la distribución *a posteriori*. Habitualmente se elige la distribución Gaussiana para conseguir una recursión al estilo del KF. Dentro de este enfoque, el método más utilizado en localización y navegación es el EKF

(Sorenson 1985), que utiliza el desarrollo en serie de Taylor para linealizar los modelos que definen el problema.

En esta categoría se encuentran también los filtros que obtienen la solución al problema de estimación Bayesiana resolviendo una integral del tipo,

$$\mathbb{E}\{f(\mathbf{y}_k)\} = \int f(\mathbf{y}_k) \varphi_{(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})}(\mathbf{y}_k) d\mathbf{y}_k,$$

siendo  $f(\cdot)$  la función no lineal y  $\varphi_{(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})}(\cdot)$  la pdf de una variable Gaussiana  $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ . Este tipo de integrales habitualmente no tiene una forma cerrada por lo que debemos recurrir a métodos de integración numérica evaluando la integral en ciertos puntos. Estos son los *Sigma-Point Kalman Filters* (van der Merwe 2004), que aproximan la integral de la forma,

$$\mathbb{E}\{f(\mathbf{y}_k)\} \approx \sum_i w_k^i f(\mathbf{y}_k^i),$$

siendo los pesos,  $w_k^i$ , y los *puntos sigma*,  $\mathbf{y}_k^i$ , funciones de la media,  $\boldsymbol{\mu}$ , y la matriz de covarianzas,  $\boldsymbol{\Sigma}$ , de la distribución Gaussiana (Särkkä and Solin 2012). Bajo este criterio nos encontramos, por ejemplo, las variantes del KF denominadas *uncented* (UKF) (Julier et al. 2000) y *cubature* (CKF) (Arasaratnam and Haykin 2009).

Algunos métodos locales utilizan un número finito de valores para el vector de estado. Estos métodos resuelven el problema de estimación recursiva determinando de manera aproximada, mediante integración numérica, la distribución *a posteriori* para cada candidato a valor en el estado. Referidos a menudo como filtros HMM, su uso ha sido limitado debido al crecimiento exponencial de su complejidad con la dimensión del vector de estado (Rabiner 1989, Ristic et al. 2004).

El enfoque local resulta adecuado cuando podemos comprometer la precisión y exactitud del sistema de localización para así ganar en tiempo de respuesta. El incremento de las fuentes sensoriales de información en el Capítulo 5 nos permitirá acudir al enfoque local para garantizar un bajo tiempo de respuesta manteniendo el compromiso de rendimiento establecido.

2. *Enfoque global*: cuando la no-linealidad en los modelos es substancial, la estimación inicial es mala, o los ruidos en el modelo están lejos de la

asunción Gaussiana, los métodos según el enfoque local resultan inadecuados. Por su parte, los métodos desarrollados bajo el punto de vista global aproximan la función de distribución *a posteriori* sin asumir ninguna forma predefinida.

La solución por excelencia dentro del enfoque global es el filtro de partículas (PF). Un PF representa la distribución *a posteriori* mediante una distribución discreta, donde los puntos soporte y sus probabilidades reciben el nombre de partículas y pesos, respectivamente (Ristic et al. 2004). Al estilo de los métodos basados en una rejilla, encontramos soluciones aproximadas, como los *point-mass filters*, pero presentan el problema de tener que almacenar el gran número de puntos de la rejilla.

Existen también filtros basados en sumas de Gaussianas que aproximan la densidad *a posteriori* por una mixtura de Gaussianas, esto es, por una suma ponderada de funciones de densidad Gaussianas,

$$p(\mathbf{y}_k | \mathbf{z}_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^{q_k} w_k^i \varphi(\hat{\mathbf{y}}_k^i, \mathbf{P}_{k|k}^i)(\mathbf{y}_k^i),$$

que resultan adecuados para problemas en los que la densidad *a posteriori* es multimodal (Alspach and Sorenson 1972). Sin embargo, aún es necesario desarrollar métodos para el cálculo de pesos, medias y covarianzas de forma automática para un problema de filtrado no-lineal, por lo que los filtros de partículas han predominado frente a estos.

Basándose en las propiedades de la familia exponencial y de las distribuciones discretas, que convierten en manejables las integrales involucradas en el proceso de estimación, están apareciendo alternativas como el *belief condensation filter* (Mazuelas et al. 2011).

El mayor problema que presenta el enfoque global es el tiempo de procesamiento requerido. Recurriremos a este enfoque cuando no sea posible comprometer la precisión y exactitud del sistema. El sistema de localización del Capítulo 4 aprovecha el enfoque global para conseguir un mejor rendimiento cuando se utiliza únicamente información de RSS y del TOA de la señal inalámbrica.

Una vez presentados los algoritmos subóptimos, el cálculo de cotas de rendimiento adquiere todavía más sentido, puesto que es la mejor manera de cuan-

tificar con generalidad el efecto que producen las aproximaciones introducidas (bien en la asunción de errores Gaussianos, o bien en la integración numérica). En la siguiente Sección estudiaremos cómo obtener la FIM bajo el marco Bayesiano para, a partir de ella, calcular la CRLB. Así mismo, llegaremos a varios resultados que nos permitirán conocer cómo evoluciona esta FIM, la EFIM, y la CRLB, en función del tipo de medidas que incorporemos al proceso de estimación, y el instante en que lo hagamos.

### 3.3. Cota de Cramér-Rao *a posteriori*

Como vimos en el Capítulo 2, la CRLB provee un límite inferior para el error cuadrático medio alcanzable (Scharf 1990). El mayor problema que presenta la CRLB para su uso, bajo el punto de vista Bayesiano, es la dificultad en su cálculo, ya que lo que se estima no es un valor determinista para el parámetro. Para este tipo de sistemas variantes en el tiempo, lo que se estima es una función de densidad. Van Trees propuso una CRLB *a posteriori* para el caso Bayesiano (Van Trees 1968), pues esta es obtenida a partir de distribuciones *a posteriori* del vector de estado (Bergman 1999). En este caso, para cada instante de tiempo  $t_k$ , la CRLB para el problema de filtrado viene dada por,

$$\mathbb{E}_{\mathbf{z}_{1:k}|\mathbf{y}_k} \{ (g(\mathbf{z}_{1:k}) - \mathbf{y}_k)(g(\mathbf{z}_{1:k}) - \mathbf{y}_k)^T \} \succeq \mathbf{J}_k^{-1}, \quad (3.14)$$

donde  $g(\mathbf{z}_{1:k})$  es un estimador insesgado de  $\mathbf{y}_k$ , y  $\mathbf{J}_k$  es la FIM del estado  $\mathbf{y}_k$ , obtenida como,

$$\mathbf{J}_k = -\mathbb{E}_{\mathbf{z}_{1:k}|\mathbf{y}_k} \{ \nabla_{\mathbf{y}_k} [\nabla_{\mathbf{y}_k} \ln p(\mathbf{z}_{1:k}|\mathbf{y}_k)]^T \}. \quad (3.15)$$

El cálculo de la matriz anterior cuando, por ejemplo, estimamos la posición del NL, presenta el inconveniente de que, en general, es necesario la obtención de la FIM para toda la trayectoria,

$$\mathbf{I}_k = -\mathbb{E}_{\mathbf{z}_{1:k}} \{ \nabla_{\mathbf{y}_{1:k}} [\nabla_{\mathbf{y}_{1:k}} \ln p(\mathbf{y}_{1:k}, \mathbf{z}_{1:k})]^T \}. \quad (3.16)$$

A partir de esta matriz, obtendríamos  $\mathbf{J}_k$  como el complemento de Schur del bloque inferior derecho de  $\mathbf{I}_k$ , correspondiente al último instante de tiempo,  $t_k$ . Esto implicaría invertir matrices de tamaño  $kD \times kD$ , siendo  $k$  el índice temporal

y  $D$  la dimensión del vector de estado. Tichavský *et al.* propusieron por primera vez un método para obtener  $\mathbf{J}_k$  de manera iterativa, sin la necesidad de invertir este tipo de matrices (Tichavsky *et al.* 1998). Repetimos aquí este método en la siguiente Proposición.

**Proposición 3.4.** *Sea  $\mathbf{J}_k$  la FIM para el vector de estado  $\mathbf{y}_k$  a partir de las medidas  $\mathbf{z}_{1:k}$ . La secuencia  $\{\mathbf{J}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  obedece la recursión,*

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{k+1} &= \mathbf{J}_{k+1}^z + \mathbf{J}_{k+1|k} \\ &= \mathbf{J}_{k+1}^z + \mathbf{D}_k^{22} - \mathbf{D}_k^{21}(\mathbf{J}_k + \mathbf{D}_k^{11})^{-1}\mathbf{D}_k^{12}, \quad (k > 0) \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde las componentes de la FIM para el estado predicho,  $\mathbf{J}_{k+1|k}$ , se obtienen como,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_k^{11} &= -\mathbb{E}_{\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{y}_k} \{ \nabla_{\mathbf{y}_k} [\nabla_{\mathbf{y}_k} \ln p(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{y}_k)]^T \} \\ \mathbf{D}_k^{21} &= -\mathbb{E}_{\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{y}_k} \{ \nabla_{\mathbf{y}_k} [\nabla_{\mathbf{y}_{k+1}} \ln p(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{y}_k)]^T \} \\ \mathbf{D}_k^{12} &= [\mathbf{D}_k^{21}]^T \\ \mathbf{D}_k^{22} &= -\mathbb{E}_{\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{y}_k} \{ \nabla_{\mathbf{y}_{k+1}} [\nabla_{\mathbf{y}_{k+1}} \ln p(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{y}_k)]^T \}, \end{aligned}$$

mientras que la parte de la FIM correspondiente a información aportada por las medidas,  $\mathbf{J}_{k+1}^z$ , viene dada por,

$$\mathbf{J}_{k+1}^z = -\mathbb{E}_{\mathbf{z}_{k+1}|\mathbf{y}_{k+1}} \{ \nabla_{\mathbf{y}_{k+1}} [\nabla_{\mathbf{y}_{k+1}} \ln p(\mathbf{z}_{k+1}|\mathbf{y}_{k+1})]^T \}.$$

Con el fin de poder realizar algunas simplificaciones, para obtener así expresiones cerradas, en esta Sección consideramos que el modelo dinámico es lineal y Gaussiano. Como veremos en el Capítulo 4, esta asunción puede ser realizada en problemas de localización con gran generalidad. Por lo tanto, el modelo dinámico es del tipo,

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{y}_k + \mathbf{n}_k^d,$$

donde el término de error  $\mathbf{n}_k^d \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k)$ . En este caso la expresión (3.17) se simplifica como muestra la Observación 3.5 (Ristic *et al.* 2004).

**Observación 3.5.** *Sea  $\mathbf{J}_k$  la FIM para el vector de estado  $\mathbf{y}_k$  a partir de las medidas  $\mathbf{z}_{1:k}$ . Si el modelo que relaciona  $\mathbf{y}_{k+1}$  con  $\mathbf{y}_k$  es lineal y Gaussiano, la*

secuencia  $\{\mathbf{J}_k\}$  obedece la recursión,

$$\mathbf{J}_{k+1} = \mathbf{J}_{k+1}^z + (\mathbf{Q}_k + \mathbf{F}_k \mathbf{J}_k^{-1} \mathbf{F}_k^T)^{-1}. \quad (3.18)$$

Si además el modelo de observación es lineal y Gaussiano, es decir,

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{y}_k + \mathbf{n}_k^m,$$

donde el término de error  $\mathbf{n}_k^m \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k)$ , entonces  $\mathbf{J}_{k+1}^z = \mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{R}_{k+1}^{-1} \mathbf{H}_{k+1}$ . En este caso obtener la FIM, dada por la Observación 3.5, equivale a obtener la inversa de la matriz de covarianzas del estado en un KF (Bar-Shalom et al. 2001).

La Proposición 3.4 es válida para filtrado Bayesiano. Para el problema de suavizado, Simandl *et al.* presentaron una forma recursiva hacia atrás con la que obtener la FIM en  $t_k$  suavizando el estado con medidas hasta  $t_{k+l}$ ,  $l > 0$  (Šimandl et al. 2001).

**Proposición 3.6.** Sea  $\mathbf{J}_{k|l}$  la FIM para  $\mathbf{y}_k$  a partir de las medidas  $\mathbf{z}_{1:k+l}$ ,  $k, l \in \mathbb{N}$ . La secuencia  $\{\mathbf{J}_{k|l}\}$  obedece la recursión,

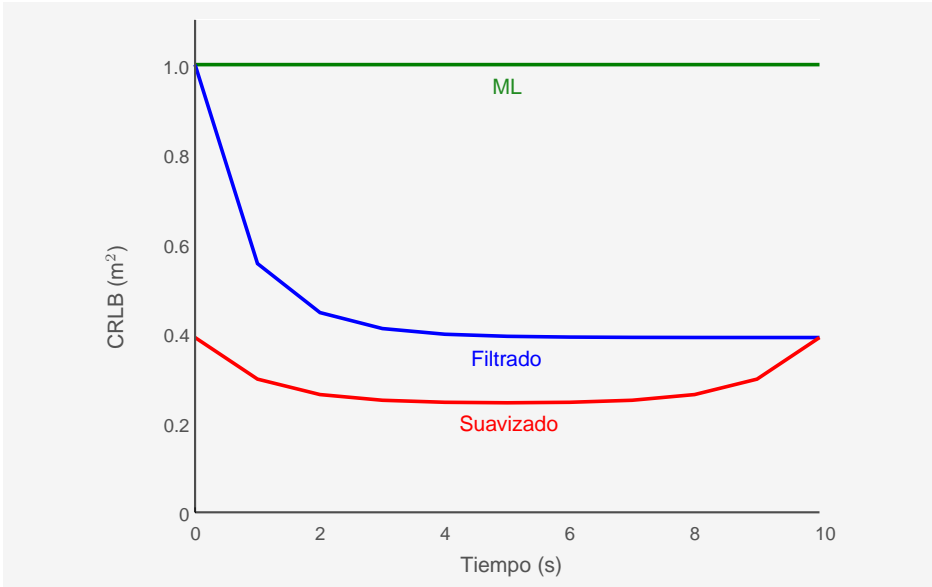
$$\mathbf{J}_{k|k+l} = \mathbf{J}_k + \mathbf{D}_k^{11} - \mathbf{D}_k^{12} (\mathbf{D}_k^{22} + \mathbf{J}_{k+1|k+l} - \mathbf{J}_{k+1|k})^{-1} \mathbf{D}_k^{21}, \quad (3.19)$$

siendo la condición inicial de la recursión la FIM para el estado filtrado en  $t_{k+l}$ ,  $\mathbf{J}_{k+l}$ , dada por la Proposición 3.4.

En el caso de que el modelo dinámico sea lineal y Gaussiano, podemos obtener la FIM anterior como la inversa de la matriz de covarianzas del estado en un KS.<sup>7</sup>

**Ejemplo 3.7.** Consideremos de nuevo el problema de estimación de la distancia entre dos nodos. En esta ocasión disponemos de 1 medida de esta distancia cada segundo ( $\Delta t = 1$  s). Esta medida proviene de una distribución Gaussiana con media la distancia real (desconocida),  $d$ , y varianza constante igual a 1 m. Uno de los nodos se aleja del otro a una velocidad constante de 0,5 m/s.

<sup>7</sup>La matriz de covarianzas del estado en el KS la podemos obtener mediante la recursión hacia atrás de Rauch-Tung-Striebel (Rauch et al. 1965).



**Figura 3.6:** Utilizar filtrado frente a ML implica poder disminuir notablemente el mínimo error cuadrático medio alcanzable. Si además suavizamos el resultado mediante una recursión hacia atrás desde el último estado filtrado, podemos reducir aún más dicho error.

Bajo el punto de vista máximo-verosímil, en el Ejemplo 2.8 veíamos que, siendo el número de muestras  $M = 1$ , la CRLB es  $1/M = 1 \text{ m}^2$ . Bajo el marco establecido por el HMM, podemos mejorar esta CRLB resolviendo el problema desde el punto de vista Bayesiano. Podemos emplear como modelo dinámico un camino aleatorio, esto es,

$$d_{k+1} = d_k + n_k^d$$

donde  $n_k^d \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \Delta t \cdot \sigma_{d'})$ . Eligiendo  $\sigma_{d'} = 0,5 \text{ m/s}$ , la CRLB para el caso Bayesiano es la de la Figura 3.6 (en azul), inferior a la mitad de la CRLB para el caso ML (en verde) desde el segundo instante de estimación.

Si tras 10 segundos almacenamos todas las medidas y llevamos a cabo la recursión hacia atrás para obtener los estados suavizados, obtenemos una CRLB aún menor como así refleja la Figura 3.6 (en rojo). Para este problema, emplear suavizado frente a filtrado implica poder reducir el error cuadrático medio casi a la mitad en la mayor parte del recorrido.



A partir de las expresiones anteriores, en los siguientes apartados derivamos algunos importantes resultados para la FIM, la EFIM y/o la CRLB en un sistema de posicionamiento. Esto nos permitirá analizar cómo varían en función del tipo de medidas que realicemos y del instante en el que estimemos respecto al que disponemos de medidas. Estos resultados son obtenidos habitualmente mediante simulaciones variando los parámetros de entrada, mientras que aquí aportamos su fundamento teórico. Las conclusiones extraídas nos servirán para diseñar los sistemas de localización de los Capítulos 4 y 5.

### 3.3.1. Efecto de las medidas de posición sobre la EFIM de filtrado

La siguiente Proposición impone la condición que deben cumplir las medidas de posición para que la información no decrezca con el tiempo (la cota mínima de error alcanzable no crezca).

**Proposición 3.8.** *Sea  $\mathbf{J}_0$  la EFIM inicial de un sistema que estima únicamente la posición de un NL,  $\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , a partir de medidas de posición o distancia,  $\mathbf{z}_{1:k}$ . Si el modelo que relaciona  $\mathbf{y}_{k+1}$  con  $\mathbf{y}_k$  es lineal y Gaussiano, con matriz de covarianzas constante  $\mathbf{Q}$ , la EFIM de  $\mathbf{y}_k$  no decrecerá con el tiempo si se cumple la condición,*

$$\mathbf{J}^z \succeq (\mathbf{Q} + \mathbf{J}_0^{-1})^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{J}_0, \quad (3.20)$$

donde  $\mathbf{J}^z$  es la información aportada al sistema por las medidas, también constante.

*Demostración.* Ver Sección 3.A.1 anexa. □

La etapa de predicción siempre introduce ruido en el sistema de posicionamiento, mientras que la etapa de actualización lo reduce. La Proposición 3.8 impone una condición a la información aportada por las medidas para que la etapa de actualización reduzca el ruido en el sistema en mayor medida que lo aumenta la predicción. Por ello, en los sistemas de posicionamiento que desarrollamos en los Capítulos 4 y 5, incluimos siempre medidas relativas a la posición para que la información del sistema no decrezca con el tiempo.

En el caso de que el modelo de observación sea también lineal y Gaussiano, la desigualdad anterior se simplifica, pudiendo expresar la condición en función

de las varianzas de las variables involucradas. Esto queda puesto de manifiesto en el Corolario 3.9.

**Corolario 3.9.** *La EFIM de un sistema lineal y Gaussiano que estima únicamente la posición de un NL,  $\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , a partir de medidas de posición,  $\mathbf{z}_{1:k}$ , no decrecerá con el tiempo si la varianza de la información inicial,  $\sigma_0^2$ , del modelo dinámico,  $\sigma_d^2$ , y de las medidas,  $\sigma_z^2$ , cumplen la relación,*

$$\sigma_z^2 \leq \sigma_0^2 \left(1 + \frac{\sigma_0^2}{\sigma_d^2}\right). \quad (3.21)$$

*Demostración.* A partir de la Proposición 3.8 y haciendo que  $\mathbf{J}^z = \frac{1}{\sigma_z^2} \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{J}_0 = \frac{1}{\sigma_0^2} \mathbf{I}$  y  $\mathbf{Q} = \sigma_d^2 \mathbf{I}$  se obtiene el resultado.  $\square$

Del resultado anterior podemos obtener la desviación máxima admisible en las medidas de posición para un sistema de posicionamiento que utiliza un KF. Por ejemplo, supongamos que diseñamos un sistema que necesita proveer localización en exteriores, y conocemos el error de estimación en la posición inicial. Además, en función del tipo de NL (peatón, robot, vehículo, etc.), conocemos también la desviación típica del error en el modelo dinámico. Para que el error de posicionamiento de nuestro sistema no crezca, debemos elegir o diseñar un navegador GPS (por ejemplo) que garantice un error en sus mediciones de posición que cumpla la condición impuesta por el Corolario 3.9.

### 3.3.2. Efecto de las medidas de distancia sobre la EFIM de filtrado

Puesto que en esta Tesis Doctoral la información relativa a posición proviene de medidas relativas a distancia (RSS o TOA), debemos particularizar el resultado de la Sección anterior para este caso. Esto es lo que realizamos en el siguiente Corolario, que muestra cómo de precisas tienen que ser las estimaciones de distancia, dado un error de estimación inicial, y dada la varianza del error en el modelo dinámico, para que la información no decrezca con el tiempo (la cota en el error no aumente).

**Corolario 3.10.** *La EFIM de un sistema lineal y Gaussiano que estima únicamente la posición de un NL,  $\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , a partir de medidas de distancia,*

$\mathbf{z}_{1:k}$ , respecto a  $L$  NBs, no decrecerá con el tiempo si la varianza de la información inicial,  $\sigma_0^2$ , del modelo dinámico,  $\sigma_d^2$ , y de las medidas a cada NB,  $\sigma_l^2$ , cumplen la relación,

$$\sum_{l=1}^L \frac{1}{\sigma_l^2} \mathbf{u}_l \mathbf{u}_l^T \succeq \frac{\sigma_d^2}{\sigma_0^2(\sigma_d^2 + \sigma_0^2)} \mathbf{I}, \quad (3.22)$$

donde  $\mathbf{u}_l = \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l\|}$  es el vector unitario que representa la dirección desde la posición del NL,  $\mathbf{x}_k$ , a la posición conocida del  $l$ -ésimo NB,  $\mathbf{x}_l$ .

*Demostración.* Ver Sección 3.A.2 anexa. □

El Ejemplo 3.11 aplica el resultado anterior al diseño de un sistema de localización en un caso real.<sup>8</sup>

**Ejemplo 3.11.** *Situando 4 NBs idénticos en las esquinas de una habitación cuadrada queremos garantizar que, dada una estimación de la posición inicial del NL, el error no crezca. Para ello, empleamos medidas de la distancia a cada uno de los NBs. Consideramos un escenario en 2D ( $D = 2$ ).*

*A partir del Corolario 3.10, suponiendo que las estimaciones de distancia respecto a cualquier NB son i.i.d y de varianza  $\sigma_l^2$ , la condición que deben cumplir estas estimaciones es,*

$$\frac{\sigma_0^2(\sigma_d^2 + \sigma_0^2)}{\sigma_d^2 \sigma_l^2} \sum_{l=1}^L \mathbf{n}^T \mathbf{u}_l \mathbf{u}_l^T \mathbf{n} \geq 1,$$

para cualquier  $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^D$  de norma unitaria. O lo que es lo mismo,

$$\sigma_l^2 \leq \frac{\sigma_0^2(\sigma_d^2 + \sigma_0^2)}{\sigma_d^2} \sum_{l=1}^L \cos^2(\theta_l),$$

donde  $\theta_l$  es el ángulo formado por los vectores  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{u}_l$ .

*La Figura 3.7a muestra la disposición de los NBs, y cinco posiciones del NL para las que obtenemos la condición que deben cumplir las estimaciones de distancia. Considerando  $\sigma_0 = 1$  m y  $\sigma_d = 1$  m:*

<sup>8</sup>El Ejemplo 3.11 utiliza la definición de matriz semidefinida positiva para obtener una condición sobre las medidas de distancia. Este problema también lo podemos resolver sabiendo que el menor autovalor del miembro de la izquierda en (3.22) debe ser mayor que la constante del miembro de la derecha.

■ Posición  $x_1$  (ver Figura 3.7b):

$$\sigma_l^2 \leq \lambda (\cos^2(\theta_1) + \cos^2(\theta_1 + \pi/2) + \cos^2(\theta_1 + \pi) + \cos^2(\theta_1 + 3\pi/2)),$$

siendo  $\lambda = \frac{\sigma_0^2(\sigma_d^2 + \sigma_0^2)}{\sigma_d^2}$ , y  $\theta_1$  el ángulo que forma el vector  $\mathbf{n}$  con el vector de dirección  $\mathbf{u}_1$ . Por lo que la condición es,

$$\sigma_l^2 \leq 2\lambda \Rightarrow \sigma_l \leq 2m.$$

La Figura 3.7d representa la raíz cuadrada de la CRLB para posición, corroborando que para valores de  $\sigma_l$  menores, iguales y mayores de  $2m$  la CRLB decrece, permanece constante y aumenta, respectivamente.

■ Posición  $x_2$  (ver Figura 3.7c):

$$\begin{aligned} \sigma_l^2 \leq & \lambda(\cos^2(\theta_1) + \cos^2(\theta_1 + \pi) \\ & + \cos^2(\theta_1 + 3\pi/2 - \alpha) + \cos^2(\theta_1 + 3\pi/2 + \alpha)), \end{aligned}$$

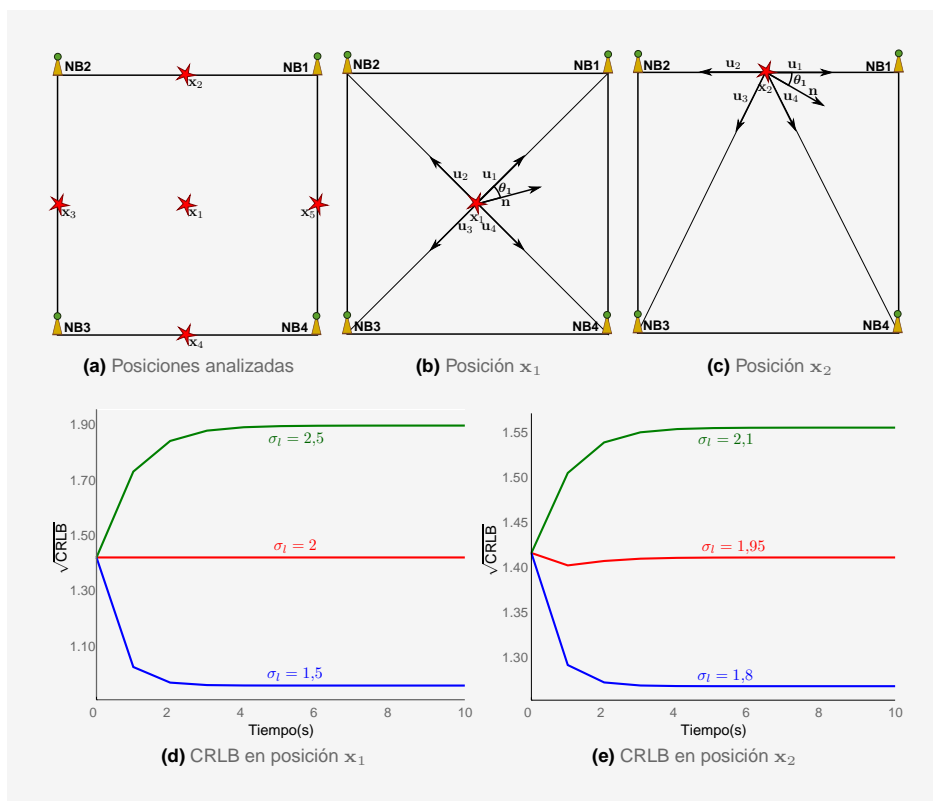
siendo  $\alpha = \arctan(1/2)$ . El mínimo del término de la derecha en la expresión anterior se obtiene para  $\theta_1 = \pi/2$  y  $\theta_1 = 3\pi/2$ . Por lo tanto, en el caso más restrictivo, la condición anterior se convierte en,

$$\sigma_l^2 \lesssim 1,6\lambda \Rightarrow \sigma_l \lesssim 1,79m.$$

En la Figura 3.7e, un valor de  $\sigma_l = 1,95m$ , que no cumple la condición anterior, provoca que la CRLB decrezca durante los primeros segundos pero luego aumente. Un valor de  $1,8m$ , que sí cumple la condición, hace que la CRLB nunca aumente.

■ Posiciones  $x_3, x_4, x_5$ : deben cumplir la misma condición que la posición  $x_2$ .

Ampliando el mallado de posiciones del NL,  $\mathbf{x}$ , podemos obtener la condición que deben cumplir las estimaciones de distancia para todo el área o recorrido donde queramos llevar a cabo el posicionamiento.



**Figura 3.7:** A partir del Corolario 3.10 podemos conocer la condición que deben cumplir las estimaciones de distancia en cada posición del NL para que la cota en el error no crezca.

El resultado anterior será determinante a la hora de diseñar los sistemas de posicionamiento en los siguientes Capítulos. Para garantizar que el error cuadrático mínimo alcanzable (su CRLB) no crece con el tiempo, incluiremos siempre medidas relativas a la posición. En concreto, tanto en el sistema de localización inalámbrica del Capítulo 4 como en el de navegación inercial del Capítulo 5, extraeremos información de los valores RSS y TOA de las señales inalámbricas intercambiadas por los nodos.

### 3.3.3. Efecto de la recursión hacia atrás sobre la EFIM de suavizado

Los resultados anteriores obtenían la evolución de la EFIM para el problema de filtrado Bayesiano. En la siguiente Proposición mostramos cómo la EFIM para posición siempre mejorará cuando, estimando el estado en  $t_k$ , incorporamos medidas hasta  $t_{k+l}$ , si  $l \in \mathbb{Z}^+$ .

**Proposición 3.12.** *Sea un sistema que estima únicamente la posición de un NL,  $\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , en el instante  $t_k$ , a partir de medidas de posición o distancia, hasta el instante  $t_{k+l}$ ,  $\mathbf{z}_{1:k+l}$ ,  $l \in \mathbb{Z}^+$ . Consideremos el modelo dinámico que relaciona  $\mathbf{y}_{k+1}$  con  $\mathbf{y}_k$  lineal y Gaussiano. La EFIM de  $\mathbf{y}_k$  será siempre igual o mayor que la obtenida utilizando únicamente las medidas hasta el instante  $t_k$ ,  $\mathbf{z}_{1:k}$ .*

*Demostración.* Ver Sección 3.A.3 anexa. □

De la Proposición 3.12 concluimos que, cuando la frecuencia de recepción nos lo permita, emplearemos suavizado Bayesiano en lugar de filtrado, ya que esto implica reducir el mínimo error alcanzable. Esto haremos en el Capítulo 5, donde la frecuencia de muestreo de los sensores inerciales será de 100 Hz. Cabe destacar también que la Proposición 3.12 concuerda con los resultados que habíamos obtenido en el Ejemplo 3.7.

Resumiendo los resultados de esta Sección, cuando diseñemos los sistemas de posicionamiento en los siguientes Capítulos, tendremos en cuenta que:

1. la cota de Cramér-Rao *a posteriori* permite obtener el error de segundo orden mínimo alcanzable cuando realizamos estimación Bayesiana;
2. debemos incluir medidas de distancia cumpliendo el Corolario 3.10 para garantizar que esta cota no crezca en el tiempo;
3. cuando la frecuencia de recepción de medidas sea elevada, realizaremos suavizado de retraso fijo, ya que esto implica tener siempre igual o mayor información que utilizando filtrado.

### 3.A. Anexos

#### 3.A.1. Demostración de la Proposición 3.8

El vector de estado,  $y_k$ , únicamente incluye la posición del NL, por lo que su EFIM coincide con su FIM, que para filtrado viene dada por (3.17). Suponiendo constantes la matriz de transición  $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}$ , la matriz de covarianzas del modelo dinámico  $\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}$ , y la matriz correspondiente a la información aportada por las medidas  $\mathbf{J}_k^z = \mathbf{J}^z$ , y llamando  $\Delta_{k+1} = \mathbf{J}_{k+1} - \mathbf{J}_k$ , la información no decrecerá con el tiempo si esta última matriz es semidefinida positiva para cualquier  $k$ . Para comprobarlo distinguimos dos casos,

- Si  $k > 0$  tenemos que,

$$\Delta_{k+1} = \mathbf{J}^z + (\mathbf{Q} + \mathbf{F}\mathbf{J}_k^{-1}\mathbf{F}^T)^{-1} - (\mathbf{J}^z + (\mathbf{Q} + \mathbf{F}\mathbf{J}_{k-1}^{-1}\mathbf{F}^T)^{-1}).$$

La matriz anterior será semidefinida positiva si,

$$\Delta_{k+1} \succeq \mathbf{0} \Leftrightarrow (\mathbf{Q} + \mathbf{F}\mathbf{J}_k^{-1}\mathbf{F}^T)^{-1} \succeq (\mathbf{Q} + \mathbf{F}\mathbf{J}_{k-1}^{-1}\mathbf{F}^T)^{-1}.$$

Además, puesto que para cualquier matriz  $\mathbf{A} \succ \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1} \succ \mathbf{0}$ , por definición de la FIM,  $\mathbf{J}_k \succ \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{J}_k^{-1} \succ \mathbf{0}$  (Horn and Johnson 1985). Esto implica  $\mathbf{F}\mathbf{J}_k^{-1}\mathbf{F}^T \succeq \mathbf{0}$ .<sup>9</sup> Por definición de una matriz de covarianzas  $\mathbf{Q} \succ \mathbf{0}$ , luego  $\mathbf{Q} + \mathbf{F}\mathbf{J}_k^{-1}\mathbf{F}^T \succ \mathbf{0}$ , y la condición anterior sobre  $\Delta_{k+1}$  equivale a,<sup>10</sup>

$$\Delta_{k+1} \succeq \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{Q} + \mathbf{F}\mathbf{J}_{k-1}^{-1}\mathbf{F}^T \succeq \mathbf{Q} + \mathbf{F}\mathbf{J}_k^{-1}\mathbf{F}^T,$$

o, lo que es lo mismo,

$$\Delta_{k+1} \succeq \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{F}\mathbf{J}_{k-1}^{-1}\mathbf{F}^T \succeq \mathbf{F}\mathbf{J}_k^{-1}\mathbf{F}^T.$$

Como en este caso  $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ ,

$$\Delta_{k+1} \succeq \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{J}_{k-1}^{-1} \succeq \mathbf{J}_k^{-1}.$$

<sup>9</sup>Sea  $\mathbf{P}$  una matriz no singular. Si  $\mathbf{A} \succ \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} \succ \mathbf{0}$ . Si  $\mathbf{A} \succeq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} \succeq \mathbf{0}$ . Si  $\mathbf{P}$  es una matriz singular  $\mathbf{A} \succeq \mathbf{0}$  implica  $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} \succeq \mathbf{0}$  (Harville 1997).

<sup>10</sup>Si  $\mathbf{A} \succ \mathbf{0}$  y  $\mathbf{B} \succ \mathbf{0}$ , se cumple que  $\mathbf{A} \succeq \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{B}^{-1} \succeq \mathbf{A}^{-1}$  (Horn and Johnson 1985).

Obteniendo finalmente que,

$$\Delta_{k+1} \succeq \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{J}_k \succeq \mathbf{J}_{k-1}.$$

Con lo que si  $\mathbf{J}_1 \succeq \mathbf{J}_0$  el resultado queda demostrado por inducción.

- Si  $k = 0$  la diferencia entre las EFIMs será,

$$\Delta_1 = \mathbf{J}^z + (\mathbf{Q} + \mathbf{F}\mathbf{J}_0^{-1}\mathbf{F}^T)^{-1} - \mathbf{J}_0$$

Puesto que  $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ , la matriz  $\Delta_1$  será semidefinida positiva si,

$$\Delta_1 \succeq \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{J}^z \succeq \mathbf{J}_0 - (\mathbf{Q} + \mathbf{J}_0^{-1})^{-1}.$$

Teniendo en cuenta que  $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ ,

$$\Delta_1 \succeq \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{J}^z \succeq \mathbf{J}_0 - \mathbf{J}_0 ((\mathbf{Q} + \mathbf{J}_0^{-1})\mathbf{J}_0)^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{J}^z \succeq \mathbf{J}_0 (\mathbf{I} - (\mathbf{Q}\mathbf{J}_0 + \mathbf{I})^{-1}).$$

Aplicando el lema de inversión de matrices,<sup>11</sup>

$$\Delta_1 \succeq \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{J}^z \succeq \mathbf{J}_0 (\mathbf{Q}\mathbf{J}_0 + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{Q}\mathbf{J}_0,$$

de donde obtenemos el resultado.

### 3.A.2. Demostración del Corolario 3.10

Eliminaremos el subíndice temporal  $k + 1$  en la demostración por claridad. De la definición de la FIM para filtrado, sabemos que el término correspondiente a las medidas, para el instante de tiempo  $t_{k+1}$ , viene dado por,

$$\mathbf{J}^z = \mathbb{E}\{-\nabla_{\mathbf{y}}[\nabla_{\mathbf{y}} \ln p(\mathbf{z}|\mathbf{y})]^T\}.$$

Puesto que las medidas de distancia respecto a los diferentes NBs son independientes dada la distancia real, tenemos que,

$$\mathbf{J}^z = \mathbb{E}\{-\nabla_{\mathbf{y}}[\nabla_{\mathbf{y}} \ln \prod_{l=1}^L p(z_l^r|\mathbf{y})]^T\} = \sum_{l=1}^L \mathbb{E}\{-\nabla_{\mathbf{y}}[\nabla_{\mathbf{y}} \ln p(z_l^r|\mathbf{y})]^T\},$$

---

<sup>11</sup> $(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D} + \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}.$



donde  $z_l^r$  es la medida de la distancia del NL al  $l$ -ésimo NB en el instante  $t_{k+1}$ .

Por otro lado, si suponemos Gaussiano el error en las medidas (tanto el aleatorio como el sistemático debido al multicamino o al NLOS), esto es, si  $n_l^r \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_l, \sigma_l)$ , entonces la verosimilitud de las medidas del  $l$ -ésimo NB será,

$$p(z_l^r | \mathbf{y}) = \varphi_{(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_l\| + \mu_l, \sigma_l)}(z_l^r) \propto \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(z_l^r - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_l\| - \mu_l)^2}{\sigma_l^2}\right).$$

Teniendo en cuenta que en este problema el vector de estado está formado únicamente por la posición ( $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ ). Entonces,

$$\nabla_{\mathbf{y}} \ln p(z_l^r | \mathbf{y}) = \frac{(z_l^r - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_l\| - \mu_l)}{\sigma_l^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_l}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_l\|},$$

por lo tanto,

$$-\nabla_{\mathbf{y}} [\nabla_{\mathbf{y}} \ln p(z_l^r | \mathbf{y})]^T = \frac{1}{\sigma_l^2} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l)^T}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_l\|^2} - \frac{(z_l^r - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_l\| - \mu_l)}{\sigma_l^2} \nabla_{\mathbf{y}} \left[ \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l)^T}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_l\|} \right].$$

Definiendo el vector unitario de dirección,  $\mathbf{u}_l = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_l}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_l\|}$ , obtenemos finalmente que la información aportada por las medidas del  $l$ -ésimo NB es,

$$\mathbb{E}\{-\nabla_{\mathbf{y}} [\nabla_{\mathbf{y}} \ln p(z_l^r | \mathbf{y})]^T\} = \frac{1}{\sigma_l^2} \mathbf{u}_l \mathbf{u}_l^T.$$

A partir de la expresión anterior y la Proposición 3.8 se obtiene el resultado.

### 3.A.3. Demostración de la Proposición 3.12

Puesto que únicamente incluimos la posición del NL en el vector de estado, la EFIM coincide con la FIM. Bajo el HMM, la verosimilitud del estado en  $t_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , dadas las medidas hasta  $t_{k+l}$ ,  $l \in \mathbb{Z}^+$ , viene dada por,

$$\begin{aligned} p(\mathbf{z}_{1:k+l} | \mathbf{y}_k) &= \frac{p(\mathbf{y}_k, \mathbf{z}_{1:k}, \mathbf{z}_{k+1:k+l})}{p(\mathbf{y}_k)} = \frac{p(\mathbf{z}_{1:k} | \mathbf{y}_k, \mathbf{z}_{k+1:k+l}) p(\mathbf{y}_k, \mathbf{z}_{k+1:k+l})}{p(\mathbf{y}_k)} \\ &= p(\mathbf{z}_{1:k} | \mathbf{y}_k) p(\mathbf{z}_{k+1:k+l} | \mathbf{y}_k). \end{aligned}$$

Entonces, podemos obtener la FIM para el estado suavizado como,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}_{k|k+l} &= -\mathbb{E}_{\mathbf{z}_{1:k+l}|\mathbf{y}_k} \{ \nabla_{\mathbf{y}_k} [\nabla_{\mathbf{y}_k} \ln p(\mathbf{z}_{1:k+l}|\mathbf{y}_k)]^T \} \\
 &= -\mathbb{E}_{\mathbf{z}_{1:k}|\mathbf{y}_k} \{ \nabla_{\mathbf{y}_k} [\nabla_{\mathbf{y}_k} \ln p(\mathbf{z}_{1:k}|\mathbf{y}_k)]^T \} \\
 &\quad - \mathbb{E}_{\mathbf{z}_{1:k+l}|\mathbf{y}_k} \{ \nabla_{\mathbf{y}_k} [\nabla_{\mathbf{y}_k} \ln p(\mathbf{z}_{k+1:k+l}|\mathbf{y}_k)] \} \\
 &= \mathbf{J}_k - \mathbb{E}_{\mathbf{z}_{1:k+l}|\mathbf{y}_k} \{ \nabla_{\mathbf{y}_k} [\nabla_{\mathbf{y}_k} \ln p(\mathbf{z}_{k+1:k+l}|\mathbf{y}_k)] \}.
 \end{aligned}$$

El resultado queda demostrado sabiendo que, por definición de la FIM, restar el último término en la expresión anterior equivale a sumar una matriz semidefinida positiva.

## Localización Dinámica Inalámbrica en Entornos Complejos

### Contenido

4.1. Descripción del problema . . . . .	89
4.2. Modelo dinámico . . . . .	89
4.3. Modelo de observación . . . . .	92
4.4. Verosimilitud adaptativa . . . . .	94
4.5. Filtro de partículas adaptativo (ALPA) . . . . .	101
4.6. Resultados experimentales . . . . .	105
4.7. Resultados mediante simulación . . . . .	115
4.8. Complejidad . . . . .	116
4.9. Discusión . . . . .	121
4.A. Anexo: distribución de las medidas RSS y TOA para simulación	123

En el pasado reciente, los sistemas de navegación por satélite (GNSS) han abierto un amplio abanico de posibilidades, con más dispositivos y más aplicaciones que proveen localización precisa en un mayor número de escenarios y a un mayor número de usuarios (Lachapelle 2004). Sin embargo, estos sistemas permanecen casi inaccesibles en entornos complejos donde no hay una línea de visión directa (LOS) con los satélites (Küpper 2005). Estos entornos complejos pueden ser, por ejemplo, interiores de edificios o áreas densas urbanas. Al mismo tiempo, la proliferación de redes WLAN convierte a esta tecnología en una valiosa alternativa a GNSS para proveer localización en estos espacios (Gustafsson and Gunnarsson 2005).

El mayor obstáculo para el desarrollo de sistemas de localización en redes WLAN es el comportamiento complejo de las señales inalámbricas en estos entornos difíciles. Los sistemas de localización inalámbrica determinan la posición del NL a partir de ciertas métricas extraídas de las señales transmitidas por los nodos de la red (Qi 2006, Falsi et al. 2006, Mazuelas et al. 2009a). Las condiciones de propagación multicamino y el NLOS provocan que el comportamiento de estas métricas sea impredecible y cambiante en el tiempo. Por lo tanto, los sistemas de localización basados en canales de propagación estáticos y en asunciones de errores Gaussianos no son adecuados en entornos complejos.

En este Capítulo, presentamos un marco para la fusión de datos adaptativa, capaz de tratar las dificultades de no-linealidad y no-Gaussianidad, debidas a la propagación multicamino y NLOS. Las técnicas que proponemos estiman de manera adaptativa distancias o posiciones en entornos complejos, basándose en el modelado dinámico no-paramétrico y en el filtrado de partículas (enfoque global), dando lugar al filtro de partículas de verosimilitud adaptativa (ALPA). Las principales contribuciones de este Capítulo son:

- desarrollamos una técnica adaptativa y sistemática que modela la relación entre medidas y distancias por medio de una función de verosimilitud dinámica obtenida empíricamente;
- a partir de esta técnica, llevamos a cabo fusión Bayesiana de datos y derivamos técnicas de filtrado no-lineal y no-Gaussiano basadas en filtros de partículas;
- especificamos los resultados de esta fusión de datos para el caso de un sistema de localización que emplea las métricas RSS y TOA;
- en comparación con otras técnicas actuales, presentamos los resultados de localización obtenidos por medio de medidas recogidas en un escenario de interior a partir de dispositivos WLAN comerciales;
- mostramos que el método propuesto está cerca del óptimo teórico como así refleja su rendimiento en comparación con la CRLB.

El resto del Capítulo describe cada uno de los bloques implicados en el sistema de localización inalámbrica diseñado (ver Figura 4.1), y evalúa su rendimiento y complejidad en comparación con los métodos existentes. Para ello, la Sección 4.1 describe el problema de estimación, cuyos modelos dinámico y

de observación detallamos en la Sección 4.2 y Sección 4.3, respectivamente. La Sección 4.4 propone una técnica para el modelado dinámico de la función de verosimilitud a partir de medidas RSS y TOA, así como de su fusión; mientras que la Sección 4.5 propone el filtrado de partículas como algoritmo para la solución del problema de estimación a partir de las verosimilitudes anteriores. La Sección 4.6 y la Sección 4.7 evalúan el rendimiento del método propuesto en comparación con técnicas convencionales, mediante experimentación (medidas reales) y simulación (cotas teóricas), respectivamente. La Sección 4.8 analiza la complejidad computacional de dicho método y emplea técnicas para su reducción; y, finalmente, la Sección 4.9 sintetiza las conclusiones extraídas de los apartados anteriores.

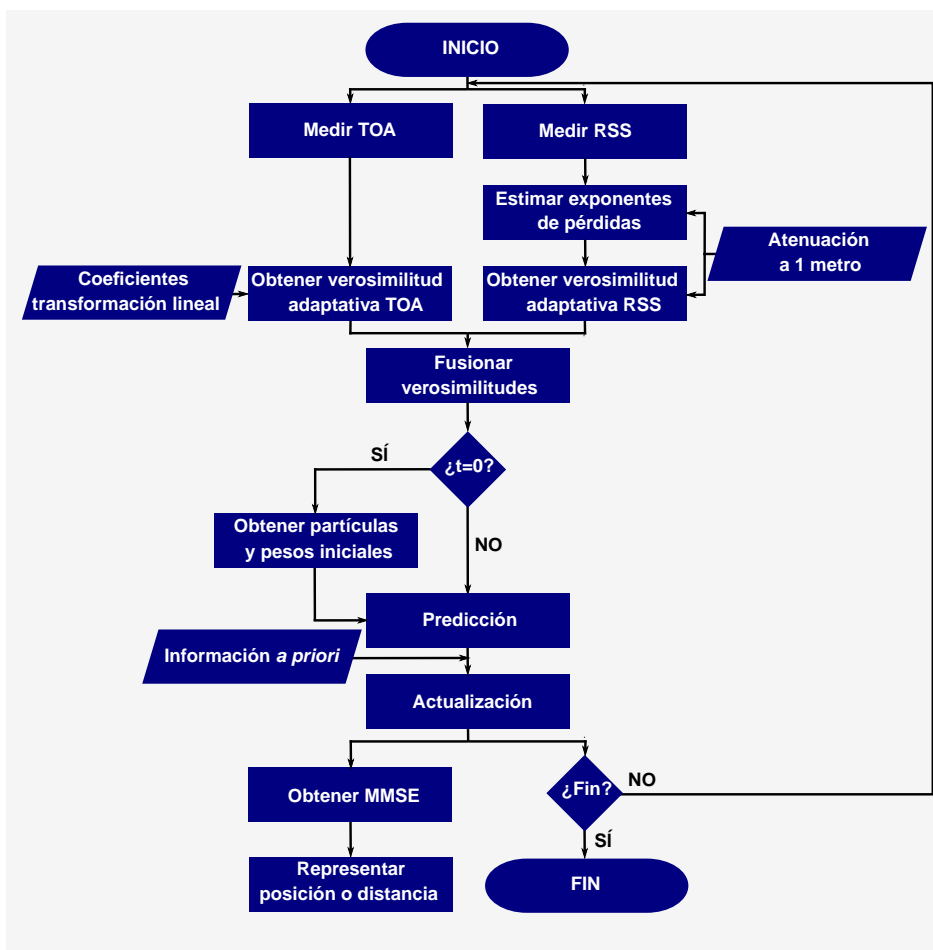
## 4.1. Descripción del problema

Consideremos un escenario en 2D en el que un NL se mueve libremente (e.g., una persona caminando). Para determinar su posición, este NL se comunica con varios NBs con posiciones conocidas. Puesto que el sistema de localización puede obtener medidas en instantes discretos de tiempo,  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , estaremos interesados en estimar la secuencia,  $\{\mathbf{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , a partir de la secuencia de medidas,  $\{\mathbf{z}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Las entradas al vector  $\mathbf{x}_k$  pueden ser las distancias entre el NL y cada NB, o las coordenadas de la posición del NL. Las entradas al vector  $\mathbf{z}_k$  serán las métricas RSS y TOA.

Por lo visto en el Capítulo 3, la variable  $\mathbf{x}_k$  depende tanto de  $\mathbf{x}_{k-1}$  como de algunas de sus derivadas. Incorporando todas estas variables al vector de estado,  $\mathbf{y}_k$ , podemos llevar a cabo su estimación bajo el marco ofrecido por el HMM de la Sección 3.1. Como vimos en dicha Sección, dado el estado en el instante de tiempo  $t_k$ , las únicas relaciones de dependencia restantes son la relación entre el estado actual y el anterior, dada por el modelo dinámico, y la relación entre las medidas y el estado actuales, dada por el modelo de observación.

## 4.2. Modelo dinámico

La Sección 3.1 mostraba que la evolución en el tiempo de la distancia o de una componente de la posición se puede aproximar por su desarrollo en serie



**Figura 4.1:** Diagrama de flujo para localización inalámbrica mediante el filtro ALPA. El proceso de obtención de los exponentes de pérdidas para las medidas RSS fue descrito con detalle en (Mazuelas et al. 2009a), mientras que para la obtención de los coeficientes de la transformación lineal que relaciona las medidas TOA con la distancia puede utilizarse el algoritmo propuesto en el Anexo 2.A o el propuesto en (Bahillo et al. 2010).

de Taylor de orden  $n$ . Por lo tanto, a partir de (3.1), y aproximando la derivada  $m$ -ésima de la posición, para  $m = 1, \dots, n$ , por su desarrollo en serie de Taylor de orden  $(n - m)$ , podemos obtener la evolución en el tiempo del vector de estado  $\mathbf{y}_k$ , como

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{y}_k + \mathbf{n}_k^d, \quad (4.1)$$

donde

$$\mathbf{F}_k = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t & \frac{\Delta t^2}{2} & \dots & \frac{\Delta t^n}{n!} \\ 0 & 1 & \Delta t & \dots & \frac{\Delta t^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

es la matriz de transición,  $\Delta t = (t_{k+1} - t_k) \in \mathbb{R}$  es el intervalo de muestreo, y el término  $\mathbf{n}_k^d$  es el error en las aproximaciones. Por ejemplo, en el caso de estimar un parámetro unidimensional,  $x_k$ , el error  $\mathbf{n}_k^d$  viene dado por

$$\mathbf{n}_k^d = \begin{pmatrix} \frac{\Delta t^{n+1}}{(n+1)!} x^{(n+1)}(\xi_0) \\ \frac{\Delta t^n}{n!} x^{(n+1)}(\xi_1) \\ \vdots \\ \Delta t x^{(n+1)}(\xi_n) \end{pmatrix},$$

siendo  $\xi_0, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}$  diferentes valores en el intervalo  $[t_k, t_{k+1}]$ . Los valores tomados por la derivada  $(n + 1)$ -ésima de  $x(t)$  en los puntos desconocidos  $\xi_0, \dots, \xi_n$  se modelan habitualmente como realizaciones de una variable aleatoria Gaussiana de media cero con desviación típica  $\sigma_{d^{(n+1)}}$  (Bar-Shalom et al. 2001, Ristic et al. 2004). Entonces, podemos modelar la evolución en el tiempo de  $x_k$  como un camino aleatorio. En este caso, tendremos un proceso discreto de Wiener de velocidad o de aceleración, dependiendo de si utilizamos el desarrollo en serie de Taylor de segundo o tercer orden, respectivamente (Bar-Shalom et al. 2001).<sup>1</sup>

De lo anterior deducimos que, a pesar de estar desarrollando un sistema de localización para entornos complejos, podemos considerar el modelo dinámico,  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{k-1})$ , lineal y Gaussiano con gran generalidad. Este modelo dinámico será el ingrediente principal en la etapa de predicción del filtro.

<sup>1</sup>En el Ejemplo 3.2 veíamos un ejemplo de proceso discreto de Wiener de velocidad.

### 4.3. Modelo de observación

El segundo ingrediente necesario para llevar a cabo el filtrado es el modelo de observación,  $p(\mathbf{z}_k|\mathbf{y}_k)$ , que relaciona las medidas con el vector de estado. En concordancia con trabajos previos, a continuación presentamos este modelo para las métricas RSS y TOA (Mazuelas et al. 2009a, Bahillo et al. 2010).

#### 4.3.1. Potencia recibida

En un momento y lugar específicos, podemos inferir la distancia entre el NL y el NB a partir de los valores RSS, ya que la distancia afecta el nivel de señal. La atenuación causada por la distancia entre dos nodos es conocida como *path-loss* y es proporcional a esta distancia elevada a cierto exponente, llamado exponente de pérdidas o de *path-loss* (Gustafsson and Gunnarsson 2005, Qi 2006, Patwari et al. 2003, Mazuelas et al. 2009a). Sin embargo, los valores RSS obtenidos en el receptor se ven a su vez afectados por un amplio rango de factores impredecibles, como la propagación multicamino (desvanecimiento rápido) y el efecto de sombra (desvanecimiento lento) (Hashemi 1993). Reflejando estos factores en la fórmula de Friis de espacio libre, llegamos a la expresión que relaciona potencia recibida,  $P_r$ , con distancia entre los nodos,  $d_k$ , (Qi 2006),

$$P_r = \frac{G_t \cdot G_r}{4\pi} \cdot P_t \cdot \frac{g^2 \cdot \gamma}{(d_k)^{\beta_s}} \quad (4.2)$$

siendo  $P_t$  la potencia transmitida,  $G_t$  y  $G_r$  las ganancias en las antenas transmisora y receptora, respectivamente,  $g$  y  $\gamma$  los parámetros de las distribuciones Rayleigh/Rician y log-normales que modelan el desvanecimiento rápido y lento, respectivamente, y  $\beta_s$  el exponente de pérdidas (Hashemi 1993).

Siguiendo el procedimiento descrito en (Qi 2003), y expresando la relación en unidades logarítmicas, el modelo de observación para el caso en el que se reciben valores RSS viene dado por,<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} z_k^s &= \alpha_s - 10\beta_s \log_{10}(d_k) + n_k^s \\ &= f_s(d_k) + n_k^s, \end{aligned} \quad (4.3)$$

<sup>2</sup>Empleamos el subíndice  $s$  para indicar que un parámetro constante está relacionado de alguna manera con las medidas RSS. En el caso de que sea un parámetro variable con el índice temporal  $k$ , empleamos el superíndice  $s$  para indicar esta relación con RSS.



siendo  $z_k^s$  el valor RSS, y  $\alpha_s$  una constante que depende de diversos factores tales como el desvanecimiento lento y rápido, la ganancia en las antenas de transmisor y receptor  $G_t$  y  $G_r$ , y la potencia transmitida  $P_t$  (Patwari et al. 2003, Mazuelas et al. 2009a, Qi 2006). El término de error  $n_k^s$  puede ser modelado como una variable Gaussiana de media cero, en los casos en que  $\alpha_s$  y  $\beta_s$  se corresponden con sus valores reales (es decir, en ese caso la expresión anterior solo incluye error aleatorio).

En la práctica, el valor de  $\alpha_s$  puede ser conocido con anterioridad (por ejemplo, puede ser obtenido midiendo la potencia recibida a 1 metro de distancia, o provisto por el fabricante). Sin embargo, en entornos complejos, el valor estimado de  $\beta_s$  no coincidirá con su valor real. En estos casos, el error en (4.3),  $n_k^s$ , tendrá media distinta de cero proporcional al logaritmo de la distancia (Mazuelas et al. 2009a).

#### 4.3.2. Tiempo de Llegada

Podemos estimar la distancia entre el NL y el NB a través de una transformación lineal del tiempo que tarda la señal en viajar desde un nodo al otro, suponiendo conocida la velocidad de la señal. Debido a la dificultad de sincronización de los dispositivos en una red inalámbrica, las técnicas que utilizan el tiempo de vuelo de ida y vuelta (RTT) resultan más favorables (Bahillo et al. 2010). En este caso, la relación entre la distancia,  $d_k$ , y la medida del TOA,  $z_k^\tau$ , es afín,<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} z_k^\tau &= \alpha_\tau + \beta_\tau d_k + n_k^\tau \\ &= f_\tau(d_k) + n_k^\tau, \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde  $\alpha_\tau$  y  $\beta_\tau$  son constantes que podemos estimar en una etapa anterior al proceso de localización (por ejemplo, podemos obtener estos parámetros por conocimiento del tiempo de procesamiento (Golden and Bateman 2007), mediante una regresión lineal de valores TOA recogidos a diferentes distancias (Bahillo et al. 2010, Prieto et al. 2009c) o realizando mediciones del valor TOA entre los NBs —ver Anexo 2.A—).

<sup>3</sup>Empleamos el subíndice  $\tau$  para indicar que un parámetro constante está relacionado de alguna manera con las medidas TOA. En el caso de que sea un parámetro variable con el índice temporal  $k$ , empleamos el superíndice  $\tau$  para indicar esta relación con TOA.

El término de error en (4.4),  $n_k^T$ , puede ser modelado como una variable Gaussiana de media cero cuando exista una línea de visión directa (LOS) entre el NL y el NB (es decir, el modelo incluirá solo error aleatorio). Sin embargo,  $n_k^T$  seguirá una distribución positiva (sesgo positivo) en los casos de propagación NLOS (Qi 2006, Mazuelas et al. 2009b, Prieto et al. 2009c).

De la discusión anterior, podemos apreciar que en ambos casos la esperanza de las medidas es  $\mathbb{E}\{z\} = f(d_k) + b$ , donde  $f$  es una función lineal o logarítmica, y  $b$  es el error sistemático en el modelo (sesgo). Además, podemos concluir que en entornos complejos:

1. la relación entre medidas y distancias es no-lineal y no-Gaussiana.
2. dicha relación depende en un alto grado del entorno de propagación, el cual puede cambiar rápidamente.

Por lo tanto, la asunción lineal y Gaussiana en el modelo de observación,  $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{y}_k)$ , resulta inadecuada en entornos complejos. Debido a esto, las técnicas de inferencia habituales que utilizan modelos simples y estáticos pueden obtener resultados imprecisos en entornos reales complejos, como zonas de interior y áreas urbanas.

#### 4.4. Verosimilitud adaptativa

Bajo el marco provisto por el HMM representado en la Figura 3.1, la función de verosimilitud,  $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{y}_k)$ , incorpora al problema de estimación la información relacionada con las medidas. Sin embargo, en entornos complejos, su valor es desconocido *a priori*, ya que la distribución del término de error en el modelo de observación es muy dependiente del entorno y varía rápidamente en el tiempo. Para medidas de TOA, este término de error ha sido modelado con diversas distribuciones paramétricas como Gaussiana, Exponencial, Gamma, Rayleigh, etc. (Qi 2003, Mazuelas et al. 2009b, Qi 2006, Prieto et al. 2009b), o por medio de distribuciones específicas obtenidas para cada entorno de propagación particular (Prieto et al. 2009a, Jourdan et al. 2008). En el caso RSS, aunque el error se asume habitualmente como Gaussiano y de media cero, esta asunción es demasiado simplista en escenarios realistas donde debemos estimar el modelo de propagación en cada instante de tiempo (el exponente de pérdidas) (Mazuelas et al. 2009a, Qi 2003).

En los siguientes apartados, proponemos una función de verosimilitud adaptativa para la fusión de datos. Esta verosimilitud se ajusta dinámicamente a las condiciones cambiantes del canal de propagación a partir de la naturaleza de las medidas obtenidas en tiempo real.

#### 4.4.1. Verosimilitud no-paramétrica

El conjunto de medidas TOA o RSS obtenido en cada instante de tiempo consiste en muestras de la variable aleatoria  $z_k^T$  o  $z_k^S$ , respectivamente. Como mostramos a continuación, es posible representar la función de verosimilitud, en cada instante de tiempo y entorno, empleando el conjunto de muestras a través de una representación no-paramétrica basada en funciones *kernel* (Rosenblatt 1956, Parzen 1962, Kushki et al. 2007).<sup>4</sup> Por lo tanto, tras recibir  $M$  medidas de TOA o  $M$  medidas de RSS,  $\{z_k^i, i = 1, \dots, M\}$ , podemos aproximar la pdf de  $z_k^T$  o  $z_k^S$  como,

$$p(z) \approx \frac{1}{Mh} \sum_{i=1}^M K\left(\frac{z - z_k^i}{h}\right), \quad (4.5)$$

donde  $K(\cdot)$  es una función *kernel* y  $h$  es un número positivo denominado ancho de banda (Rosenblatt 1956, Parzen 1962, Kushki et al. 2007).

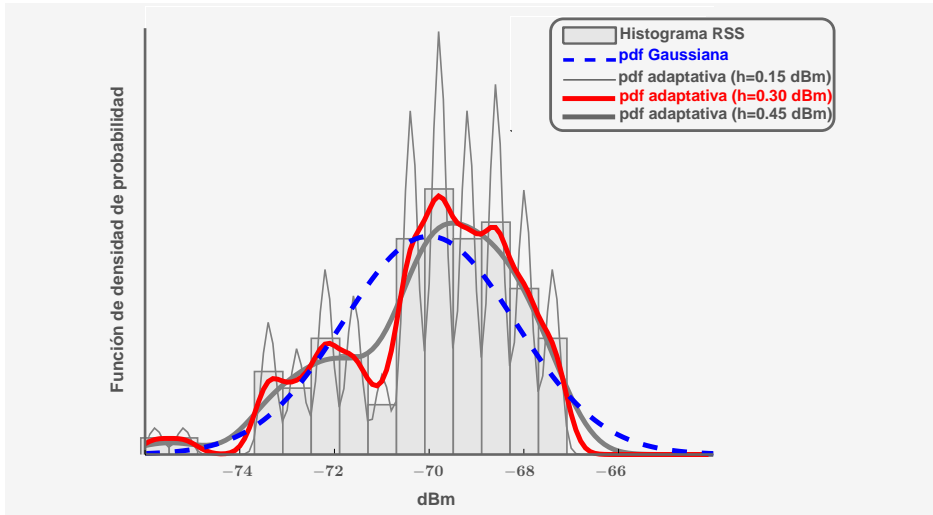
Podemos elegir varias funciones como *kernel*, siendo lo más común utilizar un *kernel* Gaussiano estándar (Hwang et al. 1994), esto es,

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}. \quad (4.6)$$

**Ejemplo 4.1.** En el instante de tiempo  $t_k$ , el NL se encuentra a 10 metros de un NB. Para estimar esta distancia, el NL recibe 100 medidas de RSS y 100 medidas de TOA, realizadas en las señales transmitidas entre el NL y el NB mediante los sistemas de medida descritos en (Mazuelas et al. 2009a) y (Bahillo et al. 2009b), respectivamente. Las Figuras 4.2 y 4.3 muestran el histograma obtenido a partir de las medidas RSS y TOA, respectivamente.

Si consideramos que las medidas se distribuyen como una variable aleatoria Gaussiana (enfoque local), las pdfs del conjunto de medidas ven-

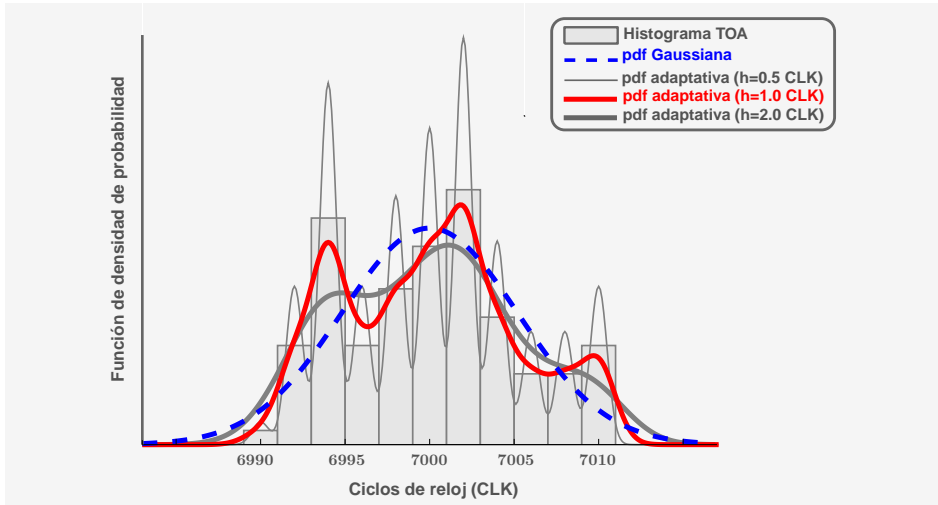
<sup>4</sup>Una función *kernel* es una función simétrica pero no necesariamente positiva cuya integral es la unidad.



**Figura 4.2:** Histogramas normalizados para 100 medidas de RSS, pdf Gaussiana con media y desviación típica muestrales, y pdf adaptativa obtenida a partir de (4.5). La densidad adaptativa aproxima de manera precisa la marcada aleatoriedad de las medidas obtenidas en entornos complejos.

drían dadas por la campana representada en línea discontinua de las Figuras 4.2 y 4.3. Sin embargo, esta aproximación esconde la naturaleza de las medidas, que sí es reflejada en el caso de utilizar un enfoque global, como el de la pdf adaptativa propuesta en la expresión (4.5). Las Figuras 4.2 y 4.3 representan esta pdf obtenida para tres valores distintos del ancho de banda. La curva que refleja de manera más fiel la naturaleza de las medidas es la resultante de elegir, para el ancho de banda, la mitad de la resolución del sistema de medida, esto es, 0,3 dBm en el caso RSS y 1 ciclo de reloj para TOA (Mazuelas et al. 2009a, Bahillo et al. 2009b).

En el Ejemplo 4.1, a pesar de que la densidad real es desconocida, el método propuesto para obtener una pdf adaptativa permite expresar el comportamiento dinámico de las medidas en entornos complejos con mayor precisión que lo hacen las estimaciones de densidad dadas por el histograma o por una pdf Gaussiana (Kushki 2008, Scott 1992). Además, la elección del ancho de banda no compromete la robustez del sistema puesto que las distribuciones son unidimensionales, pudiendo obtener un ancho de banda adecuado simplemente como la mitad de la resolución del sistema de medida. Esta elección evita



**Figura 4.3:** Histogramas normalizados para 100 medidas del TOA, pdf Gaussiana con media y desviación típica muestrales, y pdf adaptativa obtenida a partir de (4.5). La densidad adaptativa aproxima de manera precisa la marcada aleatoriedad de las medidas obtenidas en entornos complejos.

tanto curvas poco suavizadas con demasiadas crestas espurias, como densidades sobruavizadas que oscurecen la naturaleza subyacente de las medidas (Hwang et al. 1994).<sup>5</sup>

Suponiendo que la distribución de las medidas  $z$  tiene la expresión (4.5) en el instante  $t_k$ , podemos obtener la verosimilitud que relaciona distancias y medidas en cada instante  $k$ , como muestra la Proposición 4.2.

**Proposición 4.2.** Sea  $\mathbf{z}_k = \{z_k^i, i = 1, \dots, M\}$  un conjunto de medidas (muestras de  $z$ ) relacionadas con la distancia,  $d_k$ , por un modelo  $\mathbb{E}\{z\} = f(d_k) + b$ . Entonces, suponiendo que  $z$  se distribuye según (4.5), y llamando  $\zeta_{j,i} = z_k^j - z_k^i + \bar{z}_k$ , la función de verosimilitud de las medidas es

$$p(\mathbf{z}_k | d_k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{M}{2}} (Mh)^M} \sum_{(i_1, \dots, i_M) \in \mathcal{M}^M} \mathbb{E}_b \left\{ \exp \left( \frac{-1}{2h^2} \sum_{j=1}^M (\zeta_{j,i_j} - f(d_k) - b)^2 \right) \right\}, \quad (4.7)$$

donde  $\mathbb{E}_b\{\cdot\}$  es la esperanza respecto a los errores sistemáticos,  $b$ , en el modelo.

<sup>5</sup>Por lo tanto, en el Ejemplo 4.1 y en adelante, fijemos un ancho de banda para las funciones *kernel* de 0,3 dBm y 1 ciclo de reloj, para RSS y TOA, respectivamente.

*Demostración.* Suponiendo que  $z$  se distribuye según (4.5) con un *kernel* Gaussiano estándar, se tiene que  $\mathbb{E}\{z\} = \bar{\mathbf{z}}_k$ , y, por lo tanto, la distribución de una medida específica  $z_k^j$  dados  $d_k$  y  $b$  es

$$p(z_k^j | d_k, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} M h} \sum_{i=1}^M \exp\left(-\frac{(z_k^j - z_k^i + \bar{\mathbf{z}}_k - (f(d_k) + b))^2}{2h^2}\right).$$

La distribución del conjunto de medidas  $\mathbf{z}_k$  dados  $d_k$  y  $b$  es

$$p(\mathbf{z}_k | d_k, b) = \prod_{j=1}^M p(z_k^j | d_k, b),$$

por lo tanto, llamando  $\zeta_{j,i} = z_k^j - z_k^i + \bar{\mathbf{z}}_k$ ,

$$p(\mathbf{z}_k | d_k, b) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{M}{2}} (Mh)^M} \sum_{(i_1, \dots, i_M) \in \mathcal{M}^M} \exp\left(\frac{-1}{2h^2} \sum_{j=1}^M (\zeta_{j,i_j} - f(d_k) - b)^2\right).$$

Finalmente, obtenemos el resultado observando que la función de verosimilitud viene dada por

$$p(\mathbf{z}_k | d_k) = \int p(\mathbf{z}_k | d_k, b) p(b) db. \quad \square$$

La verosimilitud obtenida en la Proposición 4.2 adquiere diferentes expresiones en función de la distribución con que modelemos el sesgo, ya que la esperanza en (4.7) es respecto a este. El siguiente Ejemplo obtiene las expresiones en el caso de un sesgo Gaussiano y de media cero en las medidas RSS, y un sesgo Uniforme positivo en las medidas TOA (Mazuelas et al. 2009a, Bahillo et al. 2009b).

**Ejemplo 4.3.** Dado el conjunto de medidas RSS en  $t_k$ ,  $\mathbf{z}_k^s$ , queremos obtener la verosimilitud de la distancia entre el NL y un NB. Considerando que los exponentes de pérdidas estimados para las medidas RSS se distribuyen como una Gaussiana de media su valor real y desviación típica  $\sigma_\beta$ , el sesgo en las medidas es una Gaussiana  $\mathcal{N}(0, \sigma_{sh})$ , siendo  $\sigma_{sh} = 10\sigma_\beta \log_{10}(d_k)$ . A

partir de la Proposición 4.2 y suponiendo  $\sigma_{sh}$  constante,

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{z}_k^s | d_k) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{M}{2}} (Mh)^M} \cdot \\
 &\quad \sum_{(i_1, \dots, i_M) \in \mathcal{M}^M} \int \exp\left(\frac{-1}{2h^2} \sum_{j=1}^M (\zeta_{j,i_j} - f(d_k) - b)^2\right) \varphi_{(0, \sigma_{sh})}(b) db \\
 &= \frac{h}{(2\pi)^{\frac{M}{2}} (Mh)^M \sqrt{M\sigma_{sh}^2 + h^2}} \cdot \\
 &\quad \sum_{(i_1, \dots, i_M) \in \mathcal{M}^M} \exp\left(\frac{-1}{2h^2} \left(\sum_{j=1}^M (\zeta_{j,i_j} - f_s(d_k))^2 - \frac{M^2 \sigma_{sh}^2}{M\sigma_{sh}^2 + h^2} \mu_s^2\right)\right),
 \end{aligned}$$

donde  $\mu_s = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M (\zeta_{j,i_j} - f_s(d_k))$ .

Si el conjunto está formado por medidas TOA, podemos modelar el sesgo debido a la propagación NLOS como una Uniforme  $\mathcal{U}(0, \gamma_\tau)$ . En este caso,

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{z}_k^r | d_k) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{M}{2}} (Mh)^M} \cdot \\
 &\quad \sum_{(i_1, \dots, i_M) \in \mathcal{M}^M} \int_0^{\gamma_\tau} \exp\left(\frac{-1}{2h^2} \sum_{j=1}^M (\zeta_{j,i_j} - f(d_k) - b)^2\right) \frac{1}{\gamma_\tau} db \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{M}{2}} (Mh)^M \gamma_\tau} \sum_{(i_1, \dots, i_M) \in \mathcal{M}^M} \exp\left(\frac{-1}{2h^2} \left(\sum_{j=1}^M (\zeta_{j,i_j} - f_\tau(d_k))^2 - M\mu_\tau^2\right)\right) \\
 &\quad \cdot [\Phi_{(\mu_\tau, \sigma_\tau)}(\gamma_\tau) - \Phi_{(\mu_\tau, \sigma_\tau)}(0)],
 \end{aligned}$$

siendo  $\Phi_{(\mu, \sigma)}(\cdot)$  la función de distribución de una variable Gaussiana  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$  evaluada en su argumento. Además,  $\mu_\tau = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M (\zeta_{j,i_j} - f_\tau(d_k))$  y  $\sigma_\tau = \frac{h}{\sqrt{M}}$ .

La Proposición 4.2 permite obtener verosimilitudes individuales a partir de un conjunto de medidas. Este proceso tiene lugar dentro de los bloques *Obtener verosimilitud adaptativa TOA* y *Obtener verosimilitud adaptativa RSS* del diagrama de flujo de la Figura 4.1. El siguiente proceso en este diagrama es la fusión de datos, que llevaremos a cabo combinando estas verosimilitudes como explica el siguiente apartado.

#### 4.4.2. Fusión de información

Como mostramos en el Capítulo 3, la información aportada por las medidas está contenida en la función de verosimilitud usada en cada instante de tiempo. Sean  $\mathbf{z}_k^s$  y  $\mathbf{z}_k^T$  conjuntos de medidas de RSS y de TOA, respectivamente, formando a su vez el conjunto total de medidas obtenido en el instante  $k$ . Entonces, suponiendo que dada la distancia real,  $d_k$ ,  $\mathbf{z}_k^s$  y  $\mathbf{z}_k^T$  son independientes,<sup>6</sup> tenemos que

$$p(\mathbf{z}_k | d_k) = p(\mathbf{z}_k^s | d_k) \cdot p(\mathbf{z}_k^T | d_k) \quad (4.8)$$

donde la función de verosimilitud de cada tipo de medidas puede ser obtenida dinámicamente utilizando la Proposición 4.2.<sup>7</sup>

**Ejemplo 4.4.** *En el instante  $t_k$ , el NL se encuentra a 16,7 metros de un NB. Para estimar esta distancia, el NL recibe 5 medidas de RSS y 5 medidas de TOA, realizadas en las señales transmitidas entre el NL y el NB mediante los sistemas de medida descritos en (Mazuelas et al. 2009a) y (Bahillo et al. 2009b), respectivamente.*

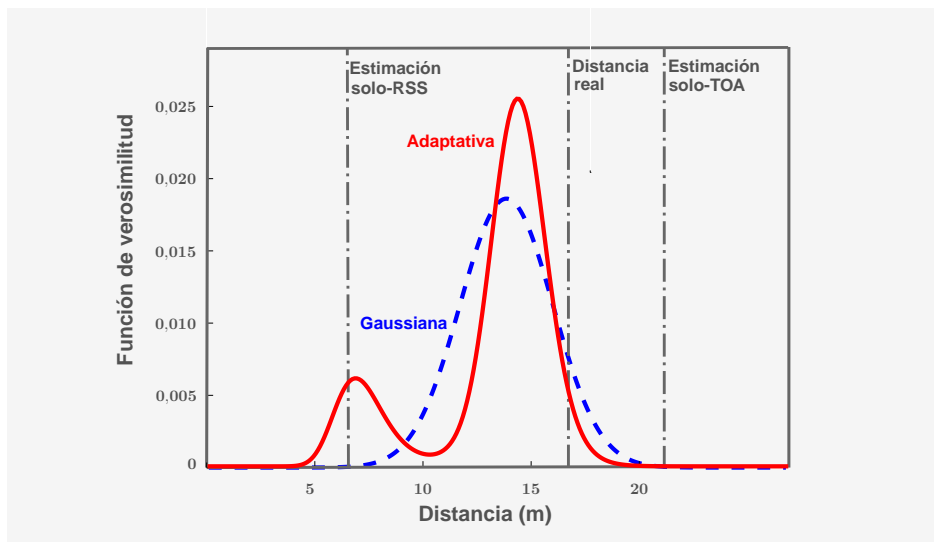
*Mediante los mismos modelos para el sesgo del Ejemplo 4.3, obtenemos la función de verosimilitud multiplicando las verosimilitudes individuales RSS y TOA. La Figura 4.4 muestra el resultado de esta fusión. A partir del MLE de esta función, y comparándolo con el obtenido mediante un modelo Gaussiano, apreciamos una mejora de 0,5 metros en la estimación de la distancia. Esta mejora equivale a una reducción del error del 18 %. La Figura 4.4 refleja también las distancias que hubiéramos obtenido mediante ML utilizando únicamente medidas RSS o medidas TOA.*

En el Ejemplo 4.4 podemos observar cómo la función de verosimilitud adaptativa provee mucha más información acerca de la distancia que el modelo Gaussiano, gracias a la combinación de las verosimilitudes individuales adap-

<sup>6</sup>Esta es una asunción leve puesto que la principal relación entre las medidas RSS y TOA recae en la distancia entre el emisor y el transmisor y las otras posibles dependencias son desconocidas.

<sup>7</sup>En el Ejemplo 4.4 y en el resto del Capítulo, empleamos modelos aproximados para el sesgo en las medidas en concordancia con trabajos los trabajos previos (Mazuelas et al. 2009a) y (Bahillo et al. 2009b). En concreto, elegimos  $\gamma_T = 4$  ciclos de reloj para la Uniforme  $\mathcal{U}(0, \gamma_T)$  con la que modelamos el sesgo TOA, y  $\sigma_s = 3$  dBm como desviación de la Gaussiana  $\mathcal{N}(0, \sigma_s)$  utilizada como sesgo RSS.





**Figura 4.4:** La fusión de información adaptativa RSS/TOA, definida por la Proposición 4.2 y por (4.8), resulta, en este caso, en una mejora de 0,5 metros en la estimación por ML comparada al caso Gaussiano o, lo que es lo mismo, en una reducción del 18 % del error.

tativas obtenidas mediante medidas de RSS y de TOA. Así mismo, la altura de ambas funciones refleja la mayor fiabilidad obtenida mediante estimación adaptativa. De la Figura 4.4 también se desprende la mejora alcanzada a partir de la fusión de información, respecto a las estimaciones individuales. Esta función de verosimilitud nos sirve para definir el filtro ALPA en el siguiente apartado.

#### 4.5. Filtro de partículas adaptativo (ALPA)

En el marco ofrecido por el HMM, si el modelo dinámico y el de observación son lineales con errores Gaussianos, todas las funciones de distribución *a posteriori* son también Gaussianas. En este caso, todas las funciones están completamente descritas por el valor de los vectores de medias y las matrices de covarianzas, obtenidos mediante un KF (Ristic et al. 2004). No obstante, para el caso de interés en este Capítulo, el modelo de observación no es ni lineal ni Gaussiano, lo que da como resultado que el uso de un KF sea una elección subóptima. Para solventar este inconveniente, la solución clásica consiste en usar filtros de Kalman extendidos (EKFs), presentados también en el Capítulo 3 (Chen et al. 2009, Chen and Wu 2009). Sin embargo, podemos obtener mejores

rendimientos utilizando un enfoque global como los PFs, ya que estos permiten el uso de modelos más generales y flexibles (Gustafsson et al. 2002, Ristic et al. 2004), como es el caso de la función de verosimilitud adaptativa presentada en la Sección 4.4.

Los PFs están basados en el hecho de que una distribución estadística continua cualquiera puede ser aproximada por una distribución discreta. Para estimar la distribución *a posteriori*, los PFs obtienen de manera iterativa cierto número de muestras (partículas) y sus probabilidades (pesos) capaces de representar esta distribución. Estas partículas y pesos los podemos obtener con el método conocido como muestreo de importancia secuencial (SIS - *sequential importance sampling*) (Ristic et al. 2004, Doucet et al. 2000), donde solo necesitamos evaluar la función de verosimilitud por puntos para determinar el peso de las diferentes partículas. Por lo tanto, empleando PFs, podemos utilizar modelos más realistas, como la función de verosimilitud adaptativa presentada en este Capítulo, dando como resultado el filtrado ALPA descrito en la Tabla 4.1.

Para implementar el algoritmo detallado en la Tabla 4.1, debemos elegir una función de importancia,  $q(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{1:k}, \mathbf{z}_k)$ , siendo la elección más común utilizar la distribución de transición *a priori* dada por el modelo dinámico, esto es,  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{k-1})$  (Ristic et al. 2004). Esta elección permite una expresión bastante sencilla para obtener los pesos,

$$\tilde{w}_k^i = w_{k-1}^i \cdot \tilde{w}_r^i \cdot \tilde{w}_s^i.$$

Como muestra la Figura 4.5, para utilizar este algoritmo, tenemos que obtener muestras de la función de transición *a priori*,  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{k-1})$ , y evaluarlas en la función de verosimilitud adaptativa,  $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{y}_k)$ . Si el soporte de la función de importancia no abarca el soporte de la función de verosimilitud, solo unas pocas partículas caerán dentro de la “región de importancia” y, como consecuencia, deberemos incrementar el número de partículas para poder aproximar correctamente la distribución *a posteriori*.

En el algoritmo SIS, según aumenta  $k$ , la varianza de los pesos  $w_k^i$  también crece, y por lo tanto, después de cierto número de iteraciones, todas las partículas excepto una tendrán un peso despreciable. Este problema se conoce como degeneración (Ristic et al. 2004). Para solventarlo necesitamos llevar a cabo una etapa de remuestreo cuando detectemos que se ha alcanzado una degeneración severa. Una medida de la degeneración es el tamaño de muestra

Tabla 4.1: Filtrado ALPA

**I. Inicialización:**

- Partículas iniciales: generar  $N$  muestras  $\{\mathbf{y}_1^i, i = 1, \dots, N\}$  a partir de la función de densidad conocida  $p(\mathbf{y}_1)$ .
- Pesos iniciales:  $w_1^i = \frac{1}{N}, i = 1, \dots, N$ .

**II. Estimación recursiva: para  $k > 1$ ,**

1. Partículas en el instante  $t_k$  a partir de las partículas en  $t_{k-1}$ : generar  $N$  muestras  $\{\mathbf{y}_k^i, i = 1, \dots, N\}$  a partir de la función de importancia  $q(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{k-1}^i, \mathbf{z}_k)$ .
2. A partir de las medidas de TOA,  $\mathbf{z}_k^\tau$ , y la Proposición 4.2, evaluar el peso de cada partícula. Para  $i = 1, \dots, N$

$$\tilde{w}_\tau^i = p(\mathbf{z}_k^\tau | \mathbf{y}_k^i).$$

3. A partir de las medidas de RSS,  $\mathbf{z}_k^s$ , y la Proposición 4.2, evaluar el peso de cada partícula. Para  $i = 1, \dots, N$

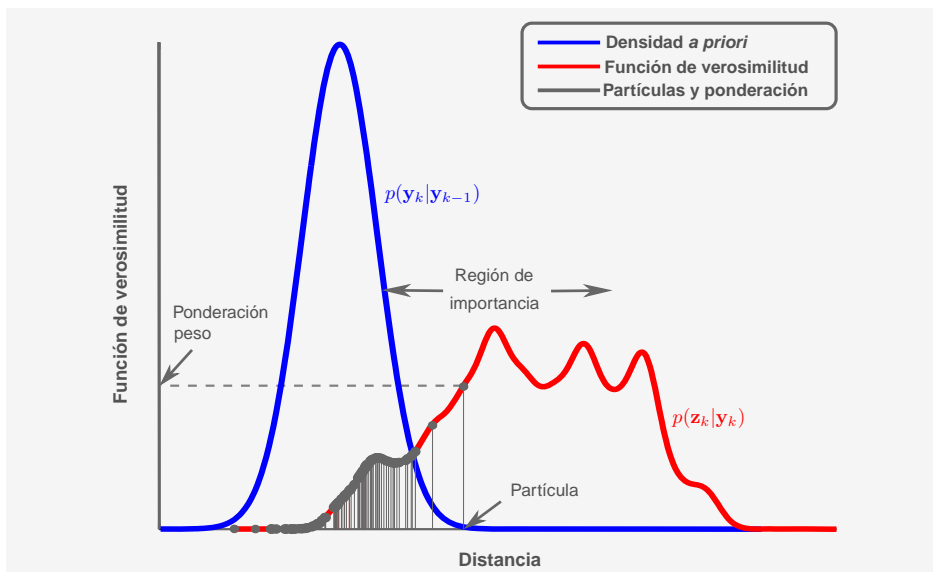
$$\tilde{w}_s^i = p(\mathbf{z}_k^s | \mathbf{y}_k^i).$$

4. Evaluar para  $i = 1, \dots, N$

$$\tilde{w}_k^i = w_{k-1}^i \cdot \frac{\tilde{w}_\tau^i \cdot \tilde{w}_s^i \cdot p(\mathbf{y}_k^i | \mathbf{y}_{k-1}^i)}{q(\mathbf{y}_k^i | \mathbf{y}_{k-1}^i, \mathbf{z}_k)}$$

5. Normalización: para  $i = 1, \dots, N$ , calcular

$$w_k^i = \frac{\tilde{w}_k^i}{\sum_{j=1}^N \tilde{w}_k^j}.$$



**Figura 4.5:** Densidad de transición *a priori* y función de verosimilitud. Obtenemos las partículas muestreando la densidad *a priori* y los pesos ponderando los pesos anteriores con la verosimilitud de la partícula correspondiente.

efectivo,  $N_{\text{eff}}$ , estimado como,

$$\hat{N}_{\text{eff}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (w_k^i)^2},$$

donde un valor pequeño de  $\hat{N}_{\text{eff}}$  indica degeneración severa. En definitiva, cuando detectamos la degeneración, generamos  $N$  muestras con pesos uniformes a partir de la representación discreta de la distribución *a posteriori*, dada por las partículas y los pesos de la etapa previa. Es decir, debemos obtener  $N$  muestras con reemplazo de la aproximación,

$$p(\mathbf{y}_k | \mathbf{z}_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^N w_k^i \delta(\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_k^i),$$

y los pesos asociados a las partículas resultantes son reseteados a valores uniformes ( $w_k^{i*} = 1/N$ ). Este proceso da lugar a la variante del algoritmo SIS conocida como muestreo de importancia con remuestreo (SIR - *sampling importance resampling*) (Ristic et al. 2004, Bernardo and Smith 2000).

En las siguientes Secciones, cuando apliquemos el filtro ALPA, emplearemos el algoritmo SIR. Obtendremos así una representación discreta de la función de distribución *a posteriori* formada por las partículas  $\mathbf{y}_k^i$  y sus pesos  $w_k^i$ . Para obtener una estimación de la distancia o la posición calcularemos el estimador MMSE. De acuerdo a la Sección 2.2, este viene dado por,<sup>8</sup>

$$\hat{\mathbf{y}}_k^{MMSE} = \sum_{i=1}^N w_k^i \mathbf{y}_k^i.$$

#### 4.6. Resultados experimentales

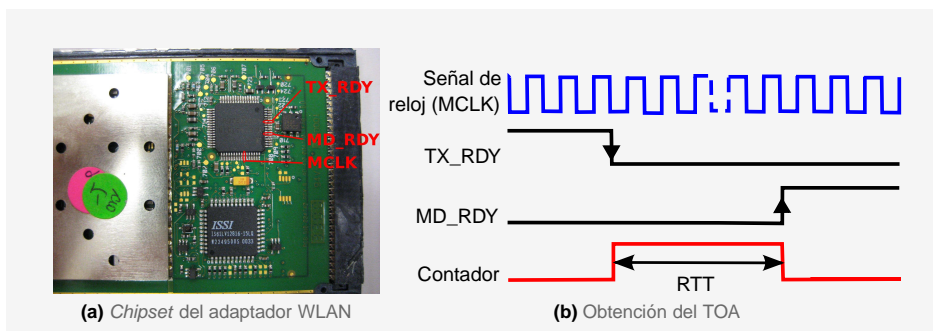
En lo que sigue, comparamos el rendimiento de las técnicas introducidas con el de implementaciones convencionales, mientras que en la Sección 4.7 las compararemos con el límite teórico (CRLB). Para ello, obtuvimos datos experimentales en un escenario real de interior empleando los sistemas descritos en (Bahillo et al. 2009b) y (Mazuelas et al. 2009a), y llevamos a cabo numerosas simulaciones Monte Carlo. Realizamos las medidas en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación de la Universidad de Valladolid, edificio de aulas, laboratorios y despachos, abarrotado de objetos y personas moviéndose libremente en el área de las medidas.

Empleamos los modelos dinámico y de observación descritos en las Secciones 4.2 y 4.3, respectivamente, junto con el vector de estado y la información *a priori* siguientes, dependiendo de si estimamos distancias o posiciones:

- *Estimación de distancias*: utilizamos un vector de estado  $\mathbf{y}_k = [d_k, d'_k, d''_k]^T$ . La desviación típica para el modelo dinámico  $\sigma_{d^{(3)}}$  es  $1 \text{ m/s}^3$ , que es aproximadamente el 50 % de su valor máximo (Bar-Shalom et al. 2001). Además, añadimos información *a priori* acerca de la primera y segunda derivada de la distancia, considerando su función de verosimilitud como una distribución Gaussiana de media cero,  $\mathcal{N}(0, \sigma_{d'}$ ) y  $\mathcal{N}(0, \sigma_{d''})$ , respectivamente, donde  $\sigma_{d'} = 0,5 \text{ m/s}$  y  $\sigma_{d''} = 0,5 \text{ m/s}^2$ .<sup>9</sup>
- *Estimación de posiciones*: en este caso  $\mathbf{y}_k = [\mathbf{x}_k^T, \mathbf{v}_k^T, \mathbf{a}_k^T]^T$ , donde  $\mathbf{x}_k$  consiste en las coordenadas bidimensionales de la posición del NL, y  $\mathbf{v}_k$  y  $\mathbf{a}_k$

<sup>8</sup>En lugar del MMSE, también podemos elegir como estimador el MAP (ver Sección 2.2). En este caso, obtendríamos la distancia o la posición como  $\hat{\mathbf{y}}_k^{MAP} = \arg \max_{\mathbf{y}_k^i} \sum_{i=1}^N w_k^i \delta(\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_k^i)$ .

<sup>9</sup>Trataremos con más detalle la incorporación de información *a priori* al HMM en el Capítulo 5.



**Figura 4.6:** Puntos de conexión del adaptador WLAN (a) de donde se extraen las señales a partir de las cuales obtienen las medidas de TOA (b) (Bahillo et al. 2009b).

son los vectores de velocidad y aceleración, respectivamente. Utilizamos los mismos valores anteriores para las desviaciones de las derivadas de las coordenadas, ya sean los relativos al modelo dinámico o a la información *a priori*.

El NL es una persona que lleva un ordenador portátil equipado con un adaptador inalámbrico IEEE 802.11b y los sistemas de medición descritos en (Bahillo et al. 2009b) y (Mazuelas et al. 2009a). Los NBs son puntos de acceso IEEE 802.11b/g convencionales.

Para el proceso *Medir TOA* del diagrama de flujo de la Figura 4.1, el NL envía periódicamente tramas RTS a cada NB (a una frecuencia de  $1/M$  Hz).<sup>10</sup> Un contador conectado al adaptador WLAN guarda los ciclos de reloj transcurridos entre el envío de la trama hasta la recepción de la correspondiente respuesta CTS (Bahillo et al. 2009b). La Figura 4.6a muestra los puntos del *chipset* del adaptador WLAN de donde extraemos la señal de reloj, la señal que marca el envío del último bit de la trama RTS (TX\_RDY), y la señal que indica la recepción del primer bit de la respuesta CTS (MD\_RDY). La Figura 4.6b esboza cómo obtenemos el TOA (en realidad, el RTT) a partir de estas señales (Bahillo et al. 2009b). En el diagrama de flujo de la Figura 4.1, aparece como entrada al proceso *Obtener verosimilitud adaptativa TOA* el proceso anterior (*Medir TOA*), pero también el bloque de datos *Coefficientes de la transformación lineal*. Para obtener estos coeficientes utilizamos el algoritmo de autocalibración propuesto en el Anexo 2.A.

<sup>10</sup>Es decir,  $M$  será el número de muestras de las que dispongamos cada segundo.

Para el bloque *Medir RSS*, los NBs envían periódicamente tramas *beacon* (a una frecuencia  $1/M$  Hz), obteniendo los valores RSS a partir del indicador RSS del adaptador WLAN del NL. Para la obtención de los resultados de este apartado utilizamos el algoritmo descrito en (Mazuelas et al. 2009a) dentro del bloque *Estimar exponentes de pérdidas* del diagrama de flujo de la Figura 4.1. Este algoritmo estima de manera dinámica el exponente de pérdidas correspondiente al canal de propagación entre el NL y cada NB, en base a la compatibilidad de las estimaciones de distancia entre ellos.

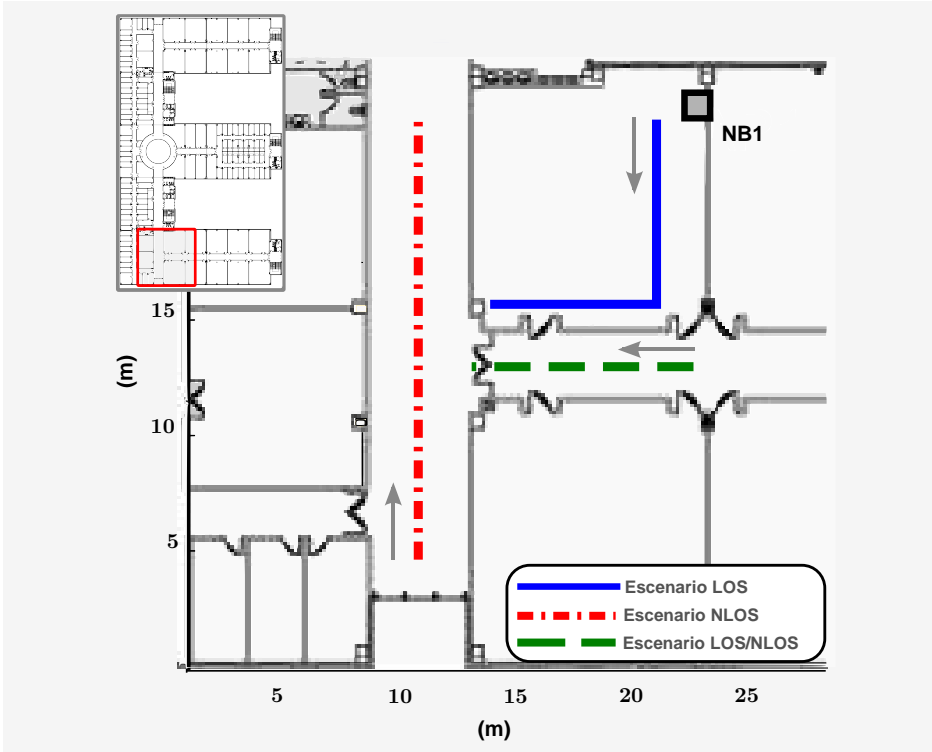
#### 4.6.1. Efecto de las condiciones de propagación LOS/NLOS

Como hemos mencionado a lo largo de esta Tesis Doctoral, las condiciones de propagación en NLOS, junto con los efectos del multicamino, son el mayor problema de los sistemas de localización inalámbrica en entornos complejos. La Figura 4.7 muestra los tres escenarios empleados para evaluar el rendimiento del filtro ALPA en estimación de distancia, bajo diferentes condiciones LOS/NLOS. Los tres escenarios analizados son:

- Escenario LOS: una trayectoria de 15 metros en la cual el NL está en situación de LOS con respecto al NB (NB1). Recibimos  $M$  medidas de TOA y  $M$  medidas de RSS cada segundo ( $\Delta t = 1s$ ) durante los 20 segundos que dura el recorrido entero.
- Escenario NLOS: en este caso no existe LOS entre el NB y el NL en ninguna de las posiciones del recorrido de 20 metros. Recogemos  $M$  medidas de TOA y  $M$  medidas de RSS cada segundo durante 25 segundos.
- Escenario LOS/NLOS: el NL empieza el recorrido en situación de LOS con respecto al NB (a través de la ventana en la puerta) y camina hacia posiciones NLOS y LOS, cubriendo una trayectoria de 10 metros en 12,5 segundos. Realizamos  $M$  mediciones cada 0,5 segundos ( $\Delta t = 0,5s$ ) para evaluar con mayor precisión el efecto de esta transición. Destacar que, en este caso, 50 es el número máximo de medidas recogidas en cada posición, ya que el intervalo *beacon* mínimo es 10 ms.<sup>11</sup>

---

<sup>11</sup>El intervalo *beacon* es el tiempo transcurrido entre las tramas con las que los puntos de acceso indican a la red que están activos. Las medidas RSS son obtenidas en la recepción de cada una de estas tramas.



**Figura 4.7:** Escenarios típicos de interior con diferentes condiciones de propagación LOS/NLOS donde se evaluó el filtro ALPA propuesto.

Para evaluar el rendimiento del filtro ALPA propuesto, la Tabla 4.2 muestra el RMSE en la estimación de distancia para la fusión de datos, en función del número de medidas,  $M$ , y en los tres escenarios anteriores. Para implementar este filtro utilizamos  $N = 10000$  partículas. Comparamos los resultados obtenidos con una implementación habitual basada en EKF con sesgos Gaussianos y la fusión de datos definida en (4.8).<sup>12</sup>

La Tabla 4.2 refleja que el filtro ALPA obtiene una mejora global del 19,9 % en estimación de distancia comparado con el EKF, siendo 0,46 m, 1,03 m y 0,32 m la mejora media en el escenario LOS, NLOS, y LOS/NLOS, respectivamente.

<sup>12</sup>Para garantizar una comparación justa, en la Tabla 4.2 y en los siguientes experimentos, utilizamos valores para los sesgos del EKF conforme a los seleccionados en el Ejemplo 4.4. De esta manera, modelamos el sesgo TOA debido a la propagación NLOS como una Gaussiana  $\mathcal{N}(\gamma_\tau/2, \gamma_\tau/4)$  con  $\gamma_\tau = 4$  ciclos de reloj, y el sesgo RSS como una Gaussiana  $\mathcal{N}(0, \sigma_{sh})$  con  $\sigma_{sh} = 3$  dBm.



**Tabla 4.2:** RMSE obtenido en estimación de distancias con EKF-Fusión y ALPA-Fusión en diferentes escenarios en función del número de medidas. Todos los valores de error están en metros.

	M=5	M=10	M=50	M=100
<b>LOS</b>				
EKF-Fusión	1.56	1.50	1.68	1.45
ALPA-Fusión	1.09	1.00	1.11	1.15
<b>NLOS</b>				
EKF-Fusión	5.82	5.40	4.40	4.23
ALPA-Fusión	4.25	4.37	3.66	3.55
<b>LOS/NLOS</b>				
EKF-Fusión	3.30	2.34	1.94	-
ALPA-Fusión	2.83	2.20	1.61	-

#### 4.6.2. Comparación con otros métodos de estimación de distancia

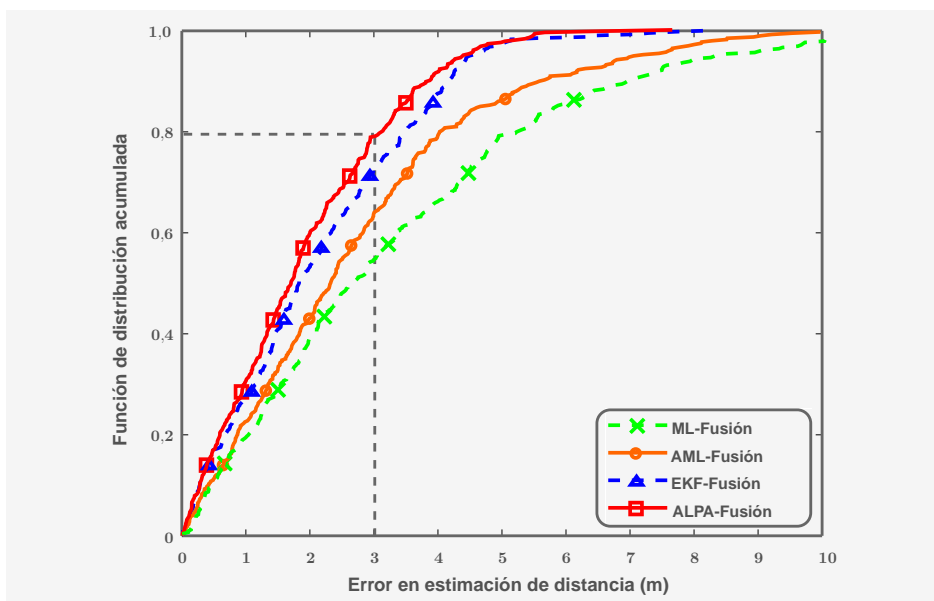
En esta Sección, evaluamos el comportamiento del filtro ALPA en un recorrido habitual realizado por un NL en un entorno de interior. Para ello, llevamos a cabo una campaña de recogida de medidas dentro del mismo edificio. La Figura 4.9 muestra la trayectoria del NL de 65 metros, así como la posición de los 4 NBs con los que se comunica. Durante los 100 segundos que lleva completar el recorrido, el NL recibe un nuevo conjunto de medidas cada segundo ( $\Delta t = 1s$ ) de cada uno de los NBs. Como refleja la Figura 4.9, el NL recibe las medidas con respecto a *NB3* y *NB4* siempre en condiciones de propagación NLOS, y solo en un pequeño porcentaje de posiciones existe LOS entre el NL y los nodos *NB1* y *NB2*.

Las Tablas 4.3-4.4 comparan el error en estimación de distancias obtenido mediante el filtro ALPA propuesto con el error obtenido mediante implementaciones convencionales (Patwari et al. 2003, Song and Yu 2008). Especificamos los resultados para los casos de emplear solo medidas TOA, solo medidas RSS, y para su fusión. En concreto, en las Tablas 4.3-4.4 denominamos:

- ML-TOA, ML-RSS, ML-Fusión: las estimaciones de distancia obtenidas mediante ML. Como verosimilitud empleamos la convolución de la verosimilitud reportada por las medidas (Gaussiana en el caso TOA, y log-normal en el caso RSS) y una distribución Gaussiana correspondiente al sesgo. La verosimilitud para la fusión se calcula multiplicando las verosi-

**Tabla 4.3:** Cuartiles del error en estimación de distancias y RMSE obtenidos mediante diversos algoritmos para 5 y 10 medidas. Todos los valores de error están en metros.

	M=5		M=10	
	Cuartiles	RMSE	Cuartiles	RMSE
ML-TOA	2.09-3.92-7.68	6.42	1.55-3.40-5.64	5.00
ML-RSS	1.64-3.12-5.45	7.01	1.28-2.94-4.96	5.32
ML-Fusión	1.52-3.16-5.87	5.25	1.26-2.66-4.73	4.23
AML-TOA	2.06-3.74-7.38	6.28	1.52-3.31-5.57	4.93
AML-RSS	1.69-3.25-5.27	5.64	1.44-2.92-5.06	4.71
AML-Fusión	1.38-2.91-5.19	4.49	1.15-2.32-3.65	3.49
KF-TOA	1.11-2.37-3.95	3.60	1.10-2.06-3.63	3.04
EKF-RSS	0.84-2.22-4.26	3.82	1.06-2.59-4.21	3.81
EKF-Fusión	0.93-1.90-3.24	2.78	0.86-1.82-3.15	2.59
ALPA-TOA	0.94-2.04-3.33	3.11	0.95-1.90-3.06	2.69
ALPA-RSS	0.82-2.33-4.63	3.88	1.17-2.58-4.30	3.79
ALPA-Fusión	0.84-1.72-2.95	2.58	0.80-1.70-2.85	2.35



**Figura 4.8:** El filtro ALPA propuesto obtiene el mejor rendimiento con un error menor de 3 m para más del 80 % de las posiciones. Empleamos 10 medidas de TOA y 10 medidas de RSS para realizar cada estimación de distancia.

**Tabla 4.4:** Cuartiles del error en estimación de distancias y RMSE obtenidos mediante diversos algoritmos para 50 y 100 medidas. Todos los valores de error están en metros.

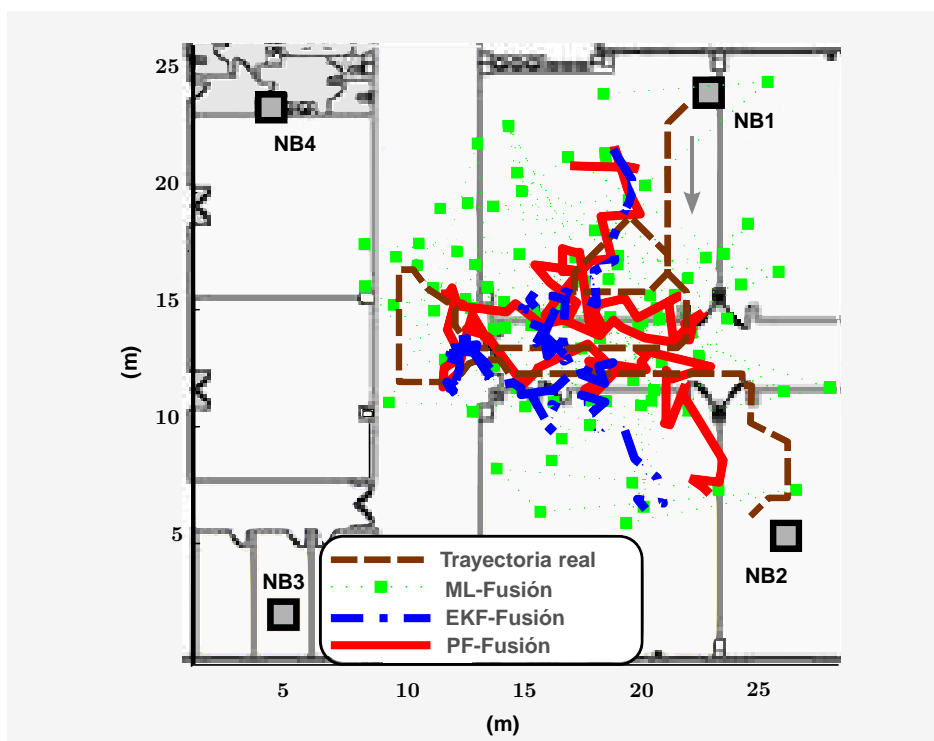
	M=50		M=100	
	Cuartiles	RMSE	Cuartiles	RMSE
ML-TOA	1.26-2.69-4.40	3.87	1.12-2.44-4.00	3.55
ML-RSS	1.36-2.72-4.68	4.34	1.27-2.74-4.74	4.58
ML-Fusión	1.09-2.24-3.89	3.55	0.87-2.18-3.61	3.26
AML-TOA	1.18-2.61-4.27	3.81	1.03-2.38-3.86	3.48
AML-RSS	1.32-2.74-4.64	4.27	1.31-2.70-4.50	4.20
AML-Fusión	0.86-1.91-3.39	3.06	0.83-1.83-3.26	2.91
KF-TOA	0.81-1.76-2.97	2.53	0.86-1.63-2.95	2.36
EKF-RSS	1.21-2.43-4.07	3.76	1.17-2.55-4.04	3.69
EKF-Fusión	0.82-1.62-2.62	2.25	0.74-1.49-2.55	2.10
ALPA-TOA	0.72-1.48-2.63	2.52	0.76-1.50-2.64	2.32
ALPA-RSS	1.20-2.48-4.18	3.75	1.21-2.64-4.17	3.78
ALPA-Fusión	0.69-1.37-2.36	2.22	0.70-1.45-2.40	2.08

militudes individuales correspondientes a las medidas TOA y RSS.

- AML-TOA, AML-RSS, AML-Fusión: las distancias que corresponden al máximo de la verosimilitud adaptativa obtenida por medio de (4.7) y, en el caso de la fusión, también por (4.8).
- KF-TOA, EKF-RSS, EKF-Fusión: el resultado de aplicar un KF y un EKF a las medidas de TOA y de RSS, respectivamente, utilizando el modelo dinámico dado por (4.1) y las mismas distribuciones para el sesgo que en la Tabla 4.2.
- ALPA-TOA, ALPA-RSS, ALPA-Fusión: las estimaciones de distancia obtenidas mediante el filtrado ALPA descrito en la Tabla 4.1, siendo  $N = 10000$  el número de partículas.

Para todos estos métodos, mostramos los cuartiles del error absoluto obtenido en todas las estimaciones de distancia a los 4 NBs, así como el RMSE. Detallamos todos los estadísticos para 4 tamaños de muestra (número de medidas) distintos,  $M$ , con objeto de mostrar su influencia en el rendimiento final.

La Figura 4.8 representa la función de distribución acumulada del error en la estimación de distancias después de aplicar AML-Fusión y ALPA-Fusión, utilizando 10 medidas de TOA y 10 medidas de RSS con respecto de los 4 NBs en



**Figura 4.9:** Trayectoria seguida por el NL y estimaciones de la posición para diferentes algoritmos de localización. Empleamos 10 medidas del TOA y 10 medidas de RSS con respecto a cada uno de los NBs en cada posición.

cada una de las posiciones del NL. Esta Figura 4.8 incluye también los métodos ML-Fusión y EKF-Fusión con el objetivo de comparar su rendimiento. Tanto las Tablas 4.3-4.4 como la Figura 4.8 reflejan la notable mejora que supone el algoritmo propuesto ya que obtiene un error menor de 3 m para más del 80 % de las posiciones utilizando únicamente 10 medidas de TOA y 10 medidas de RSS. Así mismo, los métodos AML-Fusión y ALPA-Fusión son los que obtienen el menor error en estimación ML y en estimación Bayesiana, respectivamente.

#### 4.6.3. Comparación con otros métodos de estimación de posición

De manera análoga al caso de estimación de distancias, las Figuras 4.9-4.10 y las Tablas 4.5-4.6 resumen los resultados para la estimación de posiciones.

**Tabla 4.5:** Cuartiles del error en estimación de posiciones y RMSE obtenidos mediante diversos algoritmos para 5 y 10 medidas. Todos los valores de error están en metros.

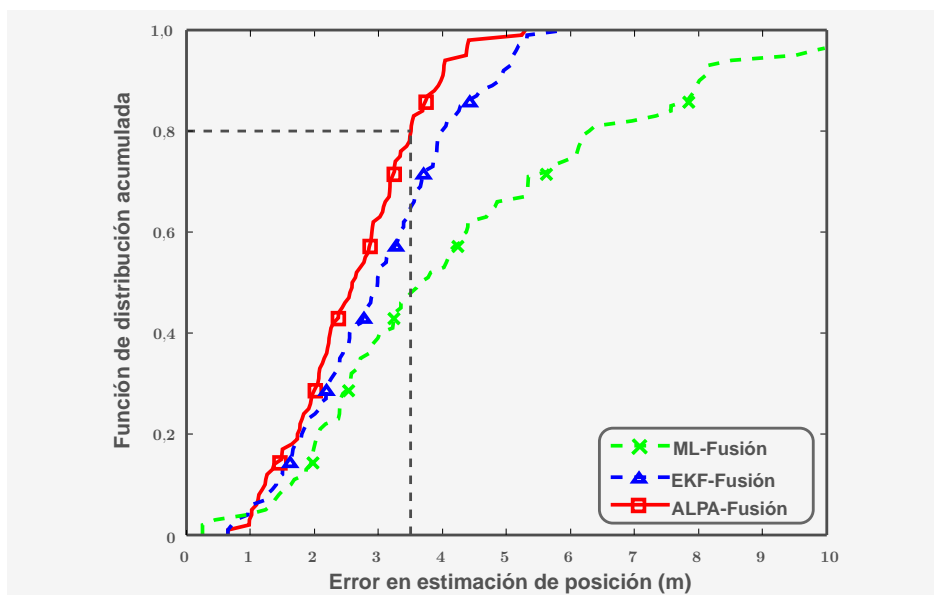
	M=5		M=10	
	Cuartiles	RMSE	Cuartiles	RMSE
ML-TOA	3.95-6.14-8.03	7.64	2.80-4.05-6.64	5.70
ML-RSS	3.83-5.91-8.49	12.99	3.32-5.21-7.49	8.91
ML-Fusión	3.15-4.95-7.04	6.73	2.40-3.71-6.11	5.10
EKF-TOA	1.77-2.79-4.25	3.54	2.05-2.80-3.64	3.11
EKF-RSS	2.94-4.46-6.18	5.11	3.47-4.83-6.85	5.83
EKF-Fusión	2.20-3.24-4.30	3.50	2.08-2.99-3.90	3.25
ALPA-TOA	1.90-2.59-3.76	3.37	1.63-2.54-3.63	2.98
ALPA-RSS	1.93-3.28-5.18	4.36	3.16-3.91-5.18	4.68
ALPA-Fusión	1.77-2.86-3.46	3.14	1.92-2.61-3.34	2.82

**Tabla 4.6:** Cuartiles del error en estimación de posiciones y RMSE obtenidos mediante diversos algoritmos para 50 y 100 medidas. Todos los valores de error están en metros.

	M=50		M=100	
	Cuartiles	RMSE	Cuartiles	RMSE
ML-TOA	2.24-3.34-5.16	4.57	1.63-3.20-4.71	4.09
ML-RSS	3.35-4.94-6.98	6.64	3.26-5.00-6.60	7.43
ML-Fusión	1.93-3.03-4.93	4.34	1.64-3.03-4.53	3.89
EKF-TOA	1.54-2.28-3.09	2.61	1.50-2.22-3.14	2.51
EKF-RSS	3.02-4.12-6.33	5.24	3.02-4.24-6.40	5.24
EKF-Fusión	1.76-2.32-3.00	2.57	1.71-2.13-2.98	2.41
ALPA-TOA	1.08-1.98-3.25	2.66	1.35-2.18-3.05	2.63
ALPA-RSS	2.38-3.09-4.61	4.23	2.72-3.65-4.97	4.37
ALPA-Fusión	1.23-1.85-3.15	2.49	1.28-2.00-2.64	2.40

En este caso, denominamos:

- ML-TOA, ML-RSS, ML-Fusión: las posiciones obtenidas mediante trilateración de las distancias ML anteriores. La técnica de trilateración utiliza los ejes radicales de las circunferencias dibujadas alrededor de la posición de cada uno de los NBs con radio la distancia estimada (Caffery 2000, Bahillo et al. 2009b, Mazuelas et al. 2009a).
- EKF-TOA, EKF-RSS, EKF-Fusión: las posiciones obtenidas por medio de un EKF cuyo modelo de observación relaciona las medidas directamente



**Figura 4.10:** El filtro ALPA propuesto obtiene el mejor rendimiento con un error menor de 3,5 m para más del 80 % de las posiciones. Empleamos 10 medidas del TOA y 10 medidas de RSS para realizar cada estimación de posición.

con la posición del NL.<sup>13</sup>

- PF-TOA, PF-RSS, PF-Fusión: el resultado de aplicar el filtro ALPA descrito en la Tabla 4.1 al vector estado formado por la posición y sus derivadas, utilizando  $N = 10000$  partículas.<sup>13</sup>

La Figura 4.10 representa la función de distribución acumulada del error para los tres algoritmos que fusionan medidas TOA y RSS. Mostramos el caso en el que el NL recibe  $M = 10$  medidas de cada tipo respecto de los 4 NBs.

Resumiendo los resultados de las Tablas 4.5-4.6, cabe señalar que 1) la fusión de datos mejora el RMSE aproximadamente un 9,5 % y un 45,0 % comparado con los casos TOA y RSS individuales, respectivamente, 2) el filtrado Bayesiano mejora el RMSE aproximadamente un 42,2 % con respecto a las técnicas ML, y 3) la verosimilitud adaptativa mejora este RMSE aproximadamente un 8,1 %, siendo más del 10 % cuando se utilizan menos de 10 medidas.

<sup>13</sup>Para los resultados del EKF y del filtro ALPA de las Figuras 4.9 y 4.10 y las Tablas 4.5-4.6, el uso de un modelo de observación que relaciona directamente medidas con posición evita el paso intermedio de estimar distancias y, por consiguiente, elimina la etapa de trilateración.

La Figura 4.10 y las Tablas 4.5-4.6 ponen de manifiesto el mejor rendimiento del algoritmo propuesto para todos los escenarios analizados. Esto resulta, por ejemplo, en un RMSE de 2,82 m cuando utilizamos únicamente 10 medidas de TOA y 10 medidas de RSS, mientras que trabajos anteriores obtenían RMSEs alrededor de 4 m utilizando cientos de medidas (Mazuelas et al. 2009a, Bahillo et al. 2010). Por lo tanto, las técnicas propuestas representan una mejora importante tanto en la precisión obtenida como en el número necesario de medidas.

#### 4.7. Resultados mediante simulación

Como vimos en la Sección 3.3, la CRLB *a posteriori* establece una cota en el error de segundo orden de un estimador insesgado para el caso Bayesiano. En lo que sigue, utilizamos esta métrica para analizar la bondad del filtro ALPA presentado.

A partir del modelo dinámico (4.1), sabemos que la distribución de transición *a priori*,  $p(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{y}_k)$ , es la de una variable Gaussiana con matriz de covarianzas  $\mathbf{Q}_k$ . Por lo tanto, podemos obtener la CRLB a partir de la FIM dada por (ver Sección 3.3),

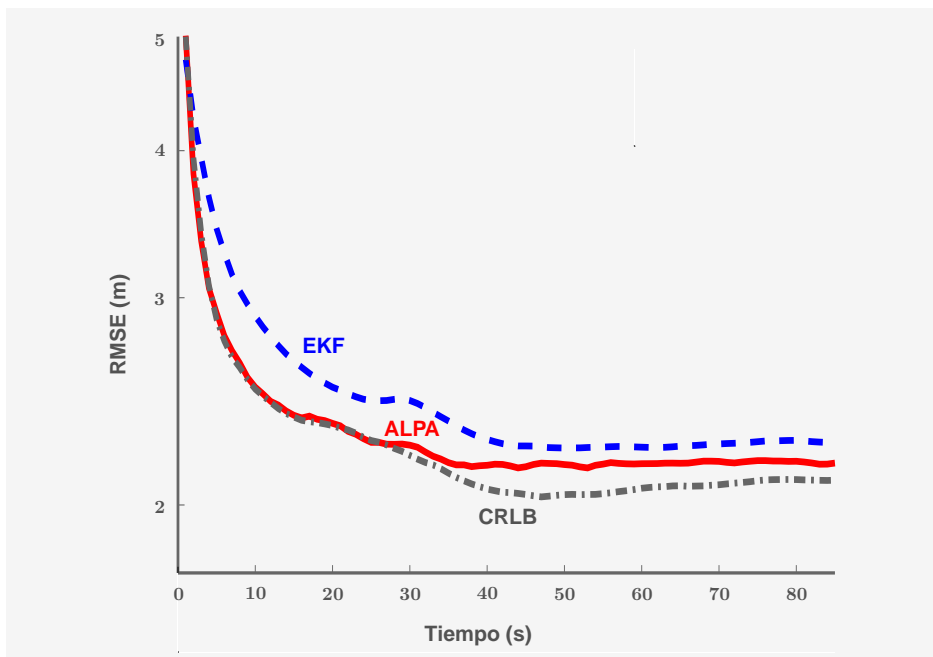
$$\mathbf{J}_{k+1} = \mathbf{J}_{k+1}^z + (\mathbf{Q}_k + \mathbf{F}_k \mathbf{J}_k^{-1} \mathbf{F}_k^T)^{-1},$$

y

$$\mathbf{J}_{k+1}^z = -\mathbb{E}\{\nabla_{\mathbf{y}_{k+1}}[\nabla_{\mathbf{y}_{k+1}} \ln p(\mathbf{z}_{k+1}|\mathbf{y}_{k+1})]^T\}.$$

Para obtener  $\mathbf{J}_{k+1}^z$  tenemos que conocer la verosimilitud obtenida a partir de las medidas. Para ello, debemos disponer de una función de densidad con la que generar medidas RSS y TOA, y que refleje su comportamiento en un escenario complejo real de la manera más fiel posible. Es decir, para el instante de tiempo  $t_k$ , necesitamos conocer  $p(z_k^s|d_k)$  y  $p(z_k^r|d_k)$ . La Sección 4.A anexa obtiene las expresiones para estas densidades, a partir de las cuales es directo obtener la verosimilitud. Empleando esta verosimilitud,  $\mathbf{J}_{k+1}^z$  no tiene solución analítica cerrada y tenemos que obtener su valor por integración Monte Carlo.<sup>14</sup> Además,

<sup>14</sup>La integración Monte Carlo es un método de integración numérica que utiliza puntos aleatorios en los que evaluar la integral, al contrario de los métodos habituales que utilizan una malla regular. Por ejemplo, la integral  $\int f(x)p(x) dx$  se puede obtener como la media de los valores que resultan de generar muestras de la pdf  $p(x)$  y evaluarlas en  $f(x)$ .



**Figura 4.11:** El filtro ALPA propuesto obtiene un rendimiento cercano al óptimo en entornos complejos, resultando en una notable mejora respecto a otras técnicas convencionales.

para iniciar la recursión anterior, consideraremos Gaussiana la densidad inicial,  $p(\mathbf{y}_0) = \varphi(\boldsymbol{\mu}_0, \mathbf{P}_0)(\mathbf{y}_0)$  y, por lo tanto, la FIM inicial  $\mathbf{J}_0 = \mathbf{P}_0^{-1}$  (Ristic et al. 2004).

La Figura 4.11 compara la curva del RMSE obtenida para el filtro ALPA propuesto con la obtenida aplicando un EKF, y con la raíz cuadrada de la CRLB. Para obtener estas curvas, utilizamos una trayectoria de 85 posiciones y 1000 experimentos Monte Carlo. Dichas curvas representan el error acumulado hasta la posición actual del NL (Bergman et al. 2001).

Los resultados de simulación de la Figura 4.11 corroboran de nuevo la marcada mejora en el rendimiento obtenida por el filtro ALPA, puesto que la línea correspondiente está mucho más cerca de la CRLB que la obtenida mediante EKF.

## 4.8. Complejidad

El principal problema de utilizar PFs es la mayor complejidad computacional que estos requieren con respecto a técnicas habituales como el KF. Aunque



depende de la función de importancia elegida, en general, la complejidad del PF crece de manera exponencial con la dimensión del vector de estado  $y_k$ , mientras que para el KF crece con su cubo (Daum 2005). Para problemas con vectores de estado con un número reducido de componentes, la complejidad del PF se mantiene similar a la del EKF, sin embargo, cuando aumenta este número, el PF sufre la “maldición de la dimensionalidad” (Daum and Huang 2003). De ahí que en ocasiones, desde el punto de vista computacional, nos pueda interesar utilizar varios PF que estimen cada uno la distancia a un NB, y fusionar esta información mediante otro filtro que relacione estas distancias con la posición del NL.

Una opción para la reducción de la complejidad del PF es la utilización de una *Rao-Blackwellización*, de manera que se divide el vector de estado en una parte lineal y Gaussiana que es resuelta mediante un KF tradicional, mientras que el resto del vector de estado utiliza el PF para la estimación (Castella and Robert 1996). Así, el mayor esfuerzo computacional se centra en la parte no-lineal y no-Gaussiana (Gustafsson et al. 2002). Sin embargo, en los modelos de observación presentados en la Sección 4.3 vimos que no existe una relación lineal entre potencia y distancia, y que el error en las medidas de TOA no es Gaussiano cuando existen condiciones de propagación NLOS, por lo que la Rao-Blackwellización requeriría linealizar el modelo RSS o asumir errores Gaussianos en el caso TOA.

Por otro lado, la complejidad de la verosimilitud dada por la Proposición 4.2 aumenta de manera exponencial con el número de medidas.<sup>15</sup> Al mismo tiempo, como mostramos en las Secciones anteriores, el filtro ALPA obtiene la mayor mejora respecto a técnicas convencionales cuando se utiliza una cantidad reducida de medidas (cuando se está lejos de la asunción Gaussiana). Teniendo estos dos factores en cuenta, el filtro ALPA puede ser una buena elección para dispositivos de baja potencia, los cuales transmiten con menor frecuencia para ahorrar batería. Por ejemplo, podríamos elegir el filtro ALPA para añadir localización a una red de sensores basada en dispositivos *Zigbee* o *Bluetooth*. En estos casos, los dispositivos transmiten únicamente en intervalos discretos de tiempo; por lo tanto, disponemos de más tiempo para procesar un menor número de medidas, situación en la que el filtro ALPA tiene un rendimiento marcadamente superior a otros métodos tradicionales.

---

<sup>15</sup>En concreto, el número de componentes de la mixtura que define la verosimilitud adaptativa es  $M^M$ , siendo  $M$  el número de medidas en el instante  $t_k$ .

Podemos paliar el problema de la complejidad de la verosimilitud adaptativa introduciendo una etapa de reducción del número de componentes que la conforman. Una manera sencilla de llevar esto a cabo es, cuando recibimos un conjunto de medidas, utilizar tantas componentes en la mixtura como valores diferentes recibamos, y multiplicar la constante de cada una de ellas por su frecuencia relativa dentro del conjunto. De esta manera, al obtener la verosimilitud para RSS o para TOA, dada por la Proposición 4.2, reducimos el número de componentes de la mixtura final de  $M^M$  hasta  $S^M$ , siendo  $S$  el número de medidas diferentes entre un total de  $M$  que forma el conjunto. Sin embargo, conforme  $S$  crece, el número de componentes de la verosimilitud se dispara, ya que sigue dependiendo del número de muestras exponencialmente. Para evitar esto, existen varios criterios a partir de los cuales reducir el número de componentes de la mixtura de Gaussianas dada por (4.5) a un número menor que  $S$ . De esta manera, eliminamos las componentes con muy baja probabilidad o fusionamos aquellas que representan el mismo resultado (Maybeck et al. 2008, Salmond 1990):

- Criterio de Williams: reduce una mixtura hasta que obtiene  $C$  componentes. Para reducir una componente calcula la siguiente medida para todas las mixturas resultantes de borrar una componente, o de fusionar dos de ellas,

$$M(\theta_k, \tilde{\theta}_k) = \int p(\mathbf{z}_k | \theta_k) - \tilde{p}(\mathbf{z}_k | \tilde{\theta}_k) d\mathbf{z}_k,$$

donde  $\theta_k$  es el vector de parámetros de los que depende la mixtura. La medida anterior adquiere una forma sencilla en el caso de que la pdf original la componga una mixtura de Gaussianas (Williams 2003).

- Medida de Kullback-Leibler: fusiona las componentes de dos en dos hasta obtener una mixtura de  $C$  componentes, haciendo que sea mínima la siguiente medida, conocida como divergencia de Kullback-Leibler,

$$D_{KL}(p(\mathbf{z}_k | \theta_k) || \tilde{p}(\mathbf{z}_k | \tilde{\theta}_k)) = \int p(\mathbf{z}_k | \theta_k) \ln \frac{p(\mathbf{z}_k | \theta_k)}{\tilde{p}(\mathbf{z}_k | \tilde{\theta}_k)} d\mathbf{z}_k.$$

Para mixturas de Gaussianas, podemos obtener una cota superior sencilla a partir de los pesos, de las medias y de las desviaciones de la mixtura (Huber and Hanebeck 2008).

- Reducción vía *clustering*: intenta reducir las  $S$  componentes de la mixtura a  $C$  componentes. Para ello, busca  $C$  centros correspondientes a  $C$  agrupaciones (*clusters*), de manera que sea mínima la medida,

$$M(\theta_k, \tilde{\theta}_k) = \int \left( p(\mathbf{z}_k | \theta_k) - \tilde{p}(\mathbf{z}_k | \tilde{\theta}_k) \right)^2 d\mathbf{z}_k.$$

Una de las  $S$  componentes pertenece a una de las  $C$  agrupaciones si la divergencia de Kullback-Leibler al centro de la agrupación es menor que al centro de cualquier otra agrupación (Schieferdecker and Huber 2009).

A partir de los criterios anteriores, el Ejemplo 4.5 disminuye un 99,7% la complejidad de la verosimilitud obtenida en el Ejemplo 4.4, simplemente reduciendo el número de Gaussianas que forman la pdf de las medidas RSS.

**Ejemplo 4.5.** En el Ejemplo 4.4 obteníamos la verosimilitud para un NL que se encuentra a 16,7 metros de un NB en el instante de tiempo  $t_k$ . Puesto que recibíamos 5 medidas de RSS y 5 medidas del TOA, las verosimilitudes individuales  $p(\mathbf{z}_k^s | d_k)$  y  $p(\mathbf{z}_k^T | d_k)$  tenían  $5^5 = 3125$  componentes cada una, con lo que la verosimilitud total tenía  $5^5 \cdot 5^5 = 9765625$  componentes.

En ese caso concreto, resultó que tanto las 5 medidas de TOA como las de RSS tenían 4 valores diferentes (en cada conjunto había un valor repetido). Entonces, sin realizar ninguna aproximación, podemos reducir las componentes de la verosimilitud a  $4^5 \cdot 4^5 = 1048576$  componentes, simplemente reemplazando en las pdf individuales las componentes repetidas por una única componente con peso la frecuencia de aparición. Esta es la curva denotada como Original en la Figura 4.12.

Aplicando alguno de los métodos de reducción de mixturas de Gaussianas a la pdf de RSS, podemos reducirla de 4 componentes a, por ejemplo, 2. Con esta reducción, el número total de componentes de la verosimilitud tras la fusión será  $2^5 \cdot 4^5 = 32768$  componentes, o lo que es lo mismo el 0,3% de las componentes sin utilizar ninguna reducción, o el 3,1% de las componentes cuando tenemos en cuenta la frecuencia de aparición.

Para obtener la verosimilitud a partir de la pdf de las medidas RSS, una vez reducida, necesitamos volver a particularizar la expresión de la Proposición 4.2, como en el Ejemplo 4.3, ya que en este caso tenemos una desvia-

*ción típica distinta para cada componente de la mixtura,*

$$p(\mathbf{z}_k^s | d_k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{M}{2}}} \sum_{(i_1, \dots, i_M) \in C^M} \left( \prod_{j=1}^M \frac{\omega_{i_j}}{\sigma_{i_j}^2} \right) \sqrt{\frac{\sigma_s^2}{\sigma_{sh}^2 + \sigma_s^2}} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^M \frac{(\zeta_{j,i_j} - f_s(d_k))^2}{\sigma_{i_j}^2} - \frac{\sigma_{sh}^2}{\sigma_{sh}^2 + \sigma_s^2} \mu_s^2 \right) \right)$$

donde  $\mu_s = \sigma_s^2 \sum_{j=1}^M \frac{\zeta_{j,i_j} - f_s(d_k)}{\sigma_{i_j}^2}$  y  $\sigma_s^2 = \left( \sum_{j=1}^M \frac{1}{\sigma_{i_j}^2} \right)^{-1}$ . Además,  $\omega_i$  y  $\sigma_i$  son el peso normalizado y la desviación típica de la  $i$ -ésima componente de la mixtura una vez reducida.

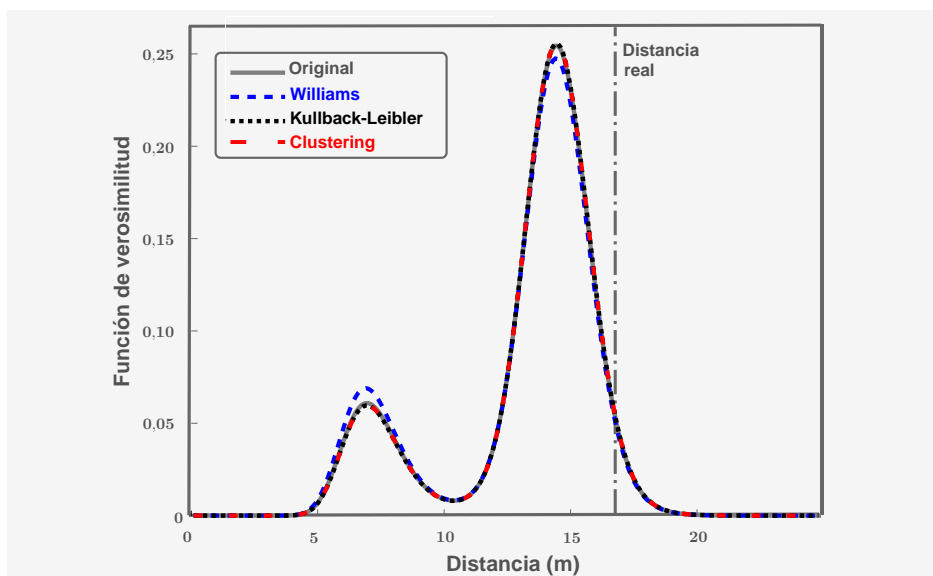
La Figura 4.12 muestra, junto a la verosimilitud original, la verosimilitud obtenida tras reducir la pdf de RSS a 2 componentes utilizando el criterio de Williams, la divergencia de Kullback-Leibler y clustering. El resultado en los tres casos es muy similar al original, superponiéndose las curvas al utilizar el criterio de Kullback-Leibler o clustering.

En el caso de haber aplicado la reducción a la pdf de las medidas de TOA, la expresión del Ejemplo 4.3 para su verosimilitud sería la siguiente,

$$p(\mathbf{z}_k^T | d_k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{M}{2}} \gamma_T} \sum_{(i_1, \dots, i_M) \in C^M} \left( \prod_{j=1}^M \frac{\omega_{i_j}}{\sigma_{i_j}^2} \right) \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^M \frac{(\zeta_{j,i_j} - f_T(d_k))^2}{\sigma_{i_j}^2} - \frac{\mu_T^2}{\sigma_T^2} \right) \right) \cdot [\Phi_{(\mu_T, \sigma_T)}(\gamma_T) - \Phi_{(\mu_T, \sigma_T)}(0)],$$

$$\text{siendo } \mu_T = \sigma_T^2 \sum_{j=1}^M \frac{\zeta_{j,i_j} - f_T(d_k)}{\sigma_{i_j}^2} \text{ y } \sigma_T^2 = \left( \sum_{j=1}^M \frac{1}{\sigma_{i_j}^2} \right)^{-1}.$$

Con el procedimiento anterior conseguimos reducir la complejidad de la verosimilitud de RSS o de TOA de  $M^M$  componentes a  $C^M$ , siendo  $M$  el número de medidas y  $C$  el de componentes que elijamos para representar la pdf de RSS o TOA. En redes de sensores donde  $M$  es pequeño,  $C^M$  será lo suficientemente pequeño como para garantizar un reducido tiempo de respuesta. En otro tipo de redes, si  $M$  es grande, podemos aplicar los mismos algoritmos de reducción empleados para las pdfs, pero esta vez aplicados directamente a la verosimilitud final. Sin embargo, la verosimilitud es una mixtura de funciones más complejas que la distribución Gaussiana, con lo que no podemos aplicar



**Figura 4.12:** Después de reducir un 99,7 % su complejidad, la función de verosimilitud obtenida se superpone a la original cuando se aplica el criterio de Kullback-Leibler o *clustering*.

las simplificaciones mencionadas al aplicar los criterios anteriores. En este último caso, para aplicar el filtro ALPA, tras la etapa de predicción en la que las partículas se propagan desde el estado en  $t_{k-1}$  hasta  $t_k$ , y antes de realizar la actualización (pasos II.2-II.5 en la Tabla 4.1), utilizaríamos alguno de los estos criterios para reducir las  $C^M$  Gaussianas que componen la verosimilitud.

## 4.9. Discusión

En este Capítulo hemos presentado una función de verosimilitud adaptativa para la fusión de datos en sistemas de localización. Basándonos en esta verosimilitud, hemos desarrollado el filtro ALPA para la estimación de distancias y de posición. El filtro ALPA ofrece un esquema adaptativo y sistemático que presenta varias ventajas respecto a otros métodos propuestos,

1. no asume ningún modelo estadístico fijo, utilizando la distribución empírica de las medidas en cada instante de tiempo;
2. fusiona adaptativamente los datos provenientes de medidas RSS y TOA, siendo extensible a cualquier otro tipo de medidas;

3. aprovecha la relación de las posiciones del NL en el tiempo empleando filtrado Bayesiano;
4. trata el comportamiento no-lineal y no-Gaussiano de las medidas mediante el empleo de filtros de partículas.

Estas ventajas resultan en una notable mejora en el rendimiento en relación a otras técnicas convencionales, lo que corroboran los resultados obtenidos mediante experimentación y mediante simulación. Bajo condiciones de propagación multicamino y NLOS, el filtro ALPA obtiene un RMSE en estimación de la posición menor de 3 metros, utilizando para ello únicamente 10 medidas de RSS y 10 medidas de TOA cada segundo, procedentes de dispositivos IEEE 802.11. Además, este error se encuentra muy cercano al límite teórico provisto por la CRLB, como así reflejan los resultados alcanzados mediante simulación.

## 4.A. Anexo: distribución de las medidas RSS y TOA para simulación

### 4.A.1. Distribución de las medidas de RSS

De manera acorde al resto del Capítulo, consideraremos que, dada la distancia real y dado el sesgo, las medidas son i.i.d. o, dicho de otro modo, asumimos el mismo sesgo para el conjunto de medidas recibidas respecto a un NB en el instante  $t_k$ . Por lo tanto, para este conjunto, dado un sesgo  $b_s$  y una distancia  $d_k$ , tenemos que,

$$p(z_k^s | d_k, b_s) = \begin{cases} \frac{\varphi(\zeta_s, \sigma_s)(z_k^s)}{\text{erf}(\sqrt{2})} & \text{si } |z_k^s - \zeta_s| \leq 2\sigma_s \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (4.9)$$

donde  $\zeta_s = f_s(d_k) + b_s$  y la función  $f_s$  viene dada por (4.3). Es decir, el error aleatorio en las medidas es Gaussiano de media cero, escogiendo una normal truncada para reflejar que el sistema de medida no puede reportar valores en todo  $\mathbb{R}$ , sino que tiene un rango limitado.

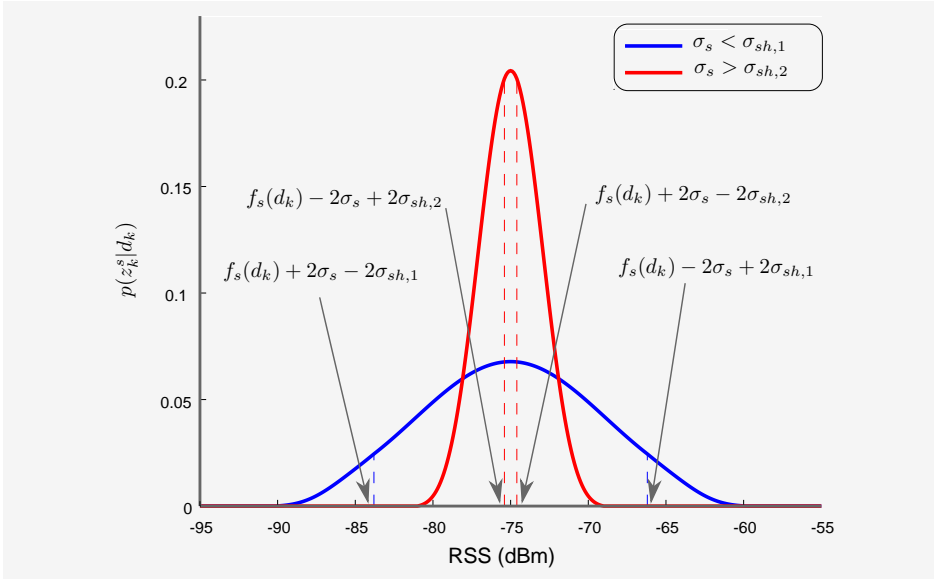
El sesgo  $b_s$  explica el desajuste entre el valor del exponente de pérdidas,  $\beta_s$ , estimado y el real. Podemos modelar el error en esta estimación como una Gaussiana de media el valor real de  $\beta_s$ , y desviación típica  $\sigma_\beta$ . Truncando de nuevo el rango posible de valores, el sesgo se distribuye como,

$$p(b_s) = \begin{cases} \frac{\varphi(0, \sigma_{sh})(b_s)}{\text{erf}(\sqrt{2})} & \text{si } |b_s| \leq 2\sigma_{sh} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (4.10)$$

donde  $\sigma_{sh} = 10\sigma_\beta \log_{10}(d_k)$ . Para distancias usuales en entornos de interior, podemos suponer  $\sigma_{sh}$  constante ( $\log_{10}(d_k) \simeq 1$ ). Para fijar  $\sigma_\beta$  utilizamos los resultados de trabajos previos (Mazuelas et al. 2009a). Entonces, obtenemos la función de densidad de las medidas RSS mediante marginalización,

$$p(z_k^s | d_k) = \int p(z_k^s | d_k, b_s) p(b_s) db_s. \quad (4.11)$$

El resultado de (4.11) es una función definida a trozos en la que además distinguimos dos casos según  $\sigma_s$  sea mayor o menor que  $\sigma_{sh}$ . La Figura 4.13



**Figura 4.13:** El tramo central de la densidad RSS varía según  $\sigma_s$  sea mayor o menor que  $\sigma_{sh}$ .

muestra la función de densidad en ambos casos.<sup>16</sup>

#### 4.A.2. Distribución de las medidas del TOA

Siguiendo un procedimiento paralelo al caso RSS, para un sesgo  $b_\tau$  y una distancia  $d_k$  dados, en el instante de tiempo  $t_k$ , tenemos que,

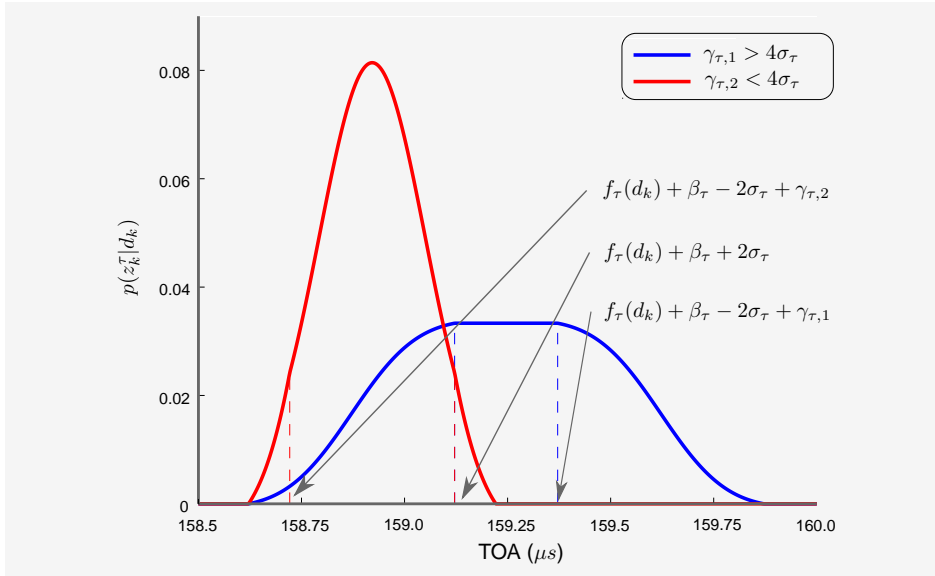
$$p(z_k^\tau | d_k, b_\tau) = \begin{cases} \frac{\varphi(\zeta_\tau, \sigma_\tau)(z_k^\tau)}{\text{erf}(\sqrt{2})} & \text{si } |z_k^\tau - \zeta_\tau| \leq 2\sigma_\tau \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (4.12)$$

donde  $\zeta_\tau = f_\tau(d_k) + b_\tau$  y  $f_\tau(d_k)$  viene dada por (4.4).

Elegimos una distribución uniforme positiva para modelar el sesgo causado por la propagación NLOS, aunque podríamos elegir cualquier otro tipo de

<sup>16</sup>Para generar un conjunto de  $M$  medidas siguiendo la distribución dada por (4.11), obtenemos  $M$  muestras de una variable Gaussiana  $\mathcal{N}(\zeta_s, \sigma_s)$  truncada en el intervalo  $(\zeta_s - 2\sigma_s, \zeta_s + 2\sigma_s)$ . Añadimos el mismo sesgo a todo el conjunto a partir de una distribución Gaussiana  $\mathcal{N}(0, \sigma_{sh})$  truncada en el intervalo  $(-2\sigma_{sh}, 2\sigma_{sh})$ .





**Figura 4.14:** El tramo central de la densidad TOA varía según  $\sigma_\tau$  sea mayor o menor que  $\gamma_\tau/4$ .

distribución positiva y obtener el resultado de manera análoga. Por lo tanto,

$$p(b_\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma_\tau} & \text{si } 0 \leq b_s \leq \gamma_\tau \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (4.13)$$

siendo  $\gamma_\tau$  el sesgo máximo causado por la propagación NLOS. A la hora de obtener la CRLB, ajustamos el valor de  $\gamma_\tau$  a valores de sesgo utilizados en trabajos anteriores (Bahillo et al. 2009b, Prieto et al. 2009c). De nuevo, obtenemos la función de densidad para las medidas del TOA mediante marginalización,

$$p(z_k^T | d_k) = \int p(z_k^T | d_k, b_\tau) p(b_\tau) db_\tau \quad (4.14)$$

resultando en una función definida a trozos en la que además distinguimos dos casos según  $\sigma_\tau$  sea mayor o menor que  $\gamma_\tau/4$ . La Figura 4.14 muestra esta función en ambos casos, reflejando de manera más acusada el efecto del sesgo cuando este es mayor que  $4\sigma_\tau$ .<sup>17</sup>

<sup>17</sup>Para disponer de un conjunto de  $M$  medidas siguiendo la distribución dada por (4.14), generamos  $M$  muestras de una Gaussiana  $\mathcal{N}(\zeta_\tau, \sigma_\tau)$  truncada en el intervalo  $(\zeta_\tau - 2\sigma_\tau, \zeta_\tau + 2\sigma_\tau)$ . Sumamos el mismo sesgo a todo el conjunto generado como una Uniforme positiva  $\mathcal{U}(0, \gamma_\tau)$ .



## Navegación Inercial en Entornos Complejos

### Contenido

---

5.1. Descripción del problema . . . . .	129
5.2. Modelo dinámico . . . . .	132
5.3. Modelo de observación . . . . .	134
5.4. Información <i>a priori</i> . . . . .	135
5.5. Suavizado Bayesiano . . . . .	138
5.6. Resultados experimentales . . . . .	144
5.7. Resultados mediante simulación . . . . .	151
5.8. Complejidad . . . . .	153
5.9. Discusión . . . . .	154
5.A. Anexo: operaciones con cuaterniones . . . . .	157

---

El principal inconveniente de los sistemas de localización inalámbrica, como el diseñado en el Capítulo 4, es la necesidad de comunicación continua con los NBs. Sin embargo, esta comunicación no siempre es posible, en unos casos por las condiciones del entorno donde está instalado el sistema, mientras que en otros por el tipo de aplicación al que está destinado (Boutin et al. 2008). Por ejemplo, en el primer caso, existirán zonas dentro de un edificio sin cobertura inalámbrica por razones de seguridad o médicas. En el segundo caso, será inviable el despliegue de la infraestructura inalámbrica en aplicaciones de emergencia o rescate. Por todo ello, es deseable disponer de una tecnología complementaria que, unida a la localización inalámbrica, esté operativa en tales situaciones. Así mismo, la precisión alcanzada por el sistema de localización inalámbrica presentado puede no ser suficiente en aplicaciones como

guiado de personas. Por lo que dicha tecnología complementaria debe concluir en mejores estimaciones.

Los sistemas de navegación inercial utilizan medidas obtenidas por acelerómetros y giróscopos para estimar los cambios en la posición de un NL respecto a su posición inicial. Cuando estos acelerómetros y giróscopos se integran en unidades de medida inercial (IMUs) fabricadas mediante tecnología MEMS, se convierten en una solución de posicionamiento portátil e independiente de una infraestructura. De esta manera, la navegación inercial es la opción idónea, no solo para ofrecer posicionamiento cuando la infraestructura inalámbrica no está operativa, sino también para mejorar la estimación de la posición cuando se combinan ambas. El mayor inconveniente de la navegación inercial, sin embargo, es la acumulación de errores con el tiempo, lo que se conoce como deriva.

En este Capítulo, generalizamos el sistema de localización inalámbrica descrito en el Capítulo 4 para incluir en la estimación la información aportada por una IMU basada en tecnología MEMS. Esta generalización la realizamos bajo el marco establecido por el HMM, orientando la solución final al posicionamiento de personas. Para compensar la deriva que provoca el empleo de IMUs de tecnología MEMS, utilizamos la información *a priori* que aporta que la IMU esté en el pie de la persona.<sup>1</sup> En base a esto, las principales contribuciones de este Capítulo son:

- definimos un marco general para navegación inercial basado en suavizado Bayesiano;
- proponemos un modelo para incorporar la información *a priori* que supone llevar la IMU unida al pie;
- desarrollamos un método para fusionar la información aportada por medidas inerciales y de distancia;
- en comparación con técnicas habituales, obtenemos resultados empleando medidas de aceleración, velocidad angular, RSS y TOA, recogidas en un escenario de interior a partir de dispositivos comerciales;

---

<sup>1</sup>En la literatura relativa a navegación inercial, es habitual referirse como *alineamiento preciso* a la actualización realizada con medidas relativas a la posición (como GPS, RSS o TOA), así como a otras heurísticas utilizadas para compensar la deriva (Groves 2008). En el sistema que proponemos, toda esta información, junto con la aportada por las medidas de la IMU, es tratada bajo el mismo marco ofrecido por el HMM, bien como verosimilitud, o bien como información *a priori*. Este tipo de fusión se conoce como *tightly coupling*.

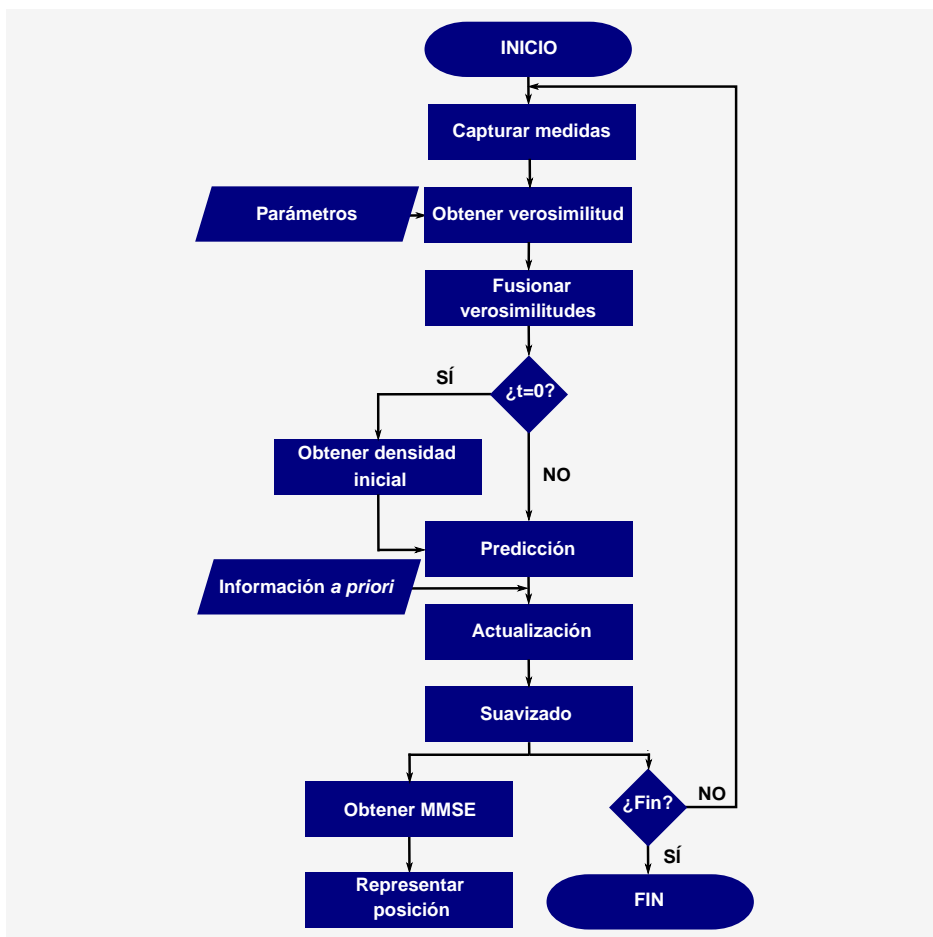
- mostramos que el método propuesto está cerca del óptimo teórico mediante comparación con la CRLB.

El diagrama de flujo de la Figura 5.1 sirve como guía para este Capítulo, ya que describe los bloques implicados en el sistema de navegación inercial. Así, la estructura del resto del Capítulo es la siguiente: la Sección 5.1 describe el problema de estimación y las variables involucradas, cuyos modelos dinámico y de observación detallan la Sección 5.2 y la Sección 5.3, respectivamente; la Sección 5.4 propone una técnica para incorporar al problema el conocimiento acerca de la velocidad del NL cuando este es una persona que lleva una IMU unida al pie; la Sección 5.5 define un marco para resolver el problema mediante suavizado Bayesiano; la Sección 5.6 y la Sección 5.7 evalúan el rendimiento del método propuesto en comparación con técnicas convencionales, mediante experimentación (medidas reales) y simulación (cotas teóricas), respectivamente; la Sección 5.8 analiza la complejidad computacional de dicho método y propone algunas simplificaciones para reducirla; finalmente, la Sección 5.9 expone las conclusiones de este Capítulo.

## 5.1. Descripción del problema

Consideramos un escenario tridimensional en el que queremos estimar la posición de una persona que actuará de NL. Para realizar esta estimación recibimos medidas de distancia o inerciales,  $\{\mathbf{z}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , en instantes de tiempo discretos,  $t_k, k \in \mathbb{N}$ . A partir de estas medidas queremos estimar el vector de estado,  $\{\mathbf{y}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , que incluye, al menos, la posición del NL. Podemos realizar esta estimación bajo el mismo HMM que el utilizado en el Capítulo anterior, con la diferencia de que el vector de estado y el vector de medidas incluyen un mayor número de componentes.

A la hora de definir las componentes de cada vector en el HMM, debemos tener en cuenta que la IMU provee las medidas de aceleración o velocidad angular en el sistema de referencia local del sensor, variable, mientras que nuestro objetivo es obtener la posición en el sistema de referencia de navegación, fijo (ver Sección 2.1.2). Por ello, tenemos que estimar, junto con la posición, la orientación que establece la correspondencia entre ambos sistemas. Como vimos en la Sección 2.1.2, la opción preferida para la representación de la orientación, y que utilizaremos en esta Tesis Doctoral, es el cuaternión unitario. Esta repre-



**Figura 5.1:** Diagrama de flujo para navegación inercial. El bloque *Capturar medidas* puede dar como salida medidas inerciales, o de distancia (TOA y RSS), siendo tratadas de igual forma en el problema de estimación. La información *a priori* es provista por el conocimiento de que la IMU está unida al pie de la persona que actúa como NL.

sentación está basada en la idea de que podemos realizar la transformación desde un sistema de referencia a otro mediante una única rotación alrededor de un vector,  $\mathbf{u}$ , definido respecto al sistema de referencia (Titterton and Weston 2004). El ángulo de la rotación viene dado por el módulo del vector,  $\|\mathbf{u}\|$ . Así, el cuaternión unitario que representa la orientación queda definido como,<sup>2</sup>

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\|\mathbf{u}\|}{2}) \\ \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \sin(\frac{\|\mathbf{u}\|}{2}) \end{bmatrix}.$$

A lo largo de este Capítulo, utilizamos el cuaternión unitario,  $\bar{q} \in \mathbb{H}$ , para representar una rotación desde el sistema de referencia de navegación al sistema de referencia local.

El primer ingrediente del HMM son las entradas al vector de estado,  $\mathbf{y}_k$ . Estas deben incluir, además de la posición, al menos hasta la aceleración, ya que es la que relaciona las medidas de fuerza de la IMU con dicha posición. Expresamos la posición y sus derivadas en el sistema de referencia de navegación. Así mismo, el vector de estado debe incluir la velocidad angular, ya que relaciona las medidas correspondientes de la IMU con la orientación. Expresamos esta última en el sistema de referencia de navegación. Esta variable representa la velocidad angular instantánea del cuerpo del sensor con respecto a dicho sistema de referencia. Consideramos despreciable la velocidad angular de la Tierra durante el periodo de estimación, de manera que la velocidad angular incluida en el vector de estado es, a su vez, la velocidad angular medida por el giróscopo, aunque esta última está expresada en el sistema de referencia local (Wu et al. 2012).

Por lo tanto, el vector de estado que estimamos en cada instante de tiempo,  $t_k$ , está compuesto por  $\mathbf{y}_k = [\mathbf{x}_k^T, \mathbf{v}_k^T, \mathbf{a}_k^T, \bar{q}_k^T, \boldsymbol{\omega}_k, \boldsymbol{\Theta}_k^T]^T$ , siendo  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^3$ ,  $\bar{q}_k \in \mathbb{H}$  y  $\boldsymbol{\omega}_k \in \mathbb{R}^3$ , la posición, la velocidad, la aceleración, la orientación y la velocidad angular del NL, respectivamente. El conjunto  $\boldsymbol{\Theta}_k \in \mathbb{R}^6$  recoge los sesgos en las medidas del acelerómetro,  $\mathbf{b}_k^f \in \mathbb{R}^3$ , y del giróscopo,  $\mathbf{b}_k^\omega \in \mathbb{R}^3$ . Estos sesgos juegan el mismo papel que la orientación en el HMM, ya que es necesario estimarlos en cada instante de tiempo para conocer la relación

---

<sup>2</sup>Al disponer de cuatro componentes, el cuaternión presenta un grado de libertad adicional respecto a las representaciones de orientación tridimensionales (Goddard 1997). Por esta razón, es necesario que sea unitario, debiendo normalizar su módulo en cada iteración. Otra ventaja del cuaternión frente a la matriz de rotación, es que la etapa de normalización de esta última aleja la orientación de la original (Shuster 1993).

entre las medidas y el estado.

El segundo ingrediente son las entradas al vector de medidas,  $\mathbf{z}_k$ , que puede estar formado por medidas provenientes de los acelerómetros y giróscopos de la IMU, y de medidas RSS y TOA recibidas con respecto a varios NBs. Es decir,  $\mathbf{z}_k = [\mathbf{z}_k^f, \mathbf{z}_k^\omega, z_k^s, z_k^r]^T$ , siendo  $\mathbf{z}_k^f \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{z}_k^\omega \in \mathbb{R}^3$ ,  $z_k^s \in \mathbb{R}$  y  $z_k^r \in \mathbb{R}$ , los vectores de medidas del acelerómetro, del giróscopo, de RSS y de TOA, respectivamente.<sup>3</sup> Los modelos de observación concretos de cada tipo de medida serán descritos en la Sección 5.3.

Bajo el HMM podemos añadir, así mismo, cualquier tipo de información *a priori*. En los resultados mostrados en el Capítulo 4, incluíamos información *a priori* sobre la velocidad y la aceleración, teniendo en cuenta que son más probables valores pequeños de las mismas. En el sistema de navegación inercial, incluimos como información *a priori*, el conocimiento de que, si la aceleración y la velocidad angular son muy pequeñas, es muy probable que la persona (su pie) esté parada.

## 5.2. Modelo dinámico

En lo que sigue, asumimos que la evolución en el tiempo de la posición del NL puede ser tratada de manera independiente a la evolución de la orientación. Mediante esta asunción dotamos de total libertad al giro del pie de la persona independientemente de cómo camina.<sup>4</sup> Por lo tanto, podemos utilizar el mismo desarrollo en serie de Taylor que el realizado en el Capítulo 4 para modelar la evolución en el tiempo de la posición. Teniendo en cuenta que debemos incluir la derivada segunda de la posición, aproximamos el modelo dinámico como,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{v}_{k+1} \\ \mathbf{a}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \Delta t \mathbf{I} & \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \Delta t \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{v}_k \\ \mathbf{a}_k \end{bmatrix} + \mathbf{n}_k^{d,1}, \quad (5.1)$$

donde  $\Delta t = (t_{k+1} - t_k) \in \mathbb{R}$  es el intervalo de muestreo y  $\mathbf{n}_k^{d,1} \in \mathbb{R}^9$  es el término de error, modelado como una variable aleatoria Gaussiana y de media cero (camino aleatorio) (Rong Li and Jilkov 2003).

<sup>3</sup>En cada instante de tiempo,  $t_k$ , recibiremos medidas de al menos uno de estos tipos, no siendo necesario que recibamos de todos ellos al mismo tiempo.

<sup>4</sup>Si asumiésemos que no se camina hacia atrás, o mediante pasos laterales, podríamos incluir estas relaciones de dependencia en el modelo.



La orientación, por su parte, tampoco puede cambiar de forma abrupta en periodos cortos de tiempo, por lo que también podremos modelar esta evolución como una función analítica. La relación entre la orientación representada por el cuaternión,  $\bar{q}(t)$ , y la velocidad angular,  $\omega(t)$ , viene dada por la ecuación diferencial (Lefferts et al. 1982)

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{q}(t) = -\frac{1}{2} \bar{\omega}(t) \odot \bar{q}(t), \quad (5.2)$$

donde  $\bar{\omega}(t) = [0, \omega(t)^T]^T$  es el cuaternión de la velocidad angular, y el operador  $\odot$  representa el producto de cuaterniones definido en la Sección 5.A anexa.<sup>5</sup>

Si la dirección de  $\omega(t)$  es constante durante el intervalo de interés, entonces podemos integrar (5.2) formalmente (Wertz 1978),

$$\bar{q}(t + \delta t) = \exp\left(-\frac{1}{2} \bar{\omega}(t)\right) \odot \bar{q}(t). \quad (5.3)$$

Puesto que las IMUs basadas en tecnología MEMS proveen medidas en instantes de tiempo discretos,  $t_k$ , a una frecuencia que ronda los 100 Hz, asumimos constante la dirección de la velocidad angular en el intervalo de tiempo transcurrido entre dos medidas (Wu 2012). A partir de (5.3) podemos modelar el cambio en la orientación como,

$$\bar{q}_{k+1} = \exp\left(-\frac{1}{2} \bar{\omega}_k\right) \odot \bar{q}_k + \bar{n}_k^{d,2}. \quad (5.4)$$

donde  $\bar{n}_k^{d,2} \in \mathbb{H}$  es ruido blanco Gaussiano (Lefferts et al. 1982).

Para el modelo dinámico relativo a la velocidad angular y a los sesgos consideramos un camino aleatorio, esto es,

$$\begin{bmatrix} \omega_{k+1} \\ \Theta_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_k \\ \Theta_k \end{bmatrix} + \mathbf{n}_k^{d,3}, \quad (5.5)$$

modelando el error,  $\mathbf{n}_k^{d,3} \in \mathbb{R}^9$ , como una variable Gaussiana de media cero.

Recapitulando, el modelo dinámico completo que relaciona el estado  $\mathbf{y}_{k+1}$  en el tiempo  $t_{k+1}$  con su valor en  $t_k$ ,  $p(\mathbf{y}_{k+1} | \mathbf{y}_k)$ , viene dado por (5.1), (5.4) y (5.5), siendo no-lineal pero Gaussiano.

---

<sup>5</sup>El cambio de signo en (5.2) es debido a que la orientación representa la rotación del sistema de referencia de navegación al sistema de referencia local, mientras que la IMU mide la velocidad angular en el sentido contrario (Hol et al. 2007).

### 5.3. Modelo de observación

Los siguientes apartados presentan modelos realistas para la relación entre las medidas y el vector de estado, cuando el NL se mueve en un entorno complejo.

#### 5.3.1. Aceleración

El acelerómetro integrado en la IMU provee medidas de la fuerza instantánea actuando en el sensor,  $\mathbf{f}_k \in \mathbb{R}^3$ . Estas medidas están expresadas en el sistema de referencia local (Titterton and Weston 2004).<sup>6</sup> A partir de este valor, podemos obtener fácilmente la aceleración sin más que extraer el efecto de la gravedad. Puesto que estamos interesados en conocer la aceleración del NL en el sistema de referencia de navegación,  $\mathbf{a}_k$ , la relación de esta magnitud con las medidas del acelerómetro,  $\mathbf{z}_k^f$ , viene dada por,

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_k^f &= \mathbf{f}_k + \mathbf{b}_k^f + \mathbf{n}_k^f \\ &= \mathbf{C}(\bar{q}_k)(\mathbf{a}_k - \mathbf{g}) + \mathbf{b}_k^f + \mathbf{n}_k^f, \end{aligned} \quad (5.6)$$

donde  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^3$  es el vector gravedad, constante, y  $\mathbf{C}(\bar{q}_k) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es la matriz de rotación, que representa la misma orientación que el cuaternión unitario,  $\bar{q}_k$ .<sup>7</sup> El término de error  $\mathbf{n}_k^f \in \mathbb{R}^3$  representa el error aleatorio, blanco y Gaussiano, mientras  $\mathbf{b}_k^f \in \mathbb{R}^3$  es el sesgo que introduce el sensor en las medidas de aceleración.<sup>8</sup>

#### 5.3.2. Velocidad angular

La relación entre la velocidad angular en el sistema de referencia de navegación,  $\boldsymbol{\omega}_k$ , y la medida por el giróscopo de la IMU en su sistema de referencia

<sup>6</sup>La fuerza instantánea actuando en el sensor recibe habitualmente el nombre de fuerza G o fuerza específica.

<sup>7</sup>La Sección 5.A anexa muestra cómo obtener esta matriz a partir del cuaternión unitario.

<sup>8</sup>La asunción de velocidad angular de la Tierra despreciable para el periodo de estimación permite considerar los sesgos del acelerómetro y del giróscopo independientes, en caso contrario, habría que añadir esta información al modelo (Wu 2012).

local,  $\mathbf{z}_k^\omega$ , en el instante  $t_k$ , es,<sup>9</sup>

$$\mathbf{z}_k^\omega = \boldsymbol{\omega}_k + \mathbf{b}_k^\omega + \mathbf{n}_k^\omega \quad (5.7)$$

donde  $\mathbf{b}_k^\omega \in \mathbb{R}^3$  son los errores sistemáticos introducidos por el sensor y  $\mathbf{n}_k^\omega \in \mathbb{R}^3$  es ruido blanco Gaussiano (Titterton and Weston 2004).

### 5.3.3. Distancia

El NL se comunica con  $L$  NBs con posiciones conocidas,  $\mathbf{x}_l \in \mathbb{R}^3, l = 1, \dots, L$ . A partir de las señales intercambiadas con ellos, obtiene medidas relacionadas con la distancia que los separa. Las métricas que empleamos, al igual que en el Capítulo 4, son el valor RSS y TOA de las señales (Prieto et al. 2012b). Para dichas métricas, la Sección 4.3 describe sus respectivos modelos de observación.

En resumen, el modelo de observación viene dado por las expresiones (5.6), (5.7), (4.3) y (4.4), siendo no-lineal y no-Gaussiano.

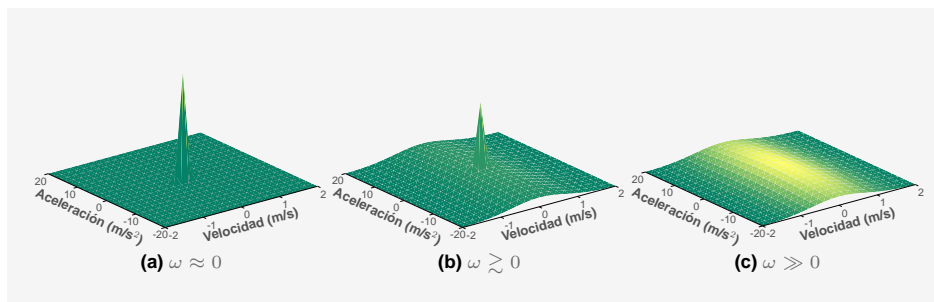
## 5.4. Información *a priori*

En los sistemas de navegación inercial, dada una solución inicial, estimamos la posición y la orientación del NL a partir de medidas del acelerómetro y el giróscopo de la IMU. En la Sección 2.1.2 vimos que estas medidas incluyen un error sistemático que produce grandes errores de estimación, o derivas, tras un periodo corto de tiempo. Para compensar estas derivas, la opción habitual en posicionamiento de personas es emplear actualizaciones de velocidad cero (ZUPTs) cuando la aceleración y velocidad angular medidas por la IMU están por debajo de cierto umbral (Foxlin 2005, Ojeda and Borenstein 2007, Jiménez et al. 2011). Sin embargo, nosotros trataremos este conocimiento como información *a priori* bajo el HMM.

En la Sección 3.2 veíamos que, bajo el marco Bayesiano, la distribución *a posteriori* es obtenida multiplicando la verosimilitud por la información *a priori*.

<sup>9</sup>El giróscopo mide la velocidad angular con la que gira el sistema de referencia local con respecto al sistema de referencia de navegación. Esta medida está expresada en el sistema de referencia local. Para periodos de tiempo pequeños (como el transcurrido entre dos medidas de la IMU) la dirección de la orientación se puede considerar constante. En este caso, y para cambios de orientación finitos pequeños, la velocidad angular en el cuerpo del sensor equivale a la velocidad angular en el sistema de referencia de navegación (Wu 2012).





**Figura 5.2:** Información *a priori* en el sistema de navegación inercial para tres valores de velocidad angular. Cuando tanto la aceleración como la velocidad angular son cercanas a cero, la probabilidad de obtener velocidades lejanas a cero es despreciable.

tá apoyado, podemos aproximar la distribución conjunta por una distribución Gaussiana con matriz de covarianzas  $\Sigma_2 = \text{diag}(1\text{m/s}, 10\text{m/s}^2, 0,45\text{rad/s})$ . Para diseñar un sistema de navegación inercial que tenga en cuenta esta información, debemos incluir como información *a priori* la pdf conjunta dada por (5.8), utilizando un valor para  $\alpha_v$ , por ejemplo, de  $1/2$ .

La Figura 5.2 muestra cómo varía esta densidad *a priori* dados tres valores concretos de velocidad angular. Cuando la velocidad angular y la aceleración son aproximadamente cero, la probabilidad de velocidades pequeñas es mucho mayor que la probabilidad de velocidades grandes.

Algunos autores tratan este tipo de información como *pseudo-mediciones* del estado, con su correspondiente modelo de observación. De esta manera, la densidad *a priori* entra al HMM como una función de verosimilitud, independiente del resto de densidades del modelo dado el estado actual. Bajo el marco Bayesiano, tiene el mismo rol que una función de densidad *a priori* independiente del resto de densidades (Bergman 1999). Esto nos permite considerar nuestra información *a priori*,  $p(\mathbf{v}_k, \mathbf{a}_k, \omega_k)$ , independiente de la correspondiente al modelo dinámico,  $p_d(\mathbf{y}_k|\mathbf{y}_{k-1})$ .<sup>11</sup> La función de transición *a priori* es, por lo tanto, el producto de ambas. Así, la función de densidad *a posteriori* para

<sup>11</sup>En este Capítulo, añadimos el subíndice *d* a la densidad correspondiente al modelo dinámico,  $p_d(\mathbf{y}_k|\mathbf{y}_{k-1})$ , para distinguirla de la densidad de transición *a priori*,  $p(\mathbf{y}_k|\mathbf{y}_{k-1})$ , que incluye a la anterior y, posiblemente, alguna otra información *a priori*.

filtrado Bayesiano viene dada por,

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{y}_k | \mathbf{z}_{1:k}) &= \frac{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{y}_k) p(\mathbf{y}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})}{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})} \\
 &= \frac{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{y}_k) \int p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{k-1}) p(\mathbf{y}_{1:k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}) d\mathbf{y}_{1:k-1}}{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})} \\
 &= \frac{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{y}_k) p(\mathbf{v}_k, \mathbf{a}_k, \boldsymbol{\omega}_k) \int p_d(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{k-1}) p(\mathbf{y}_{1:k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}) d\mathbf{y}_{1:k-1}}{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1})}. \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

## 5.5. Suavizado Bayesiano

La opción habitual para resolver el problema planteado en las Secciones anteriores es emplear filtrado Bayesiano, como realizamos en el Capítulo anterior. Sin embargo, en la Proposición 3.12 demostramos que podemos mejorar la estimación mediante suavizado Bayesiano. Esto implica llevar cierto retraso en la estimación respecto al instante de tiempo en el que recibimos las medidas. En el sistema de localización inalámbrica, este retraso suponía obtener la estimación varios segundos después de recibir las medidas. Sin embargo, en navegación, la elevada frecuencia de recepción de medidas de la IMU nos permite emplear suavizado y garantizar una respuesta casi en tiempo-real. Como consecuencia de utilizar suavizado Bayesiano, el sistema es más robusto a valores atípicos, de manera que la estimación no cae erróneamente en la densidad estrecha de la información *a priori*.<sup>12</sup> En los siguientes apartados estudiamos cómo fusionar toda la información mediante suavizado Bayesiano en el problema de navegación inercial y las expresiones concretas para implementarlo en un sistema de tiempo real.

### 5.5.1. Fusión de información

Como vimos en el Capítulo 4, podemos considerar que dado el estado actual,  $\mathbf{y}_k$ , todas las medidas son independientes. Así, podemos realizar la fusión

<sup>12</sup>Los sistemas que realizan ZUPTs, utilizan una ventana de medidas para detectar si el pie está parado en  $t_k$ , evitando detecciones erróneas (Foxlin 2005, Ojeda and Borenstein 2007, Jiménez et al. 2011). Sin embargo, aunque disponen de medidas hasta  $t_{k+l}$ ,  $l > 0$ , no incorporan las medidas desde  $t_{k+1}$  hasta  $t_{k+l}$  en la estimación, lo cual sí hacen las técnicas de suavizado Bayesiano. Además, el empleo de suavizado en nuestro sistema garantiza una comparación más justa, al realizar la estimación empleando la misma información.

de información de todas las medidas como,

$$p(\mathbf{z}_k | \mathbf{y}_k) = p(\mathbf{z}_k^f | \mathbf{y}_k) \cdot p(\mathbf{z}_k^\omega | \mathbf{y}_k) \cdot p(\mathbf{z}_k^s | \mathbf{y}_k) \cdot p(\mathbf{z}_k^T | \mathbf{y}_k), \quad (5.10)$$

siendo  $p(\mathbf{z}_k^f | \mathbf{y}_k)$ ,  $p(\mathbf{z}_k^\omega | \mathbf{y}_k)$ ,  $p(\mathbf{z}_k^s | \mathbf{y}_k)$  y  $p(\mathbf{z}_k^T | \mathbf{y}_k)$ , la verosimilitud de las medidas del acelerómetro, giróscopo, RSS y TOA, respectivamente.

La expresión (5.10) nos permite conocer la verosimilitud total en cada instante de tiempo. A partir de esta, y de la densidad de transición *a priori* vista en la Sección anterior, estimaremos posiciones mediante suavizado Bayesiano. En general, no existe una forma cerrada para las densidades obtenidas mediante suavizado, excepto para casos muy sencillos, como los abarcados por HMMs finitos y modelos lineales y Gaussianos (Briers et al. 2009). La técnica habitual para obtener la densidad *a posteriori* suavizada es emplear una técnica *adelante-atrás* (Kitagawa 1987, Barber and Cemgil 2010).<sup>13</sup> En nuestro sistema, el retraso será fijo, por lo tanto, el problema consiste en obtener la densidad filtrada en el instante  $t_{k+l}$ ,  $p(\mathbf{y}_{k+l} | \mathbf{z}_{1:k+l})$ , y realizar una recursión hacia atrás para obtener la densidad suavizada en  $t_k$ ,  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{z}_{1:k+l})$ , siendo  $l$  constante.

El factor clave para resolver el problema de suavizado adelante-atrás lo establece el hecho de que, bajo el HMM, condicionado en el presente el futuro es redundante (Barber and Cemgil 2010). De esta manera,

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{k+1}, \mathbf{z}_{1:k+l}) &= p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{k+1}, \mathbf{z}_{1:k}) \\ &= \frac{p(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k+1} | \mathbf{z}_{1:k})}{p(\mathbf{y}_{k+1} | \mathbf{z}_{1:k})} \\ &= \frac{p(\mathbf{y}_{k+1} | \mathbf{y}_k, \mathbf{z}_{1:k}) p(\mathbf{y}_k | \mathbf{z}_{1:k})}{p(\mathbf{y}_{k+1} | \mathbf{z}_{1:k})} \\ &= \frac{p(\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{a}_{k+1}, \boldsymbol{\omega}_{k+1}) p_d(\mathbf{y}_{k+1} | \mathbf{y}_k) p(\mathbf{y}_k | \mathbf{z}_{1:k})}{p(\mathbf{y}_{k+1} | \mathbf{z}_{1:k})} \\ &= \frac{p(\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{a}_{k+1}, \boldsymbol{\omega}_{k+1}) p_d(\mathbf{y}_{k+1} | \mathbf{y}_k) p(\mathbf{y}_k | \mathbf{z}_{1:k})}{p(\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{a}_{k+1}, \boldsymbol{\omega}_{k+1}) \int p_d(\mathbf{y}_{k+1} | \mathbf{y}_k) p(\mathbf{y}_k | \mathbf{z}_{1:k}) d\mathbf{y}_{1:k}} \\ &= \frac{p_d(\mathbf{y}_{k+1} | \mathbf{y}_k) p(\mathbf{y}_k | \mathbf{z}_{1:k})}{\int p_d(\mathbf{y}_{k+1} | \mathbf{y}_k) p(\mathbf{y}_k | \mathbf{z}_{1:k}) d\mathbf{y}_{1:k}}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

<sup>13</sup>En la literatura es habitual referirse como recursión adelante-atrás al empleo de dos filtros óptimos, uno hacia adelante, y otro hacia atrás cuyo modelo dinámico es inverso al del anterior (Wan and van der Merwe 2001). Nosotros nos referiremos como recursión adelante-atrás al empleo de un filtro hacia adelante, y la recursión hacia atrás conocida como Rauch-Tung-Striebel, que no requiere invertir el modelo dinámico ni volver a utilizar las observaciones (Särkkä 2008).

Para hacer la recursión hacia atrás, asumimos conocida  $p(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{z}_{1:k+l})$ , por lo tanto,

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{z}_{1:k+l}) &= p(\mathbf{y}_k|\mathbf{y}_{k+1}, \mathbf{z}_{1:k+l})p(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{z}_{1:k+l}) \\ &= \frac{p_d(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{y}_k)p(\mathbf{y}_k|\mathbf{z}_{1:k})p(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{z}_{1:k+l})}{\int p_d(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{y}_k)p(\mathbf{y}_k|\mathbf{z}_{1:k}) d\mathbf{y}_{1:k}}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Integrando con respecto a  $\mathbf{y}_{k+1}$ , la recursión hacia atrás viene dada por,

$$p(\mathbf{y}_k|\mathbf{z}_{1:k+l}) = p(\mathbf{y}_k|\mathbf{z}_{1:k}) \int \frac{p_d(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{y}_k)p(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{z}_{1:k+l})}{\int p_d(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{y}_k)p(\mathbf{y}_k|\mathbf{z}_{1:k}) d\mathbf{y}_{1:k}} d\mathbf{y}_{k+1}. \quad (5.13)$$

En la expresión (5.13) desaparece la dependencia tanto con la verosimilitud, como con la información *a priori* vista en la Sección 5.4. Por lo tanto, para obtener el estado suavizado en  $t_k$  con medidas hasta  $t_{k+l}$ , únicamente necesitamos conocer el estado filtrado en  $t_k$ , el modelo dinámico, y el estado suavizado en  $t_{k+1}$  con medidas hasta  $t_{k+l}$ .<sup>14</sup>

En concordancia con el diagrama de flujo de la Figura 5.1, la Tabla 5.1 muestra el pseudocódigo para el sistema de navegación descrito. El algoritmo estima el estado en  $t_k$  a partir de medidas de TOA, RSS, fuerza y/o velocidad angular hasta  $t_{k+l}$ , de la información *a priori*  $p(\mathbf{v}_k, \mathbf{a}_k, \boldsymbol{\omega}_k)$ , y del modelo dinámico  $p_d(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{y}_k)$ .

### 5.5.2. Suavizado de Kalman *unscented*

El pseudocódigo mostrado en la Tabla 5.1 adquiere diferentes expresiones en función de los modelos dinámico y de observación implicados. Dichas expresiones solo tienen solución óptima en los casos citados en la Sección 3.2, entre los que no se encuentra el problema de navegación inercial descrito. Por lo tanto, debemos elegir un algoritmo subóptimo con el que aproximar la solución. Para cumplir con el objetivo de respuesta de tiempo real, utilizamos el enfoque local considerando que todos los errores involucrados se distribuyen como va-

<sup>14</sup>La recursión hacia atrás obtenida en la expresión (5.13) es idéntica a la obtenida cuando la única información *a priori* es la aportada por el modelo dinámico. Esto nos permite implementar dicha recursión con los algoritmos habituales de suavizado adelante-atrás (Julier et al. 1995, Särkkä 2006).



Tabla 5.1: Navegación mediante suavizado

---

**I. Inicialización:**

- Igualar  $p(\mathbf{y}_1|\mathbf{y}_0)$  a la densidad inicial conocida  $p(\mathbf{y}_1)$ .

**II. Estimación recursiva: para  $k > 0$** 

1. Recursión hacia adelante: para  $i = k + 1, \dots, k + l$

- Predecir el estado en  $t_i$ ,

$$p(\mathbf{y}_i|\mathbf{z}_{i-1}) = p(\mathbf{v}_i, \mathbf{a}_i, \boldsymbol{\omega}_i) \int p_d(\mathbf{y}_i|\mathbf{y}_{i-1})p(\mathbf{y}_{1:i-1}|\mathbf{z}_{1:i-1}) d\mathbf{y}_{1:i-1}.$$

- Fusionar todas las medidas disponibles en  $t_i$ ,

$$p(\mathbf{z}_i|\mathbf{y}_i) = p(\mathbf{z}_i^f|\mathbf{y}_i) \cdot p(\mathbf{z}_i^\omega|\mathbf{y}_i) \cdot p(\mathbf{z}_i^r|\mathbf{y}_i).$$

- Actualizar la predicción en  $t_i$ ,

$$p(\mathbf{y}_i|\mathbf{z}_i) = \frac{p(\mathbf{z}_i|\mathbf{y}_i)p(\mathbf{y}_i|\mathbf{z}_{i-1})}{p(\mathbf{z}_i|\mathbf{z}_{1:i-1})}.$$

2. Recursión hacia atrás: para  $i = k + l - 1, \dots, k$

- Suavizar el estado en  $t_i$ ,

$$p(\mathbf{y}_i|\mathbf{z}_{k+l}) = p(\mathbf{y}_i|\mathbf{z}_{1:i}) \int \frac{p_d(\mathbf{y}_{i+1}|\mathbf{y}_i)p(\mathbf{y}_{i+1}|\mathbf{z}_{1:k+l})}{\int p_d(\mathbf{y}_{i+1}|\mathbf{y}_i)p(\mathbf{y}_i|\mathbf{z}_{1:i}) d\mathbf{y}_{1:i}} d\mathbf{y}_{i+1}.$$


---

riables Gaussianas.<sup>15</sup> Para tratar la no-linealidad en los modelos dinámico y de observación empleamos una transformación *unscented* que, comparada con el desarrollo en serie de Taylor, captura los momentos de mayor orden (Julier et al. 1995, Särkkä 2006). Esto da lugar al suavizado de Kalman *unscented* (UKS).<sup>16</sup>

Para captar la naturaleza de la distribución, la transformación *unscented* escoge en cada iteración, de manera determinista, un conjunto de muestras  $\{\chi^i\}_{i=1,\dots,(2D+1)}$  de la distribución original, siendo  $D$  la dimensión del estado,  $D = \dim(\mathbf{y}_k)$ . Estas muestras, que reciben el nombre de *puntos sigma*, capturan la media y la covarianza de la distribución, y son escogidas como,<sup>17</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_k^0 &= \mathbf{y}_k \\ \mathbf{y}_k^i &= \mathbf{y}_k + \left[ \sqrt{(D + \lambda)\mathbf{P}_k} \right]_i, \quad i = 1, \dots, D \\ \mathbf{y}_k^i &= \mathbf{y}_k - \left[ \sqrt{(D + \lambda)\mathbf{P}_k} \right]_{i-D}, \quad i = D + 1, \dots, 2D \end{aligned} \quad (5.14)$$

siendo  $\left[ \sqrt{(D + \lambda)\mathbf{P}_k} \right]_i$  la  $i$ -ésima fila o columna de la matriz raíz cuadrada de  $(D + \lambda)\mathbf{P}_k$ ,<sup>18</sup> y  $\lambda \in \mathbb{R}$  el parámetro de escala definido como,

$$\lambda = \alpha^2(D + \kappa) - D,$$

siendo también  $\alpha$  y  $\kappa$  parámetros de escala (Wan and van der Merwe 2001).<sup>19</sup>

A partir de los puntos sigma podemos recuperar la distribución original como

<sup>15</sup>Para poder realizar esta asunción, la mixtura que define la función de densidad *a priori*, dada por (5.8), debe tener una única componente. El valor de  $\alpha_v$  será 1 o 0 empleando un umbral para detectar si el pie está o no parado, respectivamente. Esto no sería necesario empleando un enfoque global para resolver el problema.

<sup>16</sup>En (Vo et al. 2012) se describen soluciones cerradas de suavizado adelante-atrás para modelos más complejos.

<sup>17</sup>En realidad, la expresión (5.14) muestra la transformación *unscented* escalada, que utiliza un parámetro de escala arbitrario,  $\lambda$ , que evita que la matriz de covarianzas pueda llegar a ser semidefinida negativa (Julier 2002, van der Merwe 2004). Además, esta transformación mantiene la precisión en los momentos de segundo orden con un coste computacional exactamente igual al de la transformación *unscented* original (Julier et al. 1995).

<sup>18</sup>Si la matriz  $\mathbf{A}$ , raíz cuadrada de  $\mathbf{P}$ , es de la forma  $\mathbf{P} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ , entonces los puntos sigma se obtienen de las filas de  $\mathbf{A}$ . Sin embargo, para una raíz de la forma  $\mathbf{P} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T$ , se utilizan las columnas.

<sup>19</sup>En la transformación *unscented* escalada,  $\alpha$  es una constante que determina la dispersión de los puntos sigma alrededor de la media y que es fijada habitualmente a un valor positivo pequeño (e.g.,  $0 \leq \alpha \leq 10^{-4}$ ). La constante  $\kappa$  es un parámetro de escala secundario fijado habitualmente en 0 o  $3 - D$  (Wu et al. 2005a). Su valor no es crítico, aunque se debe elegir  $\kappa \geq 0$  para garantizar que la matriz de covarianzas sea semidefinida positiva. Una elección de  $\kappa = 0$  debería ofrecer buenos resultados. Sin embargo, aún no se ha realizado un análisis profundo de si existe un óptimo global para fijar estos parámetros de manera conjunta (van der Merwe 2004).

una suma ponderada. Para obtener la media empleamos como pesos,

$$\begin{aligned} w_m^0 &= \frac{\lambda}{2(D+\lambda)} \\ w_m^i &= \frac{1}{2(D+\lambda)}, \quad i = 1, \dots, D \end{aligned}$$

mientras que para obtener la covarianza,

$$\begin{aligned} w_c^0 &= \frac{\lambda}{2(D+\lambda)} + (1 - \alpha^2 + \beta) \\ w_c^i &= w_m^i, \quad i = 1, \dots, 2D \end{aligned}$$

donde  $\beta$  es un parámetro no-negativo que incorpora conocimiento *a priori* sobre la distribución de  $\mathbf{y}_k$  (Wan and van der Merwe 2001).<sup>20</sup>

De esta manera, para recuperar la media y la covarianza,

$$\mathbf{y}_k \approx \sum_{i=0}^{2D} w_m^i \mathbf{y}_k^i \quad (5.15)$$

$$\mathbf{P}_k \approx \sum_{i=0}^{2D} w_c^i (\mathbf{y}_k^i - \mathbf{y}_k)(\mathbf{y}_k^i - \mathbf{y}_k)^T. \quad (5.16)$$

Para llevar a cabo el suavizado debemos propagar estos puntos en el tiempo a través de la recursión adelante-atrás.<sup>21</sup>

**Ejemplo 5.2.** *Tenemos el conjunto de 1000 muestras de una distribución Gaussiana bivariada representado en la parte superior de la Figura 5.3a, junto con su media y la elipse correspondiente a la matriz de covarianzas. Tras aplicar a cada una de estas muestras la transformación,*

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \frac{x_1 - x_2}{\|\mathbf{x}\|}.$$

*obtenemos el conjunto, la media y la matriz de covarianzas muestrales mostrados en la parte inferior de la Figura 5.3a.*

*Queremos estimar la media y la matriz de covarianzas del conjunto después de aplicar  $f(\mathbf{x})$  sin necesidad de transformar cada una de estas muestras. Para ello, llevamos a cabo dos métodos diferentes:*

<sup>20</sup>Para distribuciones Gaussianas, la elección óptima es un valor de  $\beta = 2$  (Wan and van der Merwe 2001).

<sup>21</sup>Para obtener las expresiones concretas del UKS se puede consultar (Särkkä 2008) o (Hartikainen et al. 2011).

- *Linealización mediante serie de Taylor de primer orden (empleada en el EKF): transformamos la media a partir de  $f(\mathbf{x})$  y obtenemos la matriz de covarianzas a partir de la matriz Jacobiana de esta función evaluada en la media del conjunto original. La Figura 5.3b muestra el resultado.*
- *Linealización mediante transformación unscented (empleada en el UKF): obtenemos los  $2 \cdot 2 + 1 = 5$  puntos sigma y los propagamos a partir de  $f(\mathbf{x})$ . La Figura 5.3c muestra la media, la matriz de covarianzas y los puntos sigma transformados.*

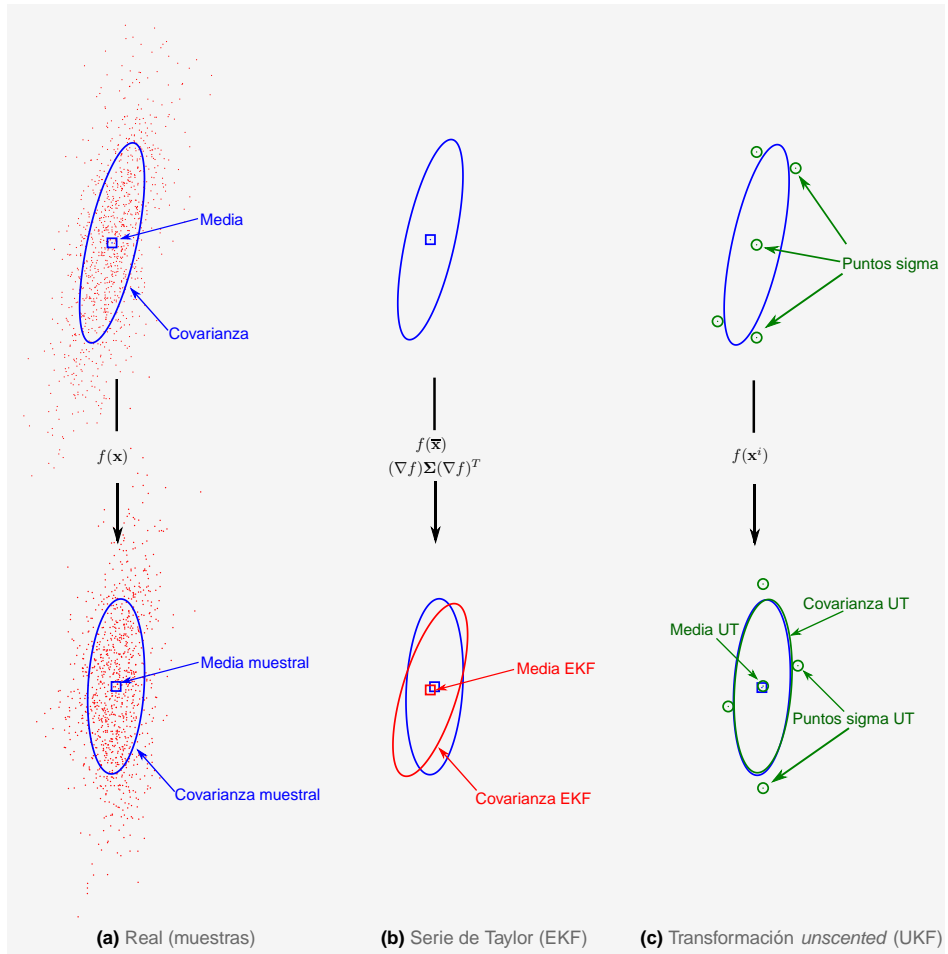
*La Figura 5.3 refleja el mejor comportamiento ante las no-linealidades de la transformación unscented, comparada con el desarrollo en serie de Taylor de primer orden.*

Utilizando esta transformación *unscented*, en las siguientes Secciones evaluamos el marco de navegación inercial propuesto de manera experimental, a partir de medidas inerciales, RSS y TOA, y mediante simulación, a partir de la CRLB para suavizado.

## 5.6. Resultados experimentales

Para evaluar de manera experimental el sistema de navegación inercial propuesto, realizamos una campaña de medidas en un escenario real de interior y llevamos a cabo numerosas simulaciones Monte Carlo. Como en el Capítulo anterior, recogimos las medidas en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación de la Universidad de Valladolid.

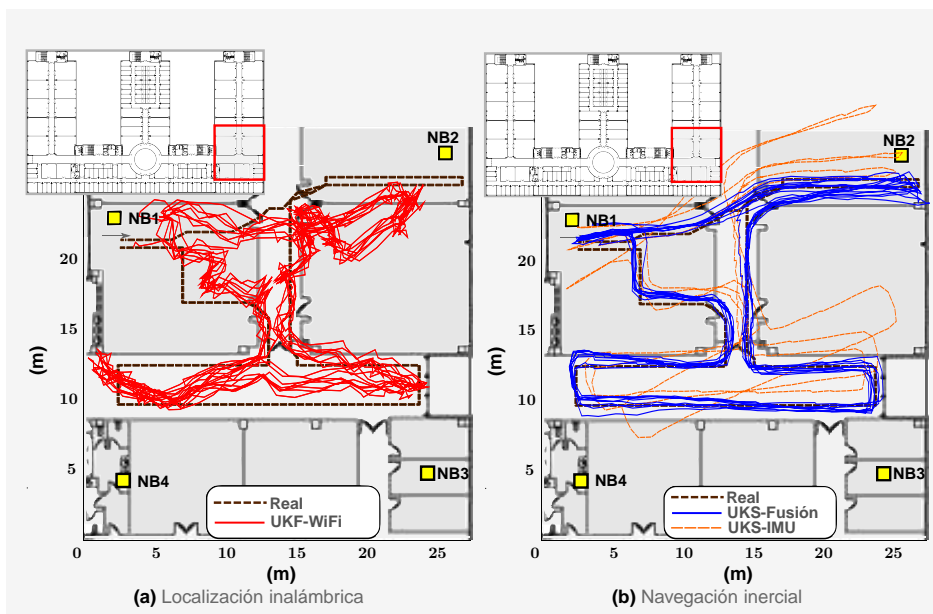
El NL realizó el recorrido mostrado en la Figura 5.4, completando ocho vueltas para que el efecto de la deriva de los sensores inerciales fuese importante. La distancia recorrida total es aproximadamente 915 metros, para la cual empleó un tiempo de 16 minutos. Para la recogida de medidas inerciales utilizamos una IMU MTx de Xsens, trabajando a una frecuencia de 100 Hz ( $\Delta t = 1s$ ). El error en las medidas lo modelamos a partir de las especificaciones del fabricante (Xsens Technologies B.V. 2009). Para obtener las medidas TOA y RSS empleamos los mismos sistemas IEEE 802.11 que en el Capítulo 4, recibiendo conjuntos de 50 medidas de cada tipo respecto a 4 NBs, en intervalos irregulares de aproximadamente 1 segundo (Bahillo et al. 2009b, Mazuelas et al. 2009a).



**Figura 5.3:** Media y covarianzas obtenidas tras aplicar una transformación no-lineal: (a) a muestras obtenidas de una distribución Gaussiana bivariable; (b) linealizada mediante el desarrollo en serie de Taylor; (c) a los puntos sigma obtenidos mediante la transformación *unscented*.

En cada vuelta, el NL capturó dichos conjuntos de medidas en 153 posiciones. Como refleja la Figura 5.4, el NL recibió la mayor parte de estas medidas en condiciones de NLOS.

Para obtener los resultados de navegación, empleamos el vector de estado, el modelo dinámico y el modelo de observación descritos en las Secciones 5.1, 5.2 y 5.3, respectivamente. Añadimos como información *a priori* la descrita en la Sección 5.4. En el modelo dinámico utilizamos como desviaciones típicas



**Figura 5.4:** La inclusión de medidas TOA y RSS permite mantener acotado el error en navegación inercial. La inclusión de medidas inerciales permite obtener un RMSE inferior a un metro tras más de 900 metros de recorrido.

$\sigma_{d^{(3)}} = 4,5 \cdot 10^2 \text{ m/s}^3$  para el error relativo a la posición y sus derivadas,<sup>22</sup>  $\sigma_{\bar{q}'} = 10^{-4} / \text{s}$  para el error en la aproximación de la orientación,  $\sigma_{\omega'} = 10 \text{ rad/s}^2$  para el error referente a la velocidad angular y, finalmente,  $\sigma_{b_f} = 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2$  y  $\sigma_{b_\omega} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$  para el sesgo en las medidas del acelerómetro y del giróscopo, respectivamente. El retraso que empleamos para el suavizado es de 7 instantes temporales (70 ms), aproximadamente la mitad de la ventana empleada por otras implementaciones para detectar cuándo el pie está parado (Foxlin 2005, Jiménez et al. 2010).

### 5.6.1. Efecto de fusionar localización/navegación

En primer lugar, evaluamos el marco de navegación inercial completo, y analizamos la mejora en el posicionamiento obtenida respecto al marco de localiza-

<sup>22</sup>Al estar localizando en realidad el pie de la persona, las aceleraciones producidas son notablemente mayores que las generadas por el cuerpo entero. El valor de  $\sigma_{d^{(3)}}$  lo fijamos entre el 50 % y el 100 % del valor máximo posible para la derivada de la aceleración del pie (Bar-Shalom et al. 2001).

**Tabla 5.2:** Cuartiles del error en estimación de posiciones y RMSE obtenidos mediante localización inalámbrica y navegación inercial variando el número de vueltas. Todos los valores de error están en metros.

	1 vuelta		4 vueltas		8 vueltas	
	Cuartiles	RMSE	Cuartiles	RMSE	Cuartiles	RMSE
UKF-WiFi	1.58-2.51-3.16	2.83	1.55-2.32-3.13	2.76	1.63-2.34-3.22	2.79
UKS-IMU	0.95-1.25-1.63	1.40	1.38-2.06-3.71	3.37	2.02-4.83-9.54	8.73
UKS-Fusión	0.49-0.79-1.15	1.00	0.42-0.67-1.01	0.90	0.44-0.73-1.07	0.93

ción inalámbrica del Capítulo 4 (asumiendo una verosimilitud Gaussiana). Las Figuras 5.4-5.5 y la Tabla 5.2 resumen los resultados. Denominamos:

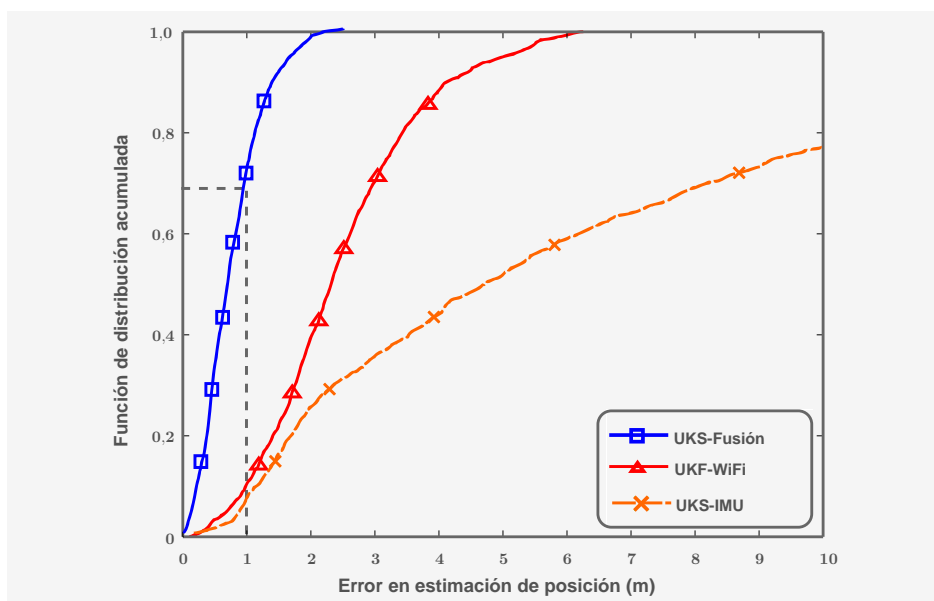
- UKF-WiFi: las posiciones obtenidas por medio de UKF fusionando medidas TOA y RSS, y los mismos modelos para los sesgos y la información *a priori* que los incluidos en el EKF del Capítulo 4.
- UKS-IMU: las posiciones estimadas mediante UKS y únicamente medidas inerciales. Empleamos, como información *a priori*, la descrita en la Sección 5.4.
- UKS-Fusión: las posiciones inferidas añadiendo a UKS-IMU las medidas TOA y RSS. Para estas últimas, empleamos los mismos sesgos que en UKF-WiFi.

Para todos estos métodos, mostramos los cuartiles del error en las posiciones donde recibimos medidas TOA y RSS. Junto a los cuartiles incluimos el RMSE obtenido en esas posiciones. Para analizar el efecto de la deriva, especificamos el error obtenido tras una, cuatro y ocho vueltas al recorrido, respectivamente.

Por claridad, la Figura 5.4b muestra solo las tres primeras vueltas para el método UKS-IMU, momento en que la deriva acumulada provoca que se haya perdido totalmente el camino seguido por el NL.

La Figura 5.5 representa la función de distribución acumulada del error en la estimación de posiciones para los tres métodos anteriores. Esta figura muestra los errores obtenidos tras completar las ocho vueltas del recorrido.

Resumiendo los resultados de la Figura 5.5 y la Tabla 5.2, podemos señalar que 1) el RMSE en localización inalámbrica se mantiene aproximadamente constante tras cada vuelta, en torno a 2,80 metros en todos los casos, 2) el RMSE en navegación con únicamente medidas inerciales representa el 1,22 %,



**Figura 5.5:** El algoritmo de navegación propuesto obtiene un error menor de 1 m para el 70 % de las posiciones, e inferior a 2,5 metros para el 100 %.

el 0,74 % y el 0,95 % de la distancia recorrida tras completar una, cuatro y ocho vueltas, respectivamente, y 3) la fusión de medidas inerciales e inalámbricas permite reducir el RMSE respecto a localización inalámbrica aproximadamente un 67 %, siendo este RMSE inferior a 1 metro para el 70 % de las posiciones.

## 5.6.2. Efecto de eliminar el sesgo del estado

En este apartado, evaluamos el efecto que tiene eliminar los sesgos en las medidas inerciales del vector de estado. Para ello, analizamos los resultados obtenidos en este caso para el mismo escenario del apartado anterior. De forma paralela, la Figura 5.6 y la Tabla 5.3 resumen los resultados. En este caso denominamos:

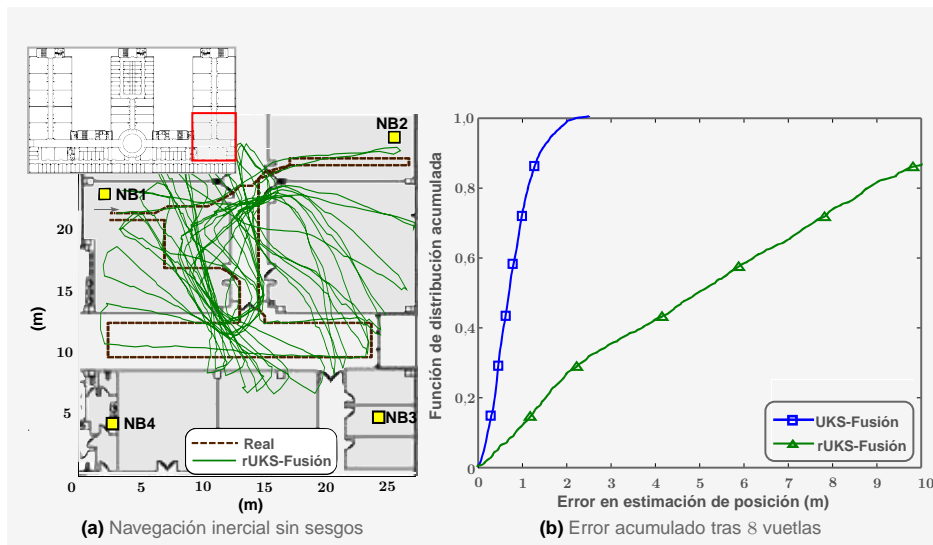
- UKS-Fusión: el del apartado anterior.
- rUKS-Fusión: las posiciones estimadas eliminando en el algoritmo anterior (UKS-Fusión) el sesgo del vector de estado.

En la Tabla 5.3 y la Figura 5.6 el RMSE obtenido para rUKS-Fusión representa, de media, el 0,85 % de la distancia recorrida, por lo que para distancias



**Tabla 5.3:** Cuartiles del error en estimación de posiciones y RMSE obtenidos mediante navegación inercial sin sesgos en el vector de estado. Todos los valores de error están en metros.

	1 vuelta		4 vueltas		8 vueltas	
	Cuartiles	RMSE	Cuartiles	RMSE	Cuartiles	RMSE
UKS-Fusión	0.49-0.79-1.15	1.00	0.42-0.67-1.01	0.90	0.44-0.73-1.07	0.93
rUKS-Fusión	0.39-0.72-1.20	1.03	1.20-2.92-5.68	4.77	1.96-5.03-8.25	6.67



**Figura 5.6:** Eliminar el sesgo en las medidas inerciales del vector de estado provoca una rápida deriva que se traduce en la pérdida total del camino seguido por el NL.

largas es imprescindible incluir el sesgo de las medidas inerciales en el vector de estado.

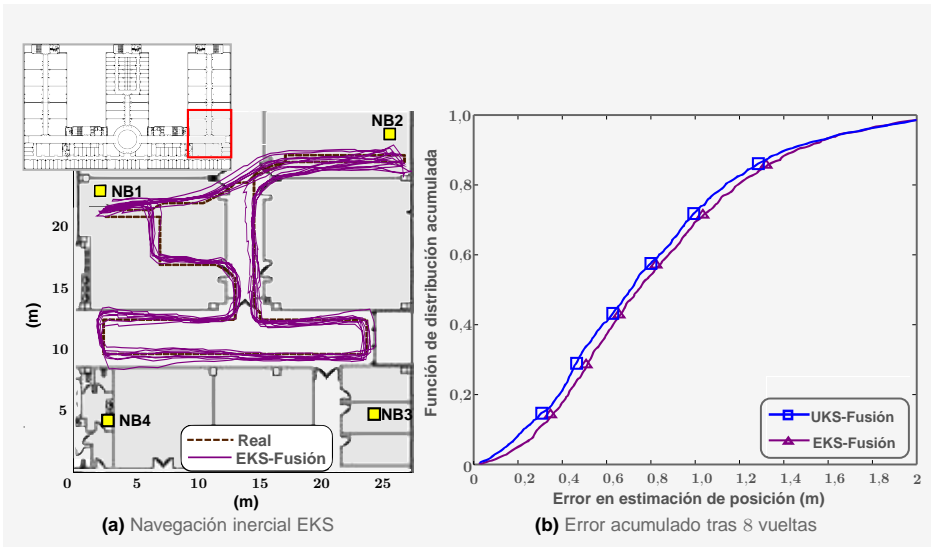
### 5.6.3. Comparación UKS/EKS

Finalmente, la Figura 5.7 y la Tabla 5.4 comparan el algoritmo completo (UKS-Fusión) con el resultado obtenido linealizando el problema mediante el desarrollo en serie de Taylor, y/o eliminando la etapa de suavizado. Los resultados mostrados corresponden a:

- UKS-Fusión: el UKS completo utilizado en los apartados anteriores.
- EKS-Fusión: el algoritmo de suavizado anterior pero utilizando EKS en

**Tabla 5.4:** Cuartiles del error en estimación de posiciones y RMSE obtenidos mediante navegación inercial para diferentes implementaciones. Todos los valores de error están en metros.

	1 vuelta		4 vueltas		8 vueltas	
	Cuartiles	RMSE	Cuartiles	RMSE	Cuartiles	RMSE
UKS-Fusión	0.49-0.79-1.15	1.00	0.42-0.67-1.01	0.90	0.44-0.73-1.07	0.93
EKS-Fusión	0.51-0.79-1.17	1.01	0.46-0.69-1.06	0.91	0.48-0.74-1.10	0.94
UKF-Fusión	0.50-0.79-1.16	1.01	0.43-0.69-1.02	0.90	0.45-0.73-1.07	0.94
EKF-Fusión	0.45-0.71-1.07	0.97	0.49-0.73-1.09	0.97	0.50-0.77-1.13	0.98



**Figura 5.7:** La transformación *unscented* obtiene al menos el mismo rendimiento que el desarrollo en serie de Taylor siendo mucho más sencilla de implementar.

lugar de UKS.

- UKF-Fusión: la misma implementación que UKS-Fusión pero sin realizar la recursión hacia atrás correspondiente al suavizado.
- EKF-Fusión: la misma implementación que EKS-Fusión pero sin realizar la recursión hacia atrás correspondiente al suavizado.

Los resultados obtenidos para los distintos algoritmos ponen de manifiesto que 1) emplear suavizado frente a filtrado resulta en una mejora del 1% en el error, 2) la transformación *unscented* es una mejor elección para filtrado y suavizado de modelos no-lineales, ya que obtiene al menos el mismo rendimiento

que EKF y EKS, respectivamente, siendo mucho más sencillo de implementar.<sup>23</sup>

## 5.7. Resultados mediante simulación

En el Capítulo anterior, utilizábamos la CRLB *a posteriori* para analizar la bondad del filtro ALPA. De forma análoga, podemos obtener la CRLB *a posteriori* para el algoritmo de suavizado empleado en el sistema de navegación inercial (ver Sección 3.3). Por simplicidad, en este apartado consideraremos un escenario en 2D, de manera que conseguimos un modelo dinámico lineal.<sup>24</sup> Además, suponemos que todos los errores involucrados en el problema son Gaussianos.

Denotando por  $\mathbf{Q}_k$  la matriz de covarianzas del error en el modelo dinámico lineal-Gaussiano, la FIM en el instante de tiempo  $t_k$  cuando empleamos medidas hasta  $t_{k+l}$  viene dada por,

$$\mathbf{J}_{k|k+l} = \mathbf{J}_k + \mathbf{F}_k^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{F}_k - \mathbf{F}_k^T \mathbf{Q}_k^{-1} (\mathbf{Q}_k^{-1} + \mathbf{J}_{k+1|k+l} - \mathbf{J}_{k+1|k})^{-1} \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{F}_k,$$

siendo  $\mathbf{F}_k^T$  la matriz de transición del modelo dinámico,  $\mathbf{J}_k$  la FIM obtenida para filtrado,  $\mathbf{J}_{k+1|k}$  la FIM para el estado predicho, y  $\mathbf{J}_{k+1|k+l}$  la FIM obtenida en el paso anterior de la recursión hacia atrás. El valor inicial para esta recursión es  $\mathbf{J}_{k+1|k+l} = \mathbf{J}_{k+l}$ . A partir de la FIM obtenemos la CRLB como su inversa.<sup>25</sup>

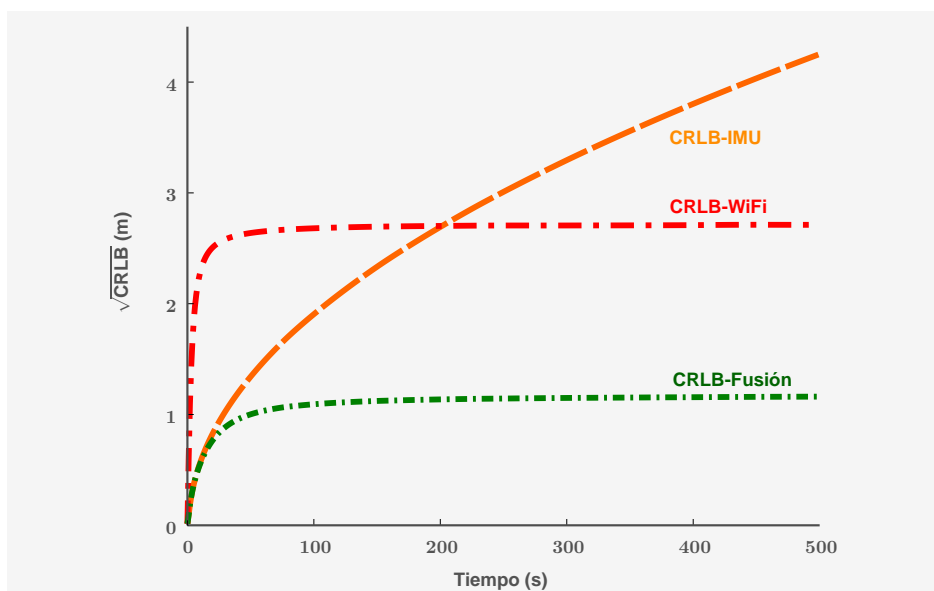
La Figura 5.8 muestra la CRLB acumulada para los diferentes sistemas evaluados en la Sección anterior. Para obtener estas curvas, simulamos un NL que recibe medidas inerciales a 100 Hz, mientras que recoge un conjunto de 50 medidas de TOA y 50 medidas de RSS cada segundo. Denominamos:

- CRLB-WiFi: la CRLB obtenida empleando únicamente medidas TOA y RSS.
- CRLB-IMU: la CRLB obtenida empleando medidas inerciales y la información *a priori* de la Sección 5.4.

<sup>23</sup>Al comparar los resultados de filtrado y suavizado, cabe tener en cuenta la elevada frecuencia de recepción de medidas, cuya reducción podría aumentar la mejora obtenida con el segundo.

<sup>24</sup>Si la posición  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^2$ , entonces la velocidad  $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^2$  y la aceleración  $\mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^2$ . En este caso, la orientación está completamente definida por un ángulo,  $q_k \in \mathbb{R}$  y, por lo tanto, la velocidad angular  $\omega_k \in \mathbb{R}$ .

<sup>25</sup>También podemos obtener la CRLB *a posteriori* para suavizado de un sistema lineal-Gaussiano como la matriz de covarianzas dada por la recursión Rauch-Tung-Striebel (Rauch et al. 1965).



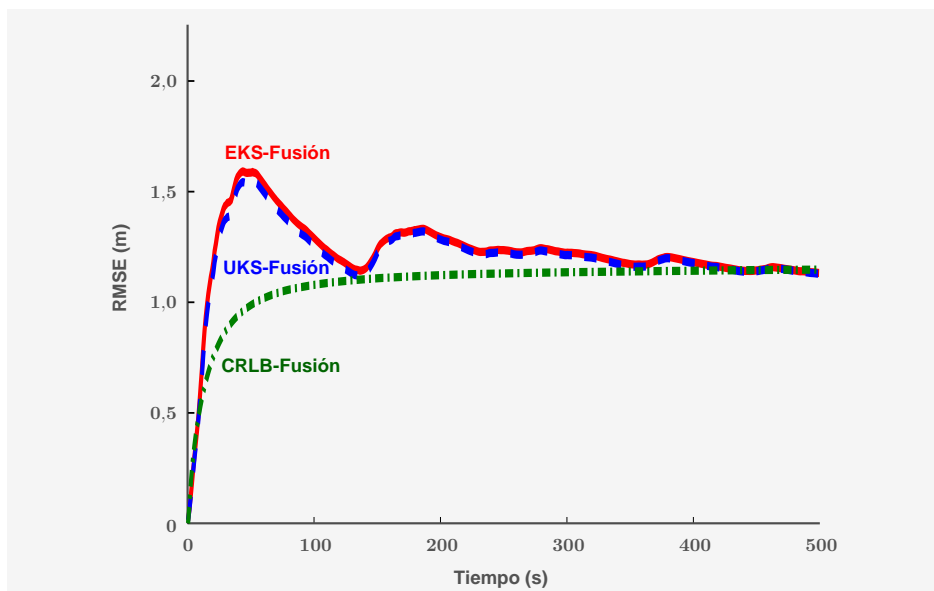
**Figura 5.8:** El error utilizando medidas inalámbricas es constante pero la precisión es baja; el error utilizando medidas inerciales crece con el tiempo aunque la precisión de las medidas es muy alta; el error combinando ambos tipos de medidas se mantiene constante permitiendo precisiones muy altas.

- **CRLB-Fusión:** la CRLB para el algoritmo de navegación completo, empleando medidas inerciales, RSS y TOA, así como la información *a priori*.

La Figura 5.8 refleja que: 1) el error en localización inalámbrica se mantiene constante pero cercano a 3 metros, 2) el error obtenido con medidas exclusivamente inerciales crece rápidamente a pesar de emplear medidas con precisiones muy altas, 3) el error fusionando los dos métodos anteriores e información *a priori* se mantiene constante y en torno a 1 metro.

Puesto que las cotas tienen sentido porque se alcanzan con algoritmos, la Figura 5.8 compara la CRLB obtenida para el sistema de navegación inercial completo con el resultado de aplicar los métodos UKS-Fusión y EKS-Fusión de la Sección anterior. Obtenemos los resultados empleando 1000 experimentos Monte Carlo.

La Figura 5.9 corrobora las conclusiones extraídas de los resultados experimentales. En concreto, observamos que 1) las técnicas introducidas alcanzan el límite teórico provisto por la CRLB, 2) EKS y UKS obtienen un rendimiento similar, siendo este último mucho más fácil de implementar.



**Figura 5.9:** El marco propuesto para navegación inercial permite diseñar algoritmos que alcanzan la cota de Cramér-Rao.

## 5.8. Complejidad

El análisis de la complejidad adquiere todavía más sentido en este Capítulo, ya que el sistema de navegación inercial recibe nuevas medidas que procesar con una elevada frecuencia. Para realizar este análisis, trataremos de manera independiente las dos recursiones implicadas en el UKS.

En la recursión hacia adelante realizamos el filtrado. Por lo tanto, la complejidad de esta etapa es la misma que la del UKF. La complejidad de este algoritmo es del orden de  $D^3$ , siendo  $D$  la dimensión del vector de estado (Daum 2005). Es decir, la complejidad del UKF es del mismo orden que la del EKF, comúnmente utilizado en sistemas en tiempo real. Los resultados de las Secciones anteriores demostraron un rendimiento prácticamente idéntico de ambos algoritmos en el marco de navegación inercial presentado. Así mismo, el Ejemplo 5.2 puso de manifiesto la mejor respuesta del UKF a ciertos problemas no-lineales. En definitiva, con una complejidad similar, el UKF obtiene al menos el mismo rendimiento que el EKF con la ventaja de ser más fácil de implementar (no re-

quiere el cálculo de matrices Jacobianas) (Wan and van der Merwe 2001).<sup>26</sup>

En cuanto a la recursión hacia atrás, la etapa de suavizado incrementa la complejidad computacional total respecto al algoritmo de filtrado. La complejidad de dicha recursión hacia atrás también crece con  $D^3$  y de manera lineal con el número de estados que suavizamos (con el retraso temporal) (Särkkä 2010). Utilizar la recursión adelante-atrás, propuesta en (Särkkä 2008), nos permite reducir el número de operaciones respecto a la opción de dos filtros óptimos. Así mismo, evita tener que invertir el modelo dinámico y reduce los requisitos de memoria ya que no necesita almacenar todas las observaciones correspondientes al intervalo de suavizado (Khreich et al. 2010). Sin embargo, en los resultados de las Secciones anteriores, la mejora obtenida por la etapa de suavizado cuando empleamos medidas inerciales a una frecuencia de 100 Hz es mínima, con lo que esta etapa podría ser una candidata a eliminar en equipos con bajas prestaciones.

Por lo tanto, para reducir la complejidad total del algoritmo, debemos mantener el número de componentes del vector de estado tan bajo como sea posible, ya que dicha complejidad aumenta con  $D^3$ . Esto podremos realizarlo cuando diseñemos sistemas de posicionamiento en un plano (por ejemplo, en una planta de un edificio o en un garaje), si garantizamos que uno de los ejes de la IMU permanece perpendicular a este plano. En este caso, consideraremos la posición bidimensional, estando la orientación completamente definida por un ángulo. De esta manera, el vector de estado, que en tres dimensiones consta de 22 componentes, se reduce a únicamente 11 componentes, lo que supone disminuir la complejidad aproximadamente el 85 %.

## 5.9. Discusión

En este Capítulo hemos presentado un marco para la fusión de datos en sistemas de navegación inercial. Este marco generaliza el sistema de localización inalámbrica presentado en el Capítulo 4, y tiene las siguientes ventajas,

1. fusiona los datos provenientes de medidas RSS, TOA e inerciales, siendo extensible a cualquier otro tipo de medidas;

---

<sup>26</sup>En la práctica, la complejidad del UKF depende de la implementación concreta llevada a cabo, siendo habitualmente dos o tres veces superior a la del EKF (Särkkä 2008). En caso de que empleemos suavizado en lugar de filtrado se mantiene esta relación entre las complejidades (Särkkä 2010).

2. no asume ningún modelo estadístico fijo para el error en las medidas, pudiendo particularizar el marco en función de la distribución elegida;
3. aprovecha la relación de las posiciones del NL en el tiempo y la elevada frecuencia de recepción de medidas empleando suavizado Bayesiano;
4. incorpora información *a priori* acerca de la velocidad, aceleración y velocidad angular del NL, permitiendo incorporar otro tipo de información de forma análoga.

Así mismo, hemos implementado este marco mediante una transformación *unscented*, asumiendo todos los errores Gaussianos. Utilizando sensores inerciales de bajo coste y una red IEEE 802.11, esta implementación obtiene un RMSE en estimación de posición menor a 1 metro en un entorno complejo, frente a los 3 metros del Capítulo anterior. Así mismo, como muestran los resultados de simulación, este error alcanza el límite teórico provisto por la CRLB.





## 5.A. Anexo: operaciones con cuaterniones

Sean  $p = [p_0, p_1, p_2, p_3]^T \in \mathbb{H}$  y  $q = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T \in \mathbb{H}$  dos cuaterniones,  $p_0 \in \mathbb{R}$  y  $q_0 \in \mathbb{R}$  sus respectivas partes escalares, y  $\mathbf{p} = [p_1, p_2, p_3]^T \in \mathbb{R}^3$  y  $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]^T \in \mathbb{R}^3$  las vectoriales. El producto de ambos está definido como,

$$\mathbf{p} \odot \mathbf{q} = \begin{pmatrix} p_0 q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \\ p_0 \mathbf{q} + q_0 \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q} \end{pmatrix}.$$

La multiplicación de cuaterniones puede ser también escrita utilizando una notación matriz/vector como sigue,

$$\mathbf{p} \odot \mathbf{q} = \underbrace{\begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}_L} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix},$$

o, de manera equivalente,

$$\mathbf{p} \odot \mathbf{q} = \underbrace{\begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}_R} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}.$$

La exponencial de un cuaternión  $q = [q_0, \mathbf{q}]^T$  se define como,

$$\exp(q) = \exp(q_0) \begin{pmatrix} \cos(\|\mathbf{q}\|) \\ \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} \cos(\|\mathbf{q}\|) \end{pmatrix}.$$

Dado un cuaternión unitario  $q = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T$  representando una orientación, la siguiente matriz ortogonal corresponde a la misma orientación,

$$\begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_1q_3 + 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 - 2q_0q_2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}.$$



## Conclusiones y Líneas Futuras de Investigación

### Contenido

---

6.1. Conclusiones . . . . .	159
6.2. Líneas Futuras de Investigación . . . . .	161

---

Al comienzo de esta Tesis Doctoral, señalamos la importancia de los sistemas de posicionamiento a lo largo de la Historia. La apertura de estos sistemas a aplicaciones civiles, especialmente tras la irrupción de GPS, los ha convertido en un elemento imprescindible del día a día de millones de personas. Sin embargo, su verdadero potencial se ha visto limitado por el requisito de visión directa con los satélites, cayendo su rendimiento drásticamente en entornos complejos. Por ello, nuestro objetivo principal ha sido avanzar hacia nuevos algoritmos de localización y navegación que sustituyan a los sistemas existentes en dichos entornos. En este Capítulo final evaluamos el grado de consecución de dicho objetivo. Así, la Sección 6.1 resume las conclusiones extraídas de los resultados presentados, mientras que la Sección 6.2 propone líneas de investigación futuras.

### 6.1. Conclusiones

En los Capítulos anteriores, hemos empleado el enfoque Bayesiano para diseñar sistemas de posicionamiento en los mencionados entornos complejos. El enfoque Bayesiano dota de la suficiente generalidad como para añadir en la estimación, de manera óptima, cualquier información relacionada con la posición del nodo que queremos localizar. Así, hemos incorporado: la información

recogida en las medidas de los sensores (Capítulo 2); el conocimiento *a priori* sobre evolución temporal de la posición (Capítulo 3); la información dinámica que provee la verosimilitud adaptativa (Capítulo 4); o el conocimiento sobre velocidad, aceleración y velocidad angular que supone llevar una IMU en el pie (Capítulo 5). Desde este enfoque, la cota de Cramér-Rao *a posteriori* provee una importante herramienta que hemos utilizado para el diseño de los sistemas de posicionamiento. Esta nos ha permitido analizar cómo varía el rendimiento de dichos sistemas antes incluso de implementarlos, simplemente conociendo qué información incluyen en su estimación. La evaluación de estos sistemas mediante simulación, utilizando dicha cota de Cramér-Rao, y mediante medidas experimentales, utilizando dispositivos convencionales, nos permite concluir que:

1. los sistemas de posicionamiento desarrollados bajo el marco Bayesiano obtienen mejores estimaciones. El enfoque máximo-verosímil, comúnmente utilizado, emplea únicamente la información provista por observaciones. El modelado como un HMM, llevado a cabo en el Capítulo 3, permite incorporar a dicha información cualquier otro tipo de información *a priori*. Para garantizar que la cota mínima en el error de este modelo no crece en el tiempo, hemos obtenido la condición que deben cumplir las medidas relacionadas con la posición del nodo a localizar, como la potencia recibida o el tiempo de llegada;
2. los sistemas de localización inalámbrica requieren modelos adaptativos en entornos complejos. En base a esta premisa, hemos desarrollado el filtro ALPA, que modela la verosimilitud entre medidas y distancias mediante funciones *kernel*. Esta verosimilitud se adapta a las condiciones del canal de propagación en cada momento, obteniendo mejores rendimientos que implementaciones convencionales. El filtro ALPA es aplicable fuera del ámbito de la localización, en problemas en los que las observaciones tienen una naturaleza dinámica y, posiblemente, un error sistemático;
3. los sistemas de navegación inercial superan las limitaciones de la localización inalámbrica. Los sensores inerciales no son adecuados, por sí solos, para el posicionamiento debido a la deriva que acumulan con el tiempo. Sin embargo, su incorporación al sistema de localización inalámbrica, bajo el marco Bayesiano, permite obtener errores inferiores al metro que

perduran en el tiempo. Por ello, este es el marco que proponemos como una valiosa alternativa para dar continuidad a los sistemas satelitales en entornos complejos.

## 6.2. Líneas Futuras de Investigación

El marco Bayesiano presentado permite inferir posiciones incorporando en la estimación cualquier conocimiento relacionado con estas. Las actuaciones futuras irán encaminadas a aumentar este conocimiento, el cual podemos extraer de diversas fuentes, como por ejemplo,

1. **Planimetría:** el mapa del entorno es una fuente de información no redundante que permite restringir los movimientos del NL de forma fiable. En la literatura podemos encontrar diversas heurísticas que tratan de explotar esta información (Gerlach and Rahmig 2009, Aggarwal et al. 2011). Sin embargo, el conocimiento de la planimetría del entorno puede ser incorporado al problema de estimación bajo el paradigma Bayesiano, bien como restricciones impuestas por *pseudo-mediciones* (Woodman 2009), o bien como conocimiento *a priori*.
2. **Cooperación:** cuando localizamos varios nodos en una misma red, estos pueden compartir el conocimiento acerca de su posición, de manera que cada uno lo incorpore a su estimación. Aunque varios autores han propuesto la cooperación desde el enfoque máximo-verosímil (Dardari et al. 2008, Patwari et al. 2005), podemos obtener mejores estimaciones bajo el marco Bayesiano (Win et al. 2011, Wymeersch et al. 2009). Así, cooperar en el espacio es equivalente a filtrar en el tiempo, con el inconveniente de que puede aparecer información interrelacionada (Mazuelas et al. 2011).
3. **Tecnologías *smart*:** los dispositivos que nos rodean, dotados de cada vez mayor inteligencia, poseen un elevado número de sensores. Algunos de estos sensores proveen información relacionada con la posición del NL que puede ayudar a mejorar la estimación. Por ejemplo, podemos posicionar una silla de ruedas empleando información de un odómetro unido a su rueda (Zeng et al. 2008), o utilizar la cámara de un *Smartphone* para obtener la orientación inicial del NL mediante técnicas de visión (Bernoulli et al. 2011, Kelly and Sukhatme 2009).

En definitiva, el marco que hemos presentado en esta Tesis Doctoral permite incorporar cualquier información relacionada con la posición o la orientación, independientemente de que provenga de conocimiento *a priori* o de medidas realizadas con nuevos sensores. El mayor reto para llevar esto a cabo es establecer la relación de la nueva información con las variables involucradas en el proceso de estimación. Ser capaces de afrontar este reto contribuirá a crear objetos y entornos cada vez más inteligentes.

## Bibliografía

- P. Aggarwal, D. Thomas, L. Ojeda, and J. Borenstein. Map Matching and Heuristic Elimination of Gyro Drift for Personal Navigation Systems in GPS-denied Conditions. *Measurement Science and Technology*, 22(2):1–21, Feb. 2011.
- D. L. Alspach and H. W. Sorenson. Nonlinear Bayesian Estimation Using Gaussian Sum Approximation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 17(4):439–448, July 1972.
- I. Arasaratnam and S. Haykin. Cubature Kalman Filters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(6):1254–1269, June 2009.
- A. Bahillo, S. Mazuelas, J. Prieto, R. M. Lorenzo, P. Fernández, and E. J. Abril. Indoor Location Based on IEEE 802.11 Round-Trip Time Measurements with Two-Step NLOS Mitigation. *Progress In Electromagnetics Research B*, 15:285–306, Sept. 2009a.
- A. Bahillo, J. Prieto, S. Mazuelas, R. M. Lorenzo, J. Blas, and P. Fernández. IEEE 802.11 Distance Estimation based on RTS/CTS Two-Frame Exchange Mechanism. In *IEEE Vehicular Technology Conference*, Apr. 2009b.
- A. Bahillo, S. Mazuelas, R. M. Lorenzo, P. Fernández, J. Prieto, R. J. Durán, and E. J. Abril. Accurate and Integrated Localization System for Indoor Environments based on IEEE 802.11 Round-Trip Time Measurements. *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, 2010, Apr. 2010.
- Y. Bar-Shalom, X. R. Li, and T. Kirubarajan. *Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory Algorithms and Software*. New York: John Wiley & Sons, 2001.
- D. Barber and A. Cemgil. Graphical Models for Time-Series. *IEEE Signal Processing Magazine*, 27(6):1053–5888, Oct. 2010.
- V. E. Benes. Exact Finite-Dimensional Filters for Certain Diffusions with Nonlinear Drift. *Stochastics*, 5(1-2):65–92, Jan. 1981.
- N. Bergman. *Recursive Bayesian Estimation. Navigation and Tracking Applications*. PhD thesis, Linköping University, Linköping, Sweden, 1999.
- N. Bergman, A. Doucet, and N. Gordon. Optimal Estimation and Cramér-Rao Bounds for Partial non-Gaussian State Space Models. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 53(1):97–112, Mar. 2001.
- J. M. Bernardo. Noninformative Priors Do Not Exist: A Discussion. *Journal of Statistics Planning and Inference*, 65:159–189, Dec. 1996.
- J. M. Bernardo and A. F. M. Smith. *Bayesian Theory*. Chichester: John Wiley & Sons, 2000.
- T. Bernoulli, U. Dersch, M. Krammer, U. Walder, and K. Zahn. Improvement of Inertial Sensor Based Indoor Navigation by Video Content Analysis. In *2011 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN 2011)*, Sept. 2011.

- D. S. Bernstein. *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas*. New Jersey: Princeton University Press, 2nd edition, 2009.
- J. Bernstein. An Overview of MEMS Inertial Sensing Technology. *Sensors*, 20(2):14–21, Feb. 2003.
- W. F. Blanchard. Air Navigation Systems Chapter 4. Hyperbolic Airborne Radio Navigation Aids – A Navigator's View of their History and Development. *The Journal of Navigation*, 44(03):285–315, Sept. 1991.
- J. Bortz. A New Mathematical Formulation for Strap-down Inertial Navigation. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-7(1):61–66, Jan. 1971.
- M. Boutin, A. Benzakour, C. L. Despins, and S. Afes. Radio Wave Characterization and Modeling in Underground Mine Tunnels. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 56:540–549, Feb. 2008.
- N. Bowditch. *The American Practical Navigator*. Bethesda: National Imagery and Mapping Agency, bicentennial edition, 2002.
- M. Briers, A. Doucet, and S. Maskell. Smoothing Algorithms for State–Space Models. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 62(1):61–89, June 2009.
- J. J. Caffery. *Wireless Location in CDMA Cellular Radio Systems*. Norwell: Kluwer Academic Publishers, 1999.
- J. J. Caffery. A New Approach to the Geometry of TOA Location. In *IEEE Vehicular Technology Conference*, Mar. 2000.
- O. Cappé, E. Moulines, and T. Rydén. *Inference in Hidden Markov Models*. Springer Series in Statistics. Springer, 2005.
- G. Castella and C. P. Robert. Rao-Blackwellisation of Sampling Schemes. *Biometrika*, 83:81–94, 1996.
- A. Catovic and Z. Sahinoglu. The Cramér-Rao Bounds of Hybrid TOA/RSS and TDOA/RSS Location Estimation Schemes. *IEEE Communications Letters*, 8(10):626–628, Oct. 2004.
- B.-S. Chen, C.-Y. Yang, F.-K. Liao, and J.-F. Liao. Mobile Location Estimator in a Rough Wireless Environment Using Extended Kalman-Based IMM and Data Fusion. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 58(3):1157–1169, Mar. 2009.
- L. Chen and L. Wu. Mobile Positioning in Mixed LOS/NLOS Conditions Using Modified EKF Banks and Data Fusion Method. *IEICE Transactions on Communications*, E92-B(4):1318–1325, Apr. 2009.
- P.-C. Chen. A non-Line-of-Sight Error Mitigation Algorithm in Location Estimation. In *IEEE Wireless Communications and Networking Conference*, June 1999.
- W.-K. Chen. *The Electrical Engineering Handbook*. San Diego: Elsevier Academic Press, 2005.
- Z. Chen. Bayesian Filtering: From Kalman Filters to Particle Filters, and Beyond. Technical report, Hamilton, ON, Canada, 2003.
- C. K. Chui and G. Chen. *Kalman Filtering with Real-Time Applications*. New York: Springer, 4th edition edition, 2009.
- D. Dardari, A. Conti, J. Lien, and M. Z. Win. The Effect of Cooperation on Localization Systems using UWB Experimental Data. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing. Special Issue on Wireless Cooperative Networks*, 2008:1–11, Feb. 2008.
- D. Dardari, A. Conti, U. Ferner, A. Giorgetti, and M. Z. Win. Ranging with Ultrawide Bandwidth Signals in Multipath Environments. *Proceedings of the IEEE*, 97(2):404–426, Feb. 2009.
- F. Daum. Exact Finite-Dimensional Nonlinear Filters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31(7):616–622, July 1986.
- F. Daum. Nonlinear Filters: Beyond the Kalman Filter. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, 20(8):57–69, Aug. 2005.
- F. Daum and J. Huang. Curse of Dimensionality and Particle Filters. In *Proceedings of the IEEE Aerospace Conference IV*, Mar. 2003.
- C. de Marziani, J. Ureña, Á. Hernández, M. Mazo, J. J. García, A. Jiménez, M. C. Pérez, F. J. Álvarez, and J. M. Villadangos. Acoustic Sensor Network for Relative Positioning of Nodes. *Sensors*, 9:8490–8507, Oct. 2009.
- D. J. de Solla Price. Citation Measures of Hard Science, Soft Science, Technology, and Nonscience. In *Communication among Scientists and Engineers*. Lexington, MA: D.C. Heath and Company, 1970.



- P. del Moral. *Feynman-Kac Formulae. Genealogical and Interacting Particle Systems with Applications*. New York: Springer, 2004.
- G. N. DeSouza and A. C. Kak. Vision for Mobile Robot Navigation: A Survey. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 24(2): 237–267, Feb. 2002.
- A. Doucet, S. Godsill, and C. Andrieu. On Sequential Monte Carlo Sampling Methods for Bayesian Filtering. *Statistics and Computing*, 10(3):197–208, July 2000.
- A. Doucet, N. de Freitas, and N. Gordon. *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. New York: Springer, 2001.
- P. Enge, E. Swanson, R. Mullin, K. Ganther, A. Bommarito, and R. Kelly. Terrestrial Radionavigation Technologies. *Navigation: JION*, 42(1):61–108, 1995.
- European Commission. ICT for a Low Carbon Economy. Smart Buildings. Findings by the High-Level Advisory Group and the REEB Consortium. Technical report, July 2009.
- C. Falsi, D. Dardari, L. Mucchi, and M. Z. Win. Time of Arrival Estimation for UWB Localizers in Realistic Environments. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, 2006:1–13, July 2006.
- L. Fang, P. J. Antsaklis, L. A. Montestruque, M. B. McMickell, M. Lemmon, Y. Sun, H. Fang, I. Koutroulis, M. Haenggi, M. Xie, and X. Xie. Design of a Wireless Assisted Pedestrian Dead Reckoning System - The NavMote Experience. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 54(6): 2342–2358, Dec. 2005.
- FCC. FCC, Revision of FCC Rules to Ensure Compatibility with Enhanced 911 Emergency Calling Systems. 1996.
- C. Fischer and H. Gellersen. Location and Navigation Support for Emergency Responders: A Survey. *IEEE Pervasive Computing*, 9(1):38–47, Jan. 2010.
- R. A. Fisher. On the Foundations of Mathematical Statistics. *The Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, A(222):309–368, 1922.
- R. A. Fisher. Theory of Statistical Estimation. In *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1925.
- D. Fox, W. Burgard, and S. Thrun. Markov Localization for Mobile Robots in Dynamic Environments. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 11(1999): 391–427, Nov. 1999.
- E. Foxlin. Pedestrian Tracking with Shoe-Mounted Inertial Sensors. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 25(6):38–46, Nov. 2005.
- W. H. Foy. Position-Location Solutions by Taylor-Series Estimation. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-12(2):187–194, Mar. 1976.
- M. S. Gast. *802.11 Wireless Networks*. Sebastopol: O'Really, 1st edition, Apr. 2002.
- C. F. Gauss and C. H. Davis. *Theory of the Motion of the Heavenly Bodies Moving about the Sun in Conic Sections. A Translation of Gauss's "Theoria motus," with an Appendix*. Boston: Little, Brown and company, 1857.
- J. Geen and D. Krakauer. New iMEMS® AngularRate-Sensing Gyroscope. Technical Report 3, ADI Micromachined Products Division, 2003.
- K. Gerlach and C. Rahmig. Multi-Hypothesis Based Map-Matching Algorithm for Precise Train Positioning. In *12th International Conference on Information Fusion*, Seattle, July 2009.
- J. S. Goddard. *Pose and Motion Estimation from Vision Using Dual Quaternion-based Extended Kalman Filtering*. PhD thesis, University of Tennessee, Knoxville, TN, USA, Dec. 1997.
- S. A. Golden and S. S. Bateman. Sensor Measurements for Wi-Fi Location with Emphasis on Time-of-Arrival Ranging. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 6:14, 2007.
- N. Gordon, D. Salmond, and A. Smith. Novel Approach to Nonlinear/non-Gaussian Bayesian State Estimation. *IEE Proceedings F, Radar and Signal Processing*, 140(2):107–113, Apr. 1993.
- P. D. Groves. *Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems*. Artech House, 2008.

- F. Gustafsson and F. Gunnarsson. Mobile Positioning Using Wireless Networks. *IEEE Signal Processing Magazine*, 22(4):41–53, July 2005.
- F. Gustafsson, F. Gunnarsson, N. Bergman, U. Forsell, J. Jansson, R. Karlsson, and P.-J. Nordlund. Particle Filters for Positioning, Navigation, and Tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(2):425–437, Feb. 2002.
- J. Hartikainen, A. Solin, and S. Särkkä. Optimal Filtering with Kalman Filters and Smoothers. Technical report, AALTO, Espoo, Finland, Aug. 2011.
- D. A. Harville. *Matrix Algebra from a Statistician's Perspective*. New York: Springer, 1997.
- H. Hashemi. The Indoor Radio Propagation Channel. *Proceedings of the IEEE*, 81(7):943–968, July 1993.
- A. Hatami and K. Pahlavan. QRPP1-5: Hybrid TOA-RSS Based Localization Using Neural Networks. In *IEEE Global Telecommunications Conference (GLOBECOM '06)*. IEEE, 2006.
- S. Haykin. Cognitive Radar: a Way of the Future. *IEEE Signal Processing Magazine*, 23(1):30–40, Jan. 2006.
- G. Hendeby. *Performance and Implementation Aspects of Nonlinear Filtering*. PhD thesis, Linköping University, Linköping, Sweden, 2008.
- J. Hightower, B. Brumitt, and G. Borriello. The Location Stack: a Layered Model for Location in Ubiquitous Computing. In *Proceedings Fourth IEEE Workshop on Mobile Computing Systems and Applications*, 2002.
- J. Hightower, D. Fox, and G. Borriello. The Location Stack. Technical Report 03-07-01, Seattle, WA, July 2003.
- Y. Ho and R. Lee. A Bayesian Approach to Problems in Stochastic Estimation and Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 9(4):333–339, Oct. 1964.
- J. Hol, T. Schön, H. Luinge, P. Slycke, and F. Gustafsson. Robust Real-Time Tracking by Fusing Measurements from Inertial and Vision Sensors. *Journal of Real-Time Image Processing*, 2(2):149–160, Nov. 2007.
- R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
- M. Huber and U. Hanebeck. Progressive Gaussian Mixture Reduction. In *11th International Conference on Information Fusion (FUSION '08)*, pages 1–8, July 2008.
- J.-N. Hwang, S.-R. Lay, and A. Lippman. Nonparametric Multivariate Density Estimation: a Comparative Study. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(10):2795–2810, Oct. 1994.
- S. IEEE 802.11. *IEEE Standard for Information Technology - Telecommunications and Information Exchange Between Systems - Local and Metropolitan Area Networks - Specific Requirements - Part 11: Wireless Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications*. Jan. 2007.
- A. R. Jiménez, F. Seco, J. C. Prieto, and J. I. Guevara. Indoor Pedestrian Navigation Using an INS/EKF Framework for Yaw Drift Reduction and a Foot-Mounted IMU. In *7th Workshop on Positioning Navigation and Communication (WPNC)*, Mar. 2010.
- A. R. Jiménez, F. Seco, F. Zampella, J. C. Prieto, and J. I. Guevara. PDR with a Foot-Mounted IMU and Ramp Detection. *Sensors*, 11(10):9393–9410, Sept. 2011.
- A. R. Jiménez, F. Seco, J. C. Prieto, and J. I. Guevara. Accurate Pedestrian Indoor Navigation by Tightly Coupling Foot-Mounted IMU and RFID Measurements. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 61(1):178–189, Jan. 2012.
- D. Jourdan, D. Dardari, and M. Z. Win. Position Error Bound for UWB Localization in Dense Cluttered Environments. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 44(2):613–628, Apr. 2008.
- S. Julier. The Scaled Unscented Transformation. In *Proceedings of the 2002 American Control Conference*, June 2002.
- S. Julier, J. Uhlmann, and H. F. Durrant-Whyte. A New Approach for Filtering Nonlinear Systems. In *Proceedings of the 1995 American Control Conference*, June 1995.
- S. Julier, J. Uhlmann, and H. F. Durrant-Whyte. A New Method for the Nonlinear Transformation of Means and Covariances in Filters and Estimators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(3):477–482, Mar. 2000.

- R. E. Kalman. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problem. *Transactions of the ASME – Journal of Basic Engineering*, 82(Series D):35–45, Mar. 1960.
- S. M. Kay. *Fundamentals of Statistical Signal Processing - Estimation Theory*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1993.
- J. Kelly and G. Sukhatme. Visual-Inertial Simultaneous Localization, Mapping and Sensor-to-Sensor Self-Calibration. In *2009 IEEE International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation (CIRA)*, Dec. 2009.
- B. Kendal. The Beginnings of Air Radio Navigation and Communication. *The Journal of Navigation*, 64(01):157–167, Jan. 2011.
- W. Khoder, B. Fassinut-Mombot, and M. Benjelloun. Inertial Navigation Attitude Velocity and Position Algorithms Using Quaternion Scaled Unscented Kalman Filtering. In *34th Annual Conference of IEEE Industrial Electronics (IECON 2008)*. IEEE, Nov. 2008.
- W. Khreich, E. Granger, A. Miri, and R. Sabourin. On the Memory Complexity of the Forward-Backward Algorithm. *Pattern Recognition Letters*, 31(2):91–99, Feb. 2010.
- G. Kitagawa. Non-Gaussian State-Space Modeling of Nonstationary Time Series. *Journal of the American Statistical Association*, 82:1032–1063, Dec. 1987.
- A. Küpper. *Location-Based Services: Fundamentals and Operation*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2005.
- A. Kushki. *A Cognitive Radio Tracking System for Indoor Environments*. PhD thesis, University of Toronto, Toronto, ON, Canada, 2008.
- A. Kushki, K. N. Plataniotis, and A. N. Venetsanopoulos. Kernel-Based Positioning in Wireless Local Area Networks. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 6(6):689–705, June 2007.
- A. Kushki, K. Plataniotis, and A. Venetsanopoulos. Intelligent Dynamic Radio Tracking in Indoor Wireless Local Area Networks. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 9(3):405–419, Mar. 2010.
- G. Lachapelle. GNSS Indoor Location Technologies. *Journal of Global Positioning Systems*, 3(1-2):2–11, Dec. 2004.
- E. Lefferts, F. Markley, and M. Shuster. Kalman Filtering for Spacecraft Attitude Estimation. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 5:417–429, Sept. 1982.
- J. C. Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. 1873.
- P. S. Maybeck, M. Kozak, and B. Smith. Mixed-Model Multiple-Hypothesis Tracking of Targets in Clutter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 44(4):1402–1415, Oct. 2008.
- S. Mazuelas, A. Bahillo, R. M. Lorenzo, P. Fernández, F. A. Lago, E. García, J. Blas, and E. J. Abril. Robust Indoor Positioning Provided by Real-Time RSSI Values in Unmodified WLAN Networks. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 3(5):821–831, Oct. 2009a.
- S. Mazuelas, F. A. Lago, J. Blas, A. Bahillo, P. Fernández, R. M. Lorenzo, and E. J. Abril. Prior NLOS Measurements Correction for Positioning in Cellular Wireless Networks. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 58(5):673–680, June 2009b.
- S. Mazuelas, R. M. Lorenzo, A. Bahillo, P. Fernández, J. Prieto, and E. J. Abril. Topology Assessment Provided by Weighted Barycentric Parameters in Harsh Environment Wireless Location Systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 58(7):3842–3857, July 2010.
- S. Mazuelas, Y. Shen, and M. Z. Win. Belief Condensation Filter for Navigation in Harsh Environments. In *NLOS Mitigation Prior to Range Estimation Smoothing for Wireless Location Systems*, pages 1–6, June 2011.
- L. A. McGee and S. F. Schmidt. Discovery of the Kalman Filter as a Practical Tool for Aerospace and Industry. Technical Report Docket no. 86847, NASA - National Aeronautics and Space Administration, Nov. 1985.
- M. McGuire, K. Plataniotis, and A. Venetsanopoulos. Data Fusion of Power and Time Measurements for Mobile Terminal Location. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 4(2):142–153, Mar. 2005.

- L. Mihaylova, D. Angelova, S. Honary, D. R. Bull, C. N. Canagarajah, and B. Ristic. Mobility Tracking in Cellular Networks Using Particle Filtering. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 6(10): 3589–3599, Oct. 2007.
- W. Murphy and W. Hereman. Determination of a Position in Three Dimensions Using Trilateration and Approximate Distances. Technical report, Golden, Colorado, 1995.
- R. E. Neapolitan. *Learning Bayesian Networks*. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2nd edition edition, 2003.
- M. Nicoli, C. Morelli, and V. Rampa. A Jump Markov Particle Filter for Localization of Moving Terminals in Multipath Indoor Scenarios. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(8):3801–3809, Aug. 2008.
- L. Ojeda and J. Borenstein. Non-GPS Navigation for Security Personnel and First Responders. *Journal of Navigation*, 60(03):391–407, Sept. 2007.
- E. Parzen. On Estimation of a Probability Density Function and Mode. *The Annals of Mathematical Statistics*, 33(3):1065–1076, Sept. 1962.
- N. Patwari, A. O. Hero III, M. Perkins, N. S. Cornea, and R. J. O’Dea. Relative Location Estimation in Wireless Sensor Networks. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 51(8):2137–2148, Aug. 2003.
- N. Patwari, J. N. Ash, S. Kyperountas, A. O. I. Hero, R. L. Moses, and N. S. Correal. Locating the Nodes: Cooperative Localization in Wireless Sensor Networks. *IEEE Signal Processing Magazine*, 22(4):54–69, July 2005.
- N. Petrellis, N. Konofaos, and G. P. Alexiou. Target Localization Utilizing the Success Rate in Infrared Pattern Recognition. *IEEE Sensors Journal*, 6(5): 1355–1364, Oct. 2006.
- H. V. Poor. *An Introduction to Signal Detection and Estimation*. New York: Springer-Verlag, 2nd edition, 1994.
- J. Prieto, A. Bahillo, S. Mazuelas, R. M. Lorenzo, J. Blas, and P. Fernández. Adding Indoor Location Capabilities to an IEEE 802.11 WLAN using Real-Time RTT Measurements. In *IEEE Wireless Telecommunications Symposium (WTS 2009)*, Apr. 2009a.
- J. Prieto, A. Bahillo, S. Mazuelas, R. M. Lorenzo, J. Blas, and P. Fernández. NLOS Mitigation based on Range Estimation Error Characterization in an RTT-based IEEE 802.11 Indoor Location System. In *IEEE International Symposium on Intelligent Signal Processing (WISP 2009)*, Aug. 2009b.
- J. Prieto, A. Bahillo, S. Mazuelas, R. M. Lorenzo, P. Fernández, and E. J. Abril. Characterization and Mitigation of Range Estimation Errors for an RTT-Based IEEE 802.11 Indoor Location System. *Progress In Electromagnetics Research B*, 15:217–244, Sept. 2009c.
- J. Prieto, A. Bahillo, S. Mazuelas, P. Fernández, R. M. Lorenzo, and E. J. Abril. Self-Calibration of TOA/Distance Relationship for Wireless Localization in Harsh Environments. In *2012 IEEE International Conference on Communications (ICC 2012)*, June 2012a.
- J. Prieto, S. Mazuelas, A. Bahillo, P. Fernández, R. M. Lorenzo, and E. J. Abril. Adaptive Data Fusion for Wireless Localization in Harsh Environments. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 60, Apr. 2012b.
- Y. Qi. *Wireless Geolocation in a Non-Line-of-Sight Environment*. PhD thesis, Princeton University, Princeton, NJ, USA, Dec. 2003.
- Y. Qi. Analysis of Wireless Geolocation in a Non-Line-of-Sight Environment. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 5(3):672–681, Mar. 2006.
- L. Rabiner and B. Juang. An Introduction to Hidden Markov Models. *IEEE ASSP Magazine*, 3(1):4–16, Jan. 1986.
- L. R. Rabiner. A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition. *Proceedings of the IEEE*, 77(2):257–286, Feb. 1989.
- T. S. Rappaport, J. H. Reed, and B. D. Woerner. Position Location Using Wireless Communications on Highways of the Future. *IEEE Communications Magazine*, 34(10):33–41, Oct. 1996.
- H. E. Rauch, F. Tung, and C. T. Striebel. Maximum Likelihood Estimates of Linear Dynamic Systems. *AIAA Journal*, 3(8):1445–1450, May 1965.
- I. Reuven and H. Messer. A Barankin-Type Lower Bound on the Estimation Error of a Hybrid Parameter Vector. *IEEE Transactions on Information Theory*, 43(3):1084–1093, May 1997.

- B. Ristic, S. Arulampalam, and N. Gordon. *Beyond the Kalman Filter. Particle Filters for Tracking Applications*. Boston: Artech House Publishers, 2004.
- C. P. Robert. *The Bayesian Choice. From Decision-Theoretic Foundations to Computational Implementation*. New York: Springer, 2nd edition, 2007.
- X. Rong Li and V. Jilkov. Survey of maneuvering target tracking. Part I. Dynamic models. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 39(4):1333–1364, Oct. 2003.
- T. Roos, P. Myllymaki, and H. Tirri. A Statistical Modeling Approach to Location Estimation. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 1(1):59–69, Jan. 2002.
- M. Rosenblatt. Remarks on Some Nonparametric Estimates of a Density Function. *The Annals of Mathematical Statistics*, 27(3):832–837, Sept. 1956.
- A. Roy, S. Das, and K. Basu. A Predictive Framework for Location-Aware Resource Management in Smart Homes. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 6(11):1270–1283, Nov. 2007.
- H. Saarnisaari and T. Bräysy. Systematic Errors and Location Accuracy in Wireless Networks. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, 2006: 1–9, May 2006.
- D. J. Salmond. Mixture Reduction Algorithms for Target Tracking in Clutter. *SPIE Signal and Data Processing of Small Targets*, 1305:434–445, Apr. 1990.
- S. Särkkä. *Recursive Bayesian Inference on Stochastic Differential Equations*. PhD thesis, Helsinki University of Technology, Helsinki, Finland, 2006.
- S. Särkkä. Unscented Rauch–Tung–Striebel Smoother. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(3): 845–849, Apr. 2008.
- S. Särkkä. Continuous-Time and Continuous-Discrete-Time Unscented Rauch–Tung–Striebel Smoothers. *Signal Processing*, 90(1):225–235, Jan. 2010.
- S. Särkkä and A. Solin. On Continuous-Discrete Cubature Kalman Filtering. In *16th IFAC Symposium on System Identification, Sysid 2012*, July 2012.
- L. L. Scharf. *Statistical Signal Processing: Detection, Estimation, and Time Series Analysis*. New York: Addison-Wesley Publishing Co., 1990.
- D. Schieferdecker and M. Huber. Gaussian Mixture Reduction via Clustering. In *12th International Conference on Information Fusion (FUSION '09)*, July 2009.
- D. W. Scott. *Multivariate Density Estimation*. New York: John Wiley & Sons, 1992.
- I. Sharp, K. Yu, and Y. J. Guo. GDOP Analysis for Positioning System Design. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 58(7):3371–3382, Mar. 2009.
- Y. Shen and M. Z. Win. Energy Efficient Location-Aware Networks. In *2008 IEEE International Conference on Communications (ICC 2008)*, May 2008.
- Y. Shen and M. Z. Win. Fundamental Limits of Wideband Localization— Part I: A General Framework. *IEEE Transactions on Information Theory*, 56(10): 4956–4980, Oct. 2010.
- Y. Shen, H. Wymeersch, and M. Z. Win. Fundamental Limits of Wideband Localization— Part II: Cooperative Networks. *IEEE Transactions on Information Theory*, 56(10):4981–5000, Oct. 2010.
- M. D. Shuster. A Survey of Attitude Representations. *The Journal of the Astronautical Sciences*, 41(4): 439–517, Oct. 1993.
- M. Šimandl, J. Královec, and P. Tichavsky. Filtering, Predictive, and Smoothing Cramér-Rao Bounds for Discrete-Time Nonlinear Dynamic Systems. *Automatica*, 11:1703–1716, Aug. 2001.
- J. Smith and J. Abel. Closed-Form Least-Squares Source Location Estimation from Range-Difference Measurements. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 35(12): 1661–1669, Dec. 1987.
- A. Solin. *Cubature Integration Methods in non-Linear Kalman Filtering and Smoothing*. PhD thesis, Aalto University, Aalto, Finland, Sept. 2010.
- Y. Song and H. Yu. A New Hybrid TOA/RSS Location Tracking Algorithm for Wireless Sensor Network. In *9th International Conference on Signal Processing (ICSP 2008)*, 2008.
- H. W. Sorenson. *Kalman Filtering: Theory and Application*. Piscataway: IEEE, 1985.

- P. Tichavsky, C. Muravchik, and A. Nehorai. Posterior Cramér-Rao Bounds for Discrete-Time Nonlinear Filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 46(5):1386–1396, May 1998.
- D. H. Titterton and J. L. Weston. *Strapdown Inertial Navigation Technology*. Stevenage: Institution of Engineering and Technology, 2nd edition, 2004.
- R. van der Merwe. *Sigma-Point Kalman Filters for Probabilistic Inference in Dynamic State-Space Models*. PhD thesis, Oregon Health & Science University, Portland, OR, USA, Apr. 2004.
- H. L. Van Trees. *Detection, Estimation, and Modulation Theory: Part I*. New York: John Wiley & Sons, 1968.
- B.-N. Vo, B.-T. Vo, and R. P. S. Mahler. Closed-Form Solutions to Forward–Backward Smoothing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 60(1):2–17, Jan. 2012.
- E. A. Wan and R. van der Merwe. The Unscented Kalman Filter. In *Kalman Filtering and Neural Networks*. New York: John Wiley & Sons, 2001.
- R. Watson, G. Lachapelle, R. Klukas, S. Turunen, S. Pietilä, and I. Halivaara. Investigating GPS Signals Indoors with Extreme High-Sensitivity Detection Technique. *Journal of the Institute of Navigation*, 52(4):199–213, 2005.
- A. Weiss. On the Accuracy of a Cellular Location System based on RSS Measurements. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 52(6):1508–1518, Nov. 2003.
- J. R. Wertz. *Spacecraft Attitude Determination and Control*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1978.
- J. L. Williams. *Gaussian Mixture Reduction for Tracking Multiple Maneuvering Targets in Clutter*. PhD thesis, Air Force Institute of Technology, Wright-Patterson AFB, OH, 2003.
- M. Z. Win, A. Conti, S. Mazuelas, Y. Shen, W. M. Gifford, D. Dardari, and M. Chiani. Network Localization and Navigation via Cooperation. *IEEE Communications Magazine*, 49(5):56–62, May 2011.
- O. J. Woodman. *Pedestrian Localisation for Indoor Environments*. PhD thesis, University of Cambridge, Sept. 2009.
- Y. Wu. A Critique on “On Finite Rotations and the Non-commutativity Rate Vector”. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 48(2):1846–1847, Apr. 2012.
- Y. Wu, D. Hu, M. Wu, and X. Hu. Unscented Kalman Filtering for Additive Noise Case: Augmented vs. non-Augmented. In *Proceedings of the 2005 American Control Conference*, June 2005a.
- Y. Wu, X. Hu, D. Hu, T. Li, and J. Lian. Strapdown Inertial Navigation System Algorithms based on Dual Quaternions. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 41(1):110–132, Jan. 2005b.
- Y. Wu, H. Zhang, M. Wu, X. Hu, and D. Hu. Observability of Strapdown INS Alignment: A Global Perspective. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 48(1):78–102, Jan. 2012.
- M. P. Wylie and J. Holtzman. The non-Line of Sight Problem in Mobile Location Estimation. In *1996 5th IEEE International Conference on Universal Personal Communications Record*, Oct. 1996.
- H. Wymeersch, J. Lien, and M. Z. Win. Cooperative Localization in Wireless Networks. *Proceedings of the IEEE*, 92(2):427–450, Feb. 2009.
- Xsens Technologies B.V. *MTi and MTx User Manual and Technical Documentation*. Enschede, N edition, May 2009.
- Q. Zeng, C. Teo, B. Rebsamen, and E. Burdet. A Collaborative Wheelchair System. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 16(2):1534–4320, Apr. 2008.
- F. Zhang. *The Schur Complement and its Applications*. New York: Springer, 2005.
- C. Zhou, J. Downey, D. Stancil, and T. Mukherjee. A Low-Power Shoe-Embedded Radar for Aiding Pedestrian Inertial Navigation. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 58(10):2521–2528, Oct. 2010.
- C. Zhou, J. Downey, J. Choi, D. Stancil, J. Paramesh, and T. Mukherjee. A Shoe-Embedded RF Sensor for Motion Detection. *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, 21(3):169–171, Mar. 2011.



## Convenciones y Notación

### A.1. Lista de acrónimos y abreviaturas

Acrónimo/abreviatura	Significado
2D	Dos dimensiones
ALPA	<i>Adaptive likelihood particle filter</i>
AOA	<i>Angle of arrival</i>
CKF	<i>Cubature Kalman filter</i>
CKS	<i>Cubature Kalman smoother</i>
CLK	<i>Clock cycle</i>
CRLB	<i>Cramér-Rao lower bound</i>
CTS	<i>Clear-to-send</i>
EKF	<i>Extended Kalman filter</i>
EKS	<i>Extended Kalman smoother</i>
EFIM	<i>Equivalent Fisher information matrix</i>
EPA	Encuesta de población activa
FIM	<i>Fisher information matrix</i>
GNSS	<i>Global navigation satellite system</i>
HMM	<i>Hidden Markov model</i>
i.i.d.	Independientes e idénticamente distribuidas
IMU	<i>Inertial measurement unit</i>
KF	<i>Kalman Filter</i>

Acrónimo/abreviatura	Significado
KS	<i>Kalman smoother</i>
LORAN	<i>Long-range navigation</i>
LOS	<i>Line of sight</i>
LS	<i>Least squares</i>
MAP	<i>Máximo a posteriori</i>
MEMS	<i>Microelectromechanical systems</i>
ML	<i>Maximum likelihood</i>
MLE	<i>Maximum likelihood estimator</i>
MMSE	<i>Minimum mean square error</i>
MSE	<i>Mean squared error</i>
NB	Nodo baliza
NL	Nodo a localizar
NLOS	<i>Non-line of sight</i>
PF	<i>Particle filter</i>
pdf	<i>Probability density function</i>
RMSE	<i>Root mean square error</i>
RSS	<i>Received signal strength</i>
RTS	<i>Request-to-send</i>
RTT	<i>Round-trip time</i>
SIFS	<i>Short inter-frame space</i>
SIR	<i>Sampling importance resampling</i>
SIS	<i>Sequential importance sampling</i>
TDOA	<i>Time Difference of arrival</i>
TOA	<i>Time of arrival</i>
UKF	<i>Unscented Kalman filter</i>
UKS	<i>Unscented Kalman smoother</i>
WLS	<i>Weighted least squares</i>
WLAN	<i>Wireless local area network</i>
ZUPT	<i>Zero-velocity update</i>



## A.2. Símbolos y notación matemática

Notación	Significado
$\odot$	Producto cuaterniónico definido en la Sección 5.A
$\bar{q}$	Número cuaterniónico $\bar{q} \in \mathbb{H}$
$\succ$	Dadas $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{D \times D}$ , escribimos $\mathbf{A} \succ \mathbf{B}$ si la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ es definida positiva
$\succeq$	Dadas $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{D \times D}$ , escribimos $\mathbf{A} \succeq \mathbf{B}$ si la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ es semidefinida positiva
$[\cdot]^T$	Traspuesta de una matriz
$t_k$	$k$ -ésimo valor de tiempo en el que está disponible un nuevo conjunto de medidas, $k \in \mathbb{N}$
$\Delta t$	Intervalo de muestreo ( $t_{k+1} - t_k$ )
$f[k]$	Función $f$ evaluada en $t_k \in \mathbb{R}$ , para $k \in \mathbb{N}$
$f^{(n)}(\cdot)$	$n$ -ésima derivada de la función real $f$ evaluada en su argumento
$\mathbf{x}_{1:k}$	Conjunto $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k]$
$\bar{\mathbf{x}}$	Media muestral de las componentes del vector $\mathbf{x}$
$\ \mathbf{x}\ $	Norma del vector $\mathbf{x}$
$\mathbb{E}_{\mathbf{z}}\{\mathbf{x}\}$	Esperanza matemática de la variable aleatoria $\mathbf{x}$ con respecto a $\mathbf{z}$
$\nabla_{\mathbf{x}}$	Gradiente con respecto al vector $\mathbf{x}$
$\mathcal{N}^N$	Potencia cartesiana de orden $N$ del conjunto $\{1, \dots, N\}$ , $N \in \mathbb{N}$
$z$	Variable aleatoria correspondiente a las medidas
$z_k^T, z_k^S, z_k^f, z_k^\omega$	Variable aleatoria correspondiente a las medidas de TOA, RSS, fuerza y velocidad angular en el tiempo $t_k$ , respectivamente
$z_k^i$	$i$ -ésima muestra de la variable aleatoria $z$ en el tiempo $t_k$
$\mathbf{z}_k$	Vector de medidas $\{z_k^i, i = 1, \dots, M\}$ en el tiempo $t_k$ , o variable aleatoria correspondiente a las medidas si $\mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^D$ , $D > 1$
$\omega_k^i$	Peso normalizado de la $i$ -ésima partícula o punto sigma en el tiempo $t_k$
$\tilde{\omega}_k^i$	Peso sin normalizar de la $i$ -ésima partícula en el tiempo $t_k$
$p(\mathbf{x})$	Función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria $\mathbf{x}$
$p(\mathbf{z}_k   \mathbf{y}_k)$	Función de verosimilitud de $\mathbf{y}_k$ a partir de la observación $\mathbf{z}_k$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	Distribución Gaussiana con media $\mu$ y desviación típica $\sigma$
$\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$	Distribución Gaussiana multivariante con vector de medias $\boldsymbol{\mu}$ y matriz de covarianzas $\boldsymbol{\Sigma}$

Notación	Significado
$\mathcal{U}(a, b)$	Distribución Uniforme en el intervalo $[a, b]$
$\varphi_{(\mu, \sigma)}(\cdot)$	Función de densidad de probabilidad (pdf) de una variable aleatoria Gaussiana $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$
$\Phi_{(\mu, \sigma)}(\cdot)$	Función de distribución de probabilidad de una variable aleatoria Gaussiana $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$



## Patentes y Publicaciones

A continuación enumeramos los resultados generados de la investigación directamente relacionada con esta Tesis Doctoral.

### Patentes españolas:

- Procedimiento para la determinación de la posición fusionando la información de los niveles de potencia y el retardo temporal de propagación de las señales recibidas

*Inventores:* **J. Prieto**, A. Bahillo, P. Fernández, R.J. Durán, I. Aboy, R.M. Lorenzo y E.J. Abil

*Entidad Titular:* Universidad de Valladolid

*Número de solicitud:* P-201100870

*Fecha de prioridad:* 22/07/2011

*Estado:* Solicitada

- Procedimiento y sistema de localización de un dispositivo móvil a partir del retardo temporal de propagación de las señales en una red inalámbrica mitigando la falta de visión directa entre dispositivos y sin necesidad de calibración in situ

*Inventores:* S. Mazuelas, R. Lorenzo, P. Fernández, A. Bahillo, J. Blas, E.J. Abril y **J. Prieto**

*Entidad Titular:* Universidad de Valladolid

*Número de solicitud:* P-200803212

*Fecha de prioridad:* 05/11/2008

*Estado:* Solicitada

**Contribuciones en revistas:**

- **J. Prieto**, S. Mazuelas, A. Bahillo, P. Fernández, R.M. Lorenzo y E.J. Abril, "Adaptive Data Fusion for Wireless Localization in Harsh Environments," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 60(4), pp. 1585-1596, Abr. 2012.
- S. Mazuelas, R.M. Lorenzo, A. Bahillo, P. Fernández, **J. Prieto** y E.J. Abril, "Topology Assessment Provided by Weighted Barycentric Parameters in Harsh Environment Wireless Location Systems," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 58(7), pp. 3842-3857, Jul. 2010.
- A. Bahillo, S. Mazuelas, R.M. Lorenzo, P. Fernández, **J. Prieto**, R.J. Durán y E.J. Abril, "Hybrid RSS-RTT Localization Scheme for Indoor Wireless Networks," *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. 2010, pp. 1-12, Jun. 2010.
- A. Bahillo, S. Mazuelas, R.M. Lorenzo, P. Fernández, **J. Prieto**, R.J. Durán y E.J. Abril, "Accurate and Integrated Location System for Indoor Environments Based on IEEE 802.11 Round-Trip Time Measurements," *EURASIP Journal of Wireless Communications and Networking*, vol. 2010, pp. 1-13, Feb. 2010.
- **J. Prieto**, A. Bahillo, S. Mazuelas, R.M. Lorenzo, P. Fernández y E.J. Abril, "Characterization and Mitigation of Range Estimation Errors for an RTT-Based IEEE 802.11 Indoor Location System," *PIER B*, vol. 15, pp. 217-244, Sep. 2009.
- A. Bahillo, S. Mazuelas, **J. Prieto**, R.M. Lorenzo, P. Fernández y E.J. Abril, "Indoor Location Based on IEEE 802.11 RTT Measurements with Two-Step NLOS Mitigation," *PIER B*, vol. 15, pp. 285-306, Sep. 2009.

**Contribuciones en capítulos de libro:**

- **J. Prieto**, S. Mazuelas, A. Bahillo, P. Fernández, R.M. Lorenzo, y E.J. Abril, "Accurate and Robust Localization in Harsh Environments Based on V2I Communication," en *Vehicular Networking Technologies*, Rijeka: In-Tech, 2012. ISBN: 980-953-307-770-8 (aceptado para publicación).

- A. Bahillo, P. Fernández, **J. Prieto**, S. Mazuelas, R.M. Lorenzo, y E.J. Abril, "Distance Estimation Based on 802.11 RTS/CTS Mechanism for Indoor Localization," en *Advances in Vehicular Networking Technologies*, Rijeka: In-Tech, 2011. ISBN: 978-953-307-241-8.

### **Contribuciones en congresos internacionales:**

- **J. Prieto**, A. Bahillo, S. Mazuelas, P. Fernández, R.M. Lorenzo y E.J. Abril, "Self-Calibration of TOA/Distance Relationship for Wireless Localization in Harsh Environments," *2012 IEEE International Conference on Communications*, Ottawa, Jun. 2012.
- A. Bahillo, **J. Prieto**, S. Mazuelas, P. Fernández, R.J. Durán, R.M. Lorenzo y E.J. Abril, "Human Shadow Effect Assessment when Integrating Inertial Navigation System with Signal Strength Measurements for Pedestrian Dead Reckoning," *Progress In Electromagnetics Research Symposium*, Kuala Lumpur, Mar. 2012.
- **J. Prieto**, S. Mazuelas, A. Bahillo, P. Fernández, R.M. Lorenzo y E.J. Abril, "Posterior Cramér-Rao Lower Bound for RSS/TOA-Based Indoor Localization Systems," *2011 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN)*, Guimarães, Sep. 2011.
- **J. Prieto**, S. Mazuelas, A. Bahillo, P. Fernández, R.M. Lorenzo y E.J. Abril, "On the Minimization of Different Sources of Error for an RTT-Based Indoor Localization System without any Calibration Stage," *2010 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN)*, Zürich, Sep. 2010.
- A. Bahillo, S. Mazuelas, **J. Prieto**, P. Fernández, R.M. Lorenzo y E.J. Abril, "Hybrid RSS-RTT Localization Scheme for Wireless Networks," *2010 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN)*, Zürich, Sep. 2010.
- **J. Prieto**, S. Mazuelas, A. Bahillo, R.M. Lorenzo, P. Fernández y E.J. Abril, "NLOS Mitigation prior to Range Estimation Smoothing for Wireless Location Systems," *2010 IEEE International Conference on Communications*, Ciudad del Cabo, May. 2010.

- A. Bahillo, **J. Prieto**, S. Mazuelas, R.M. Lorenzo, P. Fernández y E.J. Abril, "E-Field Assessment Errors Caused by the Human Body on Localization Systems," *IEEE 71th Vehicular Technology Conference*, Taipei, May. 2010.
- **J. Prieto**, A. Bahillo, S. Mazuelas, R.M. Lorenzo, J. Blas y P. Fernández, "NLOS Mitigation Based on Range Estimation Error Characterization in an RTT-Based IEEE 802.11 Indoor Location System," *IEEE International Symposium on Intelligent Signal Processing*, Budapest, Ago. 2009.
- **J. Prieto**, A. Bahillo, S. Mazuelas, R.M. Lorenzo, J. Blas y P. Fernández, "Adding Indoor Location Capabilities to an IEEE 802.11 WLAN Using Real-Time RTT Measurements," *Wireless Telecommunication Symposium*, Praga, Abr. 2009.
- S. Mazuelas, A. Bahillo, **J. Prieto**, R.M. Lorenzo, J. Blas, P. Fernández y F.A. Lago, "Assessment of Optimum Geometric Distribution of Anchors in Non-GNSS Wireless Location Systems," *Wireless Telecommunication Symposium*, Praga, Abr. 2009.
- A. Bahillo, **J. Prieto**, S. Mazuelas, R.M. Lorenzo, J. Blas y P. Fernández, "IEEE 802.11 Distance Estimation Based on RTS/CTS Two-Frame Exchange Mechanism," *IEEE 69th Vehicular Technology Conference*, Barcelona, Abr. 2009.
- **J. Prieto**, A. Bahillo, S. Mazuelas, J. Blas, P. Fernández y R.M. Lorenzo, "RTS/CTS Mechanism with IEEE 802.11 for Indoor Location," *The Navigation Conference & Exhibition: Navigation and Location*, Londres, Oct. 2008.

#### **Contribuciones en congresos nacionales:**

- **J. Prieto**, S. Mazuelas, A. Bahillo, P. Fernández, R.M. Lorenzo y E.J. Abril, "Cota de Cramér-Rao a Posteriori para Sistemas de Localización Inalámbrica Basados en RSS y TOA," *Seminario Anual de Automática, Electrónica Industrial e Instrumentación (SAAEI'11)*, Badajoz, Jul. 2011.
- A. Bahillo, **J. Prieto**, S. Mazuelas, P. Fernández, R.M. Lorenzo y E.J. Abril, "Estimación de Distancias en Redes IEEE 802.15.4 Usando TOF y RSS," *Seminario Anual de Automática, Electrónica Industrial e Instrumentación (SAAEI'11)*, Badajoz, Jul. 2011.

- A.A. Malanda, S. Mazuelas, A. Bahillo, **J. Prieto**, J. Blas, P. Fernández, R.M. Lorenzo y E.J. Abril, “Estimación Robusta de Distancias en Sistemas RSS de Localización Inalámbrica,” *XXIV Simposium Nacional de la Union Científica Internacional de Radio*, Santander, Sep. 2009.
- A. Bahillo, S. Mazuelas, R.M. Lorenzo, **J. Prieto**, J. Blas y P. Fernández, “Localización Precisa de un Usuario Móvil a partir del TIV en Redes IEEE 802.11 bajo NLOS,” *XXIV Simposium Nacional de la Union Científica Internacional de Radio*, Santander, Sep. 2009.