



**UNIVERSIDAD DE  
VALLADOLID**



**ESCUELA DE INGENIERÍAS  
INDUSTRIALES**

**(SEDE FRANCISCO MENDIZÁBAL)**

**INGENIERO TÉCNICO INDUSTRIAL, ESPECIALIDAD EN MECÁNICA**

**PROYECTO FIN DE CARRERA**

**SÍNTESIS DE MECANISMOS. APLICACIÓN AL  
MECANISMO DE APERTURA DE PUERTAS EN UN  
AUTOBÚS**

**Autores: HERRANZ ALEGRE, DAVID  
SANZ CAZORRO, CÉSAR**

**Tutor: MOSTAZA FERNÁNDEZ, ROBERTO  
(CMeIM - Área de Ingeniería Mecánica)**

**JULIO - 2012**



### **AGRADECIMIENTOS DE CÉSAR:**

Mis padres me han inculcado día a día que todo se puede conseguir, que todo se puede superar, que con la unión, el cariño y el trabajo cualquier reto es alcanzable; me dieron la oportunidad de elegir mi camino, apoyándome en todas mis decisiones, alentándome en cada repecho y aplaudiendo cada meta alcanzada. En estas líneas del proyecto quería aplaudirles y ante todo agradecerles por como son, por lo que he logrado gracias a ellos y por la familia que han sabido crear a su alrededor,

También quería agradecer a mis hermanos por su consejo constante, que ha sabido ayudarme en cada momento de duda y han sabido transmitir su cariño y su apoyo.

Acordándome también de mis amigos que en esta etapa de mi vida me han hecho desconectar del trabajo y esfuerzo universitario; pasando inolvidables momentos juntos.

Los conocimientos adquiridos estos años me han ayudado a crecer y poder labrarme un futuro profesional, por eso quería agradecerse especialmente a Roberto Mostaza y los demás profesores que me han podido ayudar en esta tarea.

### **AGRADECIMIENTOS DE DAVID:**

Me gustaría agradecer fundamentalmente a mis padres el esfuerzo, el trabajo y la dedicación que han tenido para darnos, tanto a mí como a mi hermano, unos estudios universitarios que nos permitan forjarnos un futuro y una educación basada en el trabajo, la humildad y el respeto. Gracias a ellos y a su apoyo incondicional en todas las etapas de mi vida, pero sobre todo en esta última, estoy a día de hoy presentando este proyecto como culmen a este periodo universitario.

Quiero también acordarme de mis amigos y compañeros que ya tenía y de los que he ido conociendo en estos años. Toda persona que conoces en la vida te puede aportar y enseñar cosas, y ellos lo hicieron.

Y por último y no menos importante, agradecer, como no, el tiempo prestado por nuestro tutor (Roberto Mostaza) que nos ha tenido que aguantar en estos meses, así como a todos los profesores que he tenido en estos años que han intentado inculcarnos, con mayor o menor éxito, algunos de los conocimientos que nos pueden ser útiles en nuestra vida profesional.

Por todo ello... ¡ MIL GRACIAS !



# - ÍNDICE -

	<u>Pag:</u>
1. Introducción, objetivo del proyecto .....	9
1.1. Introducción a los mecanismos y al diseño de máquinas .....	9
1.2. Introducción a la síntesis de mecanismos .....	20
1.3. Aplicación de los métodos matemáticos en el campo de los mecanismos .....	22
1.3.1 Formulación simbólica vs. formulación numérica .....	24
1.4. Análisis de mecanismos .....	26
1.4.1. Sistemas de coordenadas .....	26
1.4.2. Coordenadas cartesianas .....	27
1.4.3. Análisis de posición .....	28
1.4.4. Pares o juntas .....	32
1.4.5. Grados de libertad .....	34
1.5. Objetivos del proyecto .....	36
2. Síntesis de mecanismos .....	39
3. Síntesis de un mecanismo de apertura de puertas .....	41
4. Síntesis de generación de funciones .....	43
4.1. Síntesis mediante las ecuaciones de Freudenstein .....	46
4.1.1 Síntesis de generación de funciones con tres puntos de precisión mediante la ecuación de Freudenstein .....	49
4.1.1.1 Relación entrada-salida “angular” .....	49
4.1.2 Aumento del número de puntos de precisión .....	51
4.1.3 Síntesis de generación de funciones con cinco puntos de precisión mediante la ecuación de Freudenstein .....	52
4.1.4 Aplicación de las ecuaciones de Freudenstein en un mecanismo de apertura de puertas .....	53
4.1.4.1 Diseño de un mecanismo de apertura de puertas mediante la síntesis de generación de funciones con tres puntos de precisión en base a la ecuación de Freudenstein .....	53

4.1.4.2	Diseño de un mecanismo de apertura de puertas mediante la síntesis de generación de funciones con tres puntos de precisión en base a la ecuación de Freudenstein .....	61
4.2	Síntesis mediante métodos gráficos .....	65
4.2.1	Método del polo .....	65
4.2.1.1	Síntesis para un giro de las manivelas por el método del polo ..	68
4.2.1.2	Aplicación del método del polo en un mecanismo de apertura de puertas .....	69
4.2.1.2.1	Diseño de un mecanismo de apertura de puertas para un giro de las manivelas mediante el método del polo .....	69
4.2.2	Método del polo relativo .....	73
4.2.2.1	Síntesis para un giro de las manivelas por el método del polo relativo .....	75
4.2.2.2	Síntesis para dos giros de las manivelas por el método del polo relativo .....	77
4.2.2.3	Aplicación del método del polo relativo en un mecanismo de apertura de puertas .....	78
4.2.2.3.1	Diseño de un mecanismo de apertura de puertas para un giro de las manivelas mediante el método del polo relativo .....	78
4.2.2.3.2	Diseño de un mecanismo de apertura de puertas para un giro de las manivelas mediante el método del polo relativo .....	82
4.2.3	Método de la inversión .....	85
4.2.3.1	Síntesis para un giro de las manivelas mediante el método de la inversión .....	85
4.2.3.2	Síntesis para dos giros de las manivelas mediante el método de la inversión .....	87
4.2.3.3	Aplicación del método de la inversión en un mecanismo de apertura de puertas .....	88
4.2.3.3.1	Diseño de un mecanismo de apertura de puertas para un giro de las manivelas mediante el método de la inversión .....	88

4.2.3.3.2	Diseño de un mecanismo de apertura de puertas para dos giros de las manivelas mediante el método de la inversión .....	91
4.2.4	Ampliación del número de posiciones a coordinar, o de puntos de precisión, mediante el método de reducción de posiciones .....	94
4.2.4.1	Síntesis para cuatro posiciones de las manivelas mediante el método de reducción de posiciones .....	94
4.2.4.2	Aplicación del método de reducción de posiciones en un mecanismo de apertura de puertas .....	96
4.2.4.2.1	Diseño de un mecanismo de apertura de puertas para cuatro posiciones de las manivelas mediante el método de reducción de posiciones .....	96
5	Síntesis de generación de trayectorias .....	99
5.1	Síntesis mediante el método propuesto por Jiménez, Álvarez, Cardenal y Cuadrado .....	99
5.2	Aplicación del método propuesto por Jiménez, Álvarez, Cardenal y Cuadrado en un mecanismo de apertura de puertas .....	105
5.2.1	Diseño de un mecanismo de apertura de puertas mediante la síntesis de generación de trayectorias utilizando el método propuesto por Jiménez, Álvarez, Cardenal y Cuadrado .....	105
6	Análisis de los métodos vistos hasta el momento y conclusiones acerca de su utilidad en la síntesis de un mecanismo de apertura de puertas .....	113
7	Diseño de un mecanismo de apertura de puertas mediante simulación en Working Model .....	119
8	Resistencia estructural del mecanismo de apertura de puertas .....	143
8.1	Cálculo del peso propio del conjunto puerta-vidrio-complementos, de la carga accidental máxima y de la carga distribuida .....	145
8.2	Cálculo del esfuerzo (Fc) que debe soportar la barra “c” (barra en L) .....	146
8.3	Estudio de la barra curva tubular (barra “c”) que sufre un esfuerzo “Fc” .....	147
8.4	Estudio de las soldaduras .....	151

8.5 Estudio de los tornillos de las abrazaderas .....	155
8.6 Cálculo numérico de la resistencia estructural .....	162
9 Diseño y planos de un mecanismo de apertura de puertas con CATIA V5 .....	169
10 Conclusiones generales del proyecto .....	171
11 Presupuesto .....	173
12 Líneas futuras de investigación .....	179
13 Software empleado .....	181
14 Bibliografía .....	189

ANEXO A → Planos.

ANEXO B → Código Técnico de la Edificación.



## **1. INTRODUCCIÓN:**

### **1.1. Introducción a los mecanismos y al diseño de máquinas:**

Comenzaremos realizando un recorrido cronológico.

#### La Antigüedad:

Ya en el 260 a. de C. parece que existía en China el llamado "carro que mira hacia el Sur", un ingenioso mecanismo montado en un carro que, merced a un tren epicicloidal de engranajes, mantenía el brazo de una figura humana apuntando siempre hacia el Sur, independientemente de en qué dirección se moviera el carro, y era utilizado como brújula por los viajeros que atravesaban el desierto de Gobi.

En poemas de la literatura hindú, compuestos hacia el año 1700 a. de C. se mencionan carros y ruedas, lo que nos permite suponer que ya entonces había mecanismos suficientemente conocidos.

Homero, cuya existencia se sitúa hacia el siglo X a. de C., se refirió a una manivela en la Ilíada y en la Odisea, así como a un dispositivo para taladrar en la Odisea.

Fueron los sabios griegos quienes se preguntaron por primera vez por la naturaleza del movimiento. Sus observaciones trascienden generalmente la contingencia de lo fenoménico para intentar profundizar en aquello que permanece como substrato de todo movimiento.

Aristóteles (384-322 a. de C.) a lo largo de sus obras, trató aspectos puramente mecánicos como la composición geométrica de fuerzas y la caída libre de los cuerpos, a la que dio una respuesta errónea, probablemente porque no llegó a captar el concepto de "movimiento en el vacío", ni tuvo la oportunidad de realizar una rigurosa experimentación.

Arquímedes (287-212 a. de C.) tiene indudablemente una trascendencia superior, y en él ven algunos al verdadero iniciador de la Mecánica como ciencia. Definió el centro de gravedad de un sistema material, estableció las leyes de la palanca, "dadme un

punto de apoyo y moveré la Tierra", enunció el principio que lleva su nombre en Mecánica de Fluidos y desarrolló numerosos ingenios bélicos para la defensa de Siracusa (Sicilia) de donde era originario y en donde residía.

Ctesebio (285 a. de C.), un genio de la intuición técnica, desarrolló numerosos inventos, tales como un fusil de aire comprimido, un instrumento musical de aire alimentado por un fuelle, una bomba aspirante-impelente y un dispositivo para regular la posición de un espejo de salón.

Unos cien años más tarde, la influencia de la cultura helena traspasa las fronteras de Grecia y aparece en la ciudad de Alejandría una floreciente pléyade de sabios, que subsiste durante varios siglos. Herón de Alejandría (siglo I d. De C.) fue el primero que empleó el vapor de agua como generador de potencia y escribió 3 libros en los que describe muchas máquinas, tales como la prensa de tornillo y un sofisticado odómetro que permitía medir fracciones de milla.

El mundo romano apenas se manifestó en el campo de las matemáticas y de las ciencias de la naturaleza.

#### La Edad Media:

El periodo que abarca el final del imperio romano y toda la Edad Media, es decir algo más de 10 siglos, es un tiempo de una cierta decadencia técnica y científico-experimental. Se reprodujeron y mejoraron ligeramente los ingenios existentes, pero con una casi total carencia de creatividad mecánica.

#### El Renacimiento:

Fue un momento histórico de resurgimiento en todas las áreas del saber humano, caracterizado por la aparición de grandes genios, algunos de los cuales centraron su atención en los problemas mecánicos. Una de las personalidades más destacadas fue, sin duda, Leonardo da Vinci (1452-1519), en cuyos famosos diseños de máquinas se han inspirado tantos otros autores posteriormente. En sus apuntes se encuentran diseños de grúas (con poleas, engranajes), ingenios voladores, dispositivos para respirar bajo el agua, mecanismos de transformación del movimiento (rotación en translación alternativa,...), odómetros, etc.

Gerolamo Cardano (1501-1576) inventó la junta de transmisión que lleva su nombre, y estudió la trayectoria de un punto de una circunferencia que rueda por el interior de otra circunferencia de diámetro doble.

La Estática, prácticamente olvidada desde Arquímedes, experimentó un notable desarrollo merced a los trabajos de Simón Stevin (1548-1620) que publicó a principios del siglo XVII su obra "Hypomnemata Mathematica" en la que trata del equilibrio en un plano inclinado y de las poleas, empleando con soltura y seguridad la composición de fuerzas por el método del paralelogramo.

La máxima figura de la época renacentista fue, sin lugar a dudas, el italiano Galileo Galilei (1564-1642) filósofo, matemático y físico que ejerció sus tareas docentes en Pisa, Padua y, más tarde, en Florencia. Vehemente defensor de la teoría heliocéntrica, se le puede considerar como el iniciador de la Dinámica. Estudió la caída libre de los cuerpos, separando los aspectos cinemático y dinámico. No pretendió explicar el movimiento, sino describirlo: " Una vez que se conoce con exactitud como caen los cuerpos, entonces se puede probar a establecer las leyes profundas que lo rigen". Oponiéndose a la teoría aristotélica afirmó que los cuerpos caen en el vacío con la misma velocidad.

Galileo no fue solamente un hábil experimentador, sino que mostró también un agudo ingenio inductivo. Por razonamientos teóricos fue capaz de formular las leyes del movimiento uniformemente acelerado, y dedujo la trayectoria parabólica de un proyectil lanzado horizontalmente y sometido a la acción de la gravedad. Conoció la fuerza centrífuga y enunció la ley del sincronismo del péndulo, estableciendo que el periodo del movimiento era proporcional a la raíz cuadrada de su longitud e independiente de su masa. En sus trabajos de Estática, empleó la construcción del paralelogramo para la composición de fuerzas y definió una nueva magnitud: el momento de una fuerza.

Los trabajos de Galileo fueron continuados por sus discípulos, en su mayoría italianos, entre quienes merece destacar al Evangelista Torricelli que abordó también el estudio de la caída de los cuerpos. Fue el primero en afirmar que la Mecánica es una rama de las Matemáticas en la que aparecen unas magnitudes nuevas, tales como la

fuerza, y un concepto también nuevo, el movimiento. En su obra se produjo, de hecho, la emancipación del movimiento y de las fuerzas dentro de una Mecánica racional.

En el año 1561, nació en Londres F. Bacon, creador del empirismo inglés. De raíz plenamente filosófica su obra tiene unas indudables repercusiones en el desarrollo de las ciencias físico-naturales.

### El Siglo XVII:

En él la Mecánica alcanza una cierta madurez como ciencia, lográndose al fin proporcionar una cierta unidad a los conocimientos desarrollados hasta entonces. Es la época de los grandes sabios: Descartes, Pascal y Mariot en Francia, Huygens en Holanda, Boyle, Hooke y Newton en Inglaterra,...

René Descartes (1596-1650) formuló correctamente la ley de la inercia, aunque no llegó a captar bien el concepto de aceleración. Sus seguidores sostuvieron una controversia con Leibnitz (1646-1716) acerca de la "eficacia" del movimiento. Para los cartesianos la eficacia era proporcional a la velocidad; mientras que para Leibnitz lo era a su cuadrado. Analizando con detenimiento se observa que este desacuerdo es tan sólo una discrepancia de puntos de vista sobre un mismo hecho. Para Descartes la eficacia se contaba por el tiempo, y para Leibnitz por el espacio... y ambos tienen razón. Sin embargo, esta disputa constituye el primer momento histórico en que se presentan dos concepciones radicales de la Mecánica: la Mecánica vectorial y la Mecánica variacional.

Christian Huygens (1629-1695) describió los relojes de péndulo de su época e inventó el péndulo cicloidal, cuyo periodo es independiente de la amplitud del movimiento (tautocronismo). Estableció la reciprocidad entre los centros de suspensión y oscilación (teorema de Huygens), y parece que fue también precursor de la ecuación de Euler-Savary.

Probablemente el científico más importante de la época fue Isaac Newton (1642-1727). En él finaliza una época y con él se inicia otra. Sistematizó todos los conocimientos inconexos anteriores dándoles una estructura lógica definitiva. En su obra "Principia Mathematica Philosophiae Naturae" estableció las tres leyes fundamentales de la Dinámica. Matizó de forma definitiva la diferencia entre masa y

peso, y enunció la Ley de la Gravitación Universal, basándose en la descripción que había hecho Johannes Kepler (1571-1630) del movimiento planetario.

Jean Bernoulli (1661-1748) intervino activamente en el desarrollo de la Mecánica de Fluidos y reconoció el principio de los trabajos virtuales como un principio general de la Estática. También desarrolló el concepto de centro instantáneo de rotación en el movimiento plano.

### El Siglo XVIII:

A lo largo de este siglo se va perfilando la Cinemática como ciencia, si bien no se consolidará como tal hasta el siglo siguiente. Jacob Leupold (1674-1727), hizo una auténtica recopilación de los inventos mecánicos de siglos precedentes, proporcionando la primera definición de máquina: "sistema artificial capaz de producir un movimiento ventajoso y de mover los cuerpos con ahorro de tiempo y de fuerza".

Leonhard Euler (1707-1783), discípulo de Jean Bernoulli, estableció que el movimiento plano de un sólido indeformable puede describirse como la composición de una traslación y una rotación alrededor de un punto. Este principio, extendido a la velocidad y aceleración, constituye el origen del análisis gráfico de mecanismos. James Watt (1736-1819) dedicó un gran esfuerzo a la síntesis de movimientos, abordando el problema de la trayectoria de un punto del acoplador del cuadrilátero articulado y logrando generar un movimiento rectilíneo aproximado. Estos estudios le permitieron perfeccionar la máquina de vapor, a la que dotó de un mecanismo capaz de transmitir la fuerza en ambos sentidos.

### El Siglo XIX:

Durante este siglo, los conocimientos que constituyen hoy la Mecánica de Máquinas se fueron consolidando y madurando. La Geometría y el Análisis Matemático contribuyeron notablemente a este progreso, motivado por el rápido crecimiento tecnológico. Los estudiosos del siglo en esta área pueden agruparse principalmente en las tres grandes escuelas: la Francesa, la Alemana y la Inglesa.

- *Escuela Francesa:*

André Marie Ampère (1775-1836) reconoció la posibilidad de estudiar el movimiento de los mecanismos con independencia de las fuerzas que lo producen, y acuñó el término "cinemática", traducción del vocablo griego que significa movimiento.

A partir de este momento, la Cinemática comenzó a ser considerada como ciencia.

Gustave Gaspard de Coriolis (1792-1843), ingeniero de profesión y director de l'Ecole Polytechnique (París), definió la componente de la aceleración que lleva su nombre y fue un precursor de la Mecánica Aplicada moderna. Michel Chasles (1793-1880) y Louis Poincaré (1777-1859) generalizaron respectivamente los conceptos de centro instantáneo de rotación –ya introducido por Jean Bernoulli- y de eje instantáneo de rotación.

- *Escuela Alemana:*

La Cinemática moderna comenzó con Franz Reuleaux (1829-1905), profesor de Cinemática en el Politécnico de Zurich y en Berlín, a la vez que director de la Real Academia de la Industria de Alemania. Fue el primero en analizar los Mecanismos de modo sistemático y profundo, definiendo los conceptos de elemento, par, cadena cinemática, equivalencia cinemática e inversión. Clasificó los pares en "superiores" (contacto puntual o a lo largo de la línea) e "inferiores" y apuntó la idea de la expansión de los pares de revolución. Redujo toda máquina a una combinación de componentes: barras, ruedas, levas, etc.

R. Mehmke y Karl Friedrich Möhr (1806-1879) introdujeron en Alemania los métodos gráficos para el análisis de mecanismos, tales como la cinemática de velocidades.

Sigfrid Aronhold (1819) enunció, con anticipación a Kennedy, el "teorema de los tres centros", si bien ambos desarrollaron el trabajo por separado.

Martín Grübler (1851-1935), profesor en las Universidades de Zurich, Riga, Berlín y Dresde, estableció el "criterio de movilidad" para mecanismos planos y espaciales.

- *Escuela Inglesa:*

Robert Willis (1800-1875), ingeniero y antropólogo, fue profesor de la Universidad de Cambridge, y propuso un criterio de clasificación de los mecanismos en base a la relación de transmisión del movimiento entre los elementos de entrada y salida.

Samuel Roberts (1827-1893), abogado estudioso de las matemáticas, demostró la existencia de tres tipos diferentes de cuadriláteros articulados capaces de trazar idénticas curvas de acoplador.

Alexander Blake William Kennedy (1847-1928), profesor del University College (Londres), formuló el algoritmo gráfico para la determinación del polo del movimiento relativo entre dos elementos de un Mecanismo y tradujo al inglés la obra de F. Reuleaux contribuyendo a su difusión.

Robert Henry Smith (1825-1916), profesor de Mecánica Aplicada, desarrolló su actividad docente en Japón. Introdujo el empleo de métodos gráficos para el análisis de velocidades en los mecanismos, técnica que se generalizaría a partir de 1930.

- *Otras escuelas:*

Giuseppe Antonio Bognis (1780), profesor de Mecánica en la Universidad de Pavía, sugirió la división de los componentes de las máquinas en seis tipos: receptores, comunicadores, modificadores, soportes, reguladores y operadores. Esta clasificación fue simplificada por De Coriolis que redujo las partes de una máquina a tres: elementos receptores de la acción externa, elementos transmisores del movimiento y elementos conducidos.

Pafnutij Chebyshev (1821-1894), profesor de matemáticas en la Universidad de San Petesburgo y creador de la Escuela Rusa de Cinemática, se dedicó al dimensionamiento del cuadrilátero articulado capaz de generar trayectorias rectas y circulares con error mínimo, utilizando para ello los polinomios que llevan su nombre.

El Siglo XX:

El comienzo del siglo se encuentra dominado por las Escuelas Alemana y Rusa. La primera - fundada por Burmester - se polarizó hacia los problemas de síntesis dimensional, sobre todo en su aplicación a los mecanismos planos. En Rusia, los

discípulos de Chebyshev prosiguieron sus trabajos en las técnicas de ajustes y aproximación de curvas, desarrollando métodos especiales y nuevas herramientas matemáticas.

Terminada la guerra, surge con gran ímpetu la Escuela Americana (A. Svoboda, J.A. Hrones y G.L. Nelson) donde pronto se empezó a utilizar profusamente el computador, promoviendo el desarrollo de nuevos métodos algebraicos y numéricos, mucho más generales que los métodos gráficos previamente utilizados.

Hoy en día, un gran porcentaje de los métodos en uso están orientados al computador y a la investigación se dirige, no sólo hacia la mejora de los propios métodos, sino también hacia un mejor aprovechamiento de las capacidades informáticas. Una de las capacidades más interesantes es la de resolver problemas de modo interactivo, lo cual tiene enormes posibilidades tanto en el campo del diseño como en el de la enseñanza.

La Dinámica, por su parte, estudia el movimiento junto con las fuerzas motoras que lo producen y las reacciones que se originan. Aborda problemas de potencia motriz, rendimiento, reacciones en apoyos, tensiones y deformaciones elásticas, vibraciones, fallos por choque o fatiga, problemas tribológicos, etc. La dificultad que presenta la resolución de un problema dinámico suele ser, en general, muy superior a la de uno cinemático, debido principalmente al distinto papel que juega la variable tiempo y a los efectos no lineales que aparecen.

De forma análoga a lo que sucede en Cinemática, también en Dinámica existe un enfoque tradicional gráfico o grafoanalítico y un enfoque moderno analítico y orientado al computador. Aquí, sin embargo, las diferencias no son tan acusadas ya que las evaluaciones dinámicas del movimiento siempre se plantean a partir de los mismos principios generales: Ecuaciones de Lagrange, Leyes de Newton, Teorema de los Trabajos Virtuales, Principio de Superposición,...

Hoy en día, existen programas de computador capaces de efectuar análisis cinemáticos y dinámicos de sistemas mecánicos complejos. Estos programas realizan auténticas simulaciones, de las que pueden obtenerse tanto resultados numéricos (tablas,



gráficas,...), como gráficos, visualizando de manera realista el movimiento del sistema en la propia pantalla del computador. Es importante constatar cómo el usuario de estos programas debe poseer unos sólidos conocimientos teóricos, que le permitan definir correctamente el modelo más apropiado para su problema, detectar los posibles errores en dicho modelo e interpretar correctamente los resultados obtenidos.

Muchos de los principios básicos del estudio y análisis de Sistemas Multicuerpo presentados en este trabajo se conocen desde hace más de 100 años. Muchas de esas técnicas, que tienden a ser de naturaleza gráfica, pueden hacerse más útiles al diseñador mecánico haciendo que la computadora lleve a cabo las porciones repetidas de las construcciones, con mucha mayor precisión que la que es posible alcanzar manualmente. El diseñador puede entonces concentrarse en los aspectos más creativos del proceso de diseño, abstrayendo el modelo analizable y experimentando con varios diseños en forma interactiva con la computadora. Así, aunque la labor monótona se delega a la computadora, la creatividad innata del diseñador permanece en el “circuito”.

La aplicación de la computadora a los problemas de mecanismos y Sistemas Multicuerpo ha tenido una historia relativamente corta. La evolución comenzó con los códigos de análisis en unidades centrales (mainframes) y ha progresado a métodos de diseño y análisis, amigables para el usuario, sobre computadoras personales o portátiles.

#### Década de los 50:

La década de los 50 vio la primera introducción y disponibilidad de las computadoras digitales en la industria y programas de ingeniería en las universidades. Varios programas fueron desarrollados por Al Hall y otros en la Universidad de Purdue, por el grupo de C.W. McLarnan en la Universidad del Estado de Ohio, por J.E Shigley y otros en Michigan por el grupo de F. Freudenstein en Columbia y por J.Denavit y R.Hartenberg en Northwestern. Freudenstein revisó los programas de computadora desarrollados para el diseño de mecanismos antes de 1961.

En 1951, Kemler y Howe presentaron “tal vez la primera referencia publicada sobre aplicaciones de la computadora en el diseño de mecanismos, la cual ilustra cálculos de desplazamientos, velocidades y aceleraciones en mecanismos de retorno rápido”.

Una de las contribuciones tempranas que usó la computadora para síntesis de eslabonamientos fue la de Freudenstein y Sandor, que adaptó las técnicas con base gráfica sugeridas por Burmester en 1876 y las reformuló para solución por computadora. Las ecuaciones resultantes de síntesis compleja fueron resueltas en modo de lote en una IBM 650. Este trabajo fue la base técnica para los códigos KINSYN y LINCAGES que surgieron en los años 70.

#### Década de los 60:

Las computadoras se volvieron más accesibles a los investigadores universitarios en los primeros años de la década de los 60. Muchos investigadores empezaron a utilizar la fuerza de la computadora para resolver ecuaciones cuyas resoluciones resultaban demasiado tediosas por técnicas gráficas, por regla de cálculo o por calculadoras electromecánicas de escritorio.

Hacia finales de los 60, se empezaron a resolver problemas de síntesis en modo de lote con la computadora, con técnicas de punto de precisión o tipo optimización.

El área del análisis dinámico de mecanismos de cuerpo rígido y del balanceo de eslabonamientos comenzó a emerger con base en la potencia de las computadoras digitales. Aunque se tuvieron algunos éxitos inicialmente con las computadoras híbridas (analógicas combinadas con digitales) en la resolución de ecuaciones diferenciales de movimiento, los métodos numéricos de integración, como el de Runge-kutta, ocasionó que los dispositivos analógicos fuesen eliminados poco a poco.

#### Década de los 70:

En los primeros años de la década de los 70 se tuvo un aumento repentino en las aplicaciones de las computadoras. Códigos como el IMP, desarrollado por P. Sheth y J. Uicker en la universidad de Wisconsin, y el DRAM y ADAMS, desarrollado en la Universidad de Michigan por D. Smith, N. Orlandea y M. Chace, tuvieron sus raíces en esta década.

La computación cambió lentamente del modo de lote al modo interactivo, lo que constituyó un paso importante en hacer las técnicas más útiles a los diseñadores. Además, las gráficas por computadora aplicadas al diseño de mecanismos recibieron su

bautizo en los primeros años de la década de los 70 por Kaufman. KINSYN I fue un programa diseñado especialmente en el M.I.T y debe ser reconocido como el principal hito en el diseño cinemático.

La computadora digital por sí misma nos trasladó a la mitad del camino hacia el diseño útil de mecanismos ayudado por computadora. Las gráficas por computadora para entradas, salidas, así como para mejorar la interacción en la toma de decisiones sobre diseños fue el segundo ingrediente requerido. Hacia finales de la década de los 70 se dispuso de otros paquetes de software para síntesis y análisis.

#### Década de los 80:

En los años 80 se tuvo un aumento extraordinario en la actividad alrededor de mecanismos por varias razones. Los años 80 vieron también el principio de la integración del análisis, síntesis y dinámica de los mecanismos con otras áreas de diseño ayudado por computadora, como el dibujo, los elementos finitos y la simulación.

#### Década de los 90 y siguientes:

La integración de la computadora en el diseño de mecanismos se ve muy estimulante. El diseñador de mecanismos tiene a su disposición un impresionante conjunto de herramientas para el análisis y diseño óptimo de mecanismos.

Varias áreas específicas tendrán una actividad incrementada, como por ejemplo:

- (1) el uso de modeladores sólidos para la exhibición y análisis de mecanismos en dos y tres dimensiones;
- (2) la integración del software para el análisis y síntesis de mecanismos en otras fases del diseño y manufactura ayudado por computadora;
- (3) muchas más aplicaciones a necesidades específicas de la industria;
- (4) más análisis y diseño ayudado por computadora para elementos de máquinas (engranajes, levas, indexadores, etc.);
- (5) mejoras técnicas para el análisis y simulación de problemas más complejos incluidos, holguras, deflexiones de eslabones, fricción, amortiguamiento, etc.;
- (6) el desarrollo de técnicas del tipo síntesis ayudadas por computadora, para diseñadores, útiles en las etapas de técnicas de sistemas expertos e inteligencia artificial;

- (7) el uso de sofisticadas interfaces gráficas que conducirán a un software muy cómodo para el usuario;
- (8) un aumento en el desarrollo del software para el diseño de mecanismos en computadoras portátiles y
- (9) el uso de supercomputadoras que permitan la optimización, el procesamiento en paralelo y la simulación en gran escala del diseño.

## **1.2. Introducción a la síntesis de mecanismos:**

Según Reuleaux una máquina se puede considerar como "una combinación de cuerpos resistentes de tal manera que, por medio de ellos, las fuerzas mecánicas de la naturaleza se pueden encauzar para realizar un trabajo acompañado de movimientos determinados". Y un mecanismo se puede considerar como "una combinación de cuerpos resistentes conectados por medio de articulaciones para formar una cadena cinemática cerrada con un eslabón fijo y cuyo propósito es transformar el movimiento".

En el diseño de una máquina pueden intervenir muchos campos de la ciencia como por ejemplo la mecánica, la termodinámica, la mecánica de fluidos o la ciencia de materiales, y se deben tener en cuenta aspectos como el económico, el estético... No obstante, de todos los estudios que se deben de realizar en el diseño de una máquina, el estudio mecánico es de primordial importancia, ya que la mecánica es la ciencia que relaciona la geometría, las fuerzas y los desplazamientos, factores que determinan el funcionamiento de la máquina. En el diseño de los mecanismos, el estudio mecánico será uno de los más importantes ya que, según la definición de mecanismo, el objetivo de éstos es transformar el movimiento y el análisis del movimiento lo realiza la mecánica.

Al principio de la revolución industrial, el trabajo de los animales y el trabajo más pesado del hombre fue sustituido por el de las máquinas.

Poco a poco, se ha ido sustituyendo el trabajo físico del hombre y, actualmente, con la reconversión industrial, se está sustituyendo por el de las máquinas, incluso el trabajo más cualificado realizado por hombre.

De lo expuesto anteriormente, se deduce la importancia del "Diseño de Máquinas" para que éstas sean capaces de realizar los trabajos más complejos, a gran velocidad, con seguridad para las personas y bienes que estén a su alrededor, y con unos costes competitivos.

Es muy importante hacer un buen diseño de mecanismos para realizar un buen diseño mecánico de máquinas. El diseño de un mecanismo en particular, o de una máquina en general, consta de dos partes diferenciadas: "Síntesis" y "Análisis".

La síntesis consiste en establecer a priori los tamaños, formas, composición de materiales y disposición de las piezas, del tal modo que el mecanismo o máquina resultante desempeñe el trabajo deseado.

Mediante el análisis se hace un estudio sobre un mecanismo o máquina previamente sintetizada, para determinar si los movimientos que realiza (trayectorias, velocidades y aceleraciones) son los deseados, y si los esfuerzos que aparecen en los diferentes puntos de las piezas son menores que los esfuerzos que son capaces de soportar.

La síntesis requiere imaginación, creatividad, sentido común y experiencia. En cambio, en el análisis se necesitan una serie de conocimientos de mecánica para determinar si el mecanismo o máquina sintetizada realiza los movimientos prescritos, y si es suficientemente resistente como para soportar los esfuerzos a que se verá sometido. No obstante, el trabajo de análisis puede resultar muy complejo; por ejemplo, cuando se trata de determinar el movimiento de un mecanismo sometido a unas fuerzas exteriores.

En el diseño de un mecanismo o máquina, el proceso habitual es el siguiente: En primer lugar, se sintetiza el mecanismo o máquina, normalmente de forma aproximada. Posteriormente, se realiza el análisis.

Por regla general, el mecanismo o máquina sintetizada no suele realizar perfectamente el movimiento prescrito, o está mal dimensionado en cuanto a resistencia.

Por ello, se hace necesario variar el diseño, y volver a realizar el análisis, en un proceso iterativo hasta comprobar que el mecanismo o máquina realiza el movimiento deseado, y sus piezas están dimensionadas de forma que serán capaces de soportar los esfuerzos a que vayan a estar sometidas.

Hasta hace aproximadamente 40 años, el proceso indicado en el párrafo anterior se hacía manualmente y, normalmente, no se tenía en cuenta si la solución obtenida era la óptima. En muchos casos, las máquinas y mecanismos se iban optimizando gracias a la experiencia adquirida con los resultados reales de otras máquinas construidas anteriormente.

En las últimas décadas, con el desarrollo de la informática, el proceso iterativo se ha realizado por medio de ordenadores, que reducen el tiempo de cálculo y permiten añadir la optimización de las diferentes soluciones posibles; algo impensable de realizar manualmente, para problemas ligeramente complicados, por lo tedioso y costoso en tiempo que resultaba.

### **1.3. Aplicación de los métodos matemáticos en el campo de los mecanismos:**

A mediados del siglo XX los avances logrados en el campo de la optimización matemática permiten la aplicación de la metodología científica a una serie de problemas que hasta la fecha, y salvo honrosas excepciones que pasaron, sin embargo, inadvertidas, se habían tratado de una forma intuitiva muy alejada del obligado rigor que el tema merecía.

Kantorovitch desarrolló un primer método de programación lineal. Su revolucionario trabajo, pese a publicarse en ruso en 1939, pasó inadvertido en occidente hasta su traducción al inglés, en 1960. Otros trabajos tempranos fueron los de Karush (1939) y John (1948), que sólo fueron reconocidos cuando perdieron gran parte del impacto que hubieran merecido en su día.

La verdadera eclosión de los métodos matemáticos aplicados a problemas de optimización de Sistemas Multicuerpo tuvo lugar en 1947, cuando Dantzing,

resumiendo el trabajo de sus predecesores, desarrolló el método simplex para la resolución de problemas lineales. A partir del trabajo de Dantzing proliferaron las contribuciones teóricas y las aplicaciones de los problemas de optimización lineal, debido también en gran parte al desarrollo acelerado que las computadoras sufrieron en esa época.

Mediado el siglo Kuhn y Tucker (1951) publicaron su trabajo, orientado a la resolución de problemas no lineales, en el cual llegaron a conclusiones semejantes a las que Karush y John habían obtenido años atrás. Sus resultados fueron fundamentales para la resolución de problemas de optimización no lineales, y hoy se consideran de gran importancia teórica, tanto en matemáticas como en otras disciplinas.

En la actualidad son multitud los campos de aplicación de las técnicas matemáticas de optimización, que van desde una vasta gama de aplicaciones ingenieriles, como el lanzamiento de satélites espaciales o el diseño de estructuras, elementos mecánicos y circuitos electrónicos, hasta aplicaciones económicas como el control de la producción, la asignación óptima de los recursos o las estrategias de inversión.

El software comercial de análisis cinemático y dinámico de los Sistemas Multicuerpo disponible hoy día en el mercado, es capaz de generar y resolver las ecuaciones del movimiento de forma automática. Se trata de una herramienta imprescindible para el diseño de los Sistemas Multicuerpo en campos tan diversos como la industria del automóvil, la industria aeroespacial, la robótica o la biomecánica. En la actualidad existe una gran cantidad de software de análisis de Sistemas Multicuerpo en el mercado.

Los programas computacionales pueden dividirse, según el tipo de código que incorporen, en numéricos y en simbólicos, aunque estos a su vez pueden subdividirse en semi-simbólicos, totalmente simbólicos, y además pueden ser implementados con otros programas como Maple, Matlab,...

En la actualidad existen multitud de códigos computacionales para el análisis dinámico de mecanismos, ya sean éstos de carácter comercial, docente o investigador. A

modo de ejemplo vamos a citar algunos de éstos, pero sin pretender hacer una lista exhaustiva. Como ejemplos de códigos simbólicos podemos destacar ADAMS, MBSYMBOL, DADS y SIM-PACK. Como códigos semi-simbólicos diseñados para el tratamiento de problemas de la Dinámica Vehicular podrían citarse a NEWEUL, basado en el formalismo de Newton-Euler, y CARSIM. Ambos códigos permiten tratar de forma eficiente las restricciones de tipo no holónomo, linealizar las ecuaciones de movimiento, e incluso optimizar parámetros dinámicos. Sin embargo, el sistema de álgebra simbólica en el que se basan tiene ciertas limitaciones y la posibilidad de manipular expresiones simbólicas en línea de comandos es escasa o nula. En algunos casos esta limitación se resuelve exportando un código legible por MAPLE.

Como programas basados en códigos numéricos podemos citar FOURBAR y DINAFOUR, FORTRAN, NASTRAN, WINMEC, WORKING MODEL, ROBOTRAN, LAPACK, etc. Dentro del análisis cinemático, la mayoría de los autores resuelven el problema a través de diversas técnicas de programación matemática no lineal con restricciones, aunque recientemente han surgido planteamientos alternativos basados en técnicas metaheurísticas, como los algoritmos genéticos o las redes neuronales.

En análisis dinámico el número de trabajos publicados es mucho menor, ya que la aparición de las ecuaciones algebraico-diferenciales que controlan el comportamiento dinámico del mecanismo complica sensiblemente el problema.

### 1.3.1. Formulación simbólica vs. formulación numérica:

Las herramientas basadas en formulación simbólica no procesan números, sino nombres de variables y expresiones analíticas que las relacionan. La formulación simbólica está constituida por una serie de expresiones matemáticas que modelan el comportamiento cinemático y dinámico del sistema. Están disponibles en herramientas de matemática simbólica como MAPLE, MATHEMATICA o MATLAB, y pueden a su vez incorporarse como bibliotecas en otros programas. La formulación simbólica, aplicada a los Sistemas Multicuerpo, presenta las siguientes ventajas:

- Elimina muchas operaciones innecesarias.
- Permite ver explícitamente la influencia de cada variable en el comportamiento del sistema.



La formulación simbólica resulta ventajosa cuando todos los posibles movimientos del sistema están contenidos en unas ecuaciones de movimiento únicas. Esto no ocurre en el caso de que haya cambios cualitativos en la configuración cinemática del sistema durante el movimiento y resulta inviable, si durante el funcionamiento se producen modificaciones como consecuencia de impactos o rozamientos.

La formulación numérica plantea las ecuaciones del movimiento numéricamente, sin generar nuevas expresiones analíticas, lo que la convierte en un método más eficiente porque es más sencilla de utilizar y permite construir herramientas de propósito general para el análisis cinemático y dinámico de Sistemas Multicuerpo de todo tipo.

Las principales ventajas asociadas a la formulación numérica en el ámbito de los Sistemas Multicuerpo son las siguientes:

- Es más flexible, puesto que su formulación es menos específica.
- Genera problemas de menor tamaño, puesto que los algoritmos para el tratamiento simbólico de las variables son mucho más largos y complejos que los algoritmos de manipulación de matrices o de resolución de sistemas de ecuaciones.
- Es más eficiente y sencilla de utilizar.

Los últimos avances en métodos numéricos, entre ellos el uso de técnicas de matrices dispersas, que eliminan las operaciones que involucran a términos nulos, o la utilización de formulaciones dinámicas avanzadas, aumentan día a día la eficiencia de las formulaciones numéricas.

La elección entre las dos formulaciones no es obvia y depende de cada caso concreto, puesto que no se puede afirmar con rotundidad que uno de los planteamientos sea mejor, en general, que el otro.

## 1.4. Análisis de mecanismos:

### 1.4.1. Sistemas de coordenadas:

Para poder definir las posiciones y los desplazamientos de los diferentes puntos de un mecanismo es necesario utilizar algún sistema de coordenadas. En lo que sigue se definen tres sistemas de coordenadas que se usan en Mecánica: coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

Para cada uno de estos sistemas de coordenadas tridimensionales se define tres coordenadas escalares que son  $(x, y, z)$  en cartesianas,  $(\rho, \varphi, z)$  en cilíndricas y  $(r, \theta, \Phi)$  en esféricas y además se define vectores unitarios asociados a esas coordenadas espaciales.

Estos vectores unitarios apuntan en una dirección que, en general, depende del punto que se está describiendo. Sólo en coordenadas cartesianas esto no ocurre así.

Aunque existen diferentes sistemas de coordenadas como las cilíndricas y esféricas, en este trabajo se emplearán las coordenadas cartesianas, que se basan en los ejes mutuamente perpendiculares X, Y, Z. Estos ejes tienen asociados unos vectores unitarios, como ya dijimos antes. Los ejes y los vectores unitarios asociados se suponen fijos al sistema de referencia en el cual se describe el movimiento, entonces los vectores de posición velocidad y aceleración son:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k}$$

Coordenadas	Vectores
x, y, z	$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

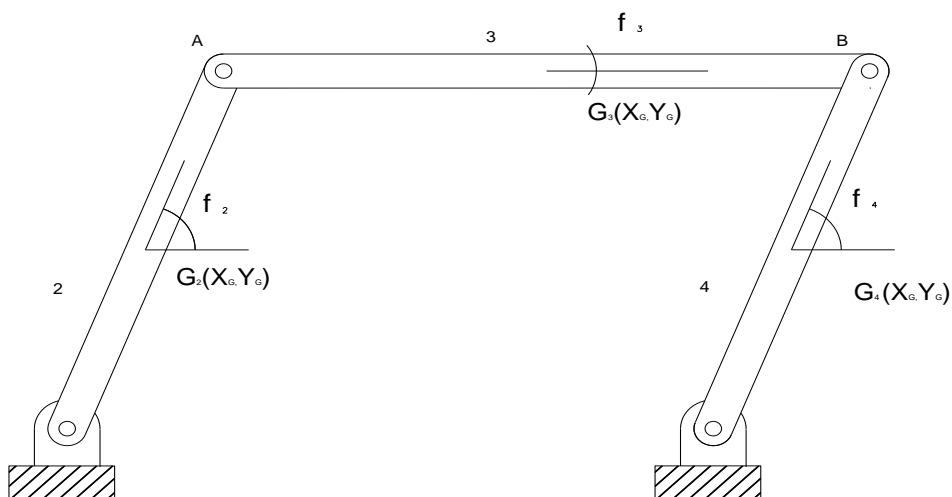
### 1.4.2. Coordenadas cartesianas:

También llamadas coordenadas de punto de referencia, las coordenadas cartesianas se formulan para evitar los inconvenientes asociados al uso de coordenadas relativas.

En general se define la posición de un eslabón mediante las coordenadas cartesianas de un punto del mismo, al que se llama punto de referencia y que suele coincidir con el centro de masa del eslabón, y una serie de parámetros que definen la orientación del eslabón.

En el caso particular de sistemas planos, son necesarias tres coordenadas cartesianas para definir absolutamente la posición de un elemento del sistema: se define la posición del punto de referencia mediante dos coordenadas cartesianas, y la orientación del elemento mediante un ángulo.

Si nos fijamos en el cuadrilátero articulado de la figura anexa, se caracteriza entonces por seis coordenadas, que coinciden con las coordenadas de los centros de masas de las barras, y los tres ángulos que forman las barras con la dirección horizontal.



Las ventajas más importantes derivadas de la utilización de coordenadas cartesianas son las siguientes:

- Se maneja directamente la información sobre la posición, velocidad y aceleración absoluta de cada elemento, por lo que desaparece el trabajo extra de preproceso y postproceso que implicaba la utilización de las coordenadas relativas.
- Las matrices que aparecen en las ecuaciones del movimiento tienen muy pocos términos no nulos, por lo que puede adoptarse una formulación adecuada a este tipo de matrices, que resulta particularmente eficiente.
- Las restricciones se establecen a escala local, dado que las ecuaciones de restricción que introduce un par cinemático sólo implican a las coordenadas de los dos elementos conectados. Este hecho hace posible que las ecuaciones de restricción sean independientes de la complejidad del sistema.

Por otro lado, el principal inconveniente del uso de coordenadas cartesianas es el elevado número de coordenadas que son necesarias para definir la posición del sistema, lo que incide negativamente en el coste computacional.

#### 1.4.3. Análisis de posición:

La realización del análisis cinemático constituye la fase previa y fundamental al acometer el proceso de análisis y/o diseño de un mecanismo. Dentro de este análisis cinemático el primer paso que se debe resolver es el análisis de la posición. Sin embargo, resulta llamativo el escaso número de métodos para la resolución del problema de posición desde un enfoque de tipo general, y es por lo que, la clasificación que aquí se presenta, está basada en el tipo de planteamiento. Según esto pueden clasificarse en métodos gráficos, analíticos y de computación matricial.

De acuerdo con esta clasificación en primer lugar se encuentran los métodos gráficos, o desde un enfoque más amplio y actual, los métodos grafo-analíticos. Dentro de ellos se pueden establecer a su vez tres subgrupos. Los dos primeros se encuadran en lo que podría denominar métodos gráficos clásicos. Cabe distinguir por tanto, en primer lugar, los métodos de descomposición diádica o métodos de intersecciones. En el segundo subgrupo están los procedimientos de interpolación gráfica o falsas posiciones.

Los métodos gráficos clásicos se apoyan en la existencia de un lazo cuadrilátero en el mecanismo cosa que sucede en la mayoría de los mecanismos sencillos. En los métodos que forman el tercer subgrupo, el problema de posición se aborda desde un enfoque geométrico mientras que la resolución del problema se realiza mediante procesos analíticos. Son los métodos que utilizan el enfoque modular, que consiste en descomponer el mecanismo en bloques de elementos más simples para con posterioridad ensamblar sus resultados.

La dificultad fundamental de los métodos modulares consiste en que cuanto más generalidad pretende darse, los módulos de mecanismos crecen en complejidad.

Los métodos analíticos se caracterizan por realizar un planteamiento analítico, independientemente de cuál sea el procedimiento de resolución (en muchos casos numéricos). Estos métodos toman como punto de partida las ecuaciones del cierre de los lazos independientes del mecanismo. En este sentido son métodos particulares que se concretan en programas de propósito particular.

Una vez planteadas las ecuaciones del problema de posición del mecanismo, hay tres maneras de resolver estos sistemas de ecuaciones no lineales: por métodos de continuación polinomial, por métodos de eliminación y las Bases de Gröbner.

Los métodos de continuación polinomial son conocidos como métodos homotópicos. El procedimiento de continuación polinomial es un método de carácter puramente numérico. Debido a que las ecuaciones de cierre de los lazos del mecanismo son polinómicas en senos y cosenos, el método de continuación es capaz de encontrar todas las posibles soluciones sin necesidad de partir de una solución aproximada cercana a la posición solución. Esto supone una ventaja a destacar con respecto a los tradicionales métodos basados en el algoritmo Newton-Raphson. Otra ventaja fundamental es la capacidad del método para resolver sistemas de ecuaciones de muy grandes dimensiones. El coste computacional es la desventaja fundamental de estos métodos que no los hacen aptos para aplicaciones en las que se necesita controlar la posición de un mecanismo en tiempo real.

Para la obtención de soluciones en forma cerrada, (solución analítica), existen dos posibilidades: los denominados métodos de eliminación y las Bases de Gröbner. Los métodos de eliminación utilizan una formulación algebraica que permite la eliminación de un gran número de variables convirtiendo un sistema de ecuaciones multivariante en una única ecuación univariante. Habitualmente la ecuación resultante es compleja, y debe ser resuelta mediante procedimientos numéricos o mediante la resolución de un problema de valores y vectores propios a partir del determinante resultante. Estos métodos resuelven totalmente el problema de posición obteniendo todas las soluciones reales, complejas y en el infinito.

Dentro de los métodos de eliminación se pueden distinguir tres tipos: métodos de eliminación simultánea, de eliminación sucesiva y de eliminación repetida. Los métodos de eliminación poseen una eficiencia computacional mayor que los de continuación polinomial y las Bases de Gröbner. La dificultad de los métodos de eliminación está en encontrar, para cada caso, una estrategia adecuada para la eliminación de las variables. Presentan asimismo el inconveniente de que no pueden evitar introducir soluciones ajenas al problema debido a las manipulaciones analíticas realizadas. Las Bases de Gröbner, constituyen un procedimiento algebraico iterativo de eliminación de variables. A pesar de su alto coste computacional, esta técnica resulta muy útil a la hora de confirmar el número de soluciones de un determinado problema de posición o como ayuda para determinar su polinomio característico. Asimismo, la utilización de las Bases de Gröbner ha demostrado ser muy eficiente en combinación con los métodos de eliminación basados en matrices resultantes.

Por último se encuentran los métodos generales de computación matricial. Por tales se entienden, aquellos procedimientos que dan lugar a programas de computador basados en algoritmos sistemáticos de análisis, que permiten el análisis cinemática completo, de forma automatizada para mecanismos con cualquier grado de complejidad y cualquier número de elementos. Dentro de los métodos de computación matricial existen dos enfoques: el más extendido, basados en sistemas multicuerpo, y otro más particular desarrollado a partir del Método de los Elementos Finitos.

En los métodos multicuerpo, a la hora de modelizar el mecanismo, hay que seleccionar un conjunto de coordenadas que definan unívocamente la posición de los

elementos del mecanismo. Para ello, existen distintos tipos de coordenadas donde las más importantes son: coordenadas relativas, coordenadas cartesianas y coordenadas naturales.

Una valoración comparativa de la utilización de los distintos tipos de coordenadas puede verse en las referencias. A partir de estas coordenadas, las restricciones que se formulan para obtener el sistema de ecuaciones del problema de posición son: restricciones de lazo, restricciones de par y restricciones de elemento, respectivamente.

Para la resolución de dicho sistema, la primera fase consiste en el ensamblado del mecanismo, es decir, la obtención de una de las soluciones del problema de posición inicial. Para ello, se hace necesaria la asistencia de un método computacional estable para obtener una buena estimación de dicha posición. Esto puede conseguirse minimizando el desequilibrio de las ecuaciones de restricción.

Una vez se ha ensamblado el mecanismo, se realiza un chequeo para comprobar la existencia de restricciones redundantes en el modelo que haya podido incluir involuntariamente el usuario cuando se modelizan mecanismos complejos o con geometrías particulares.

Posteriormente se eliminan de las ecuaciones de restricción dependientes. Para ello, puede utilizarse la eliminación gaussiana con pivotamiento total. Otra alternativa es trabajar directamente con un procedimiento de resolución que trate con sistemas de ecuaciones redundantes. Un método eficiente para resolver este problema es utilizar la formulación de mínimos cuadrados en la iteración.

Una vez eliminadas las restricciones redundantes se puede finalmente realizar el análisis de desplazamientos finitos obteniendo la simulación del movimiento del mecanismo. En la resolución de este problema se parte del conocimiento de una posición previa del mecanismo cercana a la posición a calcular.

- Grafo-analíticos
  - Métodos gráficos
    1. Descomposición diádica
    2. Interpolación o falsas posiciones
  - Métodos modulares
- Analíticos
  - Métodos de continuación (homotópicos)
  - Métodos de eliminación
    1. Simultánea<sup>4</sup>
    2. Sucesiva
    3. Repetida
  - Bases de Grobner
- Computación matricial
  - Enfoque multicuerpo
    1. Restricciones de lazo (coordenadas relativas)
    2. Restr. de par (coord.. cartesianas)
    3. Restr. de elemento (coord.. naturales)
  - Enfoque MEF

Generalmente, a partir de esta posición puede obtenerse una buena estimación de partida con la que el método de Newton-Raphson pueda alcanzar la convergencia cuadrática del error y sea realmente eficaz. En el análisis de desplazamientos finitos, con el objeto de asegurar la convergencia del método, frecuentemente la estimación de partida es previamente mejorada a partir de los datos del análisis de velocidades y aceleraciones obtenidos para dicha posición. Como resumen de lo presentado en esta introducción, en la Fig. 2.2 se propone una clasificación de los métodos de resolución del problema de posición.

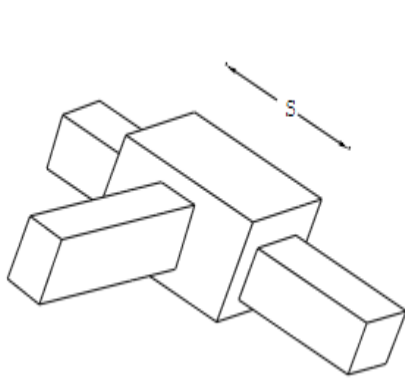
#### 1.4.4. Pares o juntas:

Una junta o un par, es la conexión que existe entre dos o más eslabones, la cual se encuentra en los nodos de los eslabones y permite algún movimiento o movimiento potencial, entre los eslabones conectados. Las juntas o pares cinemáticos pueden ser clasificadas de la siguiente forma:

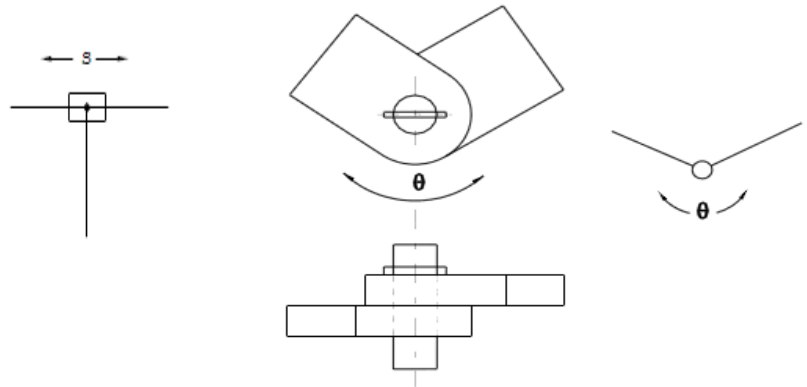


- Por el número de grados de libertad permitidos en la junta.
- Por el tipo de contacto que existe entre los elementos: de línea, de punto o de superficie.
- Por el tipo de cierre de la junta en junta de fuerza o de forma.
- Por el número de eslabones que están conectados.

Juntas con un GDL

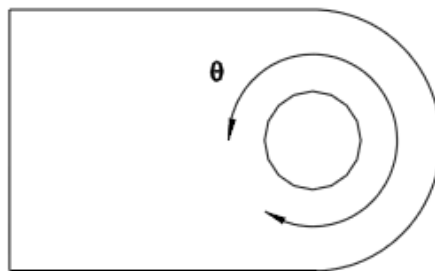


*Junta de pasador para rotación*



*Junta de corredera para translación*

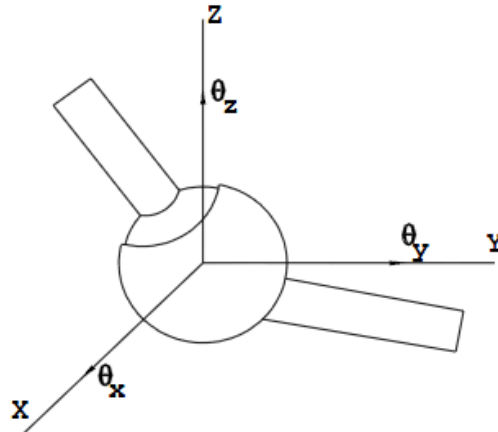
Semijuntas con dos GDL



*Eslabón apoyado contra un plano*

*Eslabón con pasador de ranura*

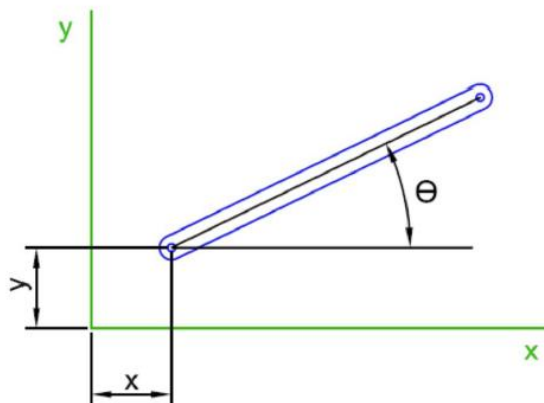
### Junta de rótula o de bola con tres GDL



#### 1.4.5. Grados de libertad:

Cuando se tiene un Sistema Multicuerpo, éste se puede clasificar de acuerdo con el número de Grados De Libertad (GDL) que posee. El GDL de un mecanismo es el número de parámetros independientes que se necesitan para definir su posición en el espacio en cualquier instante.

Se tiene un eslabón como el que se muestra en la figura adjunta, el cual está colocado sobre un plano que tiene un sistema de coordenadas x, y; si el eslabón permanece en el plano se requieren tres parámetros para definir completamente su posición: dos coordenadas lineales (x, y) para definir la posición de cualquier punto del eslabón, y una coordenada angular ( $\theta$ ) para definir el ángulo que forma con respecto al eje x.



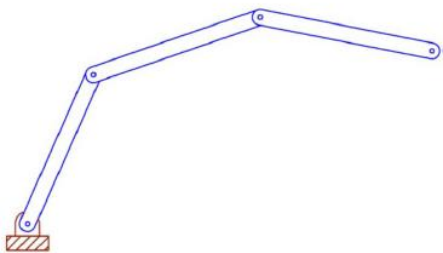
Obsérvese que este sistema tiene tres GDL, ya que el eslabón no se encuentra fijo.

Los parámetros particulares elegidos para definir su posición no son los únicos que se podrían haber utilizado en un conjunto alterno como pueden ser dos longitudes y un ángulo.

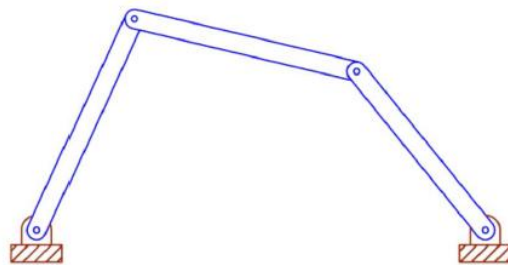
Por lo tanto, el GDL de un sistema depende del tipo de unión que presenten los eslabones, los cuales pueden conformar una cadena de tipo abierta o cerrada, como se muestra en las siguientes figuras. Un sistema cerrado no tendrá nodos con apertura por lo que puede tener uno o más GDL mientras que una cadena abierta con más de un eslabón tendrá siempre más de un grado de libertad.

Para determinar el GDL en un mecanismo se debe tener en cuenta el número de eslabones que lo conforman, así como también el tipo de unión y la clase de juntas con las que están unidos los eslabones.

#### Tipos de cadena



*Cadena de eslabones abierta*



*Cadena de eslabones cerrada*

Como ya sabemos, un eslabón cualquiera en un plano tiene tres GDL y por consiguiente, un sistema de L eslabones no conectados en el mismo plano tendrá  $3 \times L$  GDL. Cuando un eslabón cualquiera se fija o se sujeta al marco de referencia o bastidor, sus tres GDL quedarán eliminados. Todo esto se puede expresar por medio de la ecuación de Gruebler:

$$\text{GDL} = 3L - 2J - 3G$$

donde:

GDL = número de grados de libertad

L = número de eslabones

J = número de juntas

G = número de eslabones fijos

Si se presenta más de un eslabón fijo el efecto neto será crear un eslabón fijo mayor, ya que sólo hay un plano de sujeción. Por tanto G siempre va a ser igual a uno, y si sustituimos en la ecuación de Gruebler, se puede escribir como:

$$GDL = 3(L - 1) - 2J$$

en la cual se deben incluir todas las juntas que actúen en el mecanismo para ambos casos y si se trata de un par superior, se considerará como la mitad de una junta o sea  $\frac{1}{2}J$ , ya que solo elimina un GDL. Al incluir esta condición se obtiene:

$$GDL = 3(L - 1) - 2J_1 - J_2$$

donde:

GDL = número de grados de libertad

L = número de eslabones

J1 = número de juntas completas o pares inferiores

J2 = número de semijuntas o pares superiores

### 1.5. Objetivos del proyecto:

En el estudio de mecanismos que se imparte en nuestra titulación, las medidas y los componentes de los mecanismos son dadas y el problema que se resuelve es el análisis del movimiento.

Bien diferente es el caso de comenzar con un movimiento requerido como dado e intentar encontrar el mecanismo que da lugar a este movimiento. Esta situación se conoce como síntesis de mecanismos y puede presentar muchas alternativas de solución: exacta, aproximada, de compromiso, materializable, etc.

Los objetivos del proyecto:

- Adentrarnos ligeramente en la síntesis de mecanismos, estudiando alguno de los métodos existentes para ello, métodos analíticos, gráficos y de simulación por ordenador.

- Realizar un trabajo en equipo, practicando esta habilidad.
- Desarrollar una metodología en cuanto a la realización de un proyecto de investigación que nos ayude a avanzar progresivamente, marcando los objetivos concretos a los que se intenta llegar, pero a su vez de una manera flexible ya que puede haber muchas formas de llegar a ese objetivo, siendo este estudio de utilidad para futuros proyectos aunque no estén en el campo de la síntesis de mecanismos.

Como objetivos concretos en la síntesis de mecanismos, nos vamos a centrar en un caso en particular, en la síntesis del mecanismo de un sistema de apertura de puertas de un autobús. Para ello, se plantean las siguientes pautas a tener en cuenta para la elaboración o sintetizado de un mecanismo o mecanismos para esa función:

- Espacio demandado en el movimiento de apertura de puertas, siendo esta la que sea menor, intentando minimizar este espacio.
- Mayor simplicidad en diseño (menor número de barras, pares de unión, engranajes, un solo motor eléctrico, etc.), instalación y posible reparación.
- Menor espacio ocupado en el interior del vehículo y la necesidad de salvar los obstáculos propios del vehículo como los dinteles.

Una vez finalizado el estudio o proyecto, se redactará un apartado para ver los objetivos alcanzados durante la realización del proyecto.

Consiguiendo los objetivos anteriormente mencionados, con la práctica, los proyectos futuros serán más eficaces, con menor tiempo de ejecución y en consecuencia más competitivos.

Por otra parte, entendemos que para poder hacer un estudio completo de los mecanismos planteados no es suficiente limitarnos a cumplir con los requisitos geométricos, de funcionalidad y simplicidad, sino que habría que continuar con un estudio de esfuerzos en las diferentes partes del mecanismo ya que a simple vista un mecanismo puede funcionar pero por ejemplo una de sus barras puede estar soportando esfuerzos que en la realidad supondría tener que utilizar una barra con sección demasiado robusta y de gran dimensión, con lo que perderíamos la simplicidad conseguida en un momento inicial.



## 2. SÍNTESIS DE MECANISMOS:

El problema de la síntesis se divide en tres partes:

- Tipo de mecanismo que se ha de emplear,
- número de miembros y enlaces necesarios, y
- medidas de los miembros.

A menudo se hace referencia a esta división hablando de la síntesis de tipo, de nombre y dimensional.

Como ayuda para la síntesis de tipo y de número se ha de contar, en general, con la intuición y la experiencia del diseñador, ya que hay poca teoría.

La facilidad de plantear y resolver el análisis de mecanismos concretos hace que el diseño muchas veces se base en la selección de un caso de entre un conjunto de los estudiados.

Los problemas en la síntesis se pueden situar en una de las categorías siguientes: generación de funciones, generación de trayectorias y guiado de sólidos.

Dentro de la categoría de generación de funciones, se presentan todos aquellos problemas de síntesis que pretenden conseguir que una coordenada generalizada del mecanismo evolucione según una función determinada de otra coordenada.

En la categoría de la generación de trayectorias se incluyen los mecanismos que buscan que un punto de un miembro describa una trayectoria concreta.

En los problemas de guiado de sólidos se pretende que uno de los sólidos del mecanismo pase por un cierto número de configuraciones preestablecidas.

A lo largo del proyecto tocaremos tanto la síntesis de generación de funciones como la síntesis de generación de trayectorias.

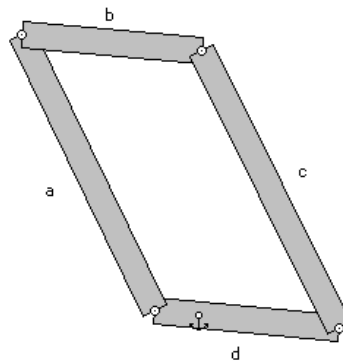




### 3. SÍNTESIS DE UN MECANISMO DE APERTURA DE PUERTAS:

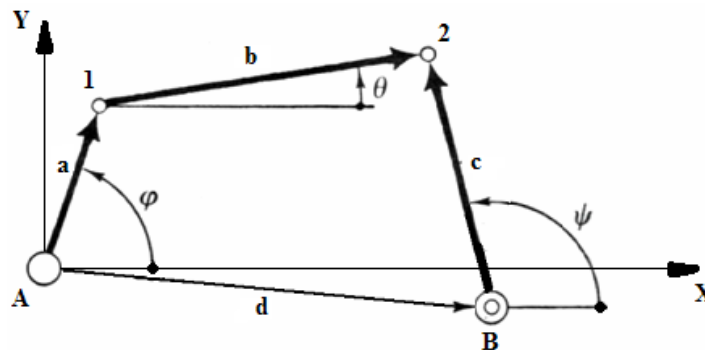
A continuación comenzaremos a estudiar diversos métodos de síntesis de mecanismos. Cada método será aplicado en el caso práctico objeto de este proyecto: un mecanismo de apertura de puertas.

Para el estudio de la síntesis por medios matemáticos utilizaremos un modelo de cuadrilátero (ver Fig. 1).



(Fig.1)

En el punto 1 se colocará un motor que hará que el segmento c (barra curva) rote. El segmento a se moverá con unos movimientos parecidos al segmento c, provocando en que el segmento b se desplace con un giro muy pequeño respecto a los giros de a y c. Por otro lado, los puntos 1 y 2 permanecen siempre fijos ya que están unidos a la bancada del vehículo.



El objetivo de esta primera parte será que el mecanismo funcione con los datos obtenidos mediante la síntesis; la optimización del mismo para afinar el área de barrido y para obtener unas dimensiones aceptables de los segmentos del cuadrilátero, que se verán en el apartado de simulación.



#### **4. SÍNTESIS DE GENERACIÓN DE FUNCIONES:**

Pretendemos diseñar un mecanismo que coordine a nuestra necesidad las posiciones de las barras de entrada y de salida del mismo.

La parte de la síntesis de mecanismos que estudia esto se denomina “Síntesis de generación de funciones”.

El problema de la síntesis de generación de funciones se plantea, en general, de una de las dos maneras siguientes:

- 1) Diseñar un mecanismo que, en el intervalo de su movimiento, sea capaz de situar las barras de entrada y de salida en dos grupos de posiciones especificadas.
- 2) Diseñar un mecanismo tal que la función generada por él (la relación funcional entrada-salida) coincida con una función que se desea obtener en un número de puntos especificados sobre esta.

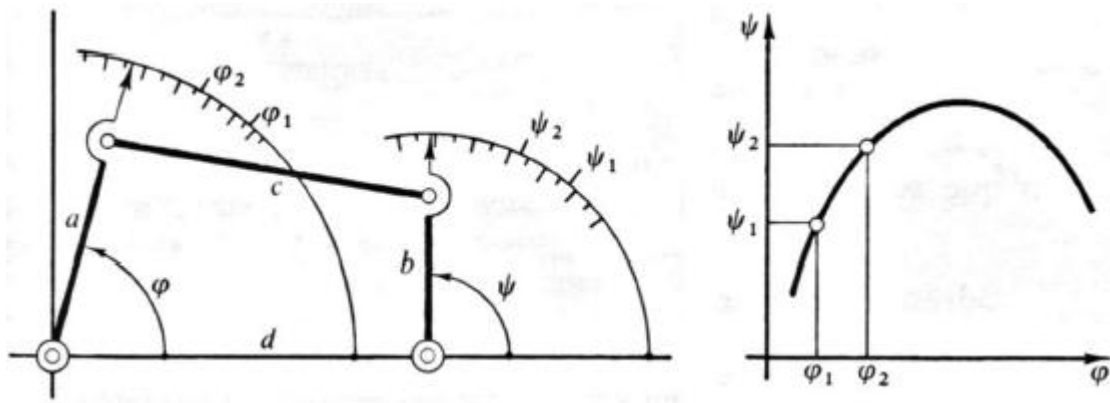
En el primer caso, los dos grupos de posiciones vendrán dados por una tabla de valores, o situados en el sistema de coordenadas correspondiente.

En el segundo, las posiciones se seleccionan a partir de una función  $\psi d = \psi d(\varphi)$  que se desea obtener.

La relación funcional entrada-salida que genera el mecanismo depende de los parámetros geométricos que lo caracterizan, en nuestro caso, las longitudes de los lados y ángulos de los mismos.

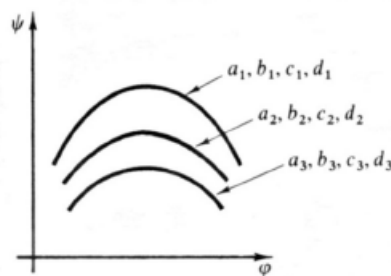
En nuestro caso, para el mecanismo cuadrilátero articulado, la función generada será:

$$f(\psi, \varphi, a, b, c, d) = 0$$



(Fig. 1)

Para cada valor de cada uno de estos parámetros obtendremos una particular relación funcional, o sea, una curva de la familia.



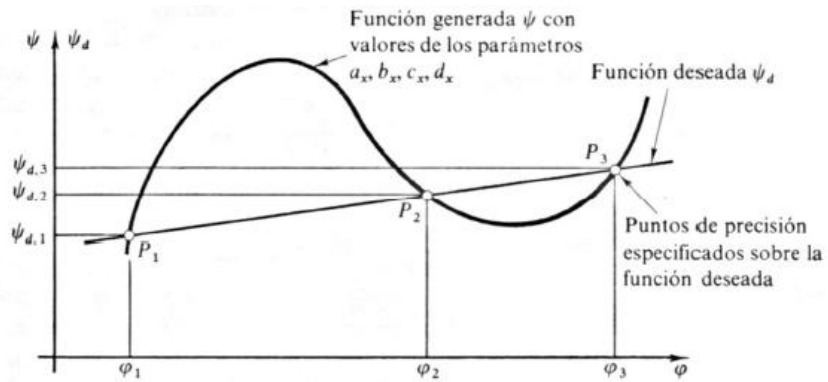
(Fig. 2)

Según todo lo anterior, el planteamiento 1 del problema de síntesis de generación de funciones consiste en encontrar los valores de los parámetros del mecanismo que producen una curva de la familia que pasa por las posiciones especificadas.

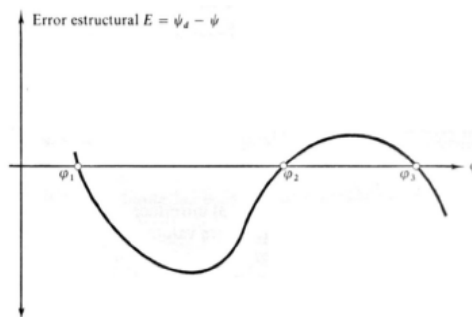
Para fines de aplicación práctica, puede ser suficiente que la función generada por el mecanismo coincida con la función deseada en un número finito de puntos. En tal caso el mecanismo no genera la función deseada, sino que sólo coincide con ésta en ciertos puntos.

Así pues, el planteamiento 2 del problema de síntesis consiste en encontrar los valores de los parámetros del mecanismo que producen una curva de la familia que pasa por las posiciones especificadas sobre otra función.

La diferencia entre la función deseada y la función generada recibe el nombre de *error estructural*. Esta función es nula en los puntos especificados o puntos de precisión. Entre cada dos puntos de precisión la función error presenta un valor máximo o un mínimo.



(Fig. 3)

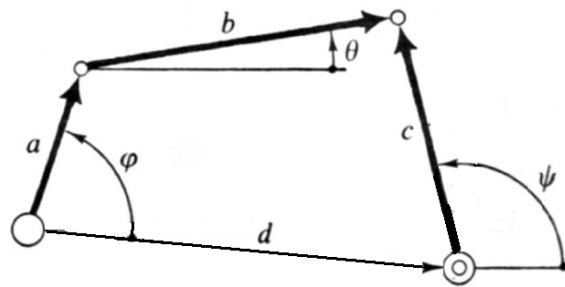


(Fig. 4)

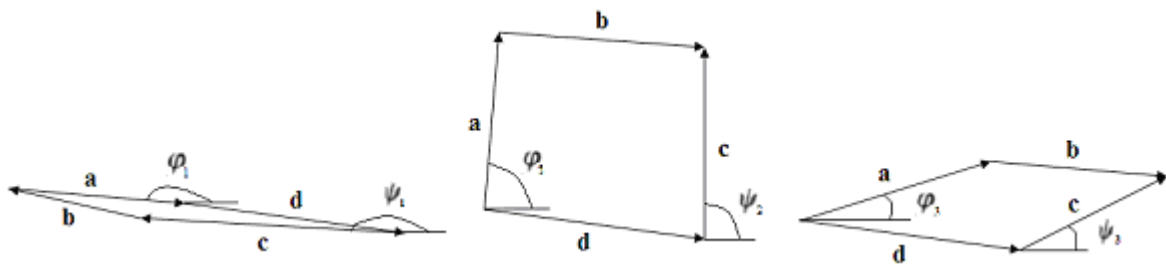
#### 4.1. Síntesis mediante las ecuaciones de Freudenstein

La ecuación de Freudenstein nos ofrece una relación entre los ángulos de las manivelas de un cuadrilátero articulado, es decir, su función angular generada.

Escribiendo la ecuación vectorial de cierre para el cuadrilátero articulado de la figura se tiene:



(Fig. 5)



$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{d} + \mathbf{c}$$

y en componentes:

$$a \cdot \cos \varphi + b \cdot \cos \vartheta = d \cdot \cos \delta + c \cdot \cos \psi$$

$$a \cdot \sin \varphi + b \cdot \sin \vartheta = d \cdot \sin \delta + c \cdot \sin \psi$$

o bien:

$$b \cdot \cos \vartheta = d \cdot \cos \delta + c \cdot \cos \psi - a \cdot \cos \varphi$$

$$b \cdot \sin \vartheta = d \cdot \sin \delta + c \cdot \sin \psi - a \cdot \sin \varphi$$

Elevando al cuadrado:

$$b^2 \cdot \text{Cos}^2 \vartheta = d^2 \cdot \text{Cos}^2 \delta + c^2 \cdot \text{Cos}^2 \psi + a^2 \cdot \text{Cos}^2 \varphi + 2dc \cdot \text{Cos} \delta \cdot \text{Cos} \psi - 2da \cdot \text{Cos} \delta \cdot \text{Cos} \varphi - 2ca \cdot \text{Cos} \psi \cdot \text{Cos} \varphi$$

$$b^2 \cdot \text{Sen}^2 \vartheta = d^2 \cdot \text{Sen}^2 \delta + c^2 \cdot \text{Sen}^2 \psi + a^2 \cdot \text{Sen}^2 \varphi + 2dc \cdot \text{Sen} \delta \cdot \text{Sen} \psi - 2da \cdot \text{Sen} \delta \cdot \text{Sen} \varphi - 2ca \cdot \text{Sen} \psi \cdot \text{Sen} \varphi$$

y sumando para eliminar  $\theta$  queda:

$$b^2 = d^2 + c^2 + a^2 + 2dc \cdot (\text{Sen} \delta \cdot \text{Sen} \psi + \text{Cos} \delta \cdot \text{Cos} \psi) - 2da \cdot (\text{Sen} \delta \cdot \text{Sen} \varphi + \text{Cos} \delta \cdot \text{Cos} \varphi) - 2ca \cdot (\text{Sen} \psi \cdot \text{Sen} \varphi + \text{Cos} \psi \cdot \text{Cos} \varphi)$$

Simplificando:

$$b^2 = d^2 + c^2 + a^2 + 2dc \cdot \text{Cos}(\delta - \psi) - 2da \cdot \text{Cos}(\delta - \varphi) - 2ca \cdot \text{Cos}(\psi - \varphi)$$

Despejamos el último término ya que es el que junta los dos ángulos desconocidos:

$$d^2 + c^2 + a^2 - b^2 + 2dc \cdot \text{Cos}(\delta - \psi) - 2da \cdot \text{Cos}(\delta - \varphi) = 2ca \cdot \text{Cos}(\psi - \varphi)$$

Despejando el coseno del segundo término de la igualdad queda:

$$\frac{d^2 + c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \frac{2dc}{2ca} \cdot \text{Cos}(\delta - \psi) - \frac{2da}{2ca} \cdot \text{Cos}(\delta - \varphi) = \text{Cos}(\psi - \varphi)$$

Por lo que simplificando queda:

$$K_1 + K_2 \cdot \text{Cos}(\delta - \psi) - K_3 \cdot \text{Cos}(\delta - \varphi) = \text{Cos}(\psi - \varphi) \quad (1.1)$$

donde:

$$K_1 = \frac{d^2 + c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \quad ; \quad K_2 = \frac{d}{a} \quad ; \quad K_3 = \frac{d}{c} \quad (1.2)$$

La ecuación conseguida se conoce como ecuación de Freudenstein.

### Observaciones:

- 1) Para cada valor cualquiera de las constantes  $K_i$ , la ecuación se verifica también si se sustituyen los ángulos por su diferencia a 360 grados. Equivale esta propiedad a construir el cuadrilátero articulado que es imagen del dado respecto a la barra fija.
- 2) La eliminación de  $\theta$  de la ecuación introduce otra solución, debido a la elevación al cuadrado. Esto quiere decir que, para valores dados de las constantes  $K_i$ , existen dos valores de  $\psi$  para cada valor de  $\varphi$ , y también dos de  $\varphi$  para cada  $\psi$ .
- 3) La ecuación también se verifica si  $\psi$  y  $\varphi$  aumentan en 180 grados y  $K_1$  y  $K_2$  cambian de signo. Esta propiedad se aprovecha a la inversa; es decir, si  $K_1$  y  $K_2$  resultan negativos en un problema de síntesis, y puesto que para tener sentido físico han de ser positivos ya que son módulos, los ángulos  $\psi$  y  $\varphi$  se aumentan en 180°. El mismo resultado se consigue si  $\psi$  y  $\varphi$  se sustituyen por su diferencia a 180°.

Si sólo  $K_1$  es negativo, al sustituir  $\varphi$  por su diferencia a 180°, o al sumarle 180°, la ecuación permanece inalterada, cambiando de signo todos sus términos, debido a que  $a$  que puede considerarse negativo.

Análogamente ocurre para  $K_2$  negativo. En este caso es  $\psi$  el ángulo en el que hay que hacer la sustitución.

Si sólo  $K_3$  es negativo, la sustitución puede hacerse indistintamente en  $\psi$  o en  $\varphi$ , pero no en ambos simultáneamente.

El caso de  $K_1$  y  $K_3$  simultáneamente negativos es análogo al caso de  $K_1$  negativo, sustituyendo  $\varphi$ .

El caso de  $K_2$  y  $K_3$  simultáneamente negativos es análogo al caso de  $K_2$  negativo, sustituyendo  $\psi$ .

El caso de  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$  simultáneamente negativos no corresponde a ninguna solución posible.



#### 4.1.1. Síntesis de generación de funciones con tres puntos de precisión mediante la ecuación de Freudenstein

##### 4.1.1.1. Relación entrada-salida “angular”

El problema de síntesis se presenta del siguiente modo: obtener las longitudes de los lados  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  del cuadrilátero articulado para tres posiciones  $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, \varphi_3, \psi_3$  dadas. Sustituyendo en la ecuación (1.1) los tres pares de valores conocidos de  $\varphi$  y  $\psi$ , tenemos el siguiente sistema lineal de tres ecuaciones y tres incógnitas:

$$\begin{aligned} K_1 \cos \psi_1 - K_2 \cos \varphi_1 + K_3 &= \cos(\psi_1 - \varphi_1) \\ K_1 \cos \psi_2 - K_2 \cos \varphi_2 + K_3 &= \cos(\psi_2 - \varphi_2) \\ K_1 \cos \psi_3 - K_2 \cos \varphi_3 + K_3 &= \cos(\psi_3 - \varphi_3) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Resolviendo el sistema lineal obtendremos los valores de  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$ . A partir de estos valores, despejando de las ecuaciones (1.2) obtendremos las longitudes de los lados, dando previamente un valor arbitrario a uno de ellos, por ejemplo el  $d$ :

$$a = \frac{d}{K_2} \quad ; \quad b = \sqrt{d^2 + c^2 + a^2 - 2caK_1} \quad ; \quad c = \frac{d}{K_3} \quad (1.4)$$

##### Observaciones:

- 1) El tamaño del mecanismo, depende, como es lógico, del valor arbitrario asignado a uno de los lados, ya que todos los cuadriláteros dimensionalmente semejantes tienen las mismas relaciones angulares.
- 2) Cuando se especifican desplazamientos y ángulos, la solución es única, no existiendo la libre elección de alguna magnitud.
- 3) El sistema (1.3) es lineal y, por tanto, de rápida solución; como máximo se pueden especificar tres puntos de precisión, ya que solo existen tres parámetros.
- 4) Para una síntesis con dos puntos de precisión, puede darse cualquier valor a uno de los parámetros, resolviendo el sistema resultante de dos ecuaciones con dos incógnitas.

- 5) Si los puntos  $(\varphi_i, \psi_i)_{i=1,2,3}$  se imponen en una función deseada  $\psi = \psi_a(\varphi)$ , entonces solo es necesario conocer los  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , y a través de esta función se obtienen los  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ , resolviendo el problema como anteriormente.

Generalización:

En general, si una relación entre las variables de entrada y salida puede ser expresada linealmente en función de  $n$  parámetros de diseño,  $K_i$  ( $i=1,2, \dots, n$ ),

$$K_1 f_1(\varphi, \psi) + K_2 f_2(\varphi, \psi) + \dots + K_n f_n(\varphi, \psi) = g(\varphi, \psi);$$

la síntesis puede ser resuelta especificando  $n$  pares de valores  $\varphi, \psi$ ; por resolución del sistema de  $n$  ecuaciones lineales se obtienen los  $n$  parámetros  $K_i$  que definen el mecanismo:

$$K_1 f_1(\varphi_1, \psi_1) + K_2 f_2(\varphi_1, \psi_1) + \dots + K_n f_n(\varphi_1, \psi_1) = g(\varphi_1, \psi_1)$$

.....

$$K_1 f_1(\varphi_n, \psi_n) + K_2 f_2(\varphi_n, \psi_n) + \dots + K_n f_n(\varphi_n, \psi_n) = g(\varphi_n, \psi_n)$$

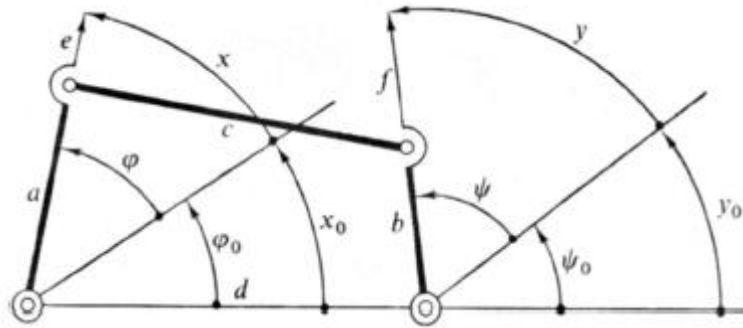
#### **4.1.2. Aumento del número de puntos de precisión**

El número de puntos de precisión puede hacerse mayor que tres. Esto se consigue introduciendo en la ecuación (1.1) nuevos parámetros de diseño que hagan el papel de incógnitas. A continuación se especifican tantos puntos de precisión como ecuaciones sean necesarias para que el sistema sea determinado, esto es, tantos como parámetros incógnitas, obteniéndose un sistema de tantas ecuaciones como incógnitas.

Este sistema tiene la dificultad de no ser lineal; exige programas y métodos de resolución que pueden ser lentos y costosos.

### 4.1.3. Síntesis de generación de funciones con cinco puntos de precisión mediante la ecuación de Freudenstein

Se puede aumentar en dos el número de parámetros de diseño y, por tanto, el número de puntos de precisión, si se introducen dos valores iniciales de referencia para medir los ángulos o los arcos.



(Fig. 6)

La ecuación de Freudenstein adopta la siguiente forma para la configuración de la figura, cuando se tienen en cuenta los valores iniciales:

$$K1 \cos(\psi_i + \psi_0) - K2 \cos(\phi_i + \phi_0) + K3 = \cos(\psi_i - \phi_i + \psi_0 - \phi_0) \quad (1.12)$$

con  $i=1,2,3,4,5$

Por lo tanto, la resolución del problema se realizaría de la siguiente forma:

DATOS:  $\phi_1, \psi_1, \phi_2, \psi_2, \phi_3, \psi_3, \phi_4, \psi_4, \phi_5, \psi_5$

INCÓGNITAS:  $K1, K2, K3, \phi_0, \psi_0$

Resolvemos el sistema de cinco ecuaciones y cinco incógnitas.

Es obvio que, si se fija el valor de un parámetro, solo son necesarias cuatro ecuaciones para determinar las cuatro incógnitas restantes, obteniéndose una síntesis con cuatro puntos de precisión.

#### 4.1.4. Aplicación de las ecuaciones de Freudenstein en un mecanismo de apertura de puertas

##### 4.1.4.1. Diseño de un mecanismo de apertura de puertas mediante la síntesis de generación de funciones con tres puntos de precisión en base a la ecuación de Freudenstein

Nos disponemos a diseñar un mecanismo de 4 eslabones, compuestos de la bancada (eslabón d), estabilizador (eslabón a), parte de la puerta (eslabón b) y eje motor (eslabón c). Partimos de una entrada-salida angular, ya que nos resulta más cómodo.

A continuación deberemos suponer unos valores que representen la trayectoria que queremos que describa el mecanismo.

Buscamos que las dos barras pequeñas del cuadrilátero formen ángulos similares respecto de la horizontal, sin llegar a ser paralelas. Así, supondremos tres pares de valores de ángulos, correspondientes a cada punto de precisión. Hay que tener en cuenta que la relación entre ellos debe ser lineal, ya que el mecanismo solo se mueve en los dos primeros cuadrantes angulares.

Tomamos:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 176.848^\circ & \Psi_1 &= 176.146^\circ \\ \varphi_2 &= 88.621^\circ & \Psi_2 &= 90.173^\circ \\ \varphi_3 &= 37.48^\circ & \Psi_3 &= 41.465^\circ\end{aligned}$$

Por último, aparte de la relación entrada-salida, también tendremos que dar como dato la longitud de uno de los segmentos del cuadrilátero.

Tomamos como dato la longitud del lado “d”, que corresponderá a la distancia entre el eje de giro del estabilizador y el eje motor.

$$d = 0.211 \text{ m}$$

Con estos datos, utilizando el método de Freudenstein (ecuaciones 1.3 y 1.4), obtenemos las longitudes del resto de segmentos del cuadrilátero.

Para la resolución del sistema de ecuaciones, utilizamos la aplicación informática “MathCad”.

## Síntesis de mecanismos (3 puntos de precisión)

### Ecuaciones de Freudenstein

**Datos** (ángulos en grados, longitudes en metros):

$$\begin{aligned}\varphi_1 &:= 176.848 & \psi_1 &:= 176.146 \\ \varphi_2 &:= 88.621 & \psi_2 &:= 90.173 \\ \varphi_3 &:= 37.48 & \psi_3 &:= 41.465 \\ d &:= 21.1\text{cm} & \delta &:= 354.54\end{aligned}$$

Planteamos el sistema de ecuaciones

Given

$$K_1 + K_2 \cos(\delta - \psi_1) - K_3 \cos(\delta - \varphi_1) = \cos(\psi_1 - \varphi_1)$$

$$K_1 + K_2 \cos(\delta - \psi_2) - K_3 \cos(\delta - \varphi_2) = \cos(\psi_2 - \varphi_2)$$

$$K_1 + K_2 \cos(\delta - \psi_3) - K_3 \cos(\delta - \varphi_3) = \cos(\psi_3 - \varphi_3)$$

Al ser un sistema No Lineal, resolvemos por métodos numéricos:

Damos valores a los iterantes iniciales:

$$\underline{K_1} := 1 \quad \underline{K_2} := 0.1 \quad \underline{K_3} := 0.1$$

Despejando obtenemos las longitudes de las barras:

$$\underline{K} := \text{Find}(K_1, K_2, K_3) = \begin{pmatrix} 0.94 \\ -2.055 \\ -1.996 \end{pmatrix}$$

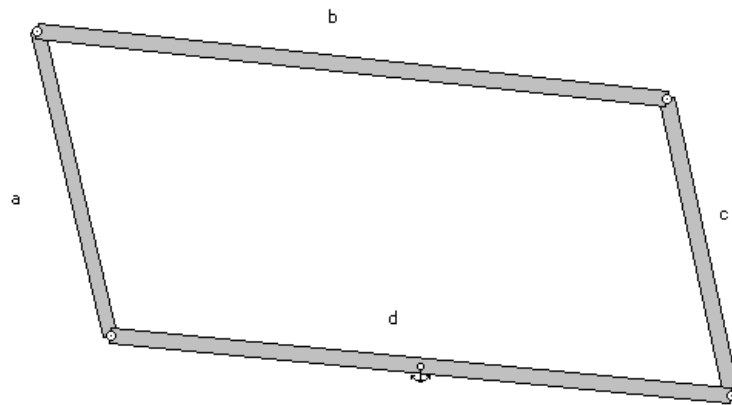
$$\underline{K_1} := K_0 \quad \underline{K_2} := K_1 \quad \underline{K_3} := K_2$$

$$a := d \cdot \frac{1}{|K_2|} = 0.103\text{m} \quad \underline{c} := \frac{d}{|K_3|} = 0.106\text{m}$$

$$b := \sqrt{c^2 + a^2 + d^2 - |K_1| \cdot 2 \cdot a \cdot c} = 0.214\text{m}$$

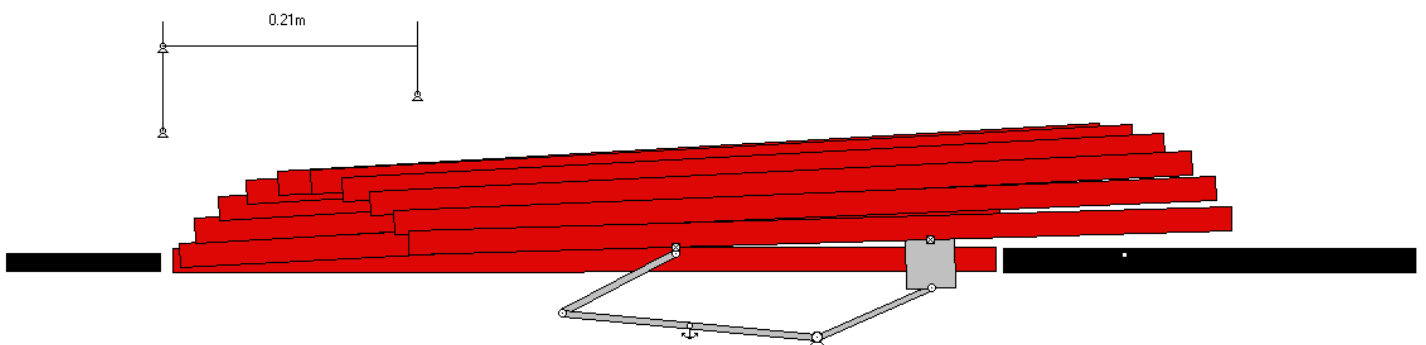
El cuadrilátero resultante tendrá unas dimensiones:

$$\begin{aligned} a &= 0.103 \text{ m} & b &= 0.214 \text{ m} \\ c &= 0.106 \text{ m} & d &= 0.211 \text{ m} \end{aligned}$$



(Fig.7)

El mecanismo funciona correctamente pero no solo debe cumplir los parámetros geométricos dados, sino que una vez implantado en la puerta permita la apertura y cierre



completo de la misma, la hoja de la puerta tendrá 68cm de largo. A continuación comprobaremos el mecanismo con la puerta instalada.

(Fig. 8)

Implementado el mecanismo comprobamos que no satisface nuestras expectativas porque solo consigue una apertura de 21cm, insuficiente en cualquier caso.



Según hemos ido viendo a lo largo de los meses por el trabajo realizado y las numerosas pruebas que hemos hecho, con la mínima variación de un pequeño ángulo conseguimos no solo satisfacer las condiciones geométricas sino también una apertura y cierre de la puerta prácticamente completa permitiendo el paso de los pasajeros.

Tomamos:

$$\varphi_1 = 169.848^\circ \quad \Psi_1 = 176.146^\circ$$

$$\varphi_2 = 88.621^\circ \quad \Psi_2 = 90.173^\circ$$

$$\varphi_3 = 36.48^\circ \quad \Psi_3 = 41.465^\circ$$

Por último, aparte de la relación entrada-salida, también tendremos que dar como dato la longitud de uno de los segmentos del cuadrilátero.

Tomamos como dato la longitud del lado “d”, que corresponderá a la distancia entre el eje de giro del estabilizador y el eje motor.

$$d = 0.211 \text{ m}$$

Con estos datos, utilizando el método de Freudenstein (ecuaciones 1.3 y 1.4), obtenemos las longitudes del resto de segmentos del cuadrilátero.

Para la resolución del sistema de ecuaciones, utilizamos la aplicación informática “MathCad”.

## Síntesis de mecanismos (3 puntos de precisión)

### Ecuaciones de Freudenstein

#### Datos (ángulos en grados, longitudes en metros):

$$\varphi_1 := 169.848 \quad \psi_1 := 176.146$$

$$\varphi_2 := 88.621 \quad \psi_2 := 90.173$$

$$\varphi_3 := 36.48 \quad \psi_3 := 41.465$$

$$d := 21. \text{ km} \quad \delta := 354.56$$

Planteamos el sistema de ecuaciones

Given

$$K_1 + K_2 \cos(\delta - \psi_1) - K_3 \cos(\delta - \varphi_1) = \cos(\psi_1 - \varphi_1)$$

$$K_1 + K_2 \cos(\delta - \psi_2) - K_3 \cos(\delta - \varphi_2) = \cos(\psi_2 - \varphi_2)$$

$$K_1 + K_2 \cos(\delta - \psi_3) - K_3 \cos(\delta - \varphi_3) = \cos(\psi_3 - \varphi_3)$$

Al ser un sistema No Lineal, resolvemos por métodos numéricos:

Damos valores a los iterantes iniciales:

$$K_1 := 1 \quad K_2 := 0. \epsilon \quad K_3 := 0. \epsilon$$

$$K := \text{Find}(K_1, K_2, K_3) = \begin{pmatrix} 1.019 \\ 0.659 \\ 0.636 \end{pmatrix}$$

$$K_1 := K_0 \quad K_2 := K_1 \quad K_3 := K_2$$

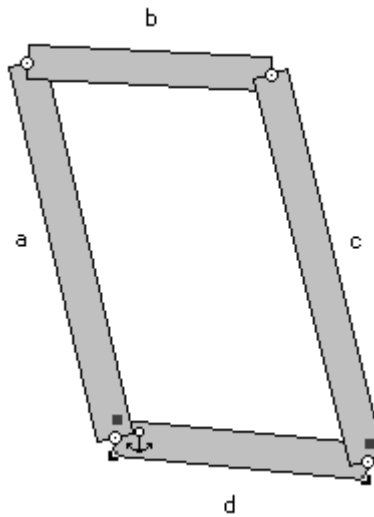
Despejando obtenemos las longitudes de las barras:

$$a := \frac{d}{|K_2|} = 0.32\text{m} \quad c := \frac{d}{|K_3|} = 0.332\text{m}$$

$$b := \sqrt{c^2 + a^2 + d^2 - |K_1| \cdot 2 \cdot a \cdot c} = 0.202\text{m}$$

El cuadrilátero resultante tendrá unas dimensiones:

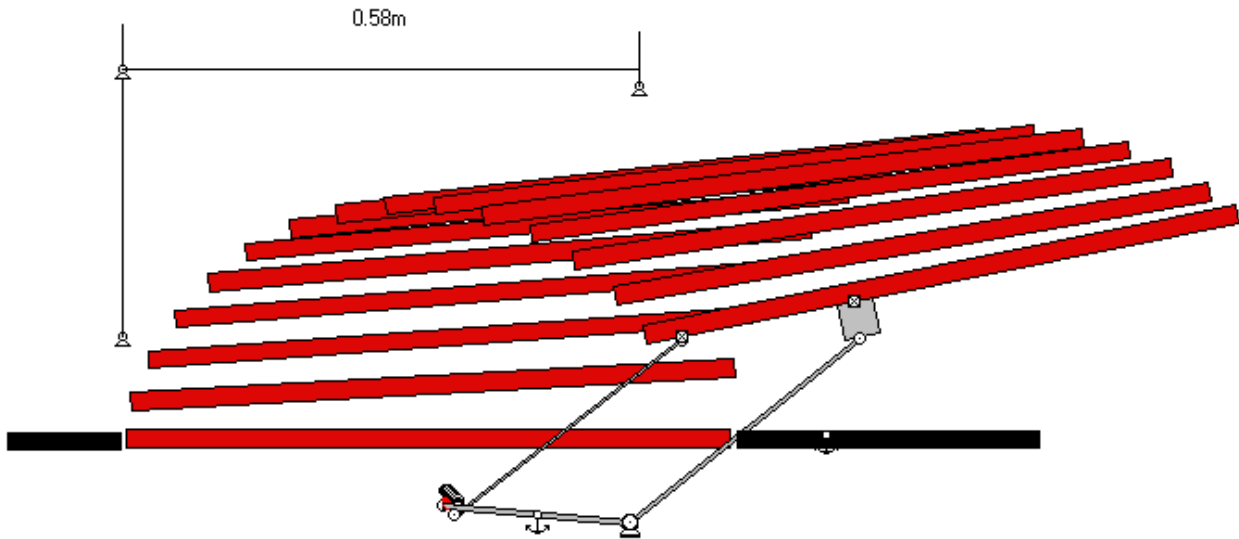
$$\begin{array}{ll} a = 0.32 \text{ m} & b = 0.202 \text{ m} \\ c = 0.332 \text{ m} & d = 0.211 \text{ m} \end{array}$$



(Fig. 9)

El segmento “d” será parte de la bancada y permanecerá fijo, y serán los segmentos “a” y “c” los que tendrán el movimiento.

Por último, comprobamos su funcionamiento en “Working Model”.



(Fig. 10)

El mecanismo funciona correctamente tal y como podemos comprobar en la *Fig. 10*. Podemos sacarle algún inconveniente, como por ejemplo que en la posición final el ángulo obtenido por la puerta es demasiado amplio, más adelante será posible solucionar este problema. También hay que tener en cuenta que la barra c no es recta sino que posee un ángulo de  $90^\circ$  aproximadamente, en posteriores puntos veremos la geometría de la pieza curva que ejerce el movimiento.

El funcionamiento es igual al obtenido por tres puntos de precisión, a pesar de que las medidas de los cuadriláteros son distintas. Esto nos confirma que hay múltiples mecanismos que describan la trayectoria deseada.

#### 4.1.4.2. Diseño de un mecanismo de apertura de puertas mediante la síntesis de generación de funciones con cinco puntos de precisión en base a la ecuación de Freudenstein

A continuación aumentaremos el número de puntos de precisión a cinco.

Al igual que antes, comenzaremos diseñando el cuadrilátero tomando una relación entrada-salida angular.

Tendremos que tomar cinco puntos de precisión. Nos valen los tres puntos tomados en el caso inicial, los otros dos los tomaremos entre medias siguiendo la relación lineal necesaria.

Tomamos:

$$\begin{array}{ll} \varphi_1 = 176.848^\circ & \Psi_1 = 175.146^\circ \\ \varphi_2 = 108.612^\circ & \Psi_2 = 109.733^\circ \\ \varphi_3 = 88.621^\circ & \Psi_3 = 90.173^\circ \\ \varphi_4 = 73.612^\circ & \Psi_4 = 75.607^\circ \\ \varphi_5 = 37.48^\circ & \Psi_5 = 41.465^\circ \end{array}$$

Por último, damos el mismo valor que en el apartado anterior a la longitud del lado “d”:

$$d = 0.211 \text{ m}$$

A continuación, procedemos de la misma manera: utilizando el método de Freudenstein (ecuaciones 1.3 y 1.4) y resolviendo mediante “MathCad”, obtenemos las longitudes del resto de segmentos del cuadrilátero.

Para la resolución del sistema de ecuaciones, utilizamos la aplicación informática “MathCad”:

## Síntesis de mecanismos (5 puntos de precisión)

### Ecuaciones de Freudenstein

**Datos** (ángulos en grados, longitudes en metros):

$$\begin{aligned} \varphi_1 &:= 176.848 & \psi_1 &:= 175.146 \\ \varphi_2 &:= 108.612 & \psi_2 &:= 109.733 \\ \varphi_3 &:= 88.621 & \psi_3 &:= 90.173 \\ \varphi_4 &:= 73.612 & \psi_4 &:= 75.607 \\ \varphi_5 &:= 37.48 & \psi_5 &:= 41.465 \\ d &:= 21.1\text{cm} & \delta &:= 354.56 \end{aligned}$$

Planteamos el sistema de ecuaciones

Given

$$\begin{aligned} K_1 + K_2 \cdot \cos(\delta - \psi_1 - \psi_0) - K_3 \cdot \cos(\delta - \varphi_1 - \varphi_0) &= \cos(\psi_1 - \varphi_1 + \psi_0 - \varphi_0) \\ K_1 + K_2 \cdot \cos(\delta - \psi_2 - \psi_0) - K_3 \cdot \cos(\delta - \varphi_2 - \varphi_0) &= \cos(\psi_2 - \varphi_2 + \psi_0 - \varphi_0) \\ K_1 + K_2 \cdot \cos(\delta - \psi_3 - \psi_0) - K_3 \cdot \cos(\delta - \varphi_3 - \varphi_0) &= \cos(\psi_3 - \varphi_3 + \psi_0 - \varphi_0) \\ K_1 + K_2 \cdot \cos(\delta - \psi_4 - \psi_0) - K_3 \cdot \cos(\delta - \varphi_4 - \varphi_0) &= \cos(\psi_4 - \varphi_4 + \psi_0 - \varphi_0) \\ K_1 + K_2 \cdot \cos(\delta - \psi_5 - \psi_0) - K_3 \cdot \cos(\delta - \varphi_5 - \varphi_0) &= \cos(\psi_5 - \varphi_5 + \psi_0 - \varphi_0) \end{aligned}$$

Al ser un sistema No Lineal, resolvemos por métodos numéricos:

Damos valores a los iterantes iniciales:

$$\begin{aligned} K_1 &:= 1 & K_2 &:= 0.1 & K_3 &:= 0.1 & \psi_0 &:= 0 & \varphi_0 &:= 0 \end{aligned}$$

$$K := \text{Find}(K_1, K_2, K_3, \psi_0, \varphi_0) = \begin{pmatrix} 1.028 \\ 0.784 \\ 0.758 \\ 0.168 \\ 0.165 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} K_1 &:= K_0 & K_2 &:= K_1 & K_3 &:= K_2 & \psi_0 &:= K_3 & \varphi_0 &:= K_4 \end{aligned}$$

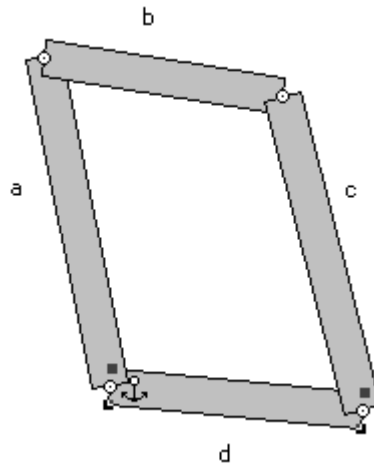
Despejando obtenemos las longitudes de las barras:

$$a := \frac{d}{|K_2|} = 0.269\text{m} \quad c := \frac{d}{|K_3|} = 0.278\text{m}$$

$$b := \sqrt{c^2 + a^2 + d^2 - |K_1| \cdot 2 \cdot a \cdot c} = 0.201\text{m}$$

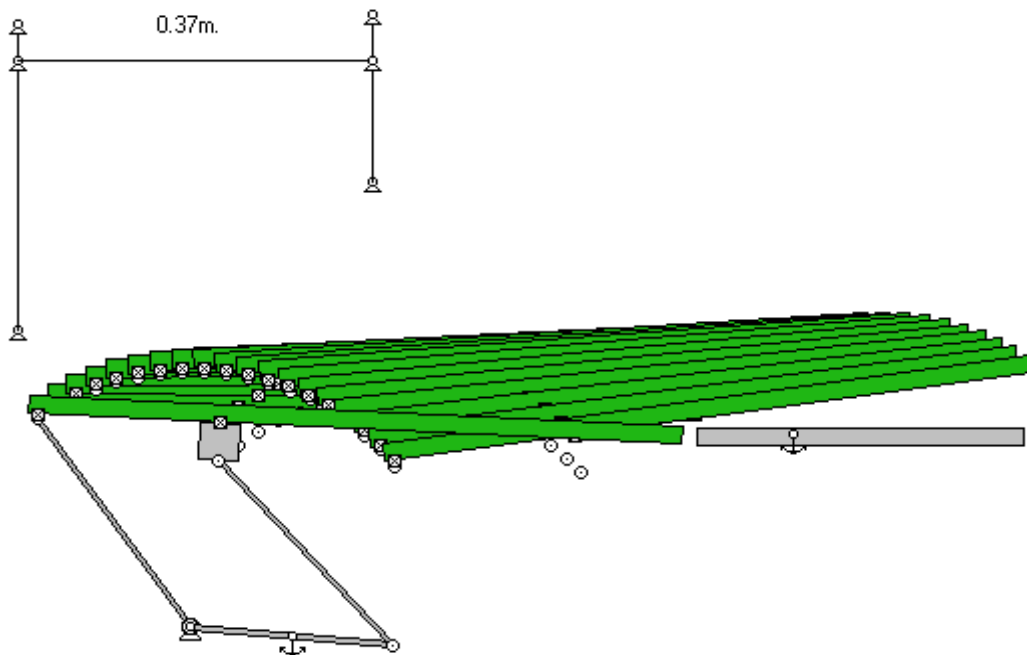
El cuadrilátero resultante tendrá unas dimensiones:

$$\begin{aligned} a &= 0.269 \text{ m} & b &= 0.201 \text{ m} \\ c &= 0.278 \text{ m} & d &= 0.211 \text{ m} \end{aligned}$$



(Fig. 11)

Por último, comprobamos su funcionamiento en “Working Model”.



(Fig. 12)

El mecanismo funciona correctamente tal y como podemos comprobar en la Fig. 12.

El funcionamiento es igual al obtenido por tres puntos de precisión, a pesar de que las medidas de los cuadriláteros son distintas. Esto nos confirma que hay múltiples mecanismos que describan la trayectoria deseada.

El movimiento descrito es muy bueno, pero debido a la longitud de las barras, para nuestro objetivo de mover una puerta de 68cm. de longitud se queda escaso, solo traslada la puerta alrededor de 50 cm. y nuestro objetivo es mayor.

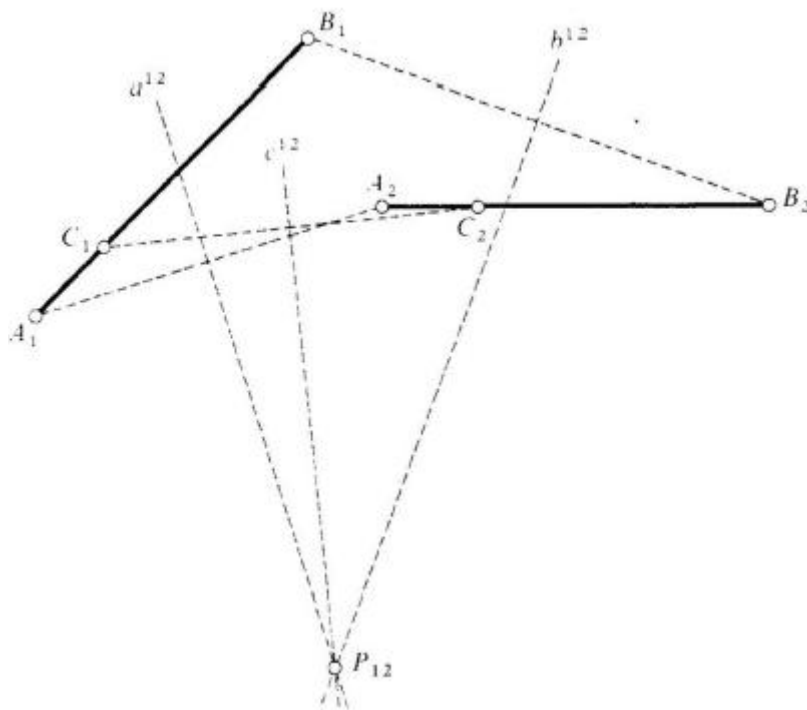


## 4.2. Síntesis mediante métodos gráficos

Hasta ahora solo hemos tratado métodos analíticos para la síntesis de generación de funciones; sin embargo, los métodos gráficos también nos pueden resultar útiles a la hora de diseñar un mecanismo.

### 4.2.1. Método del polo

El movimiento de un plano o barra sobre otro plano fijo queda definido completamente por el movimiento de dos de los puntos del plano móvil. Sean  $A$  y  $B$  estos puntos y sean dos posiciones de plano móvil, que se designan por  $A_1, B_1$  y  $A_2, B_2$ , respectivamente (ver Fig.13).

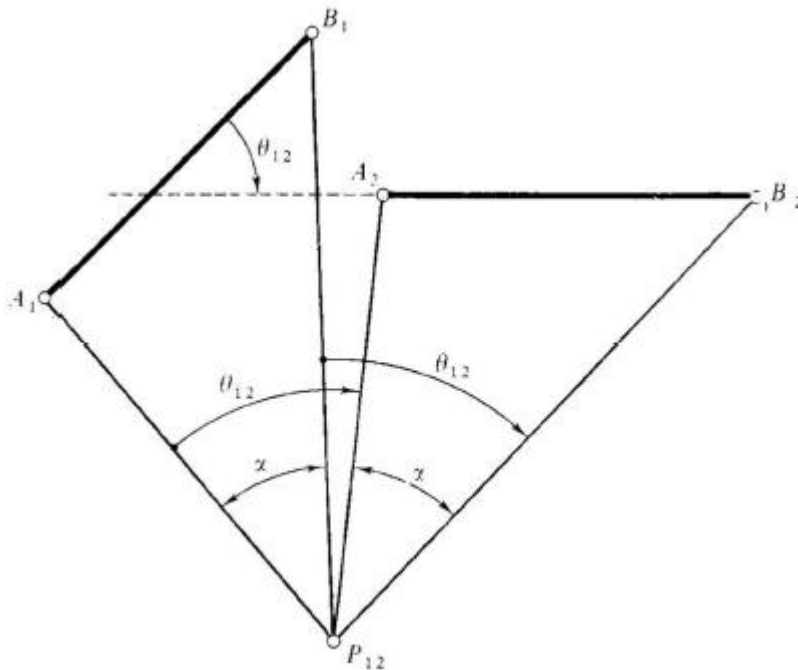


(Fig.13)

Las mediatrices de los segmentos  $A_1A_2$  y  $B_1B_2$  se designan por  $a^{12}$  y  $b^{12}$ . Estas dos mediatrices se cortan en un punto  $P_{12}$ , llamado *polo* de las dos posiciones de la barra (o plano).

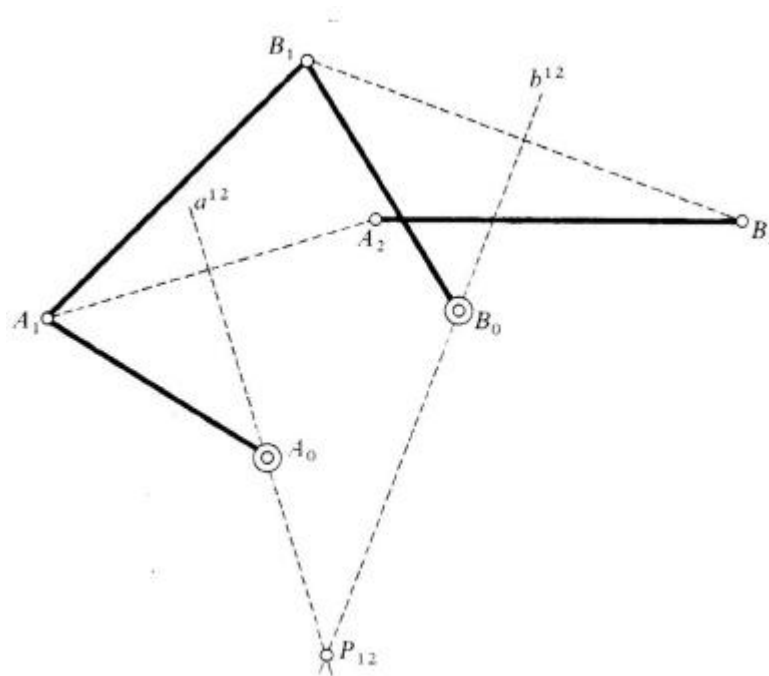
El polo  $P_{12}$  posee, entre otras, las siguientes propiedades:

- 1) El polo  $P_{12}$  es único para las dos posiciones; es decir, si se toman otros puntos distintos de  $A$  y  $B$ , tales como  $C, D, \dots$  sobre la barra y se trazan las mediatrices a los segmentos  $C_1C_2, D_1D_2, \dots$  estas mediatrices  $c^{12}, d^{12}, \dots$  se cortan en el mismo punto  $P_{12}$ .
- 2) El triángulo  $A_1P_{12}B_1$  es igual al triángulo  $A_2P_{12}B_2$  (Fig. 14), por tener los lados iguales.
- 3) La barra o plano móvil puede ser llevada de una posición a otra, a través de un giro de valor  $\theta_{12}$  sobre el polo (Fig. 14).



(Fig. 14)

- 4) El ángulo  $A_1P_{12}B_1$  es igual al ángulo  $A_2P_{12}B_2$ , es decir, la barra intercepta ángulos iguales con el polo en las dos posiciones. Esto es una consecuencia de que los triángulos son iguales y tienen un vértice común,  $P_{12}$ .
- 5) Cualquier punto de la mediatriz  $a^{12}$  equidista de  $A_1$  y  $A_2$ . Cualquier punto de la mediatriz  $b^{12}$  equidista de  $B_1$  y  $B_2$ . Por tanto, dos puntos arbitrarios  $A_0$  y  $B_0$  sobre estas mediatrices pueden servir como articulaciones fijas de un cuadrilátero articulado (Fig. 14), siendo  $A_0A_1$  y  $B_0B_1$  las manivelas.
- El cuadrilátero articulado así construido transfiere el acoplador de la posición  $A_1B_1$  a la posición  $A_2B_2$ .
- 6) El acoplador  $AB$  y la barra fija  $A_0B_0$  del cuadrilátero articulado tienen iguales ángulos con el polo, es decir, el ángulo  $A_1P_{12}B_1$  es igual al ángulo  $A_2P_{12}B_2$ , e igual al ángulo  $A_0P_{12}B_0$ .



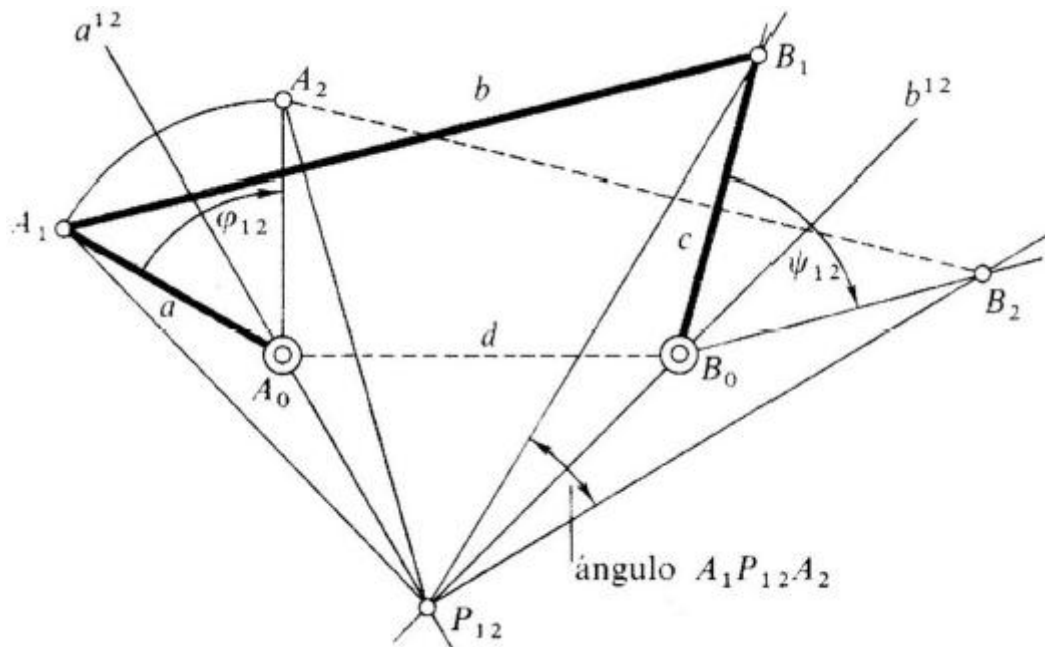
(Fig.15)

#### 4.2.1.1. Síntesis para un giro de las manivelas por el método del polo

El problema de síntesis se puede enunciar así: sintetizar un cuadrilátero articulado para dos giros  $\varphi_{12}$  y  $\psi_{12}$  de las manivelas.

La Metodología es la siguiente (*Fig. 16*):

1. Se traza una línea arbitraria  $b^{12}$  y se sitúa en ella, arbitrariamente,  $P_{12}$  y  $B_0$ .
2. Por  $P_{12}$  se traza otra línea arbitraria  $a^{12}$ , y en ella se sitúa  $A_0$  de modo arbitrario.
3. Se elige una longitud cualquiera para la manivela  $a$  y se dibujan sus dos posiciones  $A_1$  y  $A_2$ , simétricas de  $a^{12}$ , con el ángulo  $\varphi_{12}$  especificado.
4. Se construye el ángulo  $A_1P_{12}A_2$  con el vértice  $P_{12}$  y bisectriz  $b^{12}$ .
5. Se lleva sobre  $B_0$  un ángulo  $\psi_{12}$ , con  $b^{12}$  como bisectriz, obteniéndose  $B_1$  y  $B_2$  por intersección con los lados del ángulo trazado en la etapa anterior.
6. La solución obtenida es el cuadrilátero  $A_0A_1B_1B_0$ .



(Fig.16)

#### 4.2.1.2. Aplicación del método del polo en un mecanismo de apertura de puertas

##### 4.2.1.2.1. Diseño de un mecanismo de apertura de puertas para un giro de las manivelas mediante el método del polo.

Seguiremos el procedimiento visto en el apartado 4.2.1.1. y para ello, necesitamos dos valores angulares  $\varphi_{12}$  y  $\Psi_{12}$  correspondientes a los giros de las manivelas.

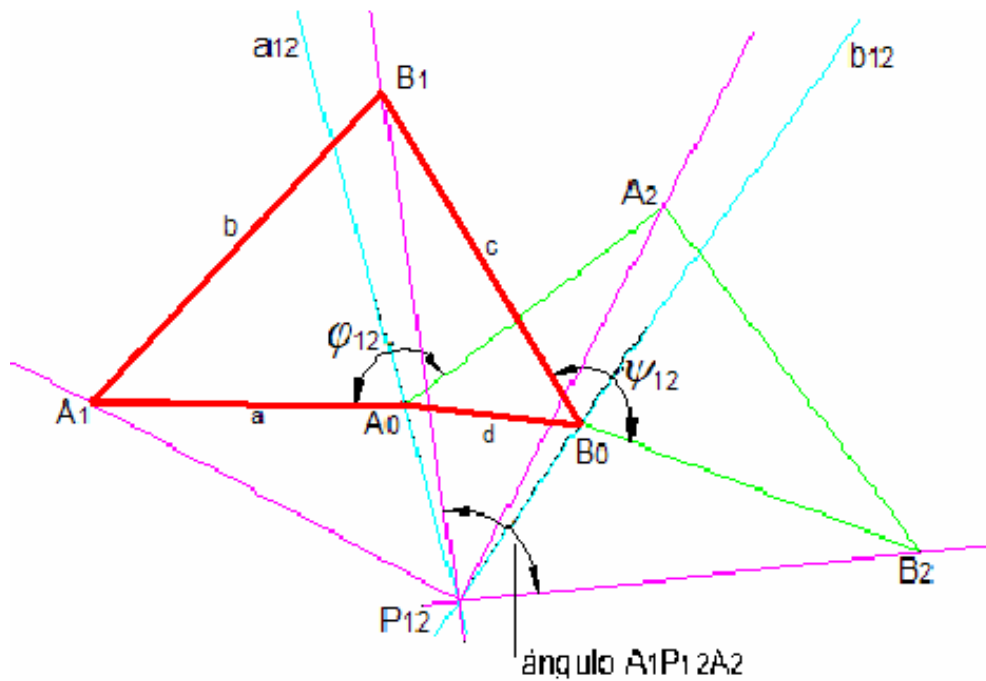
Apoyándonos en los valores iniciales utilizados en los otros métodos vistos hasta ahora obtenemos los giros de las manivelas:

$$\varphi_1 = 176.85^\circ \quad , \quad \varphi_2 = 32.06^\circ \quad \rightarrow \quad \varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = 144.79^\circ$$

$$\Psi_1 = 176.15^\circ \quad , \quad \Psi_2 = 33.69^\circ \quad \rightarrow \quad \Psi_{12} = \Psi_1 - \Psi_2 = 142.46^\circ$$

A continuación ya podremos comenzar a aplicar el método, teniendo en cuenta que la distancia  $d$  será de  $0.211\text{ m}$ , tal y como hemos hecho hasta ahora. La longitud de la primera manivela  $a$  también se pide como dato; tomaremos  $a = 0.35\text{ m}$ .

Usando como herramienta AutoCad 2009, empezamos a graficar:



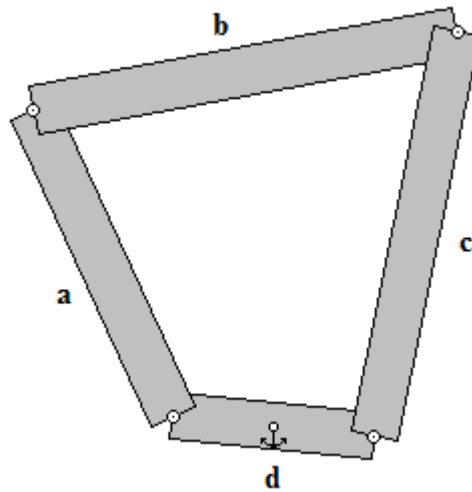
(Fig. 17)

El cuadrilátero será el marcado con línea gruesa en la Fig. 17.

Tomando medidas obtenemos las dimensiones del cuadrilátero resultante:

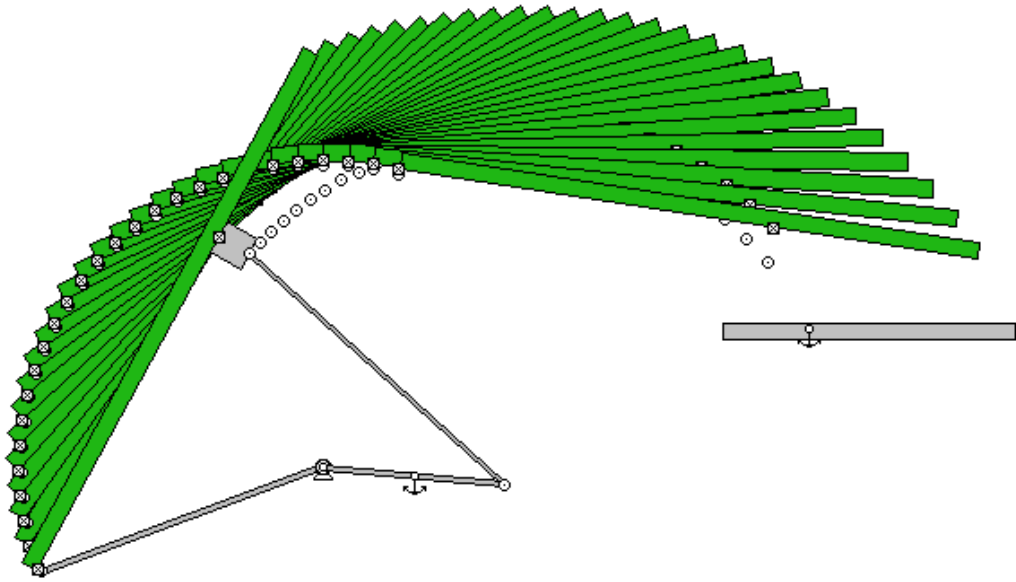
$$a = 0.35 \text{ m} \quad b = 0.448 \text{ m}$$

$$c = 0.4029 \text{ m} \quad d = 0.211 \text{ m}$$



(Fig. 18)

Por último, debemos comprobar que el mecanismo funciona y se comporta tal y como buscábamos antes de su diseño. Para ello utilizaremos de nuevo “Working Model”.



(Fig.19)

El mecanismo NO se comporta como esperábamos. Al ver el cuadrilátero nos damos cuenta por nuestra experiencia que no iba a funcionar correctamente y cuando realizamos el Working Model se confirman nuestras sospechas.

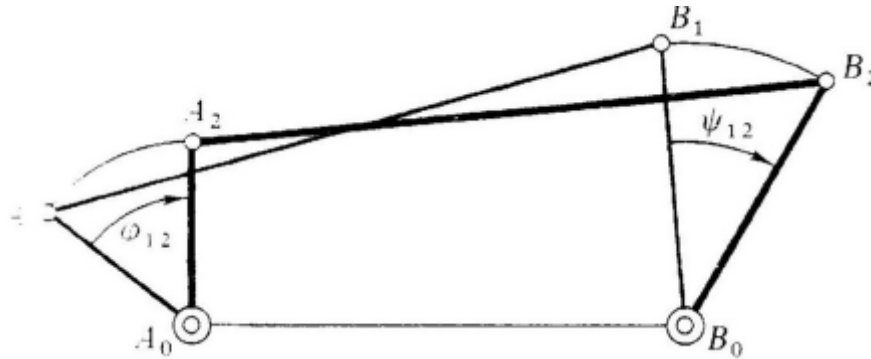
La causa del agarrotamiento del mecanismo reside en la longitud de la barra  $b$ : es demasiado larga, lo que provoca que el giro de la manivela sea más pronunciado que el necesario para mover la puerta.

La conclusión que podemos sacar de este método es que se nos queda corto para realizar esta síntesis: mientras que en métodos anteriores hemos estado trabajando con 3 e incluso 5 puntos de precisión, aquí en realidad solo trabajamos con una medida angular para cuadrilátero, lo que provoca que el resultado no sea tan preciso y den valores muy aleatorios.



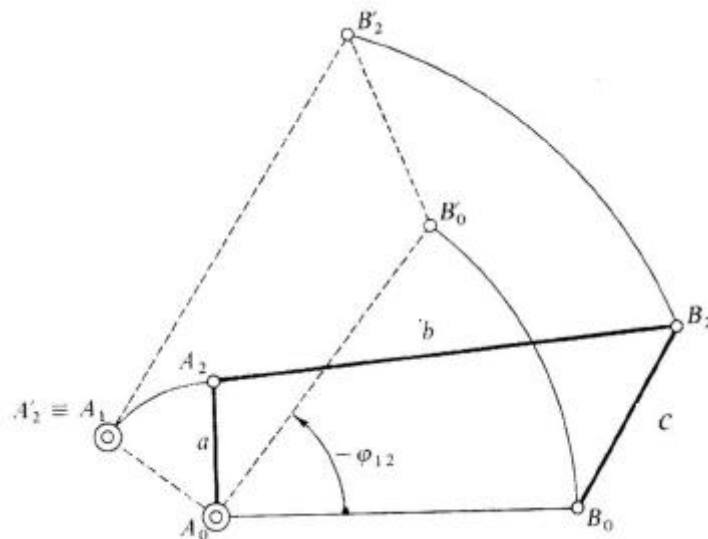
#### 4.2.2. Método del polo relativo

Sea el cuadrilátero articulado de la Fig. 20, que ocupa dos posiciones, correspondientes a dos giros  $\varphi_{12}$  y  $\psi_{12}$  de las manivelas.



(Fig.20)

Suponiendo rígido el cuadrilátero articulado  $A_0A_2B_2B_0$ , se lo gira como un todo alrededor del punto  $A_0$ , hasta que  $A_2$  coincide con  $A_1$  (Fig. 21). El punto  $B_2$  ha pasado a  $B'_2$ , y el  $B_0$  a  $B'_0$ . Es evidente que todo el cuadrilátero ha girado un ángulo igual y opuesto a  $\psi_{12}$ . Con relación a la manivela  $A_0A_1$ , la manivela  $B_0B_1$  ocupa la posición  $B'_2B'_0$ ; esto quiere decir que un observador, situado sobre la manivela  $A_0A_1$ , ve pasar la otra manivela de la posición  $B_0B_1$  a la  $B'_0B'_2$ .



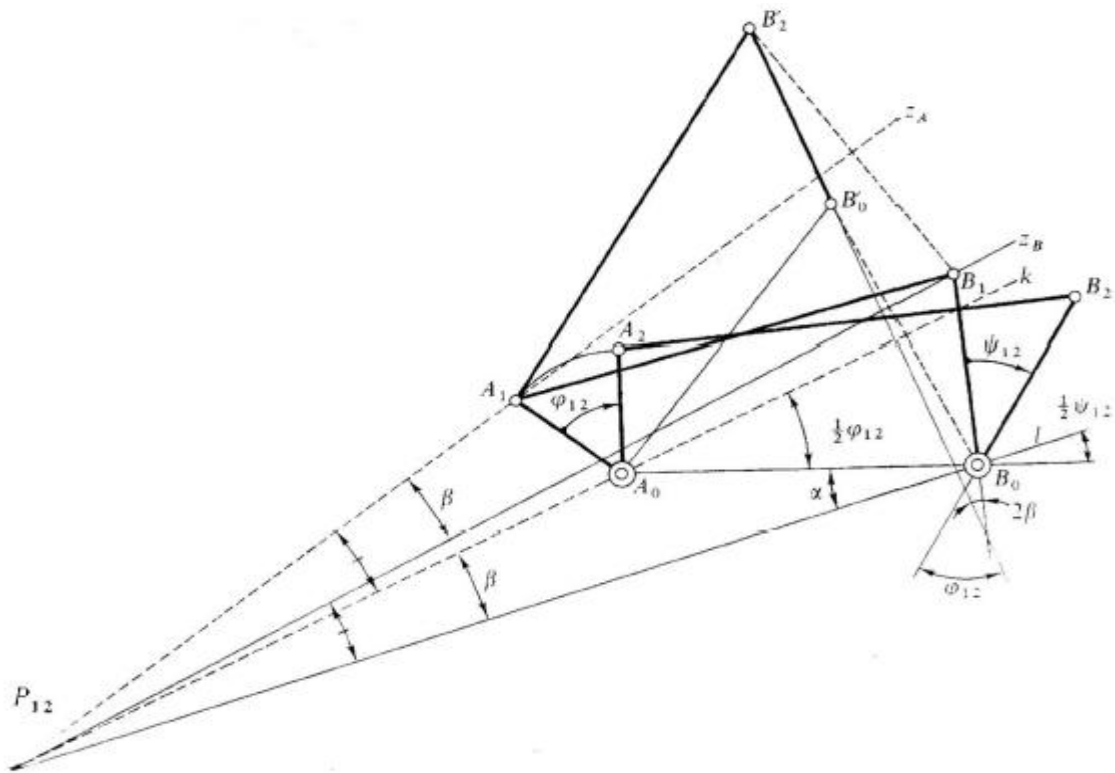
(Fig.21)

Si se considera que  $A_1A_0$  es una barra fija (lo es para el observador situado sobre ella) las dos posiciones relativas de la manivela  $c$  respecto de la manivela  $a$  ( $B_0B_1$  y

$B'_0B'_2$ ) tendrán un polo, que se obtendrá por intersección de las mediatrices a los segmentos  $B_0B'_0$  y  $B_1B'_2$ . Este polo se llama *polo relativo* para dos posiciones de la manivela  $c$  respecto de la  $a$ , y se designa por  $R_{12}$ .

El polo relativo tiene además de las propiedades del polo vistas anteriormente, otras propiedades importantes, que pueden ser utilizadas en la coordinación de las manivelas del cuadrilátero articulado.

Sea la *Fig. 22* en la que se representan las dos posiciones del cuadrilátero articulado y la posición girada de éste. Se trazan las mediatrices de los segmentos  $B'_2B_1$  y  $B'_0B_0$ , y se designan por  $z_A$  y  $k$ , respectivamente. La intersección de éstas origina el polo relativo  $R_{12}$ . La mediatriz  $k$  pasa por el punto  $A_0$  y forma con la línea  $A_0B_0$  un ángulo  $\frac{1}{2}\varphi_{12}$  con la línea  $A_0B_0$ .



(Fig.22)

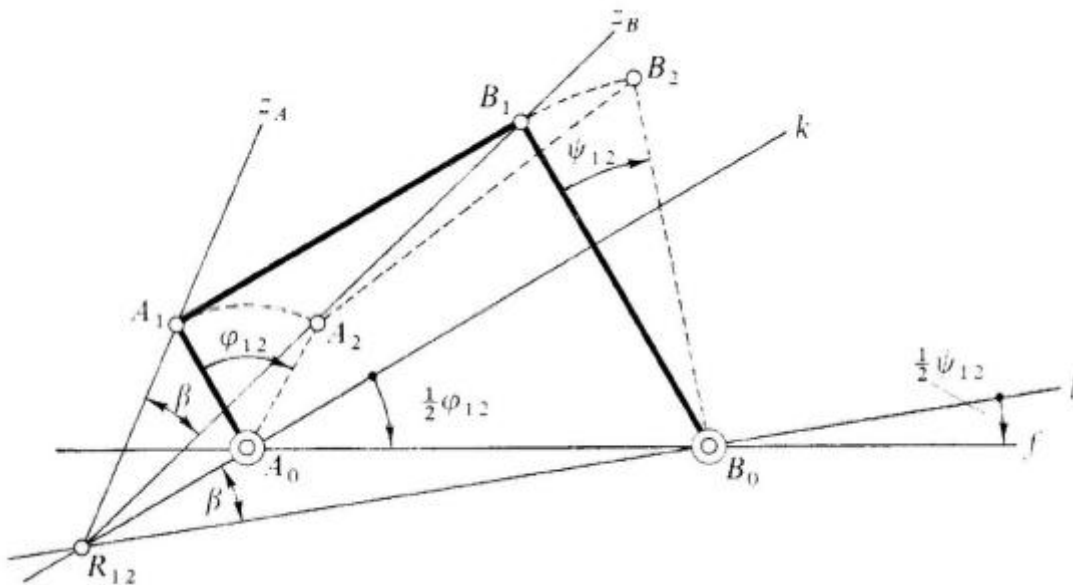
#### 4.2.2.1. Síntesis para un giro de las manivelas por el método del polo relativo

DATOS:  $\varphi_{12}$ ,  $\psi_{12}$ ,  $A_0B_0$ . Los giros son de sentido horario.

La Metodología es la siguiente:

1. Se dibuja una línea recta  $f$  y se llevan sobre ella  $A_0$  y  $B_0$  (Fig. 23).
2. Se trazan por  $A_0$  y  $B_0$  las rectas  $k$  y  $l$ , que forman ángulos  $\frac{1}{2}\varphi_{12}$  y  $\frac{1}{2}\psi_{12}$ , respectivamente, con la recta  $f$ . Las rectas  $k$  y  $l$  se intersecan en el polo relativo  $R_{12}$ .
3. Por  $R_{12}$  se trazan dos rectas arbitrarias  $z_A$  y  $z_B$ , que formen un ángulo  $\beta$  igual al ángulo  $A_0R_{12}B_0$ . Cualquier punto de  $z_A$  puede ser  $A_1$ , y cualquier punto de  $z_B$  puede ser  $B_1$ .
4. El cuadrilátero solución es el  $A_0A_1B_1B_0$ , que lleva  $A_1$  a  $A_2$  y  $B_1$  a  $B_2$ .

La figura así construida satisface las propiedades, ya vistas, del polo relativo.



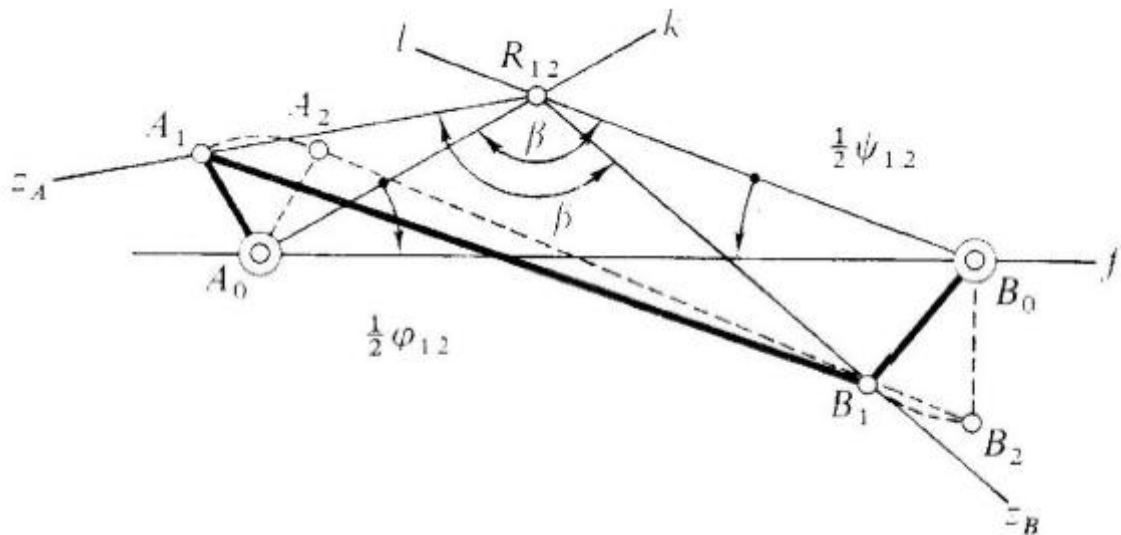
(Fig.23)

DATOS:  $\varphi_{12}$ ,  $\psi_{12}$ ,  $A_0B_0$ . Los giros son de sentido antihorario.

La Metodología es la siguiente:

1. Se dibuja una línea recta  $f$  y se llevan sobre ella  $A_0$  y  $B_0$  (Fig. 24).
2. Se trazan por  $A_0$  y  $B_0$  las rectas  $k$  y  $l$ , que forman ángulos  $\frac{1}{2}\varphi_{12}$  y  $\frac{1}{2}\psi_{12}$ , respectivamente, con la recta  $f$ . Las rectas  $k$  y  $l$  se intersecan en el polo relativo  $R_{12}$ .
3. Por  $R_{12}$  se trazan dos rectas arbitrarias  $z_A$  y  $z_B$ , que formen un ángulo  $\beta$  igual al ángulo  $A_0R_{12}B_0$ . Cualquier punto de  $z_A$  puede ser  $A_1$ , y cualquier punto de  $z_B$  puede ser  $B_1$ .
4. El cuadrilátero solución es el  $A_0A_1B_1B_0$ , que lleva  $A_1$  a  $A_2$  y  $B_1$  a  $B_2$ .

La figura así construida satisface las propiedades, ya vistas, del polo relativo.



(Fig.24)

#### 4.2.2.2. Síntesis para dos giros de las manivelas por el método del polo relativo

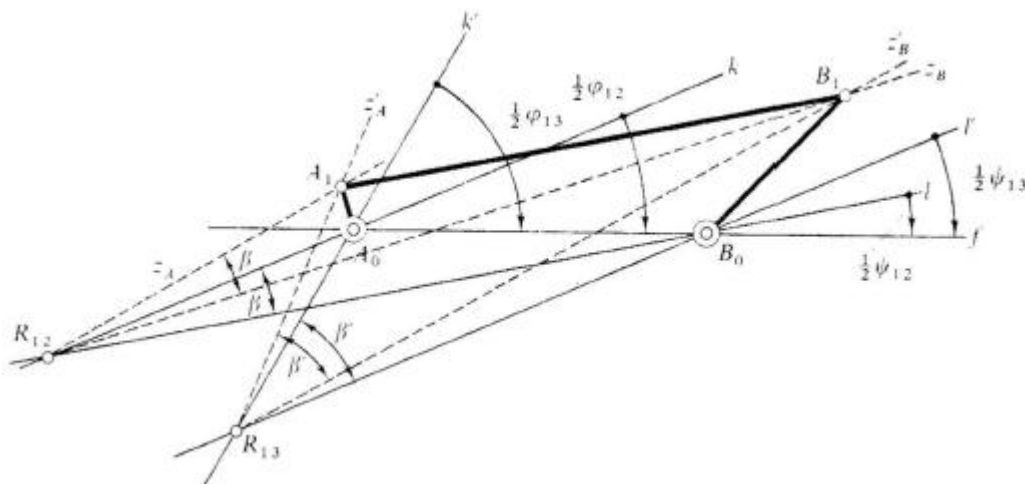
DATOS:  $\varphi_{12}, \varphi_{13}, \psi_{12}, \psi_{13}, A_0B_0$ . Los giros se suponen de sentido horario.

La Metodología es la siguiente:

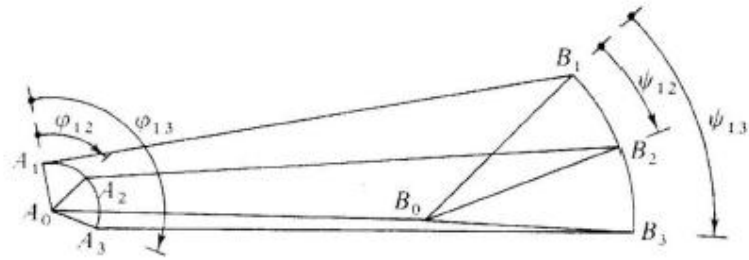
1. Se dibuja una línea recta  $f$  y se llevan sobre ella  $A_0$  y  $B_0$  (Fig. 25). Se hallan  $R_{12}$  y  $R_{13}$  por igual procedimiento que en los casos anteriores; es decir, se trazan por  $A_0$  las rectas  $k$  y  $k'$ , que forman respectivamente ángulos  $\frac{1}{2}\varphi_{12}$  y  $\frac{1}{2}\varphi_{13}$  con la recta  $f$ , y por  $B_0$  las rectas  $l$  y  $l'$ , que forman respectivamente ángulos de  $\frac{1}{2}\psi_{12}$  y  $\frac{1}{2}\psi_{13}$  con la recta  $f$ . La intersección de  $k$  y  $l$  produce  $R_{12}$ ; la intersección de  $k'$  y  $l'$  produce  $R_{13}$ .

2. Por  $R_{12}$  se trazan dos rectas arbitrarias  $z_A$  y  $z_B$  que formen un ángulo  $\beta$  igual al ángulo  $A_0R_{12}B_0$ . Por  $R_{13}$  se trazan dos rectas arbitrarias  $z'_A$  y  $z'_B$  que formen un ángulo  $\beta'$  igual al ángulo  $A_0R_{13}B_0$ . La intersección de las líneas  $z_A$  y  $z'_A$  produce  $A_1$ . La intersección de las líneas  $z_B$  y  $z'_B$  produce  $B_1$ .

3. El cuadrilátero solución es el  $A_0A_1B_1B_0$ , que lleva  $A_1$  a  $A_2$  y  $A_3$ , y  $B_1$  a  $B_2$  y  $B_3$ .



(Fig.25)



(Fig.26)

#### 4.2.2.3. Aplicación del método del polo relativo en un mecanismo de apertura de puertas

##### 4.2.2.3.1. Diseño de un mecanismo de apertura de puertas para un giro de las manivelas mediante el método del polo relativo.

Seguiremos el procedimiento visto en el apartado 4.2.2.1. y para ello, necesitamos dos valores angulares  $\varphi_{12}$  y  $\Psi_{12}$  correspondientes a los giros de las manivelas.

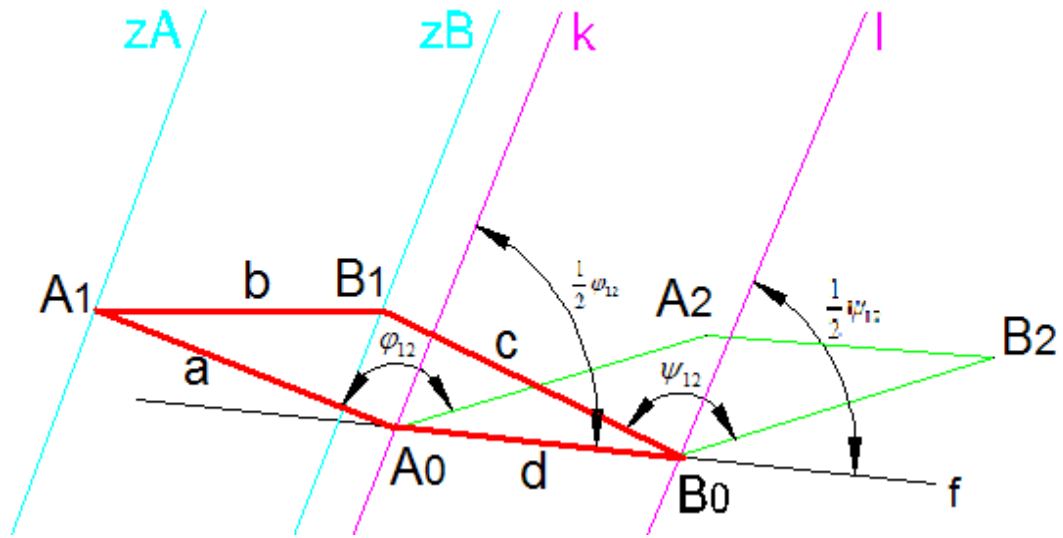
Para los giros de las manivelas utilizamos los mismos valores iniciales empleados en el apartado anterior:

$$\varphi_1 = 176.85^\circ \quad , \quad \varphi_2 = 32.06^\circ \quad \rightarrow \quad \varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = 144.79^\circ$$

$$\Psi_1 = 176.15^\circ \quad , \quad \Psi_2 = 33.69^\circ \quad \rightarrow \quad \Psi_{12} = \Psi_1 - \Psi_2 = 142.46^\circ$$

A continuación aplicamos el método procurando que  $d$  tenga un valor de  $0.211 \text{ m}$ .

Usando como herramienta AutoCad 2009, empezamos a graficar:



(Fig. 27)

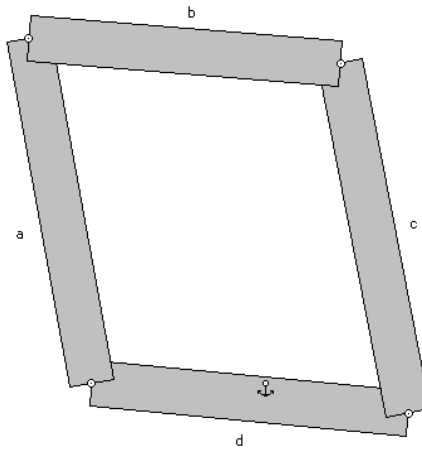
Al ser las rectas  $k$  y  $l$  casi paralelas, el polo se situará en un punto bastante alejado, por lo que se sale de la imagen.

El cuadrilátero será el marcado con línea gruesa en la Fig. 27.

Tomando medidas obtenemos las dimensiones del cuadrilátero resultante:

$$a = 0.2313 \text{ m} \quad b = 0.2076 \text{ m}$$

$$c = 0.2354 \text{ m} \quad d = 0.211 \text{ m}$$

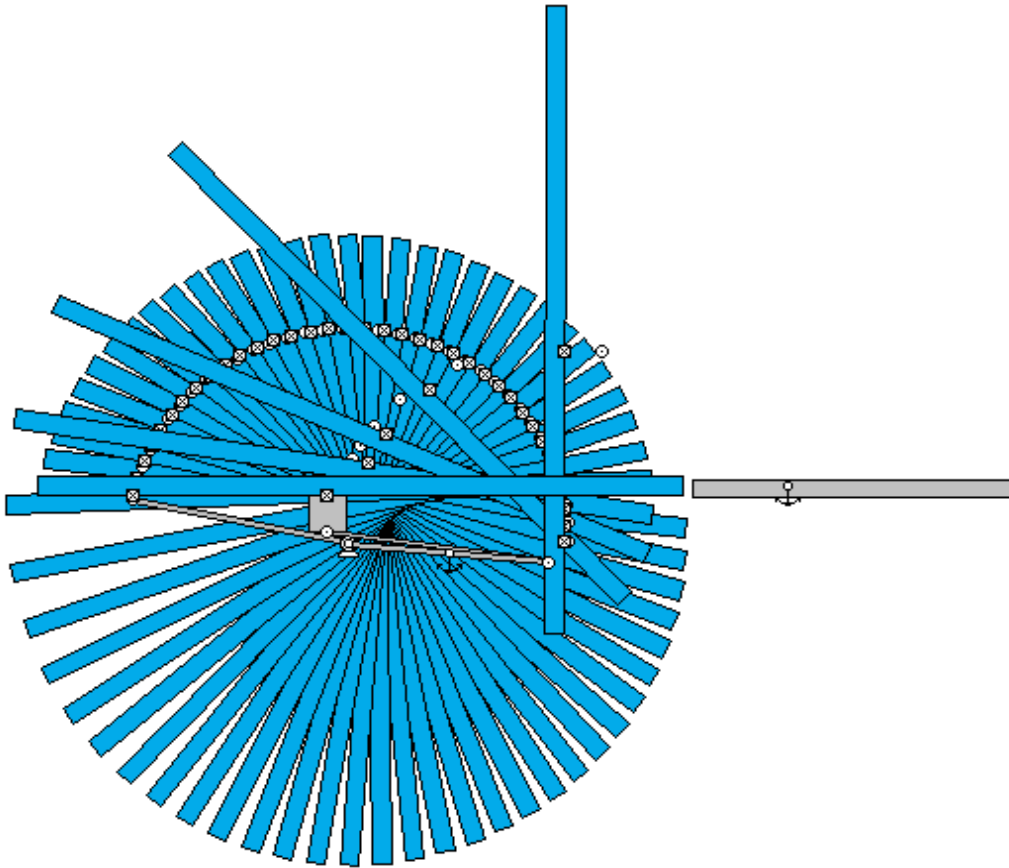


(Fig. 28)

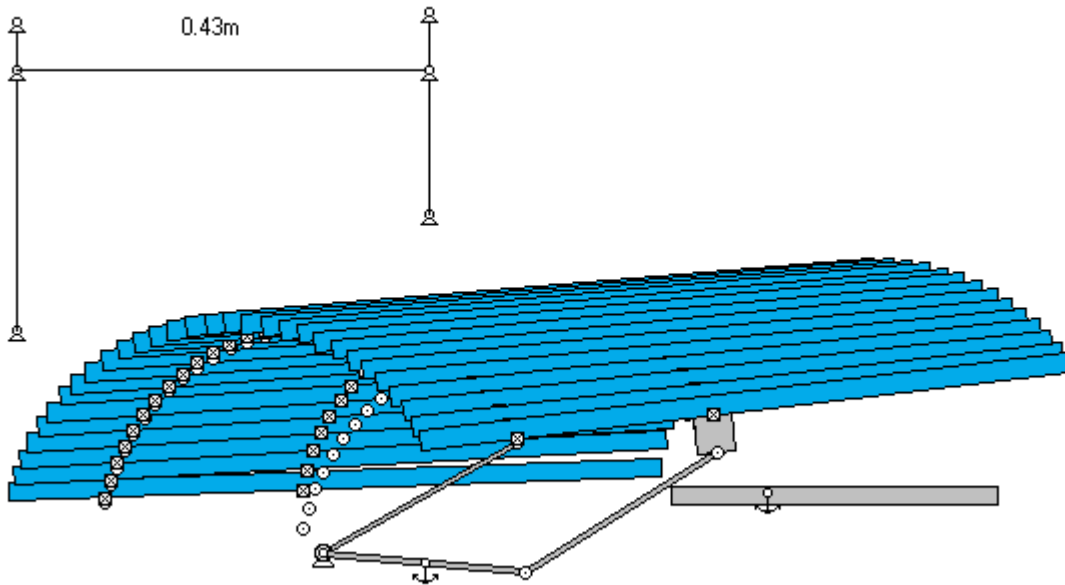
Llevamos el mecanismo a “Working Model” y comprobar que, al igual que en el anterior método gráfico estudiado, el mecanismo NO funciona correctamente.

En éste caso, ni siquiera la manivela funciona de forma adecuada, produciéndose agarrotamiento. Este agarrotamiento se produce cuando la puerta se coloca girada  $0^\circ$ , en cambio si hacemos que ese ángulo varíe un poco conseguimos que el mecanismo haga el movimiento correctamente.





(Fig.29)



(Fig.30)

La conclusión que podemos obtener es la misma que la obtenida para el Método del Polo: el método se queda corto para realizar esta síntesis.

El movimiento es bueno pero la apertura de la puerta es pequeña haciendo que solo puedan pasar los pasajeros por un hueco de 45cm aproximadamente.

En el siguiente apartado intentaremos éste mismo método con un punto de precisión más. De ésta forma comprobaremos si aumentando la precisión el método nos podría resultar útil.

#### **4.2.2.3.2. Diseño de un mecanismo de apertura de puertas para dos giros de las manivelas mediante el método del polo relativo.**

Desarrollaremos el método del polo relativo para dos giros de las manivelas.

Seguiremos el procedimiento visto en el apartado 4.2.2.2. En este caso necesitamos cuatro valores angulares, dos giros por manivela:  $\varphi_{12}$ ,  $\varphi_{13}$ ,  $\psi_{12}$ ,  $\psi_{13}$ .

Como los siguientes datos angulares:

$$\varphi_1 = 176.85^\circ \quad \Psi_1 = 176.15^\circ$$

$$\varphi_2 = 88.18^\circ \quad \Psi_2 = 90^\circ$$

$$\varphi_3 = 32.06^\circ \quad \Psi_3 = 33.69^\circ$$

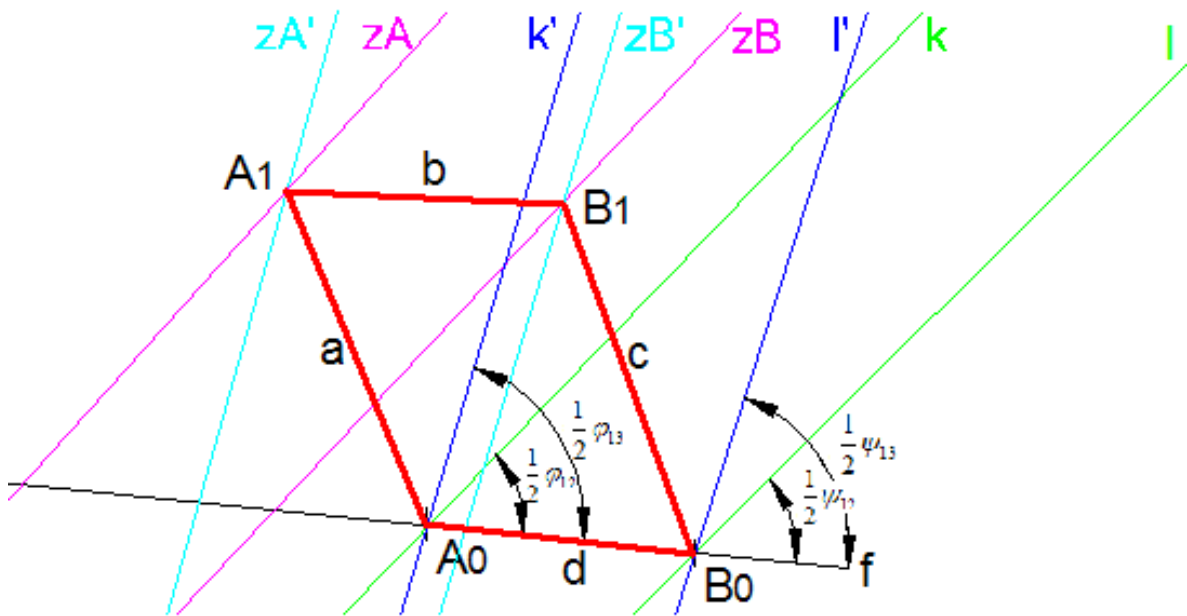
-----

$$\varphi_{12} = 88.67^\circ \quad \Psi_{12} = 86.15^\circ$$

$$\varphi_{13} = 144.79^\circ \quad \Psi_{13} = 142.46^\circ$$

A continuación aplicamos el método tomando  $d = 0.211 \text{ m}$ .

Usando como herramienta AutoCad 2009, empezamos a graficar:



(Fig. 31)

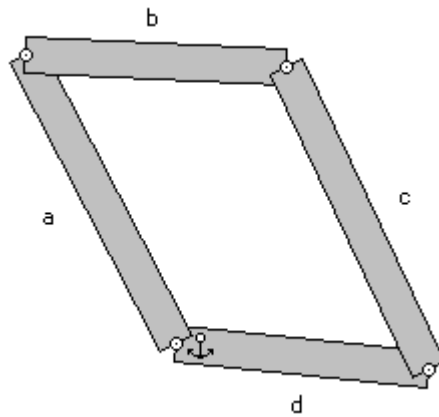
Al igual que nos pasaba en el apartado anterior, el polo se nos sale de la imagen por ser las rectas prácticamente paralelas.

El cuadrilátero que resulta será el marcado con línea gruesa en la Fig. 31.

Tomando medidas obtenemos las dimensiones del cuadrilátero resultante:

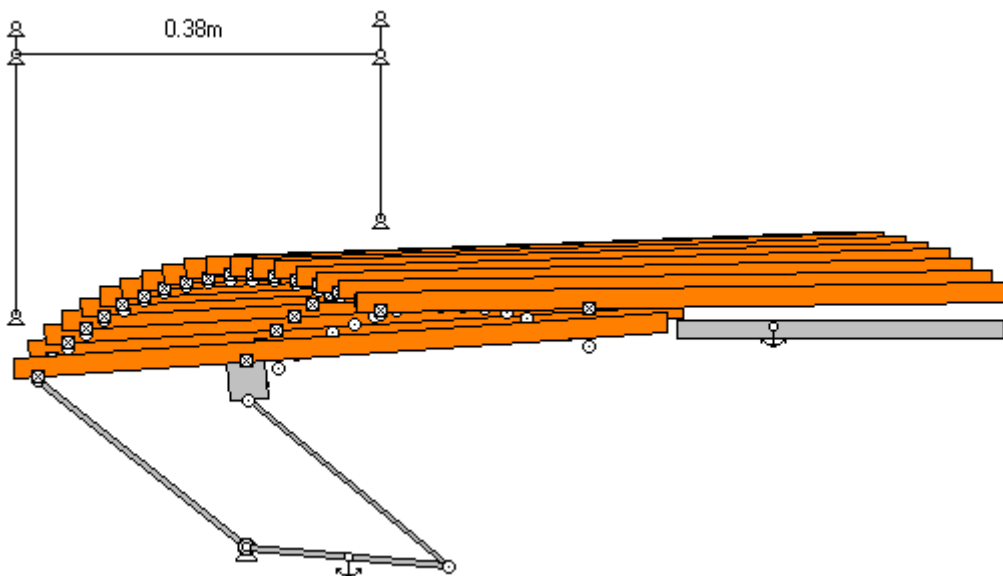
$$a = 0.2714 \text{ m} \quad b = 0.2171 \text{ m}$$

$$c = 0.2784 \text{ m} \quad d = 0.211 \text{ m}$$



(Fig. 32)

Llevamos el mecanismo a “Working Model” (Fig. 33) y le probamos: en esta ocasión el mecanismo no se agarra y funciona correctamente, realizando el barrido de la figura.



(Fig.33)

El barrido es bastante óptimo, pero debido a la longitud de las barras todavía el espacio para el paso de peatones se queda escaso y necesitamos un barrido algo mayor.

Después de probar el método, la conclusión que podemos sacar es que no es adecuado para realizar la síntesis que necesitamos, ya que tanto para uno como para dos giros de la manivela, el movimiento que realiza es correcto pero la apertura de puerta no es la suficiente.

### 4.2.3. Método de la inversión

El concepto de inversión es muy útil en análisis y en síntesis de mecanismos.

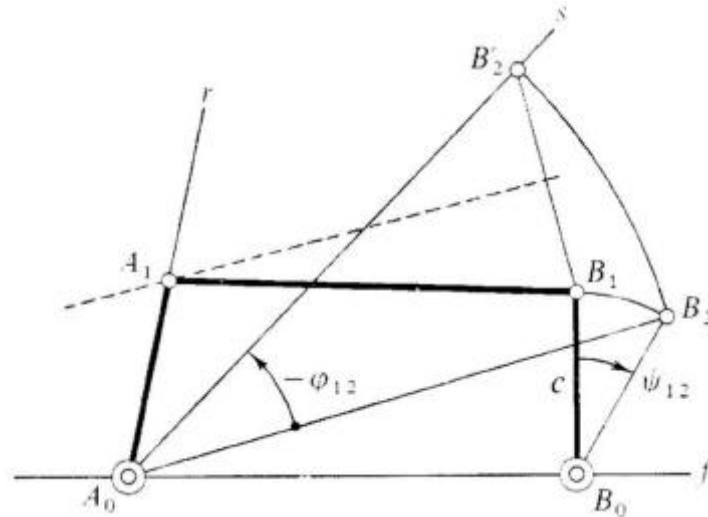
Se entiende que un mecanismo es una inversión de otro cuando se obtiene de éste mediante el procedimiento de tomar una barra del mismo como barra fija. Según esto, cada cadena cinemática produce  $N$  mecanismos, inversos unos de otros, al tomar como barras fijas cualquiera de las  $N$  barras de la cadena. En cada uno de estos mecanismos, el movimiento relativo de una barra respecto de otra permanece inalterado.

#### 4.2.3.1. Síntesis para un giro de las manivelas por el método de la inversión

DATOS:  $\varphi_{12}$ ,  $\psi_{12}$  y  $A_0B_0$ . Los giros se suponen de sentido horario.

La Metodología es la siguiente:

1. Se llevan sobre una recta  $f$  los puntos  $A_0$  y  $B_0$  (Fig. 34)
2. Se elige una longitud  $c$  para la manivela y se construye, en una posición arbitraria, el ángulo  $B_1B_0B_2$  igual al  $\psi_{12}$ .
3. Por  $A_0$  se traza una recta  $r$  arbitraria. Se une  $A_0$  con  $B_2$ . Por  $A_0$  se traza una recta  $s$ , que forma el ángulo  $(-\varphi_{12})$  con la recta  $A_0B_2$ ; se lleva sobre la recta  $s$  el punto  $B'_2$ , obtenido como  $A_0B_2 = A_0B'_2$ .
4. La mediatriz de  $B'_2B_1$  corta en  $A_1$  a la recta  $r$ , obteniéndose el cuadrilátero solución  $A_0A_1B_1B_0$ .



(Fig.34)

La justificación de la construcción gráfica se basa en que se toma la manivela  $A_0A_1$  como barra fija para hacer la inversión; entonces, el cuadrilátero articulado  $A_0A_2B_2B_0$  gira rígidamente un ángulo  $-\varphi_{12}$  alrededor de  $A_0$ , hasta que  $A_2$  coincide con  $A_1$  y  $B_2$  pasa a ocupar la posición  $B'_2$ ; es decir, para un observador situado sobre la manivela  $A_0A_1$ , el cuadrilátero articulado tiene por articulaciones fijas  $A_0$  y  $A_1$ . De ahí que  $A_1B_1$  sea manivela para dicho observador; por tanto,  $B_1$  y  $B'_2$  están en un arco con centro  $A_1$ , luego la mediatriz de  $B_1B'_2$  pasa por  $A_1$ .

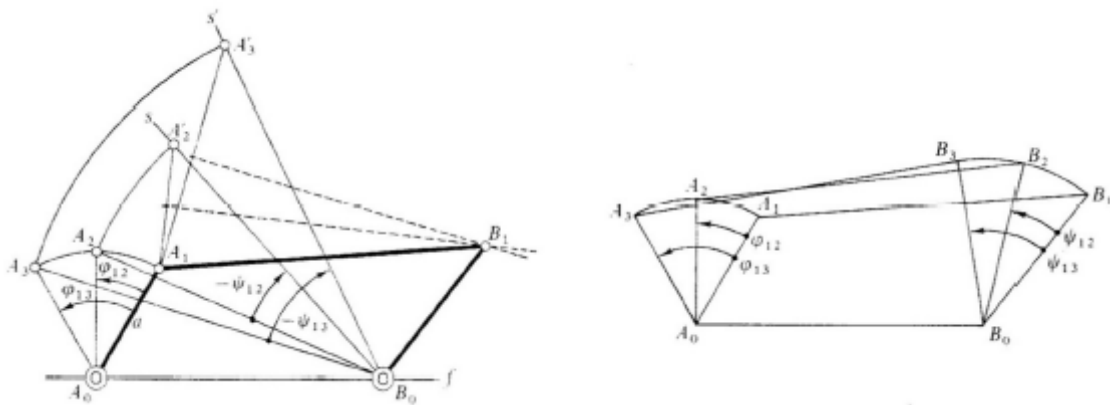
#### 4.2.3.2. Síntesis para dos giros de las manivelas por el método de la inversión

DATOS:  $\varphi_{12}$ ,  $\varphi_{13}$ ,  $\psi_{12}$ ,  $\psi_{13}$ ,  $A_0B_0$ . Los giros se suponen de sentido antihorario.

La Metodología es la siguiente:

1. Se llevan sobre una recta  $f$  los puntos  $A_0$  y  $B_0$  (Fig. 35).
2. Se supone una longitud  $a$  para la manivela y se construyen, en una posición arbitraria, los ángulos  $\varphi_{12}$  y  $\varphi_{13}$ , obteniéndose los puntos  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ .
3. Se une  $B_0$  con  $A_2$  y con  $A_3$ . Por  $B_0$  se trazan dos rectas  $s$  y  $s'$  que forman ángulos iguales a  $-\psi_{12}$  y  $-\psi_{13}$  con  $B_0A_2$  y  $B_0A_3$ , respectivamente, obteniéndose a partir de  $B_0A_2 = B_0A'_2$  y  $B_0A_3 = B_0A'_3$  los puntos  $A'_2$  y  $A'_3$  sobre las rectas  $s$  y  $s'$ .
4. Se trazan las mediatrices de los segmentos  $A_1A'_2$  y  $A_1A'_3$ . Su intersección es el punto  $B_1$ , obteniéndose el cuadrilátero articulado solución  $A_0A_1B_1B_0$ .

La justificación de la construcción gráfica es la misma que para el caso anterior, salvo que aquí la barra en la que se ha realizado la inversión es la manivela  $B_0B_1$ .



(Fig.35)

### 4.2.3.3. Aplicación del método de la inversión en un mecanismo de apertura de puertas

#### 4.2.3.3.1. Diseño de un mecanismo de apertura de puertas para un giro de las manivelas mediante el método de la inversión

Seguiremos el procedimiento visto en el apartado 4.2.3.1. y para ello, necesitamos dos valores angulares  $\varphi_{12}$  y  $\Psi_{12}$  correspondientes a los giros de las manivelas.

Tomamos los valores:

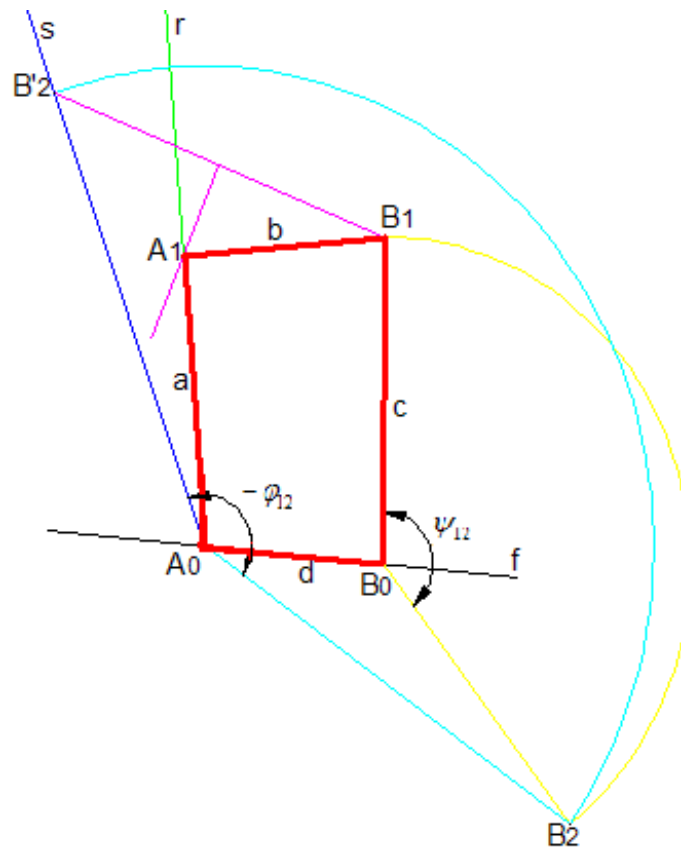
$$\varphi_1 = 176.85^\circ \quad , \quad \varphi_2 = 32.06^\circ \quad \rightarrow \quad \varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = 144.79^\circ$$

$$\Psi_1 = 176.15^\circ \quad , \quad \Psi_2 = 33.69^\circ \quad \rightarrow \quad \Psi_{12} = \Psi_1 - \Psi_2 = 142.46^\circ$$

A continuación aplicamos el método procurando que “ $d$ ” tenga un valor de  $0.211 \text{ m}$ . y “ $c$ ” un valor de  $0.360 \text{ m}$ .



Usando como herramienta AutoCad 2009, empezamos a graficar:



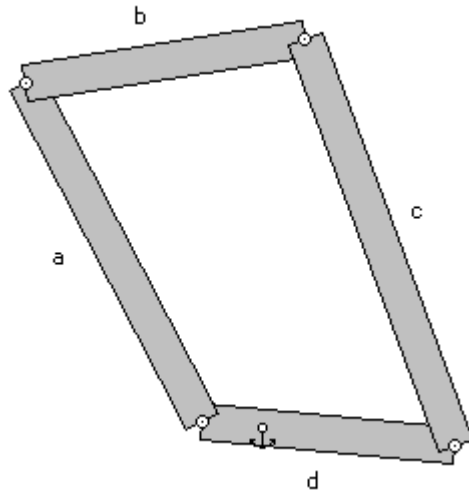
(Fig. 36)

El cuadrilátero será el marcado con línea gruesa en la Fig. 36

Tomando medidas obtenemos las dimensiones del cuadrilátero resultante:

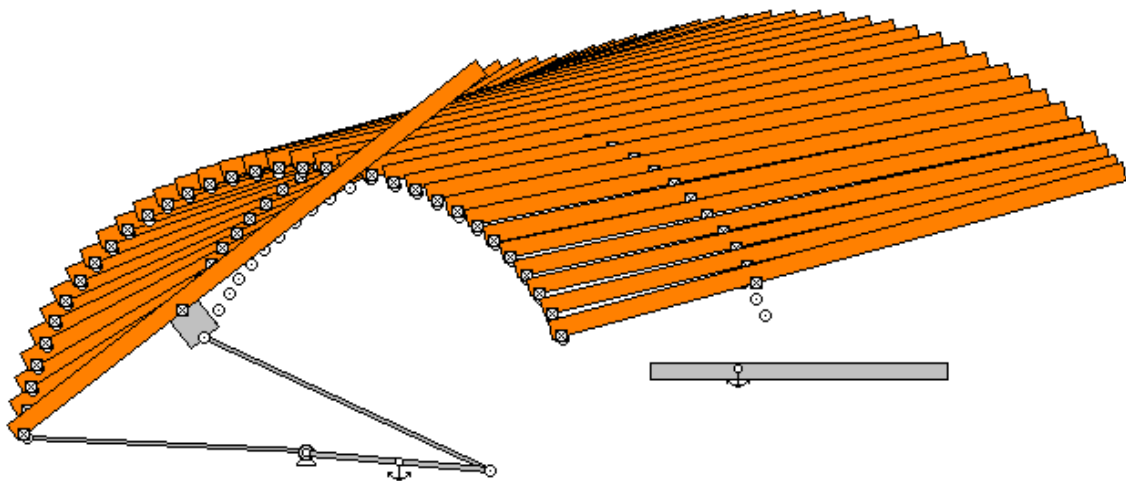
$$a = 0.3175 \text{ m} \quad b = 0.2352 \text{ m}$$

$$c = 0.36 \text{ m} \quad d = 0.211 \text{ m}$$



(Fig. 37)

Llevamos el mecanismo a “Working Model” y comprobamos que vuelve a pasar lo mismo que ocurría en los anteriores métodos gráficos desarrollados con un solo punto de precisión (un giro de la manivela): el mecanismo sufre un movimiento suave pero el giro de la puerta es muy amplio y no es posible colocarlo horizontalmente.



(Fig.38)

En el siguiente apartado intentaremos éste mismo método con un punto de precisión más.

#### 4.2.3.3.2. Diseño de un mecanismo de apertura de puertas para dos giros de las manivelas mediante el método de la inversión

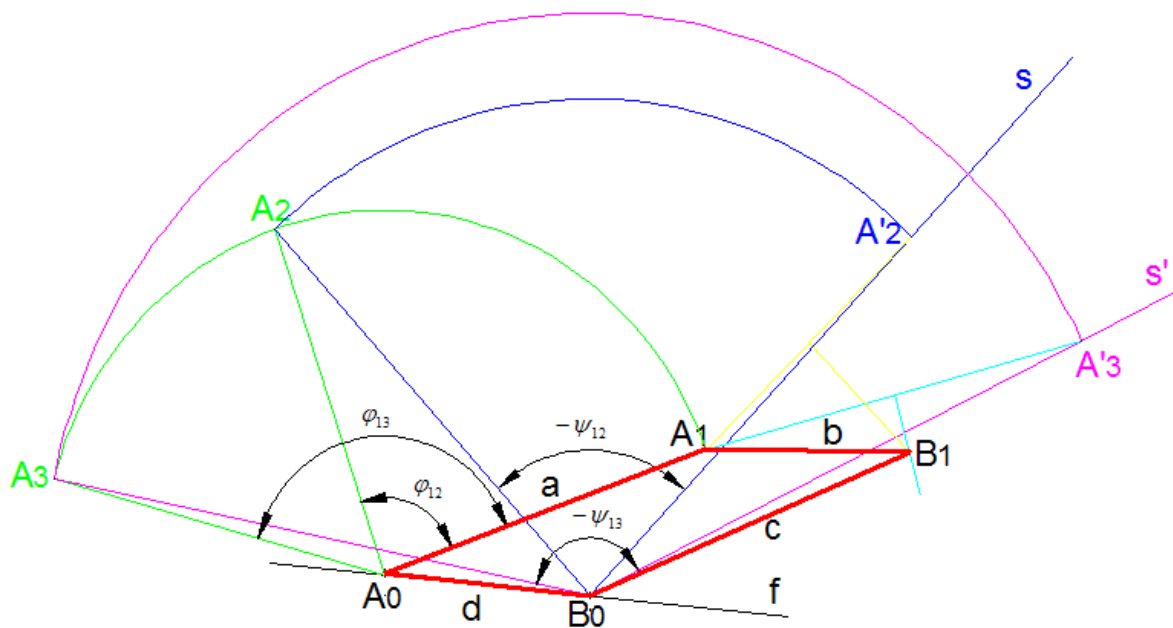
Seguiremos el procedimiento visto en el apartado 4.2.3.2. En este caso necesitamos cuatro valores angulares, dos giros por manivela:  $\varphi_{12}$ ,  $\varphi_{13}$ ,  $\psi_{12}$ ,  $\psi_{13}$ .

Como los siguientes datos angulares:

$$\begin{array}{ll} \varphi_1 = 176.85^\circ & \Psi_1 = 176.15^\circ \\ \varphi_2 = 88.18^\circ & \Psi_2 = 90^\circ \\ \varphi_3 = 32.06^\circ & \Psi_3 = 33.69^\circ \\ \hline \varphi_{12} = 88.67^\circ & \Psi_{12} = 86.15^\circ \\ \varphi_{13} = 144.79^\circ & \Psi_{13} = 142.46^\circ \end{array}$$

A continuación aplicamos el método tomando  $d = 0.211 \text{ m}$  y  $a = 0.35 \text{ m}$ .

Usando como herramienta AutoCad 2009, empezamos a graficar:



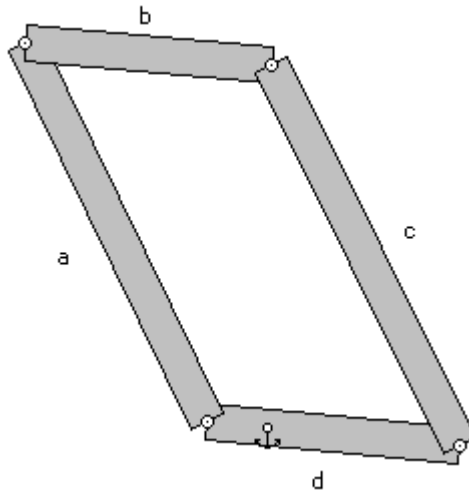
(Fig. 39)

El cuadrilátero que resulta será el marcado con línea gruesa en la Fig. 39 ( $A_0-A_1-B_1-B_0$ ).

Tomando medidas obtenemos las dimensiones del cuadrilátero resultante:

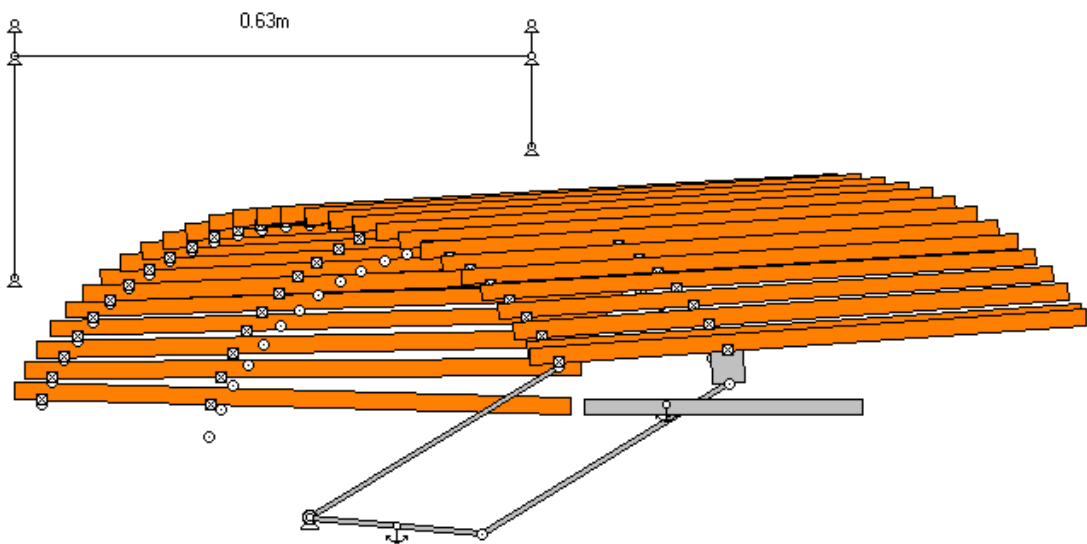
$$a = 0.350 \text{ m} \quad b = 0.2066 \text{ m}$$

$$c = 0.3537 \text{ m} \quad d = 0.211 \text{ m}$$



(Fig. 40)

Llevamos el mecanismo a “Working Model” (Fig. 40) y le probamos: en esta ocasión el mecanismo no se agarrota y funciona correctamente, realizando el barrido de la figura.



(Fig.41)

Por lo tanto, volvemos obtener la misma conclusión: el método es bueno utilizando más de un punto de precisión.

En esta ocasión el barrido es muy bueno, la posición inicial de la puerta es correcta y la posición final también, la puerta no oscila por lo que a priori este diseño es uno de los que mejor resultado nos ha dado.

#### **4.2.4. Ampliación del número de posiciones a coordinar, o de puntos de precisión, mediante el método de reducción de posiciones.**

La arbitrariedad en la elección de ciertos parámetros, en los casos anteriores, asegura la existencia de infinidad de soluciones y, por tanto, la posibilidad de introducir nuevas condiciones. El método de reducción de posiciones está basado en hacer coincidir un polo con una articulación fija, aplicando seguidamente el método de la inversión.

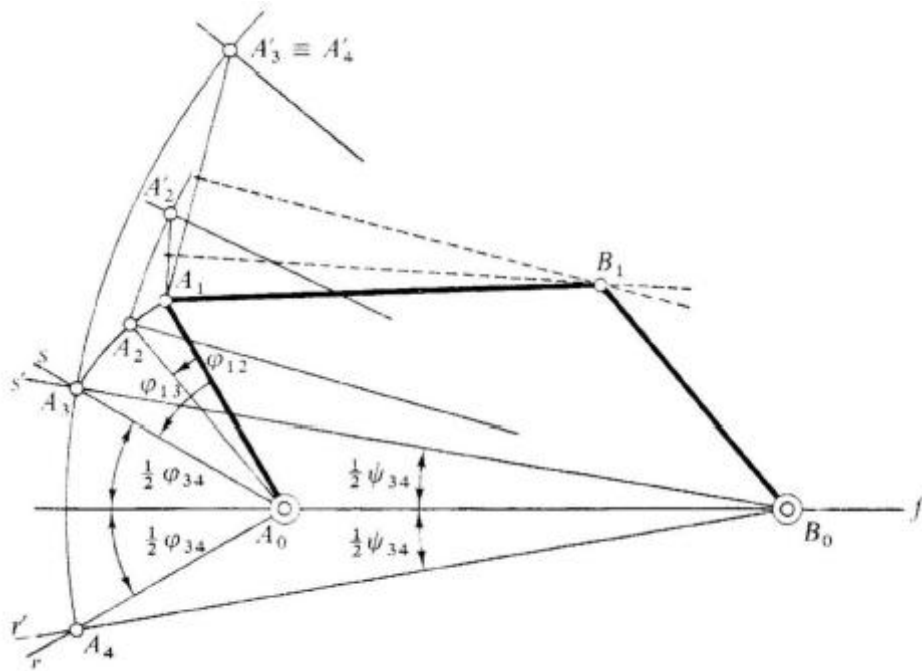
Esta técnica de reducción de posiciones evita la necesidad de utilizar otros procedimientos más lentos de síntesis. La coincidencia del polo con la articulación fija se consigue tomando ésta en la intersección de las dos mediatrices correspondientes.

##### **4.2.4.1. Síntesis para cuatro posiciones de las manivelas mediante el método de reducción de posiciones**

DATOS:  $\varphi_{12}$ ,  $\varphi_{13}$ ,  $\varphi_{14}$ ,  $\psi_{12}$ ,  $\psi_{13}$ ,  $\psi_{14}$  y  $A_0B_0$ . Los giros se suponen de sentido antihorario.

La Metodología es la siguiente:

1. Se toman sobre una recta  $f$  los puntos  $A_0$  y  $B_0$  (Fig. 42)



(Fig.42)

2. Se construyen, con vértice en  $A_0$ , dos rectas  $r$  y  $s$  que forman un ángulo igual a  $\varphi_{34} = \varphi_{14} - \varphi_{13}$  con  $A_0B_0$  como bisectriz.
3. Se construyen, con vértice en  $B_0$  y con  $A_0B_0$  como bisectriz, dos rectas  $r'$  y  $s'$  que forman un ángulo igual a  $\psi_{34} = \psi_{14} - \psi_{13}$ .
4. La intersección de  $s$  y  $s'$  origina  $A_3$ , y la intersección de  $r$  y  $r'$  origina  $A_4$ .
5. Se traza un arco con centro  $A_0$  y radio  $A_0A_4$ . Llevando sobre  $s$  el ángulo  $-\varphi_{13}$ , se obtiene  $A_1$ ; llevando sobre  $A_0A_1$  el ángulo  $\varphi_{12}$ , se obtiene  $A_2$ .
6. Se giran, con centro en  $B_0$ , los puntos  $A_2$ ,  $A_3$  y  $A_4$  por ángulos iguales a  $-\psi_{12}$ ,  $-\psi_{13}$ ,  $-\psi_{14}$ , respectivamente, obteniéndose los puntos  $A'_2$ ,  $A'_3$  y  $A'_4$ . Los puntos  $A'_3$  y  $A'_4$  coinciden; esto es debido a la elección simétrica de  $A_3$  y  $A_4$ .
7. La intersección de las dos mediatrices a los segmentos  $A'_4A_1$  y  $A'_2A_1$  origina el punto  $B_1$ , articulación móvil del cuadrilátero articulado  $A_0A_1B_1B_0$ , que es la solución del problema.

#### 4.2.4.2. Aplicación del método de reducción de posiciones en un mecanismo de apertura de puertas

##### 4.2.4.2.1. Diseño de un mecanismo de apertura de puertas para cuatro posiciones de las manivelas mediante el método de reducción de posiciones

Seguiremos el procedimiento visto en el apartado 4.2.4.1. En este caso necesitamos seis valores angulares  $\varphi_{12}$ ,  $\varphi_{13}$ ,  $\varphi_{14}$ ,  $\psi_{12}$ ,  $\psi_{13}$ ,  $\psi_{14}$ ; que representen las cuatro posiciones.

Tomamos los siguientes datos angulares:

$$\varphi_1 = 319.691^\circ \quad \psi_1 = 330.492^\circ$$

$$\varphi_2 = 298.795^\circ \quad \psi_2 = 309.606^\circ$$

$$\varphi_3 = 266.027^\circ \quad \psi_3 = 279.585^\circ$$

$$\varphi_4 = 228.329^\circ \quad \psi_4 = 248.715^\circ$$

---

$$\varphi_{12} = 20.896^\circ \quad \psi_{12} = 20.886^\circ$$

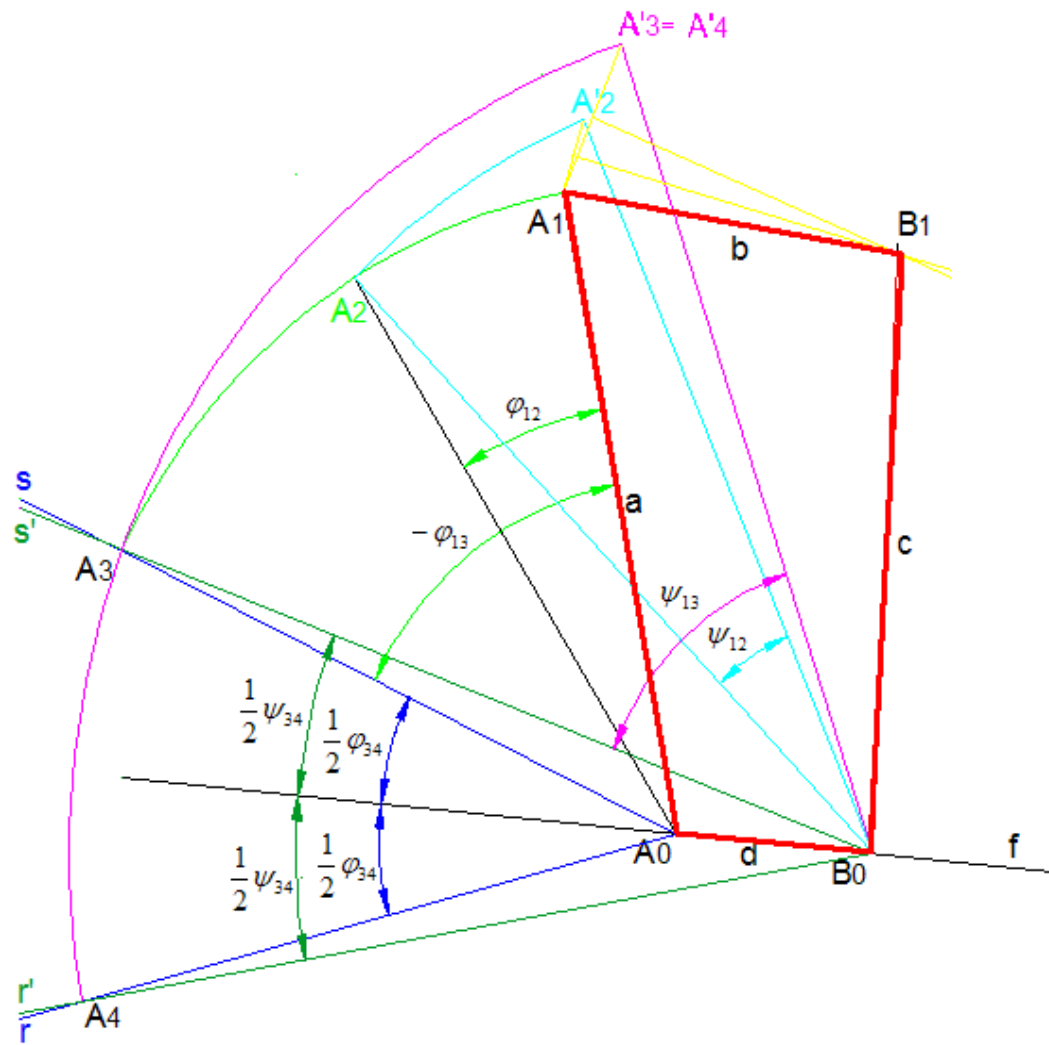
$$\varphi_{13} = 53.664^\circ \quad \psi_{13} = 50.907^\circ$$

$$\varphi_{14} = 91.362^\circ \quad \psi_{14} = 81.777^\circ$$

A continuación aplicamos el método tomando  $d = 0.211$  m.

Usando como herramienta AutoCad 2009, empezamos a graficar:



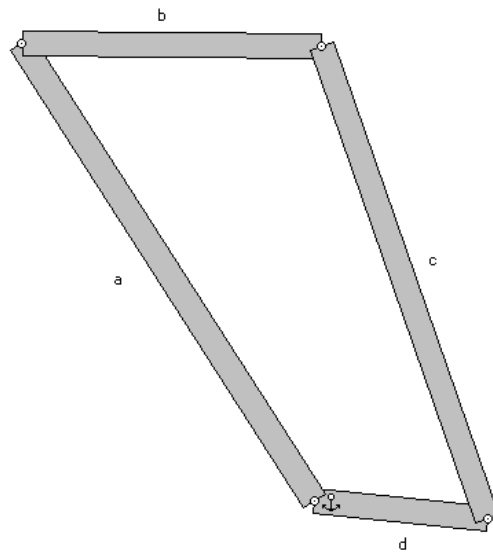


(Fig. 43)

El cuadrilátero que resulta será el marcado con línea gruesa en la Fig. 43 ( $A_0-A_1-B_1-B_0$ ).

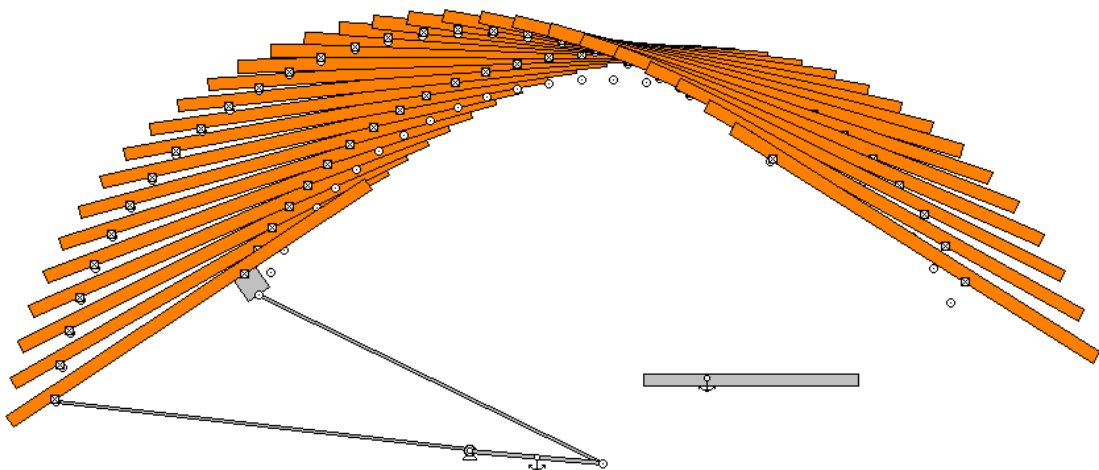
Tomando medidas obtenemos las dimensiones del cuadrilátero resultante:

$$\begin{aligned}
 a &= 0.6585 \text{ m} & b &= 0.3626 \text{ m} \\
 c &= 0.6068 \text{ m} & d &= 0.211 \text{ m}
 \end{aligned}$$



(Fig. 44)

Llevamos el mecanismo a “Working Model” (Fig. 44) y le probamos: en esta ocasión el mecanismo no se agarrota y pero el movimiento no es el correcto.



(Fig.45)

Sin embargo, aunque el mecanismo funciona, las dimensiones de las barras son inaplicables, sobre todo las del cuadrilátero. Podríamos variar sus longitudes aplicando un factor de escala pero como el movimiento no es el correcto no nos interesa hacerlo.

## **5. SÍNTESIS DE GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS:**

La parte de la síntesis de mecanismos que estudia la correspondencia de las trayectorias descritas por puntos pertenecientes a las barras de un mecanismo durante el movimiento de éste con otras trayectorias especificadas, se denomina “Síntesis de generación de trayectorias”.

A grandes rasgos, es lo mismo que hemos realizado mediante la síntesis de generación de funciones. Los distintos pares de valores de ángulos que teníamos en la síntesis de generación de funciones, ahora pares de coordenadas que definen una trayectoria determinada.

### **5.1 Síntesis mediante el método propuesto por Jiménez, Álvarez, Cardenal y Cuadrado**

Para la síntesis de generación de trayectorias, utilizaremos el método propuesto por Jiménez, Álvarez, Cardenal y Cuadrado en su trabajo titulado “A simple and general method for kinematic synthesis of spatial mechanisms”.

Éste trabajo presenta un método simple y eficiente para una óptima síntesis cinemática de sistemas multicuerpo. La formulación propuesta se basa en el uso de un sistema global de coordenadas cartesianas. Haciendo uso de éstas coordenadas, el sistema es descrito por un conjunto de restricciones geométricas y los requisitos de diseño por un conjunto de limitaciones funcionales.

La función objetivo es definida y minimizada para obtener los valores de los parámetros de diseño.

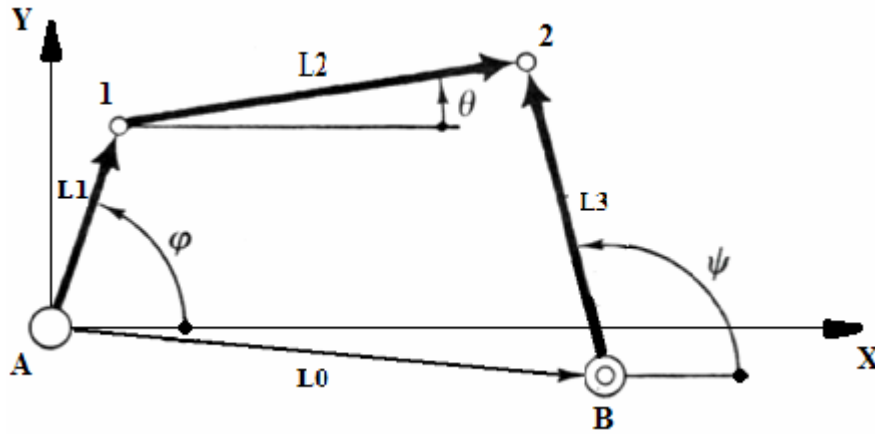
El procedimiento a seguir es el siguiente:

1. Primeramente, el analista deberá realizar una descripción completa del sistema, incluyendo el número de elementos y el número de articulaciones cinemáticas que los vinculan.
2. Una vez descrito el sistema, se elige un conjunto de parámetros de diseño. Éstos parámetros o variables de diseño vendrán dados por las dimensiones geométricas de los cuerpos, es decir, sus longitudes, ángulos entre elementos, etc.
3. Por último, se deberán definir los requisitos de diseño. Por requisitos de diseño se entiende a un conjunto de limitaciones que el sistema debe cumplir para conformar una solución óptima.

Por lo general, no es posible encontrar un sistema que cumpla exactamente con todos los requisitos al mismo tiempo. Por ello, solo se puede obtener una solución óptima para algunos aspectos particulares.

Desde el punto de vista de la formulación matemática del problema, los requisitos de diseño permiten la definición de una función objetivo que depende del conjunto de parámetros de diseño. Una vez definida dicha función, se podrá seguir un procedimiento de optimización con el fin de lograr un conjunto de valores para los parámetros de diseño que minimice el valor de la función objetivo. Estos valores constituyen la solución deseada, dando forma a un mecanismo óptimo en algún sentido.

Tomamos el cuadrilátero articulado. En este caso, la síntesis comprende la determinación de las dimensiones de los eslabones del mecanismo que hacen que se cumplan las condiciones preestablecidas. Estas dimensiones serán las variables de diseño.



(Fig. 46)

Si siguiendo el método propuesto, suponiendo que los puntos "A" y "B" son fijos y que se pueden variar las longitudes de la manivela, resulta que las variables de diseño son los elementos del vector

$$\mathbf{b}^T = \{L_1, L_2, L_3\}$$

siendo  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  las longitudes de los eslabones del cuadrilátero exceptuando la bancada ( $L_0$ ) (ver Fig. 46).

El vector de coordenadas dependientes de los puntos "1" y "2", que irán variando a lo largo de las trayectorias que describan según sea la posición del mecanismo, será:

$$\mathbf{q}^T = \{X_1, Y_1, X_2, Y_2\}$$

Las restricciones geométricas que deben cumplir los diferentes puntos del mecanismo, para cualquier posición en la que se encuentre, se pueden expresar de la forma siguiente:

$$\varphi_{1i} = (X_1 - X_A)^2 + (Y_1 - Y_A)^2 - L_1^2 = 0$$

$$\varphi_{2i} = (X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 - L_2^2 = 0$$

$$\varphi_{3i} = (X_2 - X_B)^2 + (Y_2 - Y_B)^2 - L_3^2 = 0$$

$$\varphi_{4i} = (X_1 - X_p) = 0$$

$$\varphi_{5i} = (Y_1 - Y_p) = 0$$

Las tres primeras restricciones, corresponden a las longitudes fijas de los eslabones; las otra dos recogen la condición de que las coordenadas del punto “1” deben ser las coordenadas de los puntos “P” que se desean conseguir.

Tomamos las tres primeras condiciones de restricción para las tres posiciones a alcanzar; las dos últimas condiciones no son necesarias ya que basta con tomar para el punto “1” las coordenadas que se desee que alcance dicho punto.

Por lo tanto, si tomamos 3 puntos de precisión, tendremos:

$$\text{Ecuaciones} = 3 \text{ ecuaciones de restricción} \times 3 \text{ puntos de precisión} = 9$$

$$\text{Incógnitas} = [(3 \text{ puntos de precisión} \times 4 \text{ incógnitas } qT) + 3 \text{ incógnitas } bT] = 15$$

Resultan 9 ecuaciones y 15 incógnitas: nos harían falta 6 ecuaciones totales más, es decir, 2 nuevas ecuaciones de restricción.

Tomamos como nuevas ecuaciones de restricción las ecuaciones vectoriales de cierre de los triángulos  $AB-A2-B2$  y  $AB-A1-B1$ :

$$\varphi_{6i} = (X_2 - X_a)^2 + (Y_2 - Y_a)^2 - (L_{2a1})^2 = 0$$

$$\varphi_{7i} = (X_1 - X_b)^2 + (Y_1 - Y_b)^2 - (L_{1b1})^2 = 0$$

Con estas dos nuevas de restricciones conseguimos tener un sistema con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas:

$$\text{Ecuaciones} = 5 \text{ ecuaciones de restricción} \times 3 \text{ puntos de precisión} = 15$$

$$\text{Incógnitas} = [(3 \text{ puntos de precisión} \times 4 \text{ incógnitas } q^T) + 3 \text{ incógnitas } b^T] = 15$$

Planteamos las ecuaciones.

Los puntos de precisión serán:

$$(X_{P1}, Y_{P1}) \quad (X_{P2}, Y_{P2}) \quad (X_{P3}, Y_{P3})$$

El resto de puntos corresponderán a las coordenadas de las posiciones que alcanzarán los puntos “1” y “2” para cada  $P_1, P_2, P_3$ :

$$\begin{array}{ccc} (X_{11}, Y_{11}) & (X_{12}, Y_{12}) & (X_{13}, Y_{13}) \\ (X_{21}, Y_{21}) & (X_{22}, Y_{22}) & (X_{23}, Y_{23}) \end{array}$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones a resolver será el siguiente:

$$\phi 1 = (X_{11}-X_a)^2 + (Y_{11}-Y_a)^2 - L_1^2 = 0$$

$$\phi 2 = (X_{12}-X_a)^2 + (Y_{12}-Y_a)^2 - L_1^2 = 0$$

$$\phi 3 = (X_{13}-X_a)^2 + (Y_{13}-Y_a)^2 - L_1^2 = 0$$

$$\phi 4 = (X_{11} - X_{21})^2 + (Y_{11} - Y_{21})^2 - L_2^2 = 0$$

$$\phi 5 = (X_{12} - X_{22})^2 + (Y_{12} - Y_{22})^2 - L_2^2 = 0$$

$$\phi 6 = (X_{13} - X_{23})^2 + (Y_{13} - Y_{23})^2 - L_2^2 = 0$$

$$\phi 7 = (X_{21} - X_b)^2 + (Y_{21}-Y_b)^2 - L_3^2 = 0$$

$$\phi 8 = (X_{22} - X_b)^2 + (Y_{22}-Y_b)^2 - L_3^2 = 0$$

$$\phi 9 = (X_{23} - X_b)^2 + (Y_{23}-Y_b)^2 - L_3^2 = 0$$

$$\phi 10 = (X_{21}-X_a)^2 + (Y_{21}-Y_a)^2 - (L_{2a1})^2 = 0$$

$$\phi 11 = (X_{22}-X_a)^2 + (Y_{22}-Y_a)^2 - (L_{2a2})^2 = 0$$

$$\phi 12 = (X_{23}-X_a)^2 + (Y_{23}-Y_a)^2 - (L_{2a3})^2 = 0$$

$$\begin{aligned}\varphi_{13} &= (X_{11} - X_b)^2 + (Y_{11} - Y_b)^2 - (L_{1b1})^2 = 0 \\ \varphi_{14} &= (X_{12} - X_b)^2 + (Y_{12} - Y_b)^2 - (L_{1b2})^2 = 0 \\ \varphi_{15} &= (X_{13} - X_b)^2 + (Y_{13} - Y_b)^2 - (L_{1b3})^2 = 0\end{aligned}$$

(1.13)

siendo:  $P1 = (X_{11}, Y_{11})$

$P2 = (X_{12}, Y_{12})$

$P3 = (X_{13}, Y_{13})$



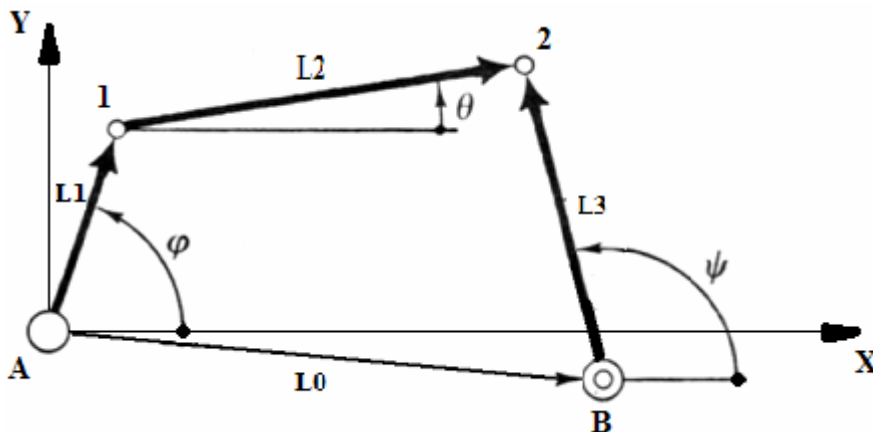
## 5.2. Aplicación del método propuesto por Jiménez, Álvarez, Cardenal y Cuadrado en un mecanismo de apertura de puertas

### 5.2.1. Diseño de un mecanismo de apertura de puertas mediante la síntesis de generación de trayectorias utilizando el método propuesto por Jiménez, Álvarez, Cardenal y Cuadrado

A continuación, seguiremos el método visto en el apartado 5.1 para diseñar el mecanismo de cuadrilátero articulado.

Mientras que en la síntesis de generación de funciones los puntos de precisión correspondían a pares de ángulos, en la síntesis de generación de trayectorias estos puntos corresponderán a las distintas posiciones que debe alcanzar un punto definido del mecanismo para describir la trayectoria deseada.

En nuestro caso, utilizaremos los mismos puntos usados para la síntesis por Freudenstein, transformando esos valores angulares en posiciones respecto de un origen cartesiano.

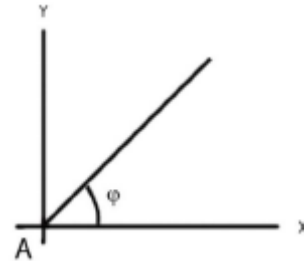


(Fig.46)

Queremos que el punto “1” (según la nomenclatura utilizada en el apartado 5.1) siga la trayectoria determinada. Si tomamos el punto “A” como origen de coordenadas y

consideramos la longitud de los segmento  $L_1$  y  $L_3$  que obtuvimos por Freudenstein con cinco puntos de precisión ( $L_1 = a = 0.278 \text{ m}$ ;  $L_3 = c = 0.269 \text{ m}$ ), podemos calcular los puntos necesarios para la síntesis de trayectorias.

Para:  $\varphi_1 = 169.848^\circ$   
 $\varphi_2 = 88.621^\circ$   
 $\varphi_3 = 36.48^\circ$



obtenemos:

$$x_{11} = 0.278 \cdot \text{Cos}(169.848) = -0.2736$$

$$y_{11} = 0.278 \cdot \text{Sen}(169.848) = -0.049$$

$$x_{12} = 0.278 \cdot \text{Cos}(88.621) = 0.0067$$

$$y_{12} = 0.278 \cdot \text{Sen}(88.621) = 0.2779$$

$$x_{13} = 0.278 \cdot \text{Cos}(36.48) = 0.2235$$

$$y_{13} = 0.278 \cdot \text{Sen}(36.48) = 0.1653$$

El sistema de ecuaciones (*ec. 1.13*) es “no lineal”, por lo tanto tendremos que dar unos iterantes iniciales para poder resolver.

Tomamos  $X_b = 0.21 \text{ m}$ . e  $Y_b = -0.02 \text{ m}$ .

Para:  $\Psi_1 = 176.146^\circ$   
 $\Psi_2 = 90.173^\circ$   
 $\Psi_3 = 41.465^\circ$

Tomamos:

$$x_{21} = 0.21 + 0.269 \cdot \text{Cos}(176.146) = -0.0584$$

$$x_{22} = 0.21 + 0.269 \cdot \text{Cos}(90.173) = 0.2092$$

$$x_{23} = 0.21 + 0.269 \cdot \text{Cos}(41.465) = 0.4116$$

$$y_{21} = -0.02 + 0.269 \cdot \text{Sen}(176.146) = -0.0019$$

$$y_{22} = -0.02 + 0.269 \cdot \text{Sen}(90.173) = 0.249$$

$$y_{23} = -0.02 + 0.269 \cdot \text{Sen}(41.465) = 0.1581$$

$$L_{2a1} = \sqrt{[0.21 + 0.269 \cdot \text{Cos}(176.146)]^2 + [-0.02 + 0.269 \cdot \text{Sen}(176.146)]^2} = 0.0584$$

$$L_{2a2} = \sqrt{[0.21 + 0.269 \cdot \text{Cos}(90.173)]^2 + [-0.02 + 0.269 \cdot \text{Sen}(90.173)]^2} = 0.3252$$

$$L_{2a3} = \sqrt{[0.21 + 0.269 \cdot \text{Cos}(41.465)]^2 + [-0.02 + 0.269 \cdot \text{Sen}(41.465)]^2} = 0.4409$$

$$L_{1b1} = \sqrt{[0.21 - 0.278 \cdot \text{Cos}(169.484)]^2 + [0.02 + 0.278 \cdot \text{Sen}(169.484)]^2} = 0.4885$$

$$L_{1b2} = \sqrt{[0.21 - 0.278 \cdot \text{Cos}(88.621)]^2 + [0.02 + 0.278 \cdot \text{Sen}(88.621)]^2} = 0.3607$$

$$L_{1b3} = \sqrt{[0.21 - 0.278 \cdot \text{Cos}(36.48)]^2 + [0.02 + 0.278 \cdot \text{Sen}(36.48)]^2} = 0.1858$$

Resolvemos utilizando Mathcad.

## Síntesis de mecanismos: Síntesis de generación de trayectorias

Método: García de Jalón J. - Bayo E.

Datos

$$L0 := 0.21$$

$$X11 := -0.273$$

$$X12 := 0.006$$

$$X13 := 0.223$$

$$Xa := 0$$

$$Xb := 0.2$$

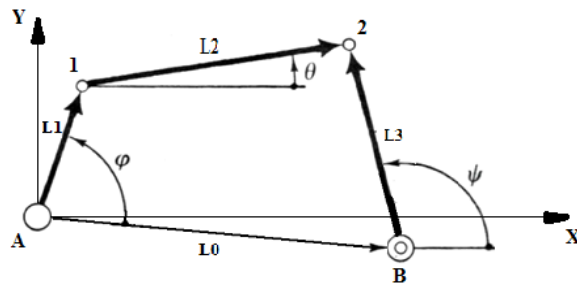
$$Y11 := -0.049$$

$$Y12 := 0.277$$

$$Y13 := 0.165$$

$$Ya := 0$$

$$Yb := -0.0$$



Ecuaciones

Given

$$(X11 - Xa)^2 + (Y11 - Ya)^2 - L1^2 = 0$$

$$(X12 - Xa)^2 + (Y12 - Ya)^2 - L1^2 = 0$$

$$(X13 - Xa)^2 + (Y13 - Ya)^2 - L1^2 = 0$$

$$(X11 - X21)^2 + (Y11 - Y21)^2 - L2^2 = 0$$

$$(X12 - X22)^2 + (Y12 - Y22)^2 - L2^2 = 0$$

$$(X13 - X23)^2 + (Y13 - Y23)^2 - L2^2 = 0$$

$$(X21 - Xb)^2 + (Y21 - Yb)^2 - L3^2 = 0$$

$$(X22 - Xb)^2 + (Y22 - Yb)^2 - L3^2 = 0$$

$$(X23 - Xb)^2 + (Y23 - Yb)^2 - L3^2 = 0$$

$$(X21 - Xa)^2 + (Y21 - Ya)^2 - (L2a1)^2 = 0$$

$$(X22 - Xa)^2 + (Y22 - Ya)^2 - (L2a2)^2 = 0$$

$$(X23 - Xa)^2 + (Y23 - Ya)^2 - (L2a3)^2 = 0$$

$$(X11 - Xb)^2 + (Y11 - Yb)^2 - (L1b1)^2 = 0$$

$$(X12 - Xb)^2 + (Y12 - Yb)^2 - (L1b2)^2 = 0$$

$$(X13 - Xb)^2 + (Y13 - Yb)^2 - (L1b3)^2 = 0$$

Iterantes iniciales:

$X21 := -0.058$        $X22 := 0.209$        $X23 := 0.411$   
 $Y21 := -0.001$        $Y22 := 0.24$        $Y23 := 0.158$   
 $L2a1 := 0.058$        $L2a2 := 0.325$        $L2a3 := 0.440$   
 $L1b1 := -0.488$        $L1b2 := 0.360$        $L1b3 := 0.185$   
 $L1 := 0.27$        $L2 := 0.20$        $L3 := 0.26$

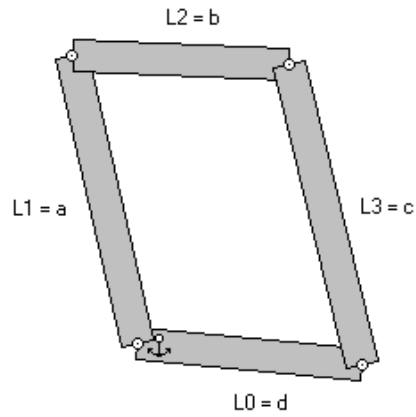
$V := \text{Find}(X21, X22, X23, Y21, Y22, Y23, L2a1, L2a2, L2a3, L1b1, L1b2, L1b3, L1, L2, L3) =$

	0
0	-0.076
1	0.204
2	0.421
3	-0.044
4	0.267
5	0.174
6	0.088
7	0.336
8	0.456
9	-0.484
10	0.361
11	0.186
12	0.278
13	0.198
14	0.287

El cuadrilátero resultante tendrá unas dimensiones:

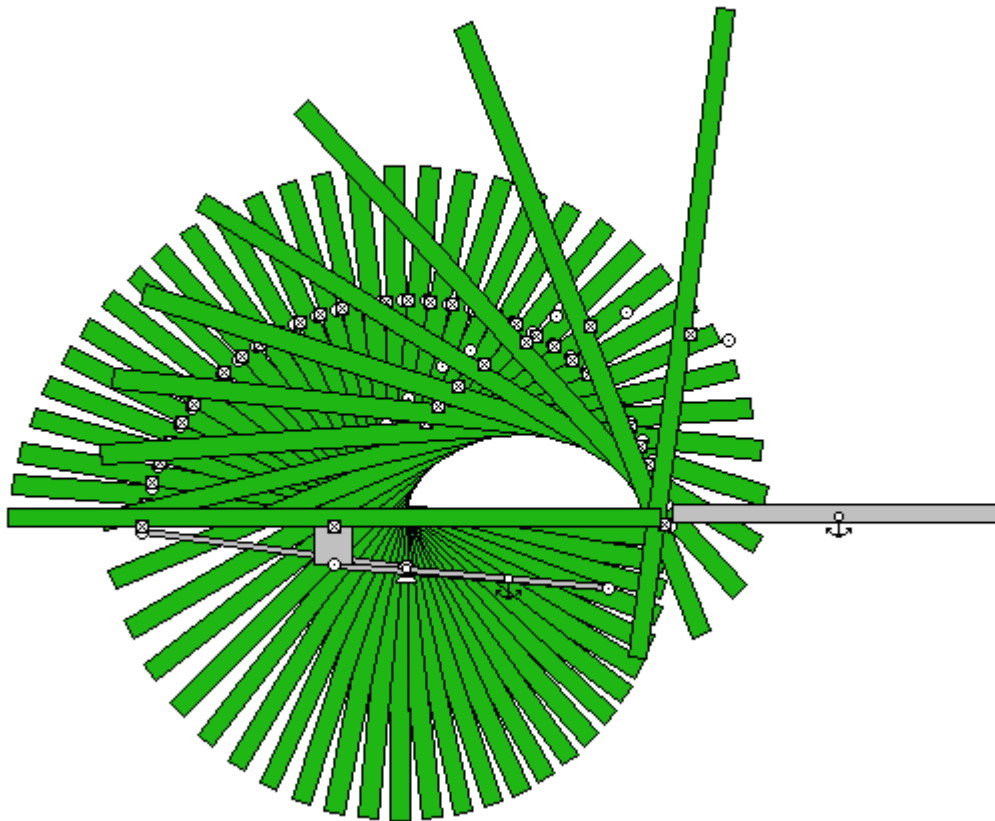
$$L1 = a = 0.278 \text{ m} \quad L2 = b = 0.198 \text{ m}$$

$$L3 = c = 0.287 \text{ m} \quad L0 = d = 0.211 \text{ m}$$

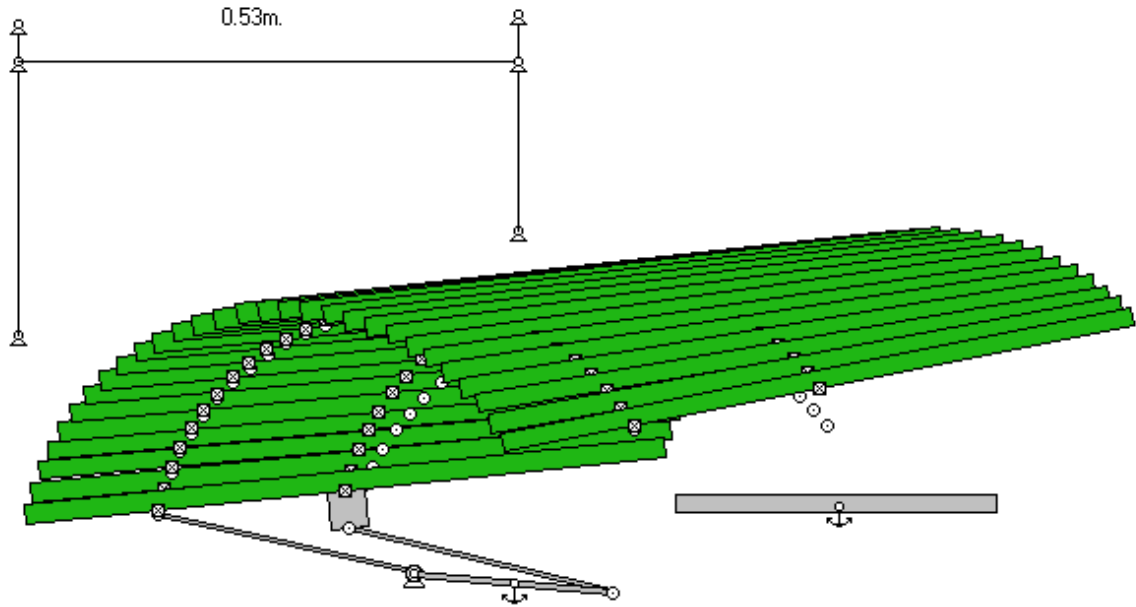


(Fig. 47)

Llevamos el mecanismo a “Working Model” y podemos comprobar que no es posible colocar horizontalmente la puerta en su estado inicial, si decidimos colocarlo de esa manera el movimiento que hace es erróneo (Fig.48) porque el mecanismo se encuentra en una posición inestable, en cambio si colocamos la puerta haciendo un pequeño ángulo inicial (Fig.49), esta se mueve de forma correcta aunque no tiene una apertura óptima.



(Fig.48)



(Fig.49)

Por lo tanto, como conclusión podemos decir que el método es bueno, aunque no el óptimo, además debemos acercarnos excesivamente al resultado final, para poder tener unos resultados coherentes, haciendo un estudio mayoritariamente de ensayo error.

En esta ocasión el barrido es bueno, la posición inicial de la puerta no es correcta pero la posición final si, este diseño es uno de los mejores.





## **6. ANÁLISIS DE LOS MÉTODOS VISTOS HASTA EL MOMENTO Y CONCLUSIONES ACERCA DE SU UTILIDAD EN LA SÍNTESES DE UN MECANISMO DE APERTURA DE PUERTAS EN AUTOBUSES:**

En lo que llevamos de proyecto, hemos visto varios métodos para la síntesis de mecanismos, y, posteriormente, hemos tratado de aplicarles para diseñar el mecanismo de apertura de puertas, objeto de nuestro trabajo.

En este apartado realizaremos un breve resumen sobre cada uno de ellos, indicando sus ventajas y desventajas, para finalmente proponer uno de ellos como el más adecuado para la síntesis de nuestro mecanismo.






Si recordamos, los métodos vistos hasta el momento son los siguientes:

- 1) Síntesis de generación de funciones:
  - a) Síntesis mediante las ecuaciones de Freudenstein:
    - i) Con tres puntos de precisión.
    - ii) Con cinco puntos de precisión.
  - b) Síntesis mediante métodos gráficos:
    - i) Método del polo:
      - (1) Un giro de la manivela.
    - ii) Método del polo relativo:
      - (1) Un giro de la manivela.
      - (2) Dos giros de la manivela.
    - iii) Método de la inversión:
      - (1) Un giro de la manivela.
      - (2) Dos giros de la manivela.
    - iv) Método de reducción de posiciones:
      - (1) Cuatro posiciones de las manivelas.

2) Síntesis de generación de trayectorias:

- a) Síntesis mediante el método propuesto por Jiménez, Álvarez, Cardenal y Cuadrado.

A continuación mostramos una tabla con una comparativa entre ellos, realizada en función del éxito obtenido al aplicarles en nuestro mecanismo de apertura de puertas.

MÉTODOS		Funcionamiento	Conformidad con la solución	Complejidad del método	
Generación de funciones	Análíticos	<p>Freudenstein</p>  <p>Con 3 ptos. de precisión Con 5 ptos. de precisión</p>	MEDIA BAJA	BAJA MEDIA	
	Gráficos	Método del polo	<p>Un giro de la manivela</p> 	BAJA	MEDIA
		Método del polo relativo	<p>Un giro de la manivela Dos giros de la manivela</p> 	BAJA BAJA	MEDIA ALTA
		Método de la inversión	<p>Un giro de la manivela Dos giros de la manivela</p> 	BAJA ALTA	MEDIA ALTA
		Método de reducción de posiciones	<p>Cuatro posiciones de la manivela</p> 	BAJA	ALTA
	Generación de trayectorias	Análíticos	Método de Jiménez, Álvarez, Cardenal y Cuadrado	MEDIA	ALTA

La primera conclusión que podemos sacar observando la tabla, es que, a la hora de diseñar nuestro mecanismo de apertura, los métodos analíticos estudiados presentan alguna ventaja más que los gráficos. Esto es debido principalmente a la elevada complejidad gráfica de los métodos expuestos (multitud de líneas que se cruzan, ángulos, etc.) y a la arbitrariedad de los parámetros elegidos en el estudio.

En cuanto a los métodos analíticos, si analizamos los dos estudiados, vemos que ofrecen resultados similares. El método de las ecuaciones de Freudenstein con tres puntos de precisión y el método de Jiménez, Álvarez, Cardenal y Cuadrado coinciden en dos de los campos estudiados: los dos funcionan correctamente y devuelven una solución cercana a la óptima, sin sobredimensionamiento de barras. Sin embargo, no son nada robustos ya que un mínimo cambio en los parámetros iniciales da soluciones muy dispares o incluso, si no converge, no da ninguna solución. La principal diferencia entre ellos es la dificultad que presenta cada uno.

En primer lugar, el método de Freudenstein es un método de generación de funciones mientras que el método de Jiménez, Álvarez, Cardenal y Cuadrado es un método de generación de trayectorias. Es más sencillo representar el comportamiento que queremos que tenga nuestro mecanismo de apertura de puertas mediante la introducción de valores angulares que por coordenadas. Esto es así porque lo único que sabemos sobre el mecanismo que queremos diseñar es el movimiento que queremos que realice; no necesitamos que las barras recorran una determinada trayectoria, ya que puede haber multitud de ellas que se comporten tal y como necesitamos.

Por eso, cuando usamos el método de generación de trayectorias en nuestro mecanismo, lo que en realidad hacemos es introducir en coordenadas los valores angulares utilizados en generación de funciones, suponiendo una longitud determinada para la primera barra.

Aparte de la dificultad añadida que supone utilizar en este caso un método de generación de trayectorias, el método de Jiménez, Álvarez, Cardenal y Cuadrado es más

difícil de plantear, ya que las ecuaciones a resolver no son fijas, sino que hay que deducirlas en función de las restricciones del mecanismo.

Por último, la resolución del sistema también es más compleja: aunque los dos devuelven sistemas de ecuaciones no lineales cuya resolución siempre presenta cierta complejidad, el sistema de Freudenstein tiene menor número de ecuaciones y de incógnitas.

En cuanto a los métodos gráficos, el problema que presentan son los puntos de precisión. La mayoría de los métodos gráficos que hemos intentado fallan cuando tomamos sólo un punto de precisión (un giro de la manivela).

En los casos en los que hemos empleado más puntos de precisión, los métodos mejoran devolviendo soluciones funcionales, aunque la mayoría de las veces alejadas de la solución óptima, presentando sobredimensionamiento de las barras en múltiples casos.

Aunque un aumento aún mayor de los puntos de precisión puede darnos soluciones más cercanas al resultado deseado, la mayoría de los métodos estudiados no admiten dicho aumento, o lo hacen pero convirtiéndose en métodos aún más complejos y difíciles de realizar; aunque el método de la inversión nos da un resultado realmente favorable.

Así, después de analizar los distintos métodos estudiados, concluimos que el más adecuado para realizar el diseño del mecanismo de apertura de puertas es el “Método gráfico de la inversión con dos giros de la manivela”. Por lo tanto, el mecanismo obtenido por éste método será el que tomaremos como referencia para su optimización de aquí en adelante.

Concluimos también que, para el diseño de mecanismos más complejos que el estudiado aquí, el método más adecuado probablemente sea el método de Jiménez, Álvarez, Cardenal y Cuadrado, debido a su versatilidad, ventaja que no presentan las ecuaciones Freudenstein, válidas solo para cuadriláteros.

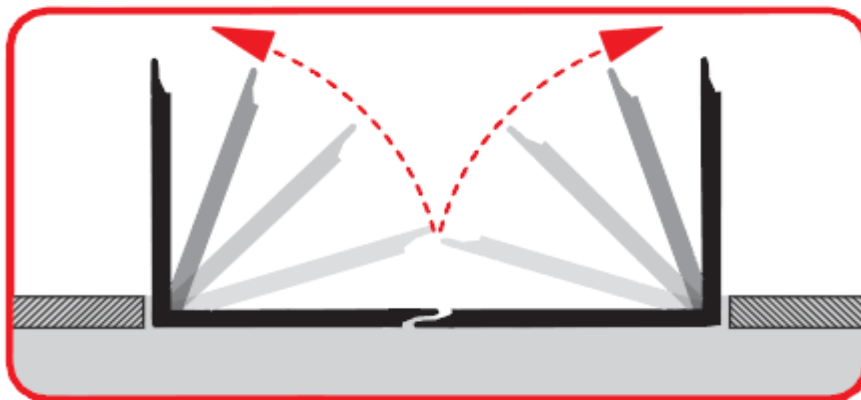


## **7. DISEÑO DE UN MECANISMO DE APERTURA DE PUERTA DE UN AUTOBÚS MEDIANTE SIMULACIÓN EN WORKING MODEL:**

En este apartado, nos ayudamos del software de simulación Working Model para estudiar distintos diseños para el mecanismo de la puerta de un autobús.

El primer modelo a estudio en working model fue el llamado Swing, este, según su geometría y forma, lo encontramos poco en los vehículos actuales de transporte de pasajeros, tienen gran uso en furgonetas y camionetas de transporte de mercancías, aunque cada vez más están siendo sustituidas por mecanismos algo más complicados que veremos más adelante, el caso que nos trata, puede ser visto en salidas de emergencia de grandes autobuses, pero sobre todo en salidas de emergencias y salidas traseras de autobuses de pequeña capacidad.

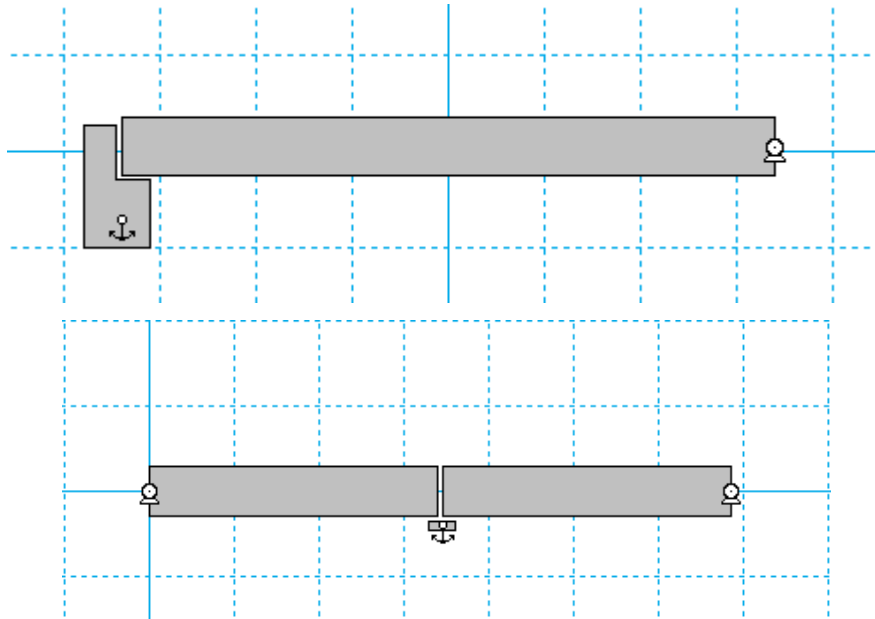
Tiene una geometría muy simple, podría ser un mecanismo automático y manual a la vez si combináramos el motor con un sistema de “embrague” que permita una apertura manual. En situaciones de emergencia, abrir la puerta es una operación muy sencilla, aunque la altura y anchura y peso de la puerta pueden provocar golpes debido a su arco de recorrido en la apertura y cierre.



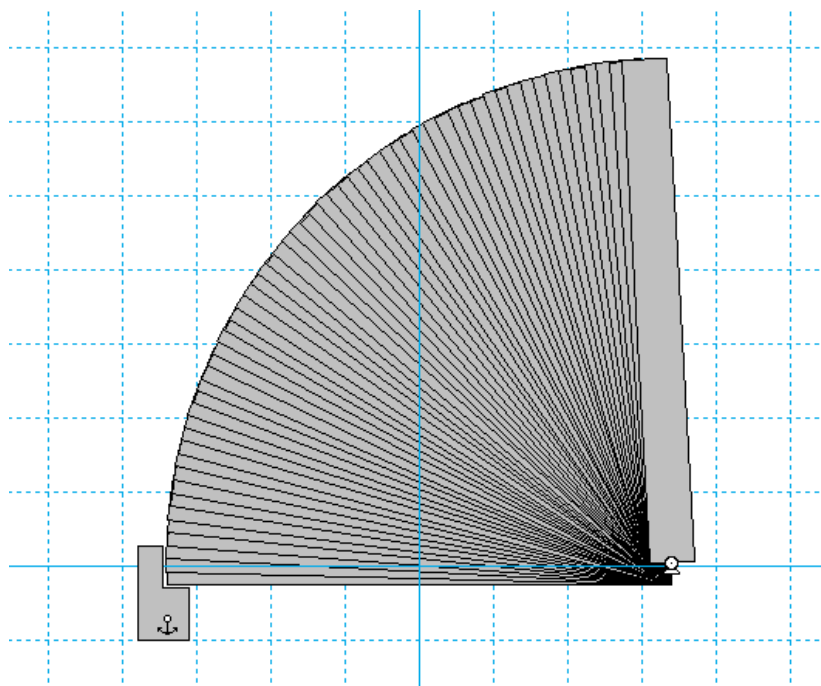
Para puertas de aproximadamente 68cm de ancho, es posible dos diseños (de 1 única puerta o de 2 puertas).

En cuanto a la puerta única, consiste en una única barra de 68cm de largo y 6cm de ancho (figura de color grisáceo), en el que un extremo está fijado y tiene un motor

(figura en color blanco) que hace que la puerta gire produciendo un arco sencillo hasta su posición final. La apariencia inicial del mecanismo es extremadamente sencilla como puede verse en las siguientes imágenes.

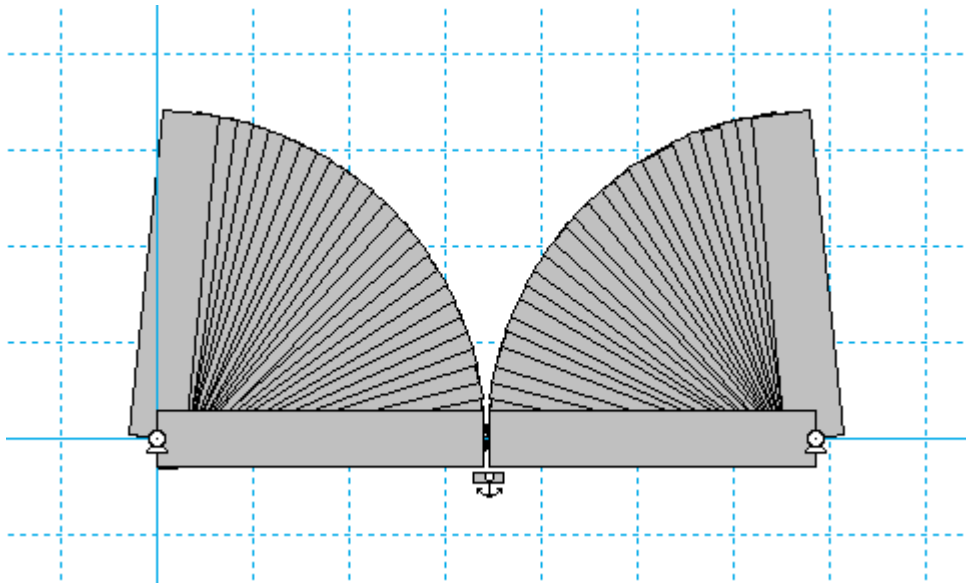


Sabemos que su mecanismo es sencillo pero su recorrido en el proceso de apertura produce un barrido demasiado amplio que no nos podemos permitir para un autobús de uso continuo y en el que debemos dejar a los pasajeros en una zona de aparcamientos, paradas de bus, etc.

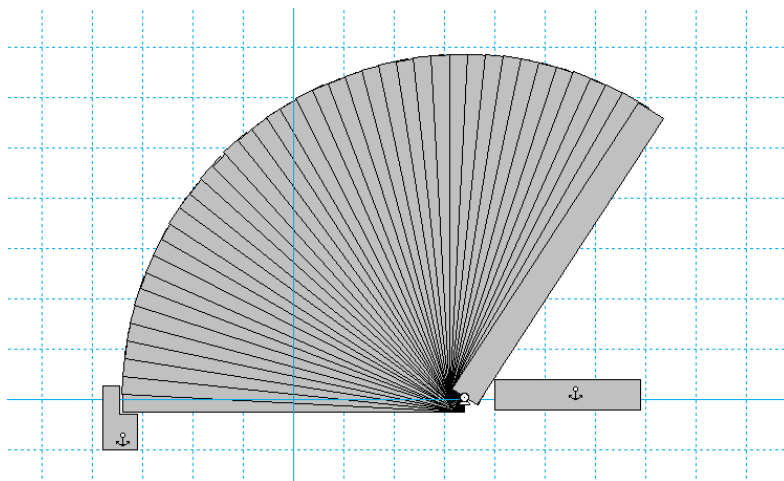
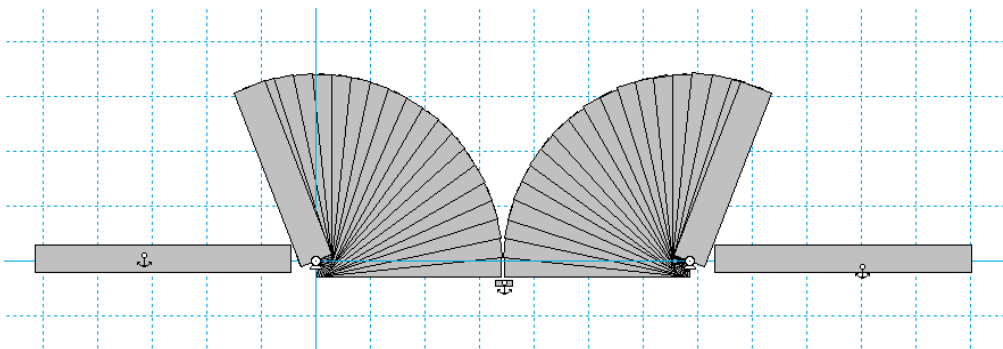




Para el caso de las 2 puertas, el arco será menor debido a la menor longitud de las barras (puertas) que serán de 34cm cada una, también serán necesarios o 2 motor o un motor propulsor y una cadena, engranaje u otro sistema que enlace los 2 giros.



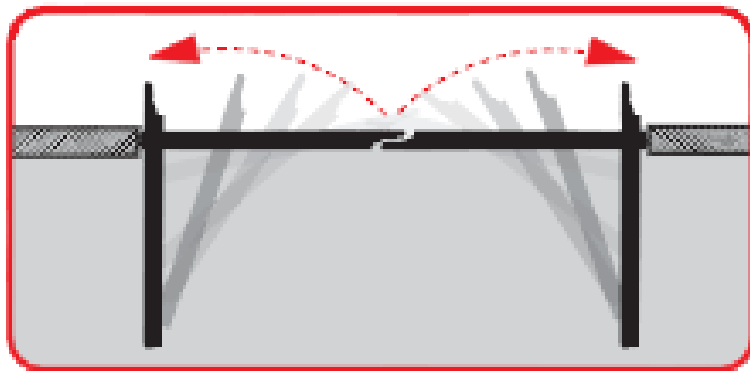
Estos dos mecanismos pueden tener un ángulo de apertura mucho mayor como podemos ver a continuación.



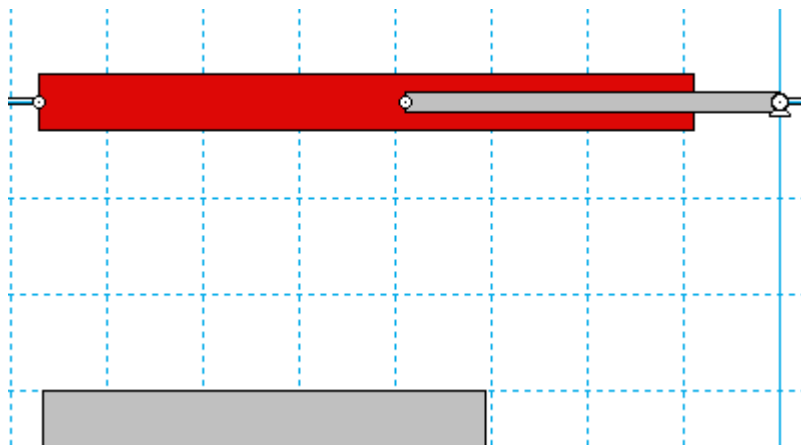
Según continuamos el estudio, se van presentando las posibles soluciones que se fueron planteando, en principio sobre papel y después son dibujadas en el programa Working Model.

Se podrá comprobar que muchas de ellas eran soluciones que aunque pudiendo funcionar son complicadas en su diseño, pero es parte de síntesis de mecanismos el tener que idear y plantear posibles soluciones y quedarnos al final con la más aconsejable.

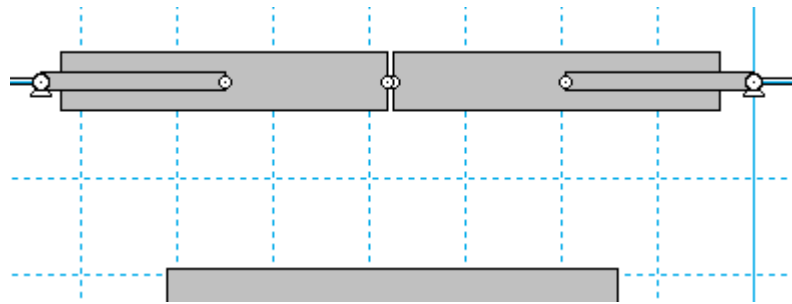
Siguiendo el estudio, nos encontramos con un tipo de mecanismo de puerta plegable.



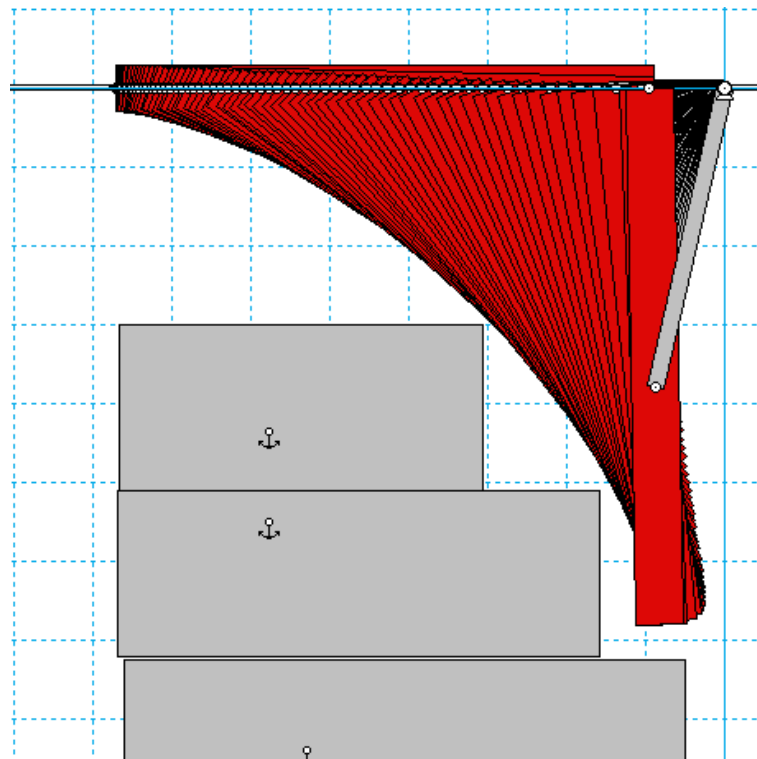
Comúnmente este diseño es llamado slide glide (corredera de deslizamiento), uno de sus puntos, principalmente el más centrado en el caso de puerta doble, se desliza a través de una guía a lo largo del borde de la puerta. En todos nuestros ejemplos serán puertas de 68cm para los de puerta única y de 34cm para los de puerta doble.



Puerta unica

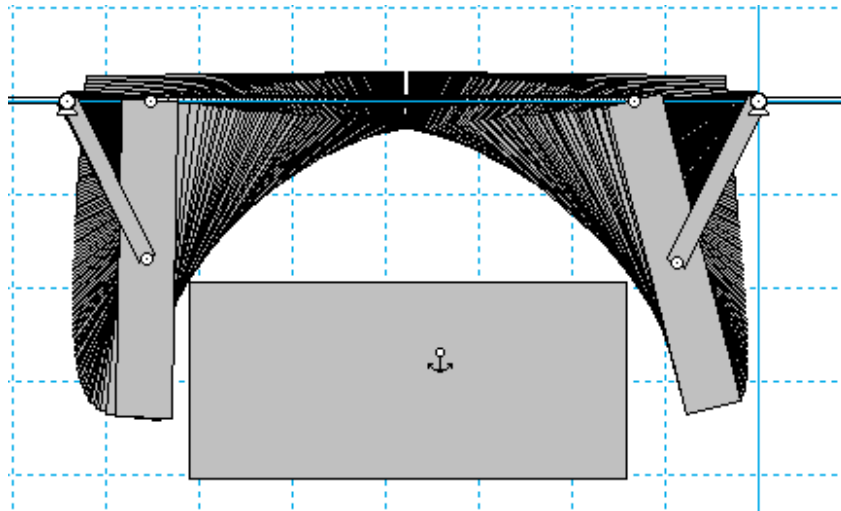


Puerta doble



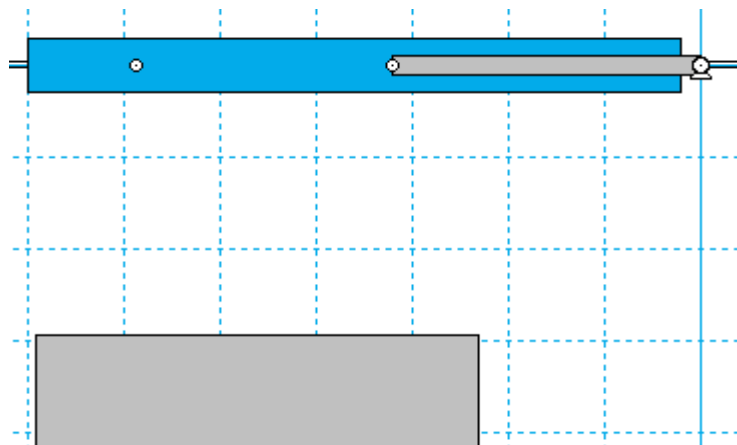
Para la imagen anterior surgen bastantes inconvenientes que hacen que esta no sea la solución factible, en primer lugar el área barrida por la puerta es demasiado amplia lo que hace que se necesite un diseño especial de las escaleras para que estas no sean golpeadas por la puerta, esto hace que los pasajeros no tengan la seguridad apropiada, ya que pueden meter el pie por el agujero y sufrir una lesión o golpe. También debemos dejar un hueco determinado para poder situar la puerta cuando esta esté abierta y debido a que la puerta es de 68cm, este ancho se ve reducido ya que la puerta ocupa lugar en el paso de los pasajeros.

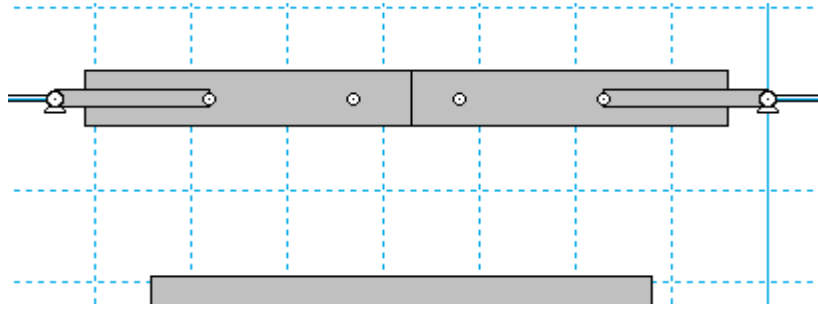
Si nos fijamos en la puerta doble, se soluciona algún que otro inconveniente pero surgen otros.



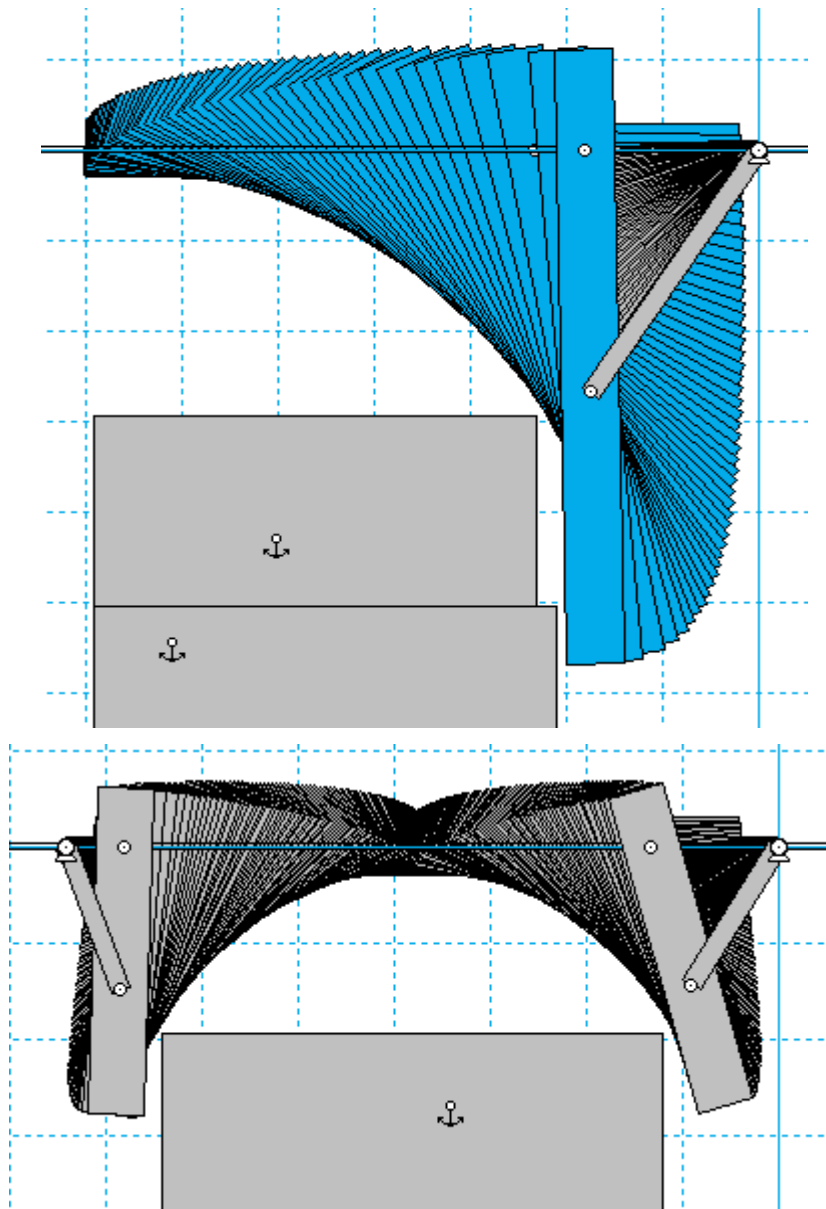
El área barrida y el hueco necesario para alojar la puerta van a ser menor que en el caso anterior, pero la escalera debe sufrir unos cortes a ambos lados pudiendo aumentar su peligrosidad para los pasajeros, además al 2 en lugar de 1 puerta los 68cm se reducen aún más dejando un paso de pasajeros mucho más pequeño.

Si en lugar de poner el punto de deslizamiento de la puerta en su extremo le ponemos un poco más centrado, nos permite agrandar el escalón porque el barrido se reduce, pero por otro lado, la puerta sale unos centímetros fuera del autobús.



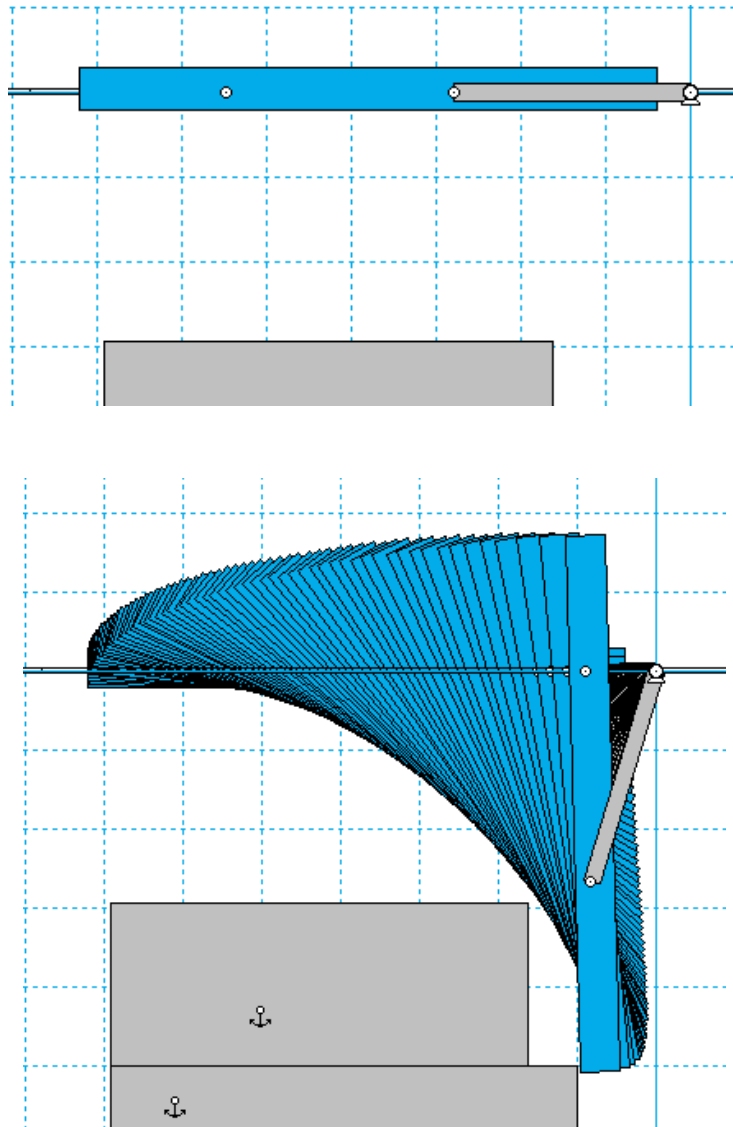


Realizarían este barrido.

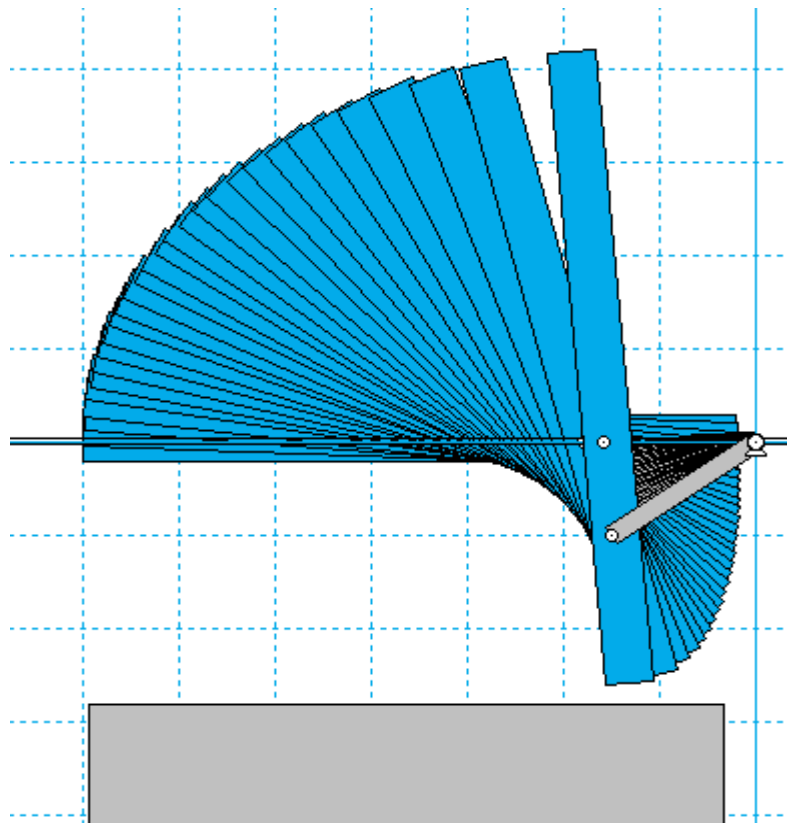
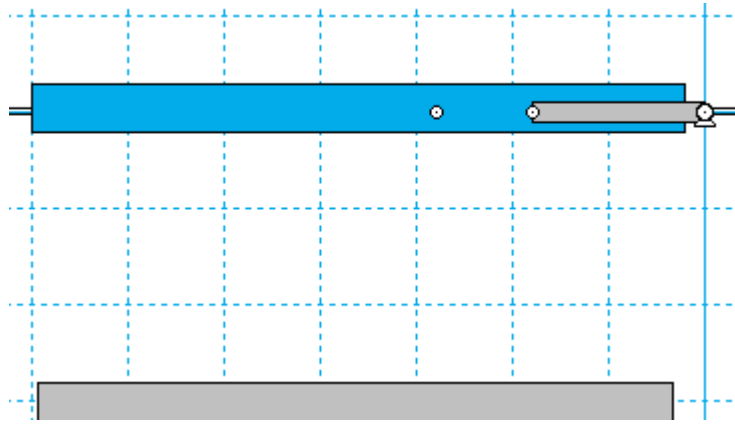


Cuanto más centrado pongamos el punto de deslizamiento de la puerta, menor arco de barrido lograremos pero a la vez, mayor porcentaje de puerta saldrá hacia el

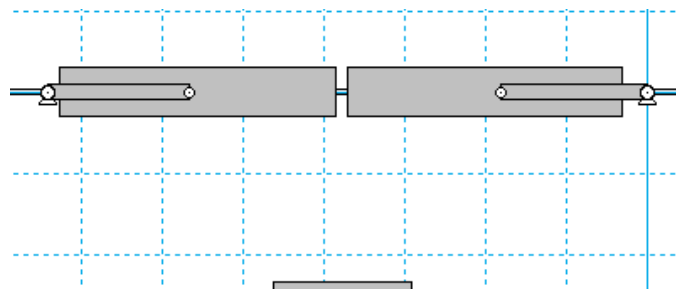
exterior, y este era uno de los puntos importantes que conseguía este mecanismo. Como se puede haber visto, según vamos moviendo el punto de deslizamiento las barras de giro (figura inferior en gris) también las hemos de ir reduciendo para que la puerta quede en un ángulo adecuado para el tránsito de pasajeros.

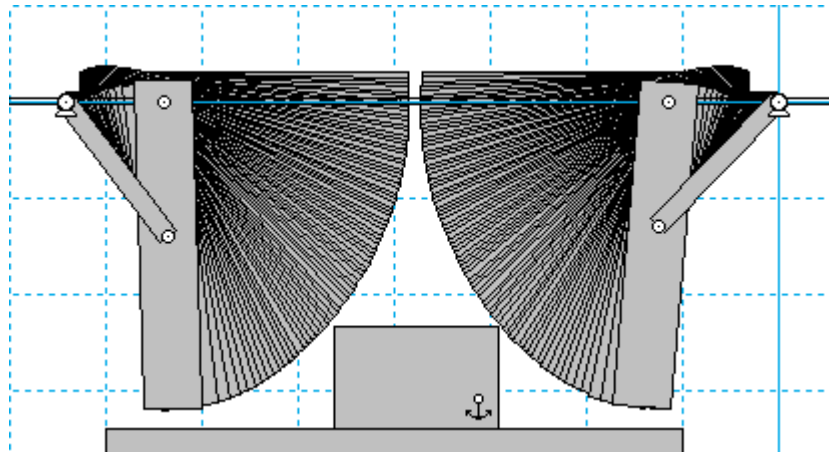


Hay un momento que el problema de la seguridad con el escalón y del hueco para situar la escalera se eliminan, pero aumenta exponencialmente el inconveniente de tener la puerta muchos centímetros fuera de la carrocería del autobús.

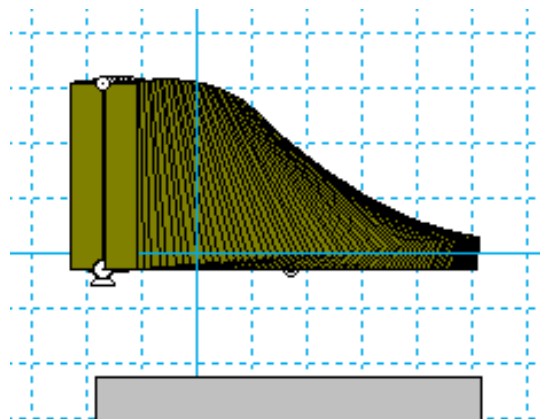
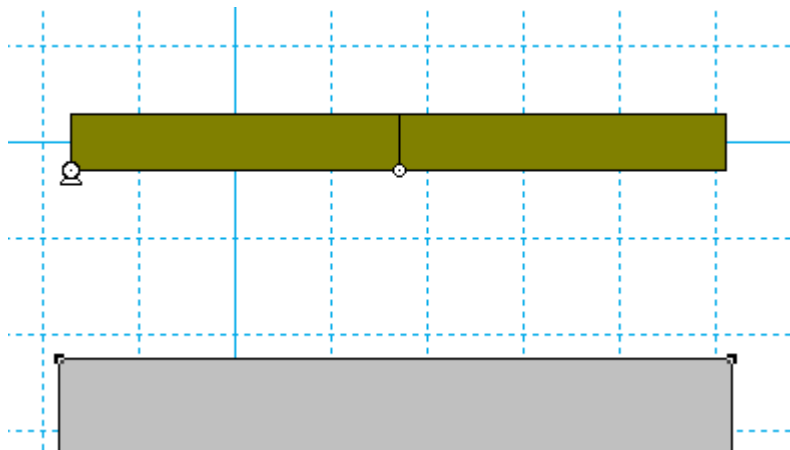


La posibilidad de poner el punto de deslizamiento de la puerta en el extremo hace que el barrido sea el mayor de todos, dejando el primer escalón prácticamente inexistente.



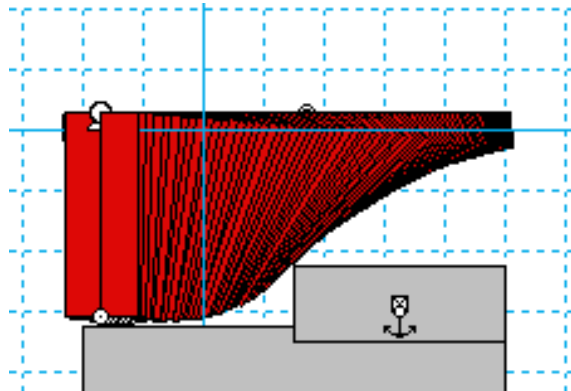
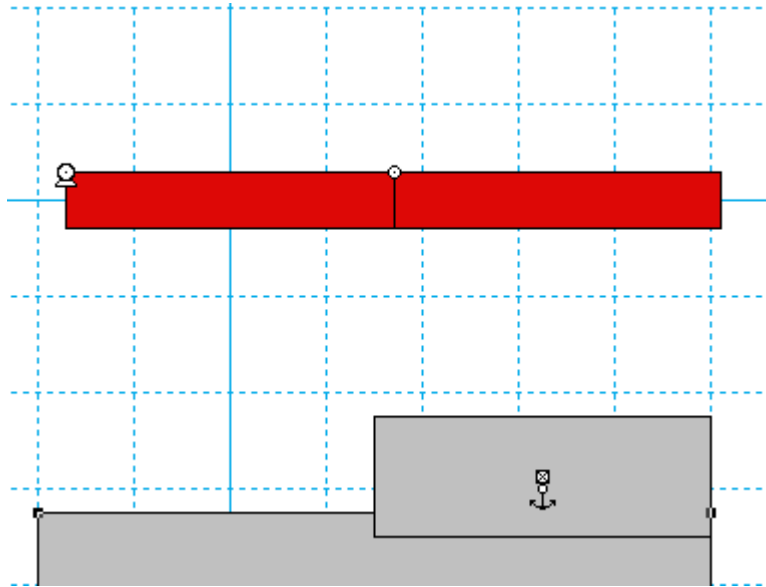


Hay muchos más modelos que podemos utilizar mezclando estos dos conceptos.

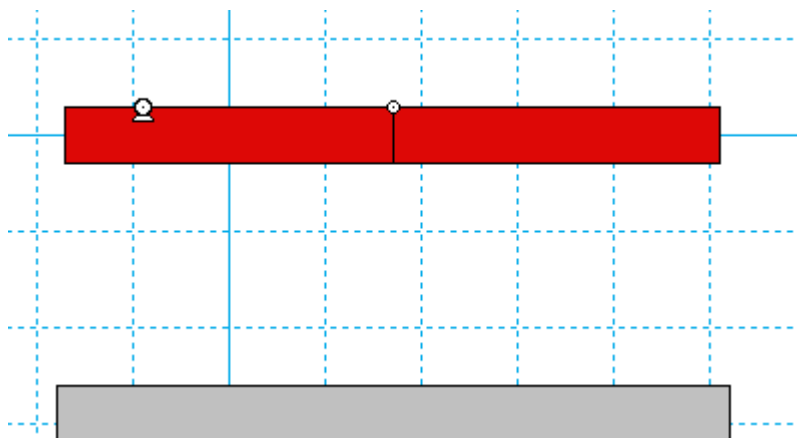


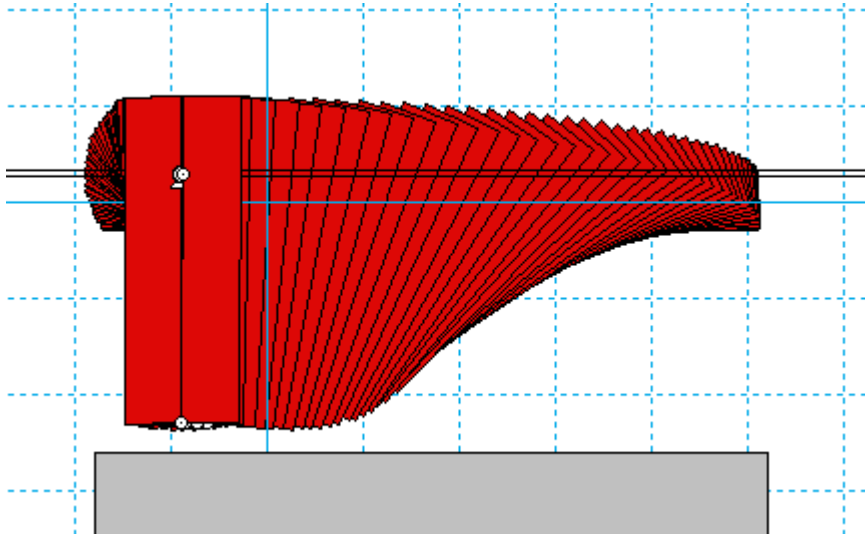
Este mecanismo deja aproximadamente 30 cm. fuera del vehículo, la corredera es un mecanismo que necesita un mantenimiento determinado, además por juntarse las partes interiores es imposible colocar unos agarraderos para ayudar a acceder a los pasajeros, esto se puede solucionar, haciendo que la puerta se meta en el vehículo.



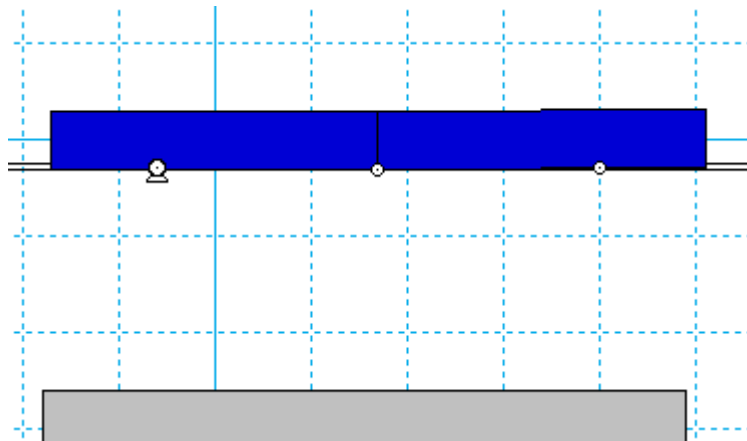


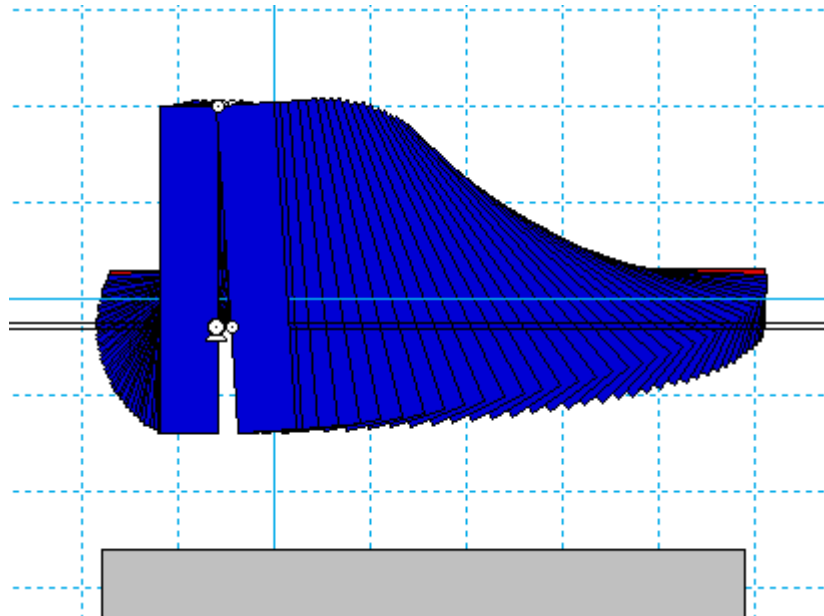
Podemos reducir el barrido interior, a favor del barrido exterior, así el primer escalón puede construirse sin rebajes.





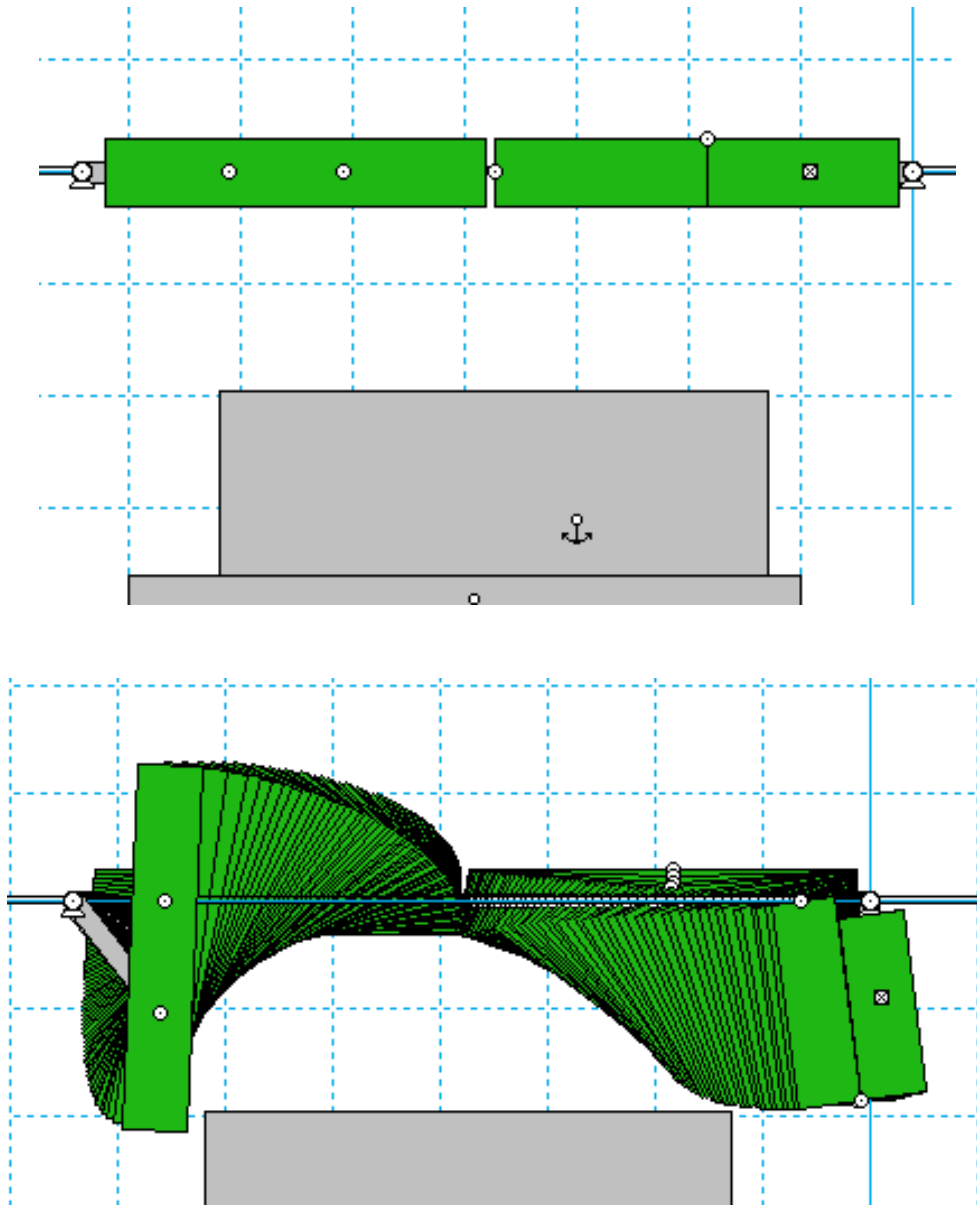
De la misma manera que podemos recortar el barrido interior, en el mecanismo anterior podemos recortar el barrido exterior.



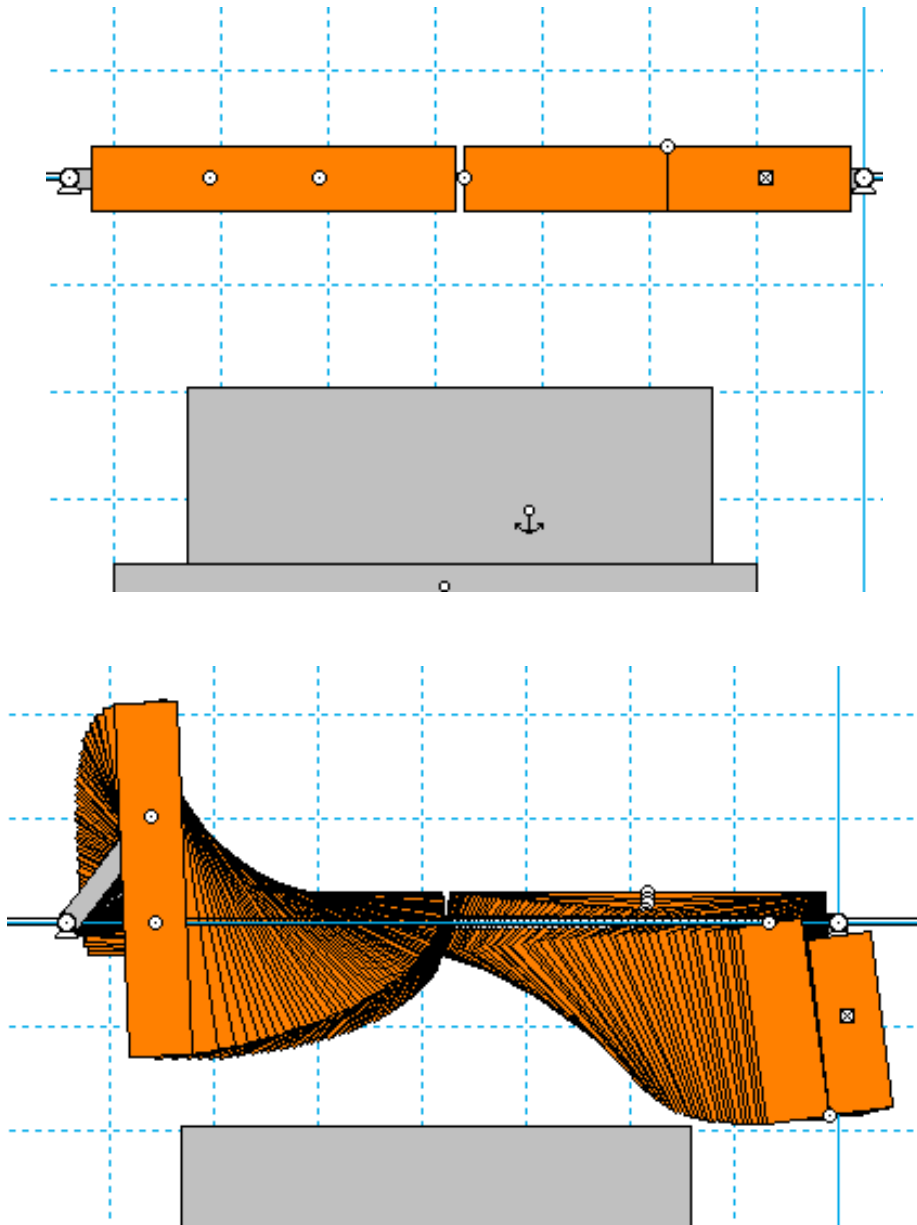


Se ve claramente el inconveniente de este tipo de diseños y es la reducción de paso de los pasajeros, ya que la puerta no queda pegada a un extremos sino más centrada. Los diseños vistos anteriormente tienen un aspecto adecuado, pero los siguientes provocarán posiblemente un aspecto no adecuado al vehículo, la puerta se compone de 3 piezas de diferente tamaño que hacen determinados movimientos.

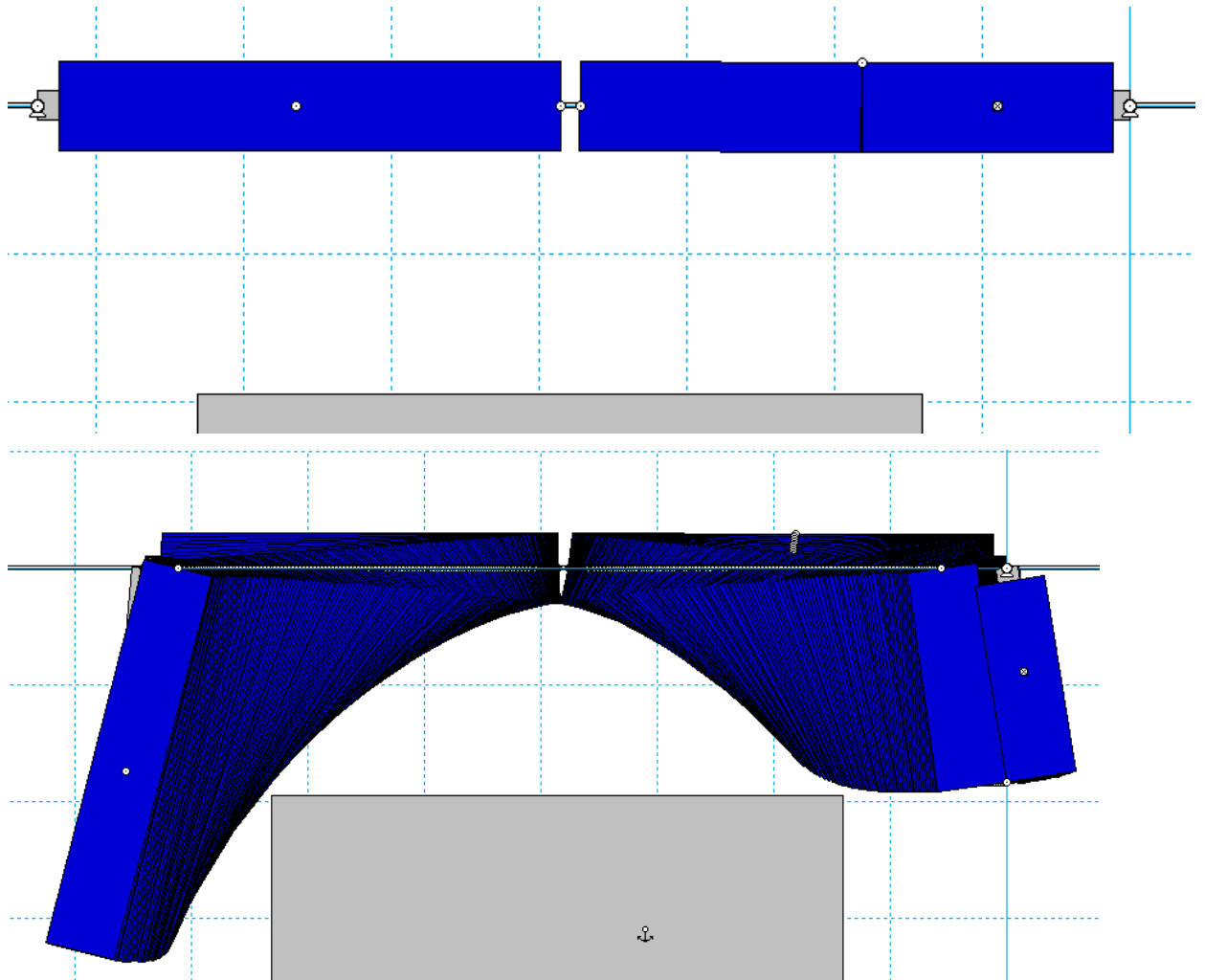
Comenzamos con la puerta grande y la doble puerta pequeña unida para dentro. Corremos el peligro de que los pasajeros sufran algún tipo de accidente debido a que las escaleras deben tener chaflanes para encajar las puertas. El punto de giro de la puerta grande se hace en un punto intermedio. En la puerta doble está en el extremo.



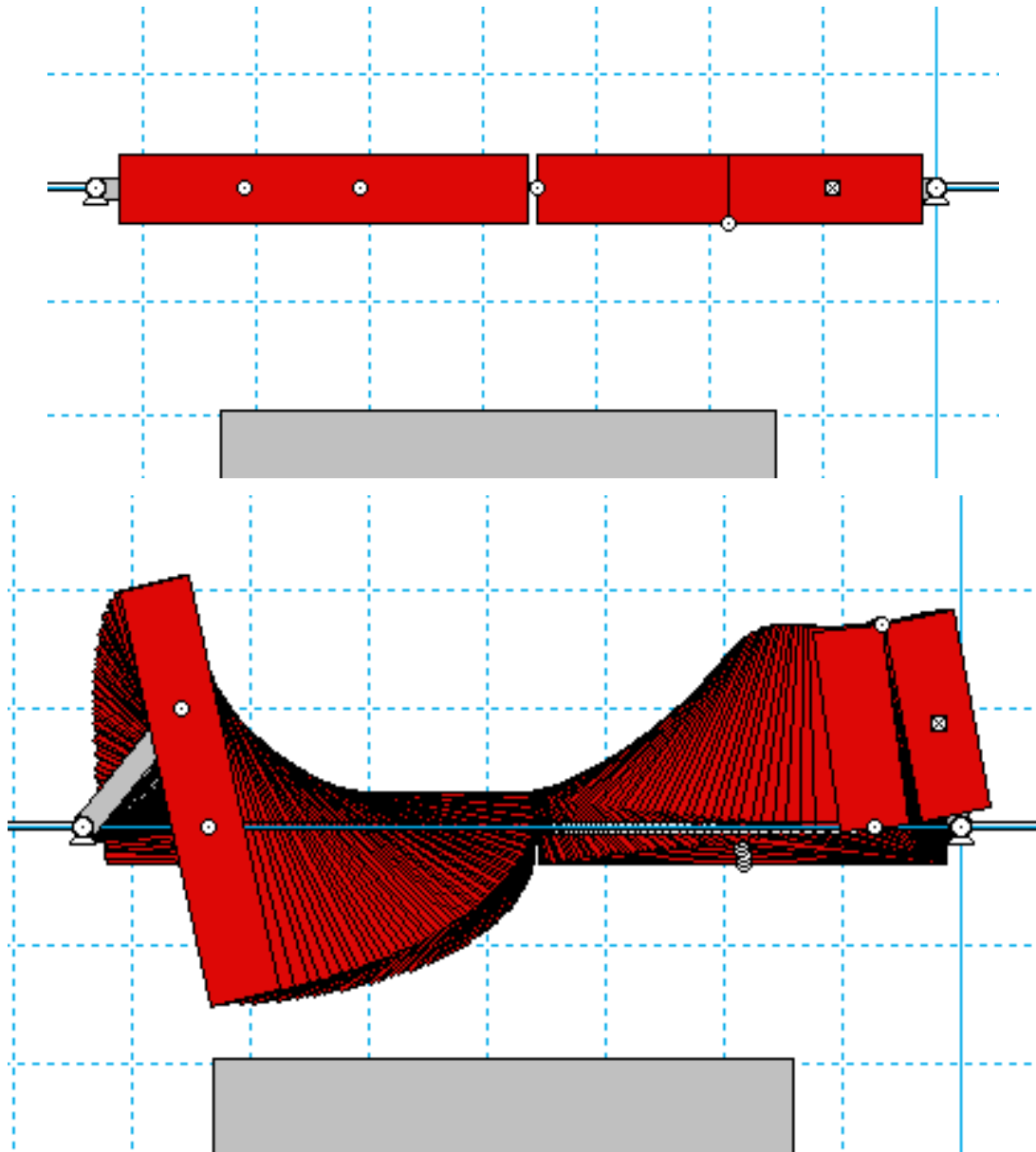
La puerta grande hacia fuera y la doble puerta para dentro, en este caso sobresale en exceso la puerta grande. El punto de deslizamiento de la puerta grande está centrado. En la puerta doble está en el extremo.



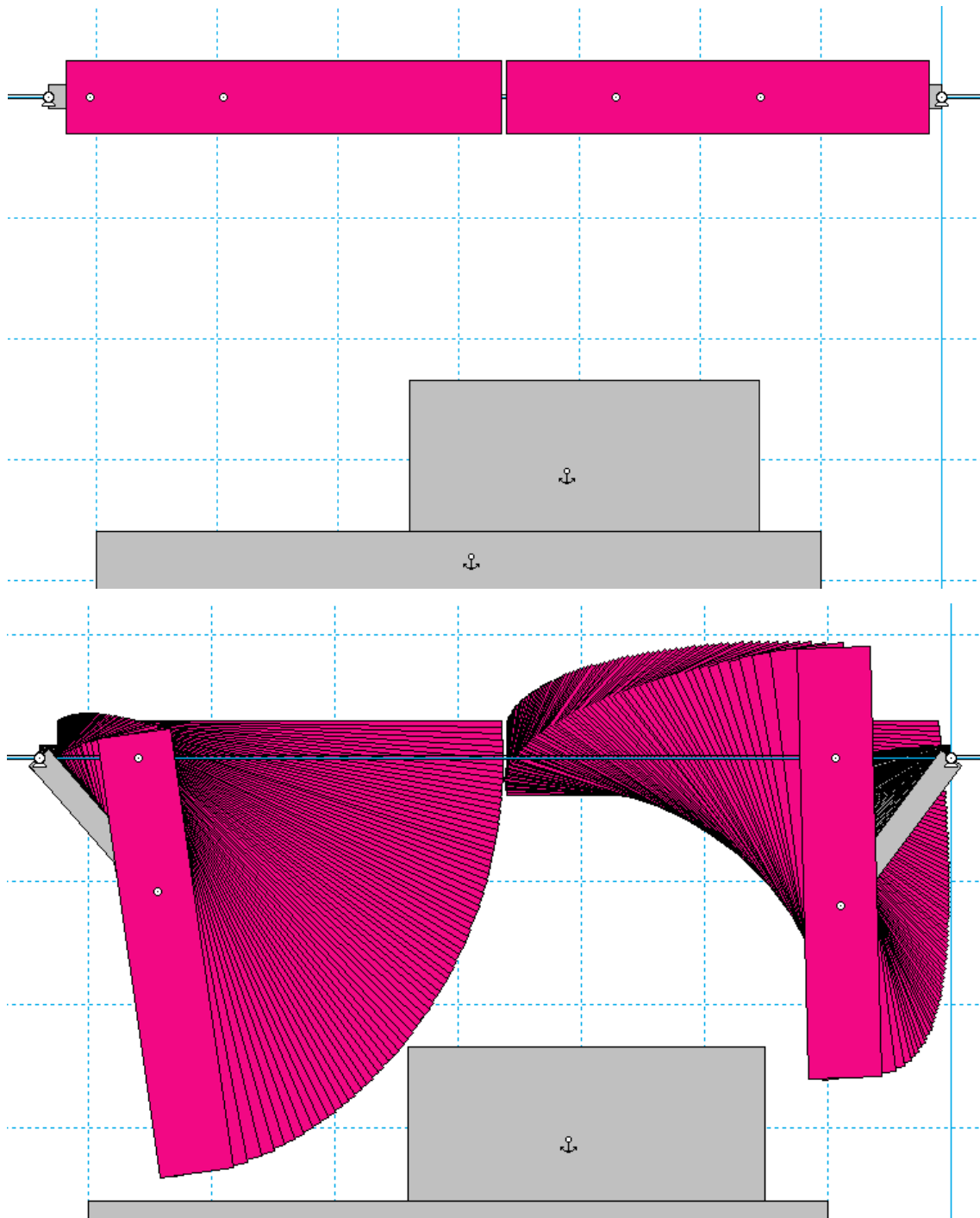
La puerta grande se mete hacia dentro del vehículo con el punto de deslizamiento en el extremo, de la misma manera que sucede en la puerta doble.



La puerta doble sale hacia el exterior y como la puerta grande también sale al exterior, para evitar que salga en exceso, el punto de deslizamiento está muy centrado para, en oposición a la puerta doble que está en el extremo.

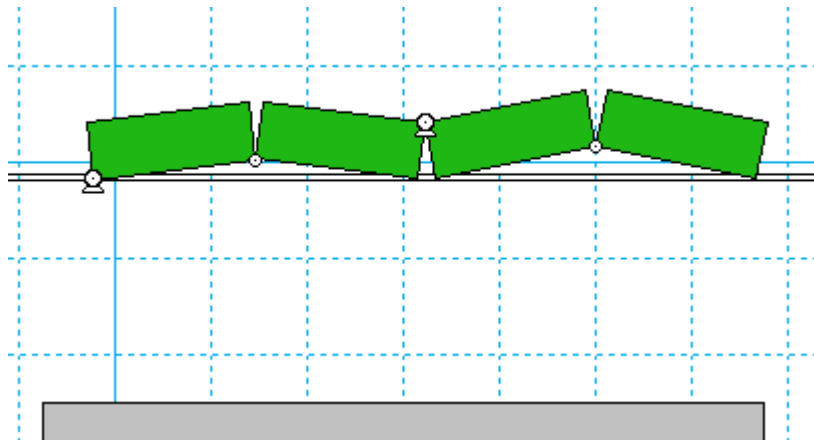


Todos estos mecanismos son excesivamente complicados y caros y producen un mal aspecto al vehículo desde el exterior. Volvemos al mecanismo de dos piezas para descartar este tipo de diseño porque duplican los inconvenientes de mecanismos anteriores. Una de las puertas tiene el punto de deslizamiento en un extremo que abre la puerta hacia dentro prácticamente como si fuese una bisagra. Y la otra puerta se abre hacia dentro pero teniendo el punto de deslizamiento más cerca de otro extremo.

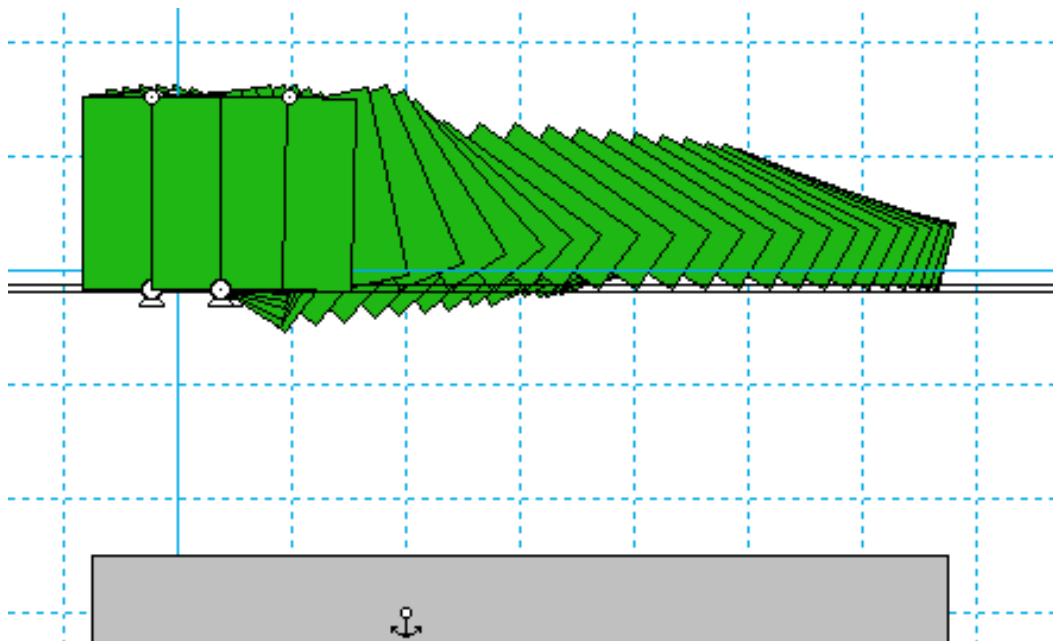


Un mecanismo como el que viene a continuación compuesto de 4 hojas, se encoge y se estira como un acordeón, está compuesto de 2 motores, uno en su extremo y otro en el medio. Para dar par motor al eje central debemos combinar en su interior otro mecanismo que permita dar este par mientras se desplaza el eje.



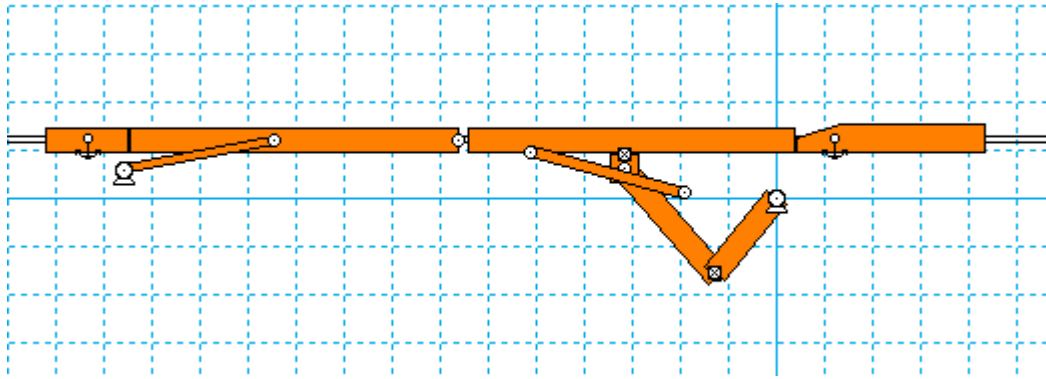


Una puerta de 68cm de ancho compuesto de 4 hojas son excesivas hojas para una medida tan corta, de forma visual, su aspecto es feo. Además se puede abrir, pero a la hora de cerrar puede haber algún que otro problema.

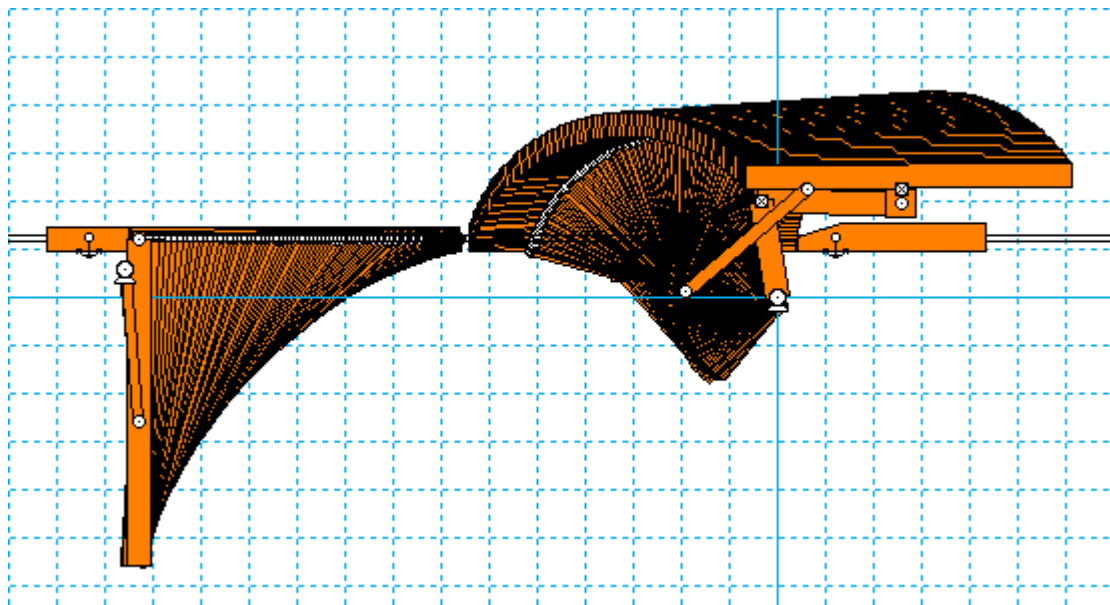


Después de estos mecanismos, damos paso a otros diseños dentro de los cuales, está incluido un diseño similar al elegido finalmente, aunque no solo está presente este diseño sino que es solo parte del mecanismo completo.

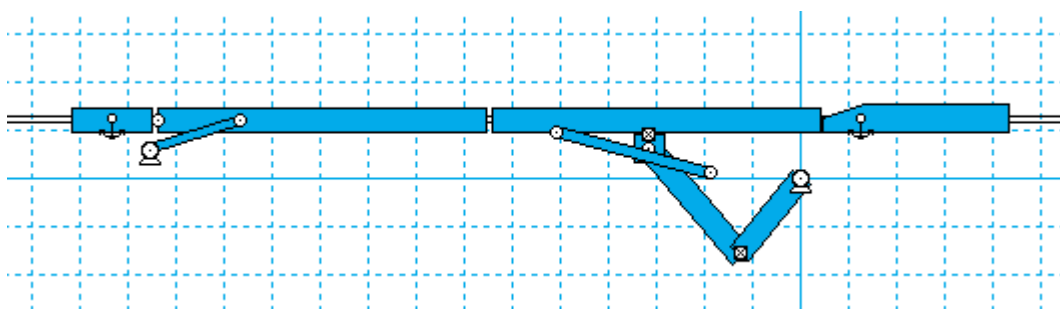
Uno de los más bonitos estéticamente es el siguiente, se componen los mecanismos Slide Guide y Parallelogram Plug.



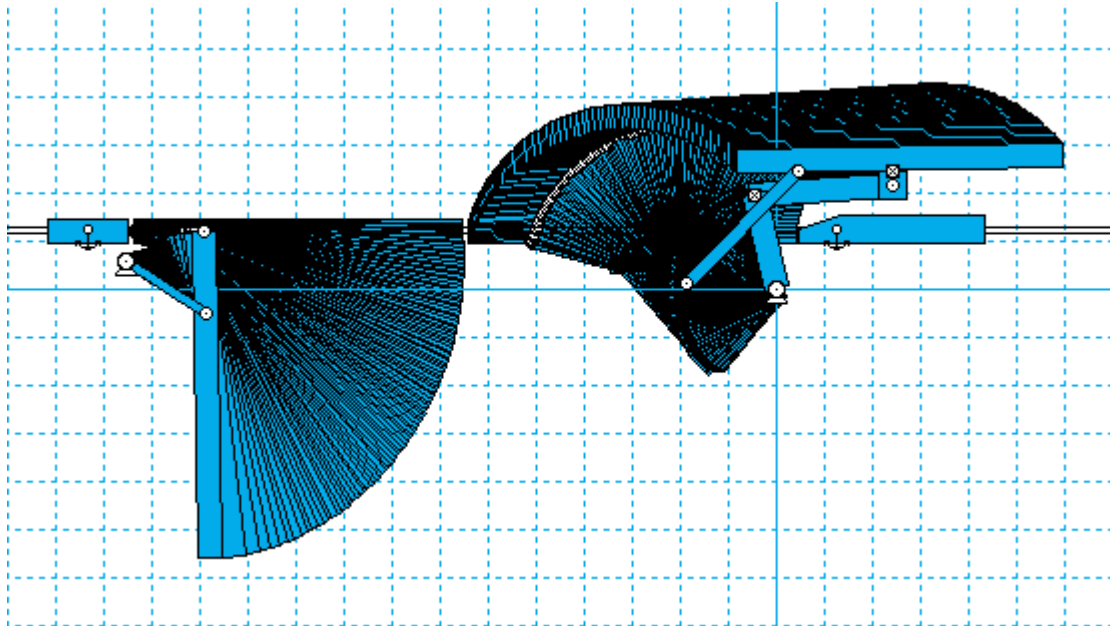
A pesar de ello, simultanean inconvenientes, como el de introducir una barra angular que ocupa espacio dentro del vehículo cuando la puerta está cerrada y también ocupa espacio la otra puerta pero cuando el mecanismo está abierto, en este último aspecto y en algún caso para el primer inconveniente, provoca rebajes en las escaleras interiores.



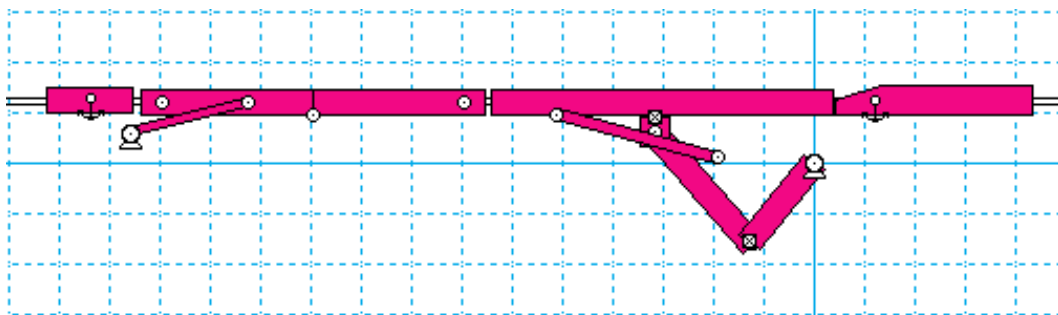
En el diseño de color azul siguiente, desde fuera, el diseño puede parecer igual al anterior, pero una vez que el mecanismo actúa se pueden ver las diferencias



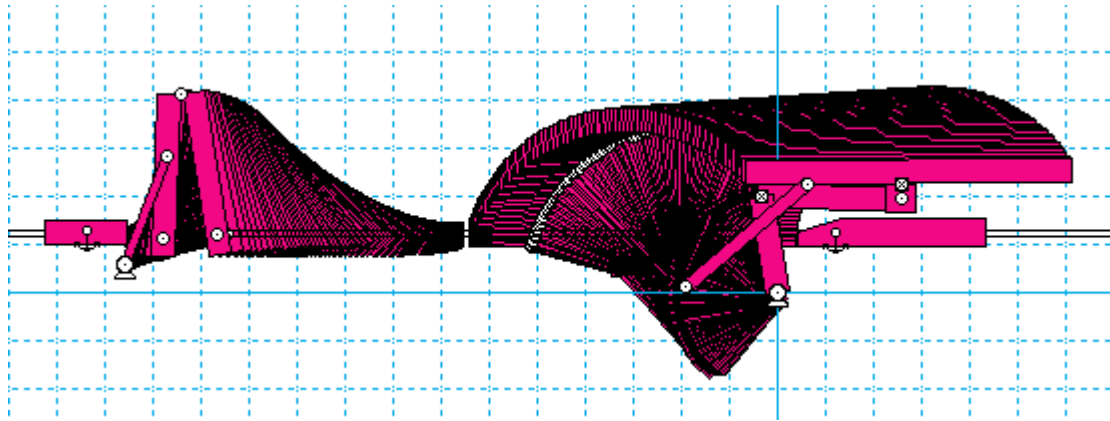
Se añade el problema de que el barrido de la puerta izquierda es mucho mayor provocando que no haya nada en ese espacio.



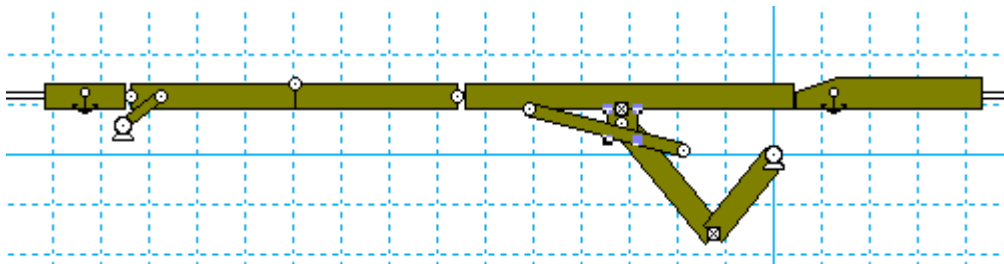
Tanto en el mecanismo rosa que se muestra a continuación como en el verde pistacho siguiente, el aspecto exterior no es adecuado, ya que, está compuesto de 3 hojas irregulares para un ancho de escasos 68cm, en un primer momento no es bonito estéticamente.



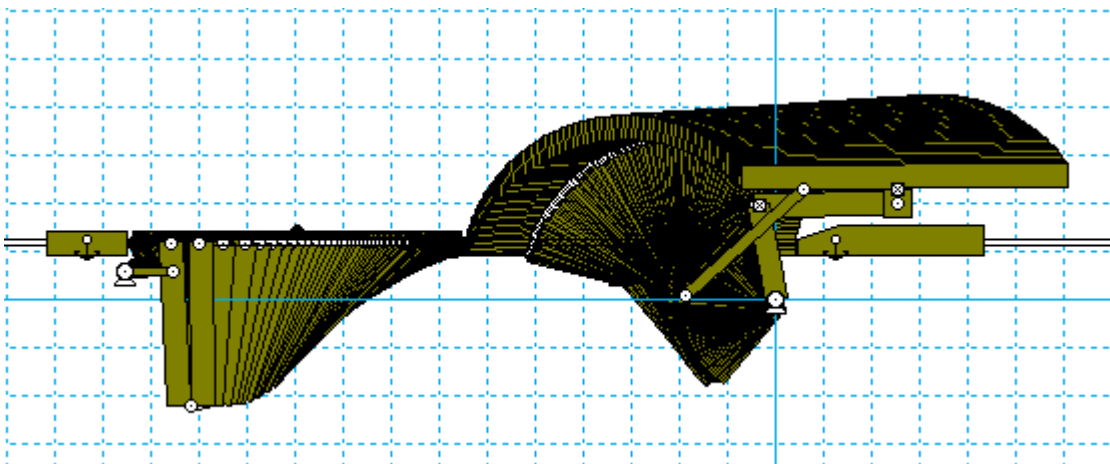
Para esta opción no tendríamos la posibilidad de colocar el retrovisor en la puerta, sino en otra parte de la carrocería.



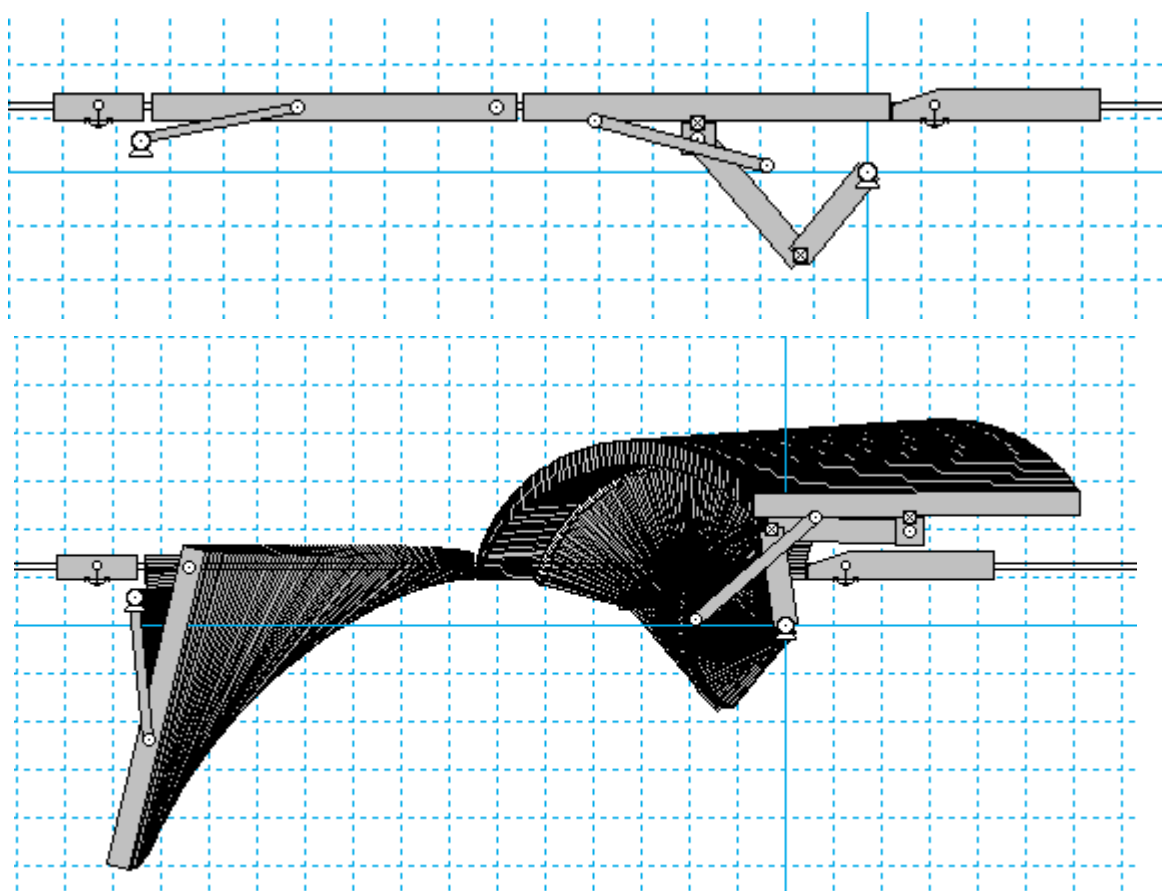
Es el mismo mecanismo anterior, variando las longitudes de barra y los puntos de unión, de giro y de desplazamiento.



Al introducir la puerta doble se crea un barrido más pequeño pero menos estético y más sucio, porque una corredera necesita un engrase y puede provocar, en un caso extremo, ensuciar la vestimenta de los pasajeros.



Este último diseño es similar al primer diseño compuesto de un Parallelogram Plug y Slide Guide pero con los puntos de deslizamiento un poco más centrados. Tienen los mismos inconvenientes que aquel, aunque puede que un poco menos acentuados.

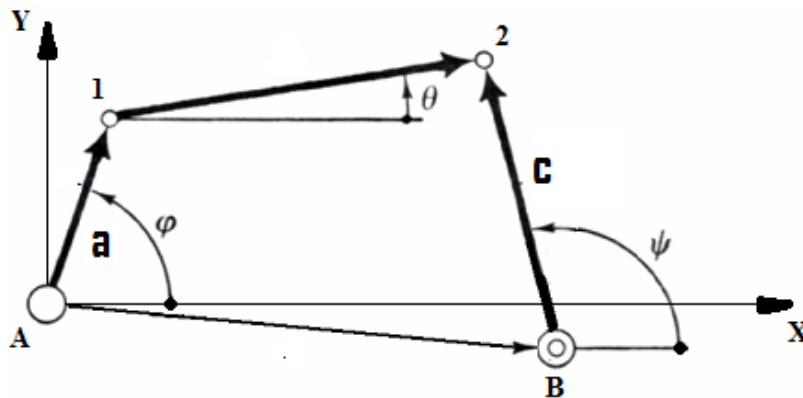




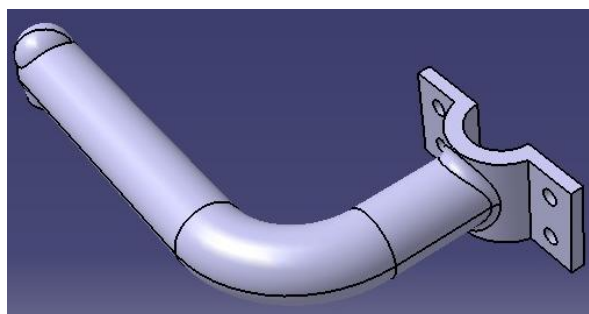
## **8. RESISTENCIA ESTRUCTURAL DEL MECANISMO DE APERTURA DE PUERTAS:**

El estudio estructural del mecanismo debería tener varias fases: estudio estático, estudio cinemático y estudio dinámico. Los dos últimos estudios y el estudio detallado del primero los dejaremos para un proyecto a parte como líneas de investigación y profundización futuras.

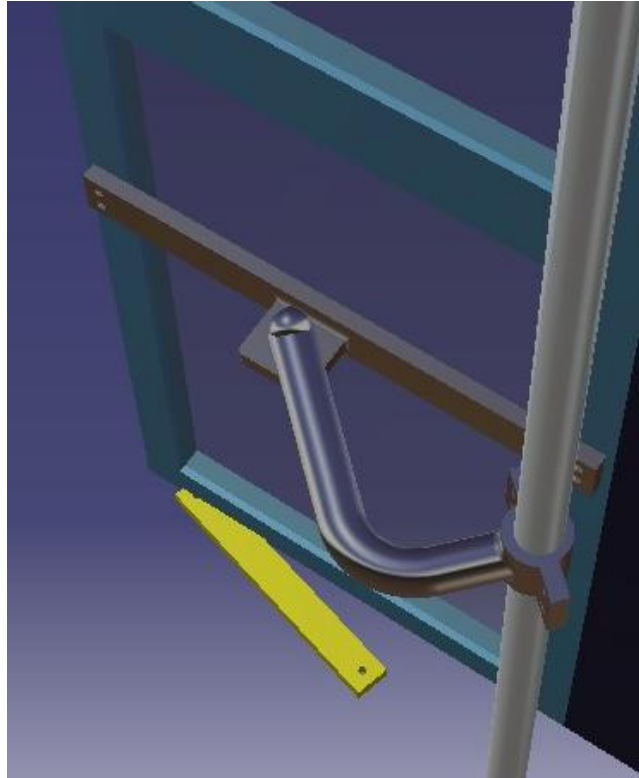
El mejor mecanismo resultante de los distintos métodos expuestos anteriormente es el del “método de la inversión con dos giros de la manivela”. Escogemos este mecanismo porque es el que mejor resultado da sin realizar retoques, también podríamos modificar los datos y obtener un resultado óptimo en los casos analíticos: las ecuaciones de Freudenstein o el método propuesto por Jiménez, Álvarez, Cardenal y Cuadrado.



El estudio lo realizamos de la barra “a” y “c”. La barra “c” tiene un diseño especial ya que, para salvar el obstáculo de la carrocería, debe ser una barra en ángulo recto. Según las posiciones de los nudos y de la puerta, para una apertura óptima con los resultados obtenidos, el largo será de 0.303 m. y el ancho de 0.182 m. En la figura siguiente podemos ver la barra en cuestión:



Por lo que el mecanismo queda como en la figura:



El estudio mecánico estará compuesto de un estudio de resistencia de la sección a cortante, a torsión y combinado, un estudio de resistencia de las barras a flexión (pandeo lateral) y un estudio de la resistencia de la soldadura en su empotramiento y de los tornillos pretensados de ajuste en la abrazadera.

Para realizar el estudio debemos determinar unas premisas iniciales como por ejemplo el tipo de perfil utilizado. En este sentido, como la barra va a estar visible y debe poseer buenas características a torsión, elegimos un perfil redondo hueco. A parte del perfil deberemos determinar las cargas en el extremo, elegir un coeficiente de seguridad y calcular los esfuerzos en los empotramientos.

El peso propio de la puerta se divide en 3 partes: marco, cristales y complementos. Para el estudio sencillo que pretendemos realizar los calcularemos por separado pero luego se distribuirá linealmente a lo largo de toda la puerta, también tendremos unas cargas accidentales y en cuanto al peso de las demás barras (estabilizadores y barra curva) las consideraremos despreciables frente al peso de la puerta.

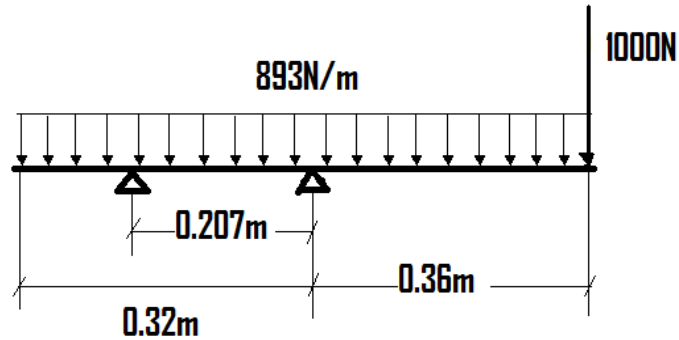


### 8.1 Cálculo del peso propio del conjunto puerta-vidrio-complementos, de la carga accidental máxima y de la carga distribuida:

Densidad Aluminio	$da := 2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Densidad Vidrio	$dv := 2500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Área marco aluminio	$Am := 0.68 \cdot 2.2 \text{m}^2 - 2 \cdot 0.56 \text{m}^2 + 0.06(2.2 + 0.68) \text{m}^2 = 0.549 \text{m}^2$
Área Cristales	$Ac := 2.04 \cdot 0.6 \text{m}^2 = 1.224 \text{m}^2$
Espesor marco	$em := 0.005 \text{r}$
Espesor cristales	$ec := 0.015 \text{r}$
Peso marco aluminio	$Pm := 2 \cdot em \cdot da \cdot Am = 14.818 \text{kg}$
Peso cristales	$Pc := dv \cdot Ac \cdot ec = 45.9 \text{kg}$
Peso complementos	$Pco := 1.2 \text{kg}$
<b>Peso total puerta</b>	$Ptp := Pm + Pc + Pco = 61.918 \text{kg}$
<b>Carga Accidental máx.</b>	$FAm := 1000 \text{N}$
Ancho puerta	$l_p := 0.68 \text{r}$
Gravedad	$g = 9.807 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
<b>Carga distribuida</b>	$q := \frac{Ptp \cdot g}{1} = 892.947 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$
Coeficiente seguridad	$Cs := 1.4$

## 8.2 Cálculo del esfuerzo (Fc) que debe soportar la barra “c” (barra en L):

Como la barra “c” no está en el centro de gravedad de la puerta, la barra “a” sufre un esfuerzo a pesar de ser solo un estabilizador. Hallamos, por sumatorio de momentos en el extremo de la barra “c”, los esfuerzos en las barras considerando que la carga accidental sucede en el extremo más alejado (situación más desfavorable).



- Fuerza total

$$\Sigma M_c := 0$$

$$F_a \cdot 0.207 + F_{Am} \cdot 0.32 + \frac{-q \cdot 0.32^2}{2} + q \cdot \frac{0.36^2}{2} = 0$$

- Fuerza en el estabilizador

$$F_a := \frac{\left[ \frac{-q \cdot (0.32m)^2}{2} + F_{Am} \cdot 0.32m + q \cdot \frac{(0.36m)^2}{2} \right]}{0.207m} = 1.605 \times 10^3 \text{ N}$$

- Fuerza en la barra en L (barra c)

$$\Sigma F_y := 0$$

$$F_c := F_a + F_{Am} + q \cdot l = 3.212 \times 10^3 \text{ N}$$

Las fuerzas en “a” y “c” con coeficientes de seguridad son:

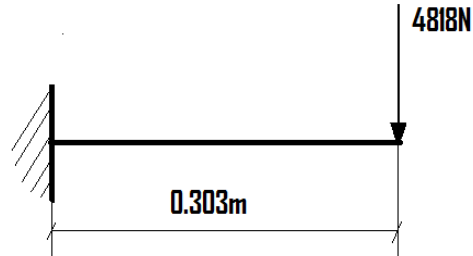
$$F_{cmax} := 1C_s \cdot F_c = 4.818 \times 10^3 \text{ N}$$

$$F_{amax} := C_s \cdot F_a = 2.407 \times 10^3 \text{ N}$$

### 8.3 Estudio de la barra curva tubular (barra “c”) que sufre un esfuerzo “Fc”:

Lo estudiaremos de 2 formas: considerando la zona larga que sufre un esfuerzo de cortante y flexión; y posteriormente la zona corta que sufre un esfuerzo de cortante, otro de flexión y otro de torsión simultáneamente.

$$M_{\max} := F_{c\max} \cdot 0.303\text{m} = 1.46 \times 10^3 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$



Para el estudio debemos elegir un tipo de acero: Aluminio aleado

La pieza estará compuesta de una barra normalizada curvada unida a una abrazadera mediante una soldadura. Sabiendo esto, analizamos la flexión del primer caso.

- Estudio de la parte larga de la barra “c”:

- *Resistencia de las secciones:*

A CORTANTE:

El esfuerzo cortante de cálculo  $V_{ed}$  será menor que la resistencia de las secciones a cortante,  $V_{c,Rd}$  que, en ausencia de torsión, será igual a la resistencia plástica:

$$V_{pl,Rd} := A_v \cdot \frac{f_{yd}}{\sqrt{3}}$$

donde el término relativo al área a cortante tiene los siguientes valores:

Secciones circulares huecas (que es la que nos interesa):

$$A_v := 2 \cdot \frac{A}{\pi}$$

- Resistencia de las barras:

A FLEXIÓN (pandeo lateral):

Una viga sometida a momentos flectores dentro de su plano, puede pandear lateralmente en caso de que la separación entre apoyos laterales supere un determinado valor. En estos casos, será necesario efectuar una verificación de la seguridad frente a pandeo lateral.

En la determinación de la resistencia frente a pandeo lateral de una viga también se tendrá en cuenta la interacción con la abolladura de las chapas comprimidas.

No será necesaria la comprobación a pandeo lateral cuando el ala comprimida se arriostra de forma continua o bien de forma puntual a distancias menores de 40 veces el radio de giro mínimo. No obstante, en estos casos, se deberá asegurar una rigidez y una resistencia adecuadas de los apoyos laterales.

Si existe la posibilidad de que una viga pandee lateralmente, debe comprobarse que  $M_{ed} < M_{b,Rd}$ ; donde “ $M_{ed}$ ” es el valor de cálculo del momento flector y “ $M_{b,Rd}$ ” el valor de cálculo de la resistencia frente al pandeo lateral, se calculará:

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} W_y f_y / \gamma_{M1}$$

Siendo  $W_y$ :  $W_{pl,y}$  para secciones de clase 1 y 2 (en la tabla normalizada se confirma que nuestra sección es de clase 1)

El factor de reducción  $\chi_{LT}$  se podrá determinar a partir de la expresión:

$$\chi_{LT} = 1 / (\Phi_{LT} + (\Phi_{LT}^2 - \lambda_{LT}^2)^{1/2}) < 1$$

$$\Phi_{LT} = 0.5(1 + \alpha_{LT}(\lambda_{LT} - 0.2) + \lambda_{LT}^2)$$

$\lambda_{LT}$  → esbeltez relativa frente al pandeo lateral

$\alpha_{LT}$  → factor de imperfección, obtenido de la tabla 6.6

Tabla 6.6 Factor de imperfección  $\alpha_{LT}$

Sección transversal	Límites	Curva de pandeo	$\alpha_{LT}$
Secciones de perfiles laminados en doble T	$H/b \leq 2$	b	0,34
	$H/b > 2$	c	0,49
Elementos con otras secciones	-	d	0,76

La esbeltez relativa frente al pandeo lateral se determinará según la relación:

$$\lambda_{LT} := \sqrt{W_y \cdot \frac{f_y}{M_{cr}}}$$

donde “ $M_{cr}$ ” es el momento crítico elástico de pandeo lateral. Este momento crítico elástico de pandeo lateral se determinará según la teoría de la elasticidad.

En el caso de perfiles laminados, conformados en frío o de perfiles armados equivalentes cuando  $\lambda_{LT} < 0.4$  se pondrá utilizar un valor de  $\chi_{LT} = 1$

- *Momento crítico elástico de pandeo lateral:*

En la mayoría de los casos prácticos es admisible un cálculo simplificado del momento crítico elástico de pandeo lateral, a pesar de las diferencias en las condiciones de apoyo, la introducción de las cargas y la distribución de los momentos flectores.

En los casos en los que los apoyos en los extremos de una barra impidan su deformación por, y si la carga actúa en el eje de la barra, el momento crítico elástico de pandeo lateral se podrá determinar según la ecuación:

$$M_{cr} := \sqrt{(M_{LTv})^2 + (M_{LTw})^2}$$

siendo

$M_{LTv}$  componente de  $M_{cr}$  que representa la resistencia por torsión uniforme de la barra.

$M_{LTw}$  componente de  $M_{cr}$  que representa la resistencia por torsión no uniforme de la barra.

La componente “ $M_{LTv}$ ” del momento crítico elástico de pandeo lateral se podría determinar a partir de la ecuación:

$$M_{LTv} := C_1 \cdot \frac{\pi \cdot \sqrt{G \cdot I_T \cdot E \cdot I_z}}{L_c}$$

siendo

- $C_1$  factor que depende de las condiciones de apoyo y de la ley de momentos flectores que soliciten y la viga
- $L_c$  longitud de pandeo lateral (distancia entre apoyos laterales que impidan el pandeo lateral)
- $G$  módulo de elasticidad transversal
- $E$  módulo de elasticidad
- $I_T$  constante de torsión uniforme
- $I_z$  momento de inercia de la sección respecto al eje z

La componente “ $M_{LTw}$ ” del momento crítico elástico de pandeo lateral viene determinada por la carga crítica elástica de pandeo del soporte comprimido del perfil. Este soporte está formado por el ala comprimida y la tercera parte de la zona comprimida del alma, adyacente al ala comprimida. La componente “ $M_{LTw}$ ” se podrá determinar a partir de la ecuación:

$$M_{LTw} := W_{el,y} \cdot \left[ \frac{\pi^2 E}{(L_c)^2} \right] \cdot C_1 \cdot (i_{f,z})^2$$

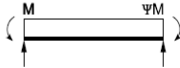

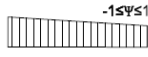






siendo

- $W_{el,y}$  módulo resistente elástico de la sección, según el eje de fuerte inercia, correspondiente a la fibra más comprimida
- $i_{f,z}$  radio de giro, con respecto al eje de menor inercia de la sección, del soporte formado por el ala comprimida y la tercera parte de la zona comprimida del alma, adyacente al ala comprimida

Las características mecánicas de la sección del soporte comprimido arriba mencionado se determinarán para la sección eficaz

El factor “ $C_1$ ” tiene en cuenta las condiciones de apoyo y la ley de momentos flectores que solicitan la viga. Los valores indicados en la tabla 6.7 son válidos para tramos de vigas en cuyos extremos el giro torsional esté totalmente coaccionado y a lo largo de los cuales el momento flector varía linealmente.

Tabla 6.7 Valor del factor  $k_c$

Diagrama de momentos flectores	$k_c$
	
	1,0
	$\frac{1}{1,33 - 0,33\Psi}$
	0,94
	0,90
	0,91
	0,86
	0,77
	0,82

#### 8.4 Estudio de las soldaduras:

En las uniones soldadas es mucho más importante una ejecución correcta que un cálculo más o menos riguroso. Todas las normas suponen que la ejecución de la soldadura cumple las reglas que la buena práctica aconseja, que el metal de aportación tiene como mínimo iguales o mejores características mecánico-resistentes que el metal base, y que una oportuna elección del material y un cuidadoso estudio de los detalles constructivos, evita la rotura frágil.

- Soldaduras de ángulo:

En las soldaduras de ángulo se define la garganta  $a$  como la altura del máximo triángulo isósceles inscribible en la sección transversal de la soldadura, cuyos lados iguales están contenidos en las caras de las dos piezas que se van a unir. El espesor de garganta no será inferior a 3mm.

Cuando se empleen procedimientos de soldadura automáticos o semiautomáticos de soldeo bajo polvo en atmósfera inerte, puede tomarse para la garganta de la soldadura un incremento del 20% del espesor de garganta hasta un máximo de 2mm.

En la comprobación de las uniones soldadas es necesario determinar que esfuerzos solicitan a los cordones, lo cual es un problema muy complejo y no resuelto de forma general. para el cálculo de estos esfuerzos se establecen las condiciones siguientes:

- Que exista equilibrio entre el conjunto de esfuerzos generados en los componentes de la unión y las fuerzas y momentos aplicados.
- Que las deformaciones obtenidas como consecuencia de la distribución establecida, no superen la capacidad de deformación de cada componente.
- Que cada componente resiste el esfuerzo supuesto.

En el cálculo de la estructura se utilizará generalmente un análisis elástico suponiendo uniones rígidas o flexibles. Si se suponen uniones semirrígidas deberán utilizarse las relaciones carga-deformación de cada componente de la unión.

Los esfuerzos transmitidos por la soldadura deberán cumplir una de las dos condiciones siguientes:

- No superar el valor de la resistencia de cálculo por unidad de longitud.
- Como alternativa al punto anterior, se podrán descomponer los esfuerzos transmitidos por unidad de longitud en sus componentes, suponiendo que sobre la sección de garganta hay una distribución uniforme de tensiones.

Para la determinación de la sección eficaz del cordón se debe tener en cuenta lo siguiente:

- Como ya se ha dicho, los cordones deben, si es posible, prolongarse rodeando las esquinas con el mismo espesor de garganta y longitud dos veces dicho espesor.
- La longitud eficaz de un cordón de soldadura en ángulo será la total del cordón siempre que se mantenga el espesor de garganta nominal, pero no se considerarán cordones cuya longitud sea inferior a 40mm o a seis veces el ancho de garganta ( $6 \cdot a$ ).



- La sección eficaz de un cordón es la correspondiente a la superficie del rectángulo cuya base es la longitud eficaz, y su altura el espesor “a”.
- La norma UNE 14035 distingue, desde el punto de vista de comprobación de la resistencia, las uniones soldadas planas, las uniones soldadas espaciales y las uniones mixtas.

- Solicitaciones de flexión:

El cálculo se efectúa con criterio análogo al expuesto anteriormente para el caso de unión con cordones frontales, longitudinales y transversales, que es el que nos interesa, si no se disponen rigidizadores en la columna.

El esfuerzo mayoritario es el flector, ya que el cortante puede despreciarse por su menor efecto en el conjunto.

Se comprueba que cumpla lo siguiente:

$$\frac{M}{W} \leq 0.56 \frac{f_u}{\beta_w} \quad W \text{ módulo resistente de la soldadura.}$$

- Solicitaciones de torsión y esfuerzo cortante combinados:

En cuanto a las solicitaciones de torsión y esfuerzo cortante combinados se puede aplicar el método del momento polar basado en el análisis elástico lineal desarrollado para uniones atornilladas.

Se elige como ejemplo la unión de una ménsula a la columna solicitada por la fuerza “P”, distante “e” del centro de gravedad de los cordones, O, (figura 4.35.a). Solamente se realizan los tres cordones externos y todos son de igual sección de garganta “a”.

La fuerza “P” se traslada al punto O dando origen a un momento  $M_t = Pe$  y a las componentes de la fuerza “P” según los ejes “x” e “y” ( $P_x$  y  $P_y$ ). Para la determinación

de los esfuerzos “F” que actúan por unidad de longitud en el punto A del cordón de soldadura se establecen las hipótesis siguientes:

- La fuerza “P” se reparte uniformemente entre todos los cordones de soldadura, dando origen a los esfuerzos siguientes:

$$f_{xp} := \frac{P_x}{l} \qquad f_{yp} := \frac{P_y}{l}$$

$l \rightarrow$  Longitud total de los cordones de soldadura

- El momento torsor “Mt” origina esfuerzos que son normales a la dirección que une el punto del cordón con el punto O y proporcionarles a su distancia. Esta hipótesis proporciona en un punto A del cordón los esfuerzos siguientes:

$$f_{xm} := Mt \cdot \frac{y_A \cdot a}{I_z} \qquad f_{ym} := Mt \cdot \frac{x_A \cdot a}{I_z}$$

$x_A, y_A$  coordenadas del punto A más desfavorable de la sección

$I_z$  momento de inercia polar respecto al centro de gravedad, O, de la superficie formada por los cordones de soldadura

El esfuerzo resultante  $f_{r,A}$  tiene como componentes:

$$f_x := f_{xp} + f_{xm} \qquad f_y := f_{yp} + f_{ym}$$

$$f_{r,A} < F_{w,Rd} := a \cdot \frac{f_u}{\sqrt{3} \cdot \beta_w \cdot \gamma_{M2}}$$

Siendo  $f_{r,a}$ :

$$f_{r,A} := \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2}$$

si la comprobación se realiza aplicando el procedimiento simplificado la condición que a de cumplir es la siguiente:

La comprobación debe realizarse en el punto más solicitado, que a priori se desconoce, de entre todos los cordones de soldadura. En general corresponde a uno de los vértices del contorno de la unión.

- Disposiciones constructivas:

El espesor de garganta “a” de un cordón de ángulo de una placa de espesor “t” estará comprendido entre los espesores que se indican en la tabla 4.3. En general, y con carácter orientativo, el espesor de garganta “a” de un cordón de ángulo que une dos perfiles de espesores  $t_1 < t_2$  no debe ser inferior a  $0.3 \cdot t_2$  ni superior a  $0.7 \cdot t_1$ . Además como ya se ha expuesto el espesor de garganta no será menor de 3mm.

## **8.5 Estudio de los tornillos de las abrazaderas:**

Las solicitaciones que actúan sobre una unión se reparten entre los elementos que la componen por cualquier distribución racional de esfuerzos, siguiendo el trayecto de rigidez máxima que debe estar claramente identificado y verificando estas condiciones:

- Los esfuerzos sobre los elementos de la unión equilibrarán los aplicados a la propia unión.
- La distribución de esfuerzos será coherente con la de rigideces.
- Con criterios elásticos se supondrán mecanismos de fallo razonables, por ejemplo basados en la rotación como sólido rígido de una de las partes de la unión.
- Con criterios plásticos se comprobará la capacidad de deformación de los elementos.

En casos normales no es necesario tener en cuenta las tensiones residuales, ni las debidas al apriete de tornillos y a la precisión normal en el ajuste entre las piezas.

Los esfuerzos sobre cada unión se determinan a partir del análisis de la estructura considerando los criterios de bases de cálculo y la propia flexibilidad del

nudo. Se dimensionan para resistir al menos estos esfuerzos, pero en ningún caso inferiores a:

- En nudos rígidos, la mitad de la resistencia última de cada pieza a unir

$$M_d := 0.5 \cdot M_{pRd} = 0.5 \cdot W_{pl} \cdot f_y$$

$$V_d := 0.5 \cdot V_{pRd} = 0.25 \cdot A_v \cdot f_y$$

- En uniones articuladas sometidas a esfuerzo axial, un tercio de la resistencia última de la sección.

$$N_d := 0.33 \cdot N_{pRd} = 0.33 \cdot A \cdot f_y$$

- En extremos articulados de piezas flectadas, un tercio de su resistencia última a cortante.

$$V_d := 0.33 \cdot V_{pRd} = 0.2 \cdot A_v \cdot f_y$$

- Tornillos:

Las uniones atornilladas se ejecutan taladrando las chapas, superponiéndolas de manera que coincidan los taladros y pasando a través de ellos los tornillos que se fijan con arandela y tuerca. Básicamente se pueden emplear dos procedimientos de ejecución:

- *Simple cortadura:* se superponen directamente las chapas a unir y sólo trabaja a cortante una sección transversal del tornillo; los esfuerzos de tracción quedan con pequeña excentricidad que produce flexión sobre ellos.
- *Doble cortadura:* mediante dos cubrejuntas las chapas a unir quedan alineadas sin originar flexión en los pasadores que trabajan a cortante por dos secciones, y su resistencia es el doble que en la solución anterior.

El mecanismo resistente también puede ser de dos tipos aplicables a cada uno de los procedimientos de ejecución que acabamos de indicar:

- *Por cortante:* la sollicitación que actúa en las chapas tiende a producir deslizamiento entre ellas, por lo que entran en contacto con la espiga del pasador originando cortante en su sección transversal. El fallo se produce por rotura de esta sección y no es relevante el apriete que provocan los tornillos entre las chapas.

- *Por rozamiento:* apretando la tuerca conseguimos que el tornillo quede traccionado y las chapas comprimidas transversalmente. Este efecto, con el rozamiento entre ellas genera fricción que se opone al movimiento cuando tienden a deslizarse por la acción exterior. El fallo se produce cuando se supera el rozamiento y es importante controlar el apriete de la tuerca, del que depende la capacidad resistente.

La geometría de los tornillos, con cabeza hexagonal y la espiga completa o parcialmente fileteada mediante rosca triangular.

Las calidades de los aceros para tornillos, normalizadas por UNE EN 20898-1, se indican en la tabla siguiente junto a su límite elástico y la resistencia a tracción; las 4.6, 5.6 y 6.8 son aceros al carbono y las 8.8 y 10.9 aceros al carbono templado y revenido que pueden contener aditivos (de alta resistencia), la 10.9 admite aceros aleados. Como identificación, los tornillos llevarán grabado o en relieve el símbolo de la clase de acero en la parte superior de la cabeza o en un costado.

Los tornillos se designan por la sigla M seguida de las dimensiones del diámetro, la longitud y un número correspondiente a la calidad del acero.

- Disposiciones constructivas:

Los agujeros se realizan con taladro u otro proceso que proporcione un acabado equivalente; en los avellanados el acabado se realiza tras el taladro o punzonado del agujero normal y el ángulo debe corresponder con el de los tornillos que vayan a emplearse; los agujeros alargados podrán ejecutarse por punzonado de una sola o con dos agujeros mediante un taladro o punzonado y posterior oxicrote.

Para fijar las distancias entre ejes de taladros y de ellos a los bordes de la chapa, los pasadores podrán colocarse en retícula o al tresbolillo, se denomina borde lateral el paralelo al esfuerzo y frontal el perpendicular a él. Las distancias deben verificar:

- Distancia a borde frontal
  - Mínima  $e_1 \geq 1.2 d_0$
  - Máxima  $e_1 \leq 40\text{mm} + 4t$ 
    - $e_1 \leq 12t$
    - $e_1 \leq 150\text{mm}$
- Distancia a borde lateral
  - Mínima  $e_2 \geq 1.5 d_0$
  - Máxima  $e_2 \leq 40\text{mm} + 4t$ 
    - $e_2 \leq 12t$
    - $e_2 \leq 150$
- Separación entre taladros
  - Mínima, en dirección paralela al esfuerzo
    - $p_1 \geq 2.2 d_0$
  - Máxima, en dirección perpendicular al esfuerzo
    - $p_2 \geq 3 d_0$
  - Mínima, en elementos comprimidos
    - $p_1 \leq 14t \text{ ó } 200\text{mm}$
    - $p_2 \leq 14t \text{ ó } 200\text{mm}$
  - Máxima, en elementos traccionados
    - $p_{1,e} \leq 14t \text{ ó } 200\text{mm}$  (filas exteriores)
    - $p_{1,i} \leq 28t \text{ ó } 400\text{mm}$  (filas interiores)
    - $p_2 \leq 14t \text{ ó } 200\text{mm}$

En taladros rasgados las distancias a cualquier borde deben verificar:

$$e_3 \geq 1.5 d_0$$

$$e_4 \geq 1.5 d_0$$

En uniones traccionadas al tresbolillo  $p_2$  puede reducirse hasta  $1.2d_0$  si  $L > 2.4d_0$

En todas las expresiones anteriores:

- $d_0$       diámetro del taladro
- $t$         espesor de la chapa exterior más delgada

Para poder apretar los tornillos sin dificultad se recomienda que la distancia del eje del taladro a cualquier superficie sea  $> 2d$ .

Con esfuerzos oblicuos a los bordes y alineaciones de los tornillos, se emplearán valores prudentes interpolados entre los definidos para cada dirección.

- Esfuerzos locales: simplificaciones:

En uniones para evitar el deslizamiento entre las piezas, los esfuerzos que se transmiten a través de los tornillos originan efectos de concentración de tensiones que vamos a reseñar, para considerarlos luego en el cálculo de forma simplificada. Por sencillez nos vamos a referir al caso de dos chapas traccionadas unidas por una fila de tornillos alineados con el esfuerzo que origina distribución uniforme de tensiones sobre la sección-tipo de cada chapa. En el entorno de los taladros se producen distorsiones:

- En la sección de chapa afectada por el taladro la distribución de tensiones, los valores máximos se producen en los bordes del taladro y los mínimos en los laterales de la chapa.
- Sobre el espesor de las chapas la distribución de esfuerzos tampoco es uniforme con máximos en las caras de contacto.
- La presión de contacto que ejerce cada chapa sobre la espiga del tornillo tampoco es uniforme.
- El esfuerzo sobre cada tornillo de una fila es mayor en los extremos que en el centro.

- En uniones a simple cortadura la excentricidad entre los esfuerzos de las chapas deforma la unión originando flexión en los pasadores.

Estos efectos de difícil cuantificación se consideran indirectamente en el cálculo, donde se hacen las siguientes simplificaciones que facilitan su comprobación:

- No se consideran los efectos secundarios de flexión en simple cortadura.
- Se supone distribución uniforme de tensiones en las chapas despreciando la concentración de esfuerzos en las secciones taladradas.
- Se considera que las tensiones tangenciales originadas en cada tornillo por el esfuerzo sobre la unión, se distribuyen uniformemente repartido entre los tornillos que la forman.
- No se considera la fuerza de rozamiento entre chapas por el apriete de los pasadores, salvo en uniones a rozamiento que se basan en este efecto.

En consecuencia aparecen diferencias significativas entre el comportamiento real de la unión y los valores obtenidos en el cálculo teórico a partir de estas hipótesis, posteriormente para cada caso; las disposiciones constructivas anteriores limitan el campo de validez para el que se han determinado estos coeficientes.

La rotura de la unión puede producirse por alguna/s de las formas siguientes:

- Rotura de la chapa por tracción o desgarro por cortante. Los taladros equivalen a una reducción de su sección resistente, que se debe comprobar considerando el área neta.
- Rotura por cortante de la espiga del tornillo. En uniones a rozamiento el efecto de fricción sustituye a la resistencia del pasador.
- Aplastamiento de la chapa contra el tornillo por tensiones de contacto que produce plastificación local y deformación con deslizamiento en la unión.
- Rotura por cortante de las chapas. Efecto similar al que produce rotura según líneas aproximadamente a 45° con la dirección del esfuerzo.



- Este planteamiento referido a un caso concreto, se puede generalizar para otras uniones si cambia la sollicitación o la geometría como veremos posteriormente.

- Resistencia de uniones atornilladas pretensadas:

El efecto que proporciona resistencia a la unión es la fuerza de rozamiento “ $F_{s,Rd}$ ” entre las chapas por el apriete de los tornillos, que depende del esfuerzo de pretensado “ $F_{p,Cd}$ ” en el tornillo y del coeficiente de rozamiento “ $\eta$ ” entre las chapas.

En tornillos de alta resistencia con apriete controlado, el esfuerzo de pretensado “ $F_{p,Cd}$ ” que se debe aplicar en el proceso de ejecución corresponde a la ecuación:

$$F_{p,Cd} = 0.7 * f_{ub} * A_s$$

siendo “ $A_s$ ” el área resistente del tornillo.

El valor del coeficiente de rozamiento para el cálculo de uniones resistentes a deslizamiento, depende del tratamiento superficial sobre las piezas en contacto que según UNE-ENV 1090 se pueden clasificar en:

- *Clase A:* superficies tratadas con chorro de granalla o arena o estas metalizadas con aluminio proyectado.
- *Clase B:* superficies tratadas con chorro de granalla o arena y pintadas con un silicato alcalino de cinc que forme una capa de espesor 50-80 $\eta$ m.
- *Clase C:* superficies limpiadas con cepillos de púas metálicas o con llama, eliminando partes oxidadas.
- *Clase D:* superficies no tratadas.

En estos casos, el coeficiente de rozamiento  $\eta$  se adopta:

- En superficies de clase A  $\eta=0.5$
- En superficies de clase B  $\eta=0.4$
- En superficies de clase C  $\eta=0.3$
- En superficies de clase D  $\eta=0.2$

A partir de estos valores, en uniones solicitadas solo a esfuerzo cortante se adopta como resistencia a deslizamiento para cada tornillo:

$$F_{s,Rd} = \frac{k_s * n * \eta}{\gamma_{M3}} * F_{p,Cd}$$

donde:

- “n” es el número de secciones en contacto entre las chapas de la unión.
- “k<sub>s</sub>” es un coeficiente que se adopta 1 para taladros con holguras normales.
- “γ<sub>M3</sub>” coeficiente parcial de resistencia a deslizamiento; que se adopta 1.25 en taladros normales.

En uniones a cortante y momento, el momento produce compresión en una parte de la unión y tracción en otra. Se considera que ambos efectos se compensan y no es necesario aplicar ninguna reducción en la resistencia a deslizamiento.

## 8.6 Cálculo numérico de la resistencia estructural:

Comenzaremos el estudio numérico con la resistencia de la sección a cortante, elegiremos un perfil circular hueco como hemos citado antes y debido a nuestra experiencia seleccionamos un perfil pequeño porque las longitudes de barras son pequeñas para la resistencia del material.

Las características mecánicas del aluminio 6082 - T6 / T651 son las siguientes:

$$E= 70.000 \text{ N/mm}^2$$

$$G= 26.300 \text{ N/mm}^2$$

$$f_y= 250 \text{ N/mm}^2$$

$$f_u=295 \text{ N/mm}^2$$

Las características físicas del perfil para soportar el esfuerzo a cortante son las siguientes:

$$A_v \cdot \frac{f_{yd}}{\sqrt{3}} > F_{cmax}$$

$$A_v := 2 \cdot \frac{A}{\pi} = 0.637A \quad f_y := 250 \frac{N}{mm^2} \quad F_{cmax} = 4.818 \times 10^3 N$$

$$A > F_{cmax} \cdot \frac{\sqrt{3}}{0.637} \cdot \frac{1.05}{f_y} \quad A > 55 mm^2$$

Por lo que el perfil que más se ajusta a lo exigido hasta ahora es el perfil hueco de:

$$D=16mm \quad y \quad e=1.5mm$$

A continuación comprobaremos si este perfil soporta la resistencia a flexión y sino determinaremos que perfil lo cumple.

$$\begin{array}{llll} D=16mm & e=1.5mm & I_z=0.18cm^4 & I_t=0.363cm^4 \\ L_c=2*30.3cm & C_1=4.2244 & S_y=0.227cm^3 & i_f=0.53cm \quad A=0.6833cm^2 \end{array}$$

❖ Momento critico:

$$M_{LTv} = C_1 \frac{\pi \sqrt{G I_T E I_z}}{L_c}$$

$$M_{LTv} = 4.2244 \frac{\pi \sqrt{2630000 * 0.363 * 7000000 * 0.18}}{60.6} = 240192 Ncm$$

$$M_{LTW} = W_{el,y} \left[ \frac{\pi^2 E}{L_c^2} \right] C_1 i_{f,z}^2$$

$$M_{LTW} = 2 * 0.227 * \left( \frac{\pi^2 7000000}{60.6^2} \right) 4.2244 * 0.53^2 = 10135 Ncm$$

$$M_{cr} = 240405 N \cdot cm$$

Vamos a las formulas de pandeo y resolvemos:

$$\lambda := \sqrt{2 \cdot 0.227 \cdot \frac{25000}{240406}} = 0.2173$$

Como  $\lambda < 0.4$  utilizamos  $\chi=1$  y comprobamos:

$$M_{b,Rd} = \chi L T W_y f_y / \gamma M1$$

$$M_{b,Rd} = 2 \cdot 0.227 \cdot 25000 / 1.05 = 10809 \text{ Ncm} < M_{max}$$

La barra no aguanta el esfuerzo de flexión, por lo que tendremos que aumentar el perfil, cualquier perfil que analicemos superior dará un  $\lambda < 0.4$  por lo que debemos hallar el momento estático en la última ecuación considerando  $M_{b,Rd} = M_{max}$

$$W_y > 30.3 \text{ cm} \cdot 4818 \text{ N} \cdot \frac{1.05}{\frac{25000 \text{ N}}{\text{cm}^2}} := 6.13 \text{ cm}^3$$

$W_y = 2 \cdot S_y$  por lo que deberemos buscar un  $S_y > 3.065 \text{ cm}^3$

Para un perfil con momento estático superior al citado la barra no sufre pandeo. Según la tabla de perfiles normalizados para aluminio podemos elegir entre: D40, e3.5(o superior); D42, e3(o superior); D45, e2.5(o superior); D50, e2(o superior).

Si pensamos en las disposiciones constructivas de las soldaduras, tenemos una relación de los espesores de las piezas con la garganta máxima y mínima que puede tener la soldadura, los perfiles adecuadamente soldables son aquellos que tienen más de 4mm de espesor. Por lo que elegiremos el siguiente perfil:

D= 40mm	e=4mm	Iz=7.42cm <sup>4</sup>	It=18.84cm <sup>4</sup>
C <sub>1</sub> =4.2244	S <sub>y</sub> =3.71cm <sup>3</sup>	if=1.3cm	A=3.338cm <sup>2</sup>

En estos momentos la otra pieza soldada deberá tener un espesor máximo de 8.4mm. Comprobamos soldadura de 3mm de espesor según el procedimiento anterior para este perfil.  $W=9.4123\text{cm}^3$

$$18.2\text{cm} * \frac{4818\text{N} * 1.41}{9.4123\text{cm}^3} < 0.8 \frac{29500 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}}{0.85}$$

$$13136 < 27764.7$$

La sección cumple a sección, ahora comprobaremos que la sección cumple al esfuerzo conjunto de cortante y flector.

$$f_{xm} = 0$$

$$f_{yp} = \frac{4818\text{N}}{\pi * 4.6\text{cm}} = 333.4 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$$

$$f_{xp} = 0$$

$$f_{ym} = 30.3\text{cm} * 4818\text{N} \frac{2.3\text{cm} * 0.3\text{cm}}{9.4123\text{cm}^4} = 10702 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$$

$$f_x = f_{xp} + f_{xm}$$

$$f_y = f_{yp} + f_{ym}$$

$$f_{r,A} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = 11035.4 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$$

$$f_{r,A} < F_{w,Rd} = 0.3\text{cm} \frac{29500 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}}{\sqrt{3} * 0.85 * 1.1} = 5464.76 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$$

La sección no cumple a torsión, debemos aumentar la sección de soldadura, para que las disposiciones constructivas cumplan, al aumentar la garganta de soldadura debemos aumentar el perfil, según los resultados dados anteriormente, deberemos aumentar en al menos 0.5mm la soldadura si aumentamos el diámetro exterior. Para ello elegimos el siguiente perfil:

D= 52mm	e=6mm	Iz=11.78cm <sup>4</sup>	It=23.32cm <sup>4</sup>
C <sub>1</sub> =4.2244	S <sub>y</sub> =8.97cm <sup>3</sup>	A=8.67cm <sup>2</sup>	W=21.137cm <sup>3</sup>

Evidentemente cumple a flexión. Pero debemos comprobar que cumple a torsión:

$$f_{xm} = 0$$

$$f_{yp} = \frac{4818N}{\pi * (5.2 + 2a)cm}$$

$$f_{xp} = 0$$

$$f_{ym} = 30.3cm * 4818N \frac{4 * (2.6 + a) * a}{\pi((2.6 + a)^4 - 2.6^4)}$$

$$f_x = f_{xp} + f_{xm}$$

$$f_y = f_{yp} + f_{ym}$$

$$f_{r,A} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \frac{4818N}{\pi * (5.2 + 2a)cm} + 30.3cm * 4818N \frac{4 * (2.6 + a) * a}{\pi((2.6 + a)^4 - 2.6^4)}$$

Segundo término de la inecuación:

$$f_{r,A} < F_{w,Rd} := a \cdot \frac{29500 \frac{N}{cm^2}}{\sqrt{3} \cdot 0.85 \cdot 1.1} = 1821a \frac{N}{cm}$$

Creamos una tabla de valores para determinar el espesor mínimo de garganta:

a	1º término inecuación	2º término inecuación
0.3	6725	5464.8
0.32	6694	5829.12
0.33	6679.7	6011.28
0.34	6664.6	6193.44
0.35	6649.46	6375.6
0.36	6634.3	6557.8
0.37	6619	6740

El espesor mínimo de garganta necesario será de **a>0.37cm**

Con todo esto determinamos la pieza final que será de  $D = 52\text{mm}$  y  $e = 6\text{mm}$  con una soldadura de al menos  $3.7\text{mm}$  y que va soldada a una abrazadera de cómo máximo  $9.9\text{mm}$  de espesor.

Por último debemos comprobar que los 4 tornillos pretensados de M12 que componen el conjunto, no sufran roturas ante las sollicitaciones y transmitan correctamente el par motor.

Datos de los tornillos: M12 8.8

$$A_s=0.843 \quad n=1 \quad \eta=0.4(\text{superficie clase B}) \quad F_{p,Cd}=47000\text{N}$$

Datos de las sollicitaciones:

$$F_{v,sd}=4818\text{N} \quad M_{t,ed}=1460\text{Nm} \quad M_f=876.9\text{Nm}$$

Como hemos dicho anteriormente, en uniones a cortante y momento, el momento produce compresión en una parte de la unión y tracción en otra. Se considera que ambos efectos se compensan y no es necesario aplicar ninguna reducción en la resistencia a deslizamiento:

$$F_{vt, Sdi} \leq F_{s, Rd} = \frac{k_s * n * \eta}{\gamma_{M3}} * F_{p,Cd} = 15040\text{N}$$

Para el cortante que actúa sobre los tornillos debemos tener cuenta el cortante de la fuerza y además el cortante producido por el momento torsor:

$$F_{vt, Sd} = F_{v, sd} + \frac{M_{t, ed}}{l_t}$$

siendo “ $l_t$ ” la longitud de del centro del momento torsor al punto más alejado del tornillo.

$$l_t=0.06\text{m}$$

$$F_{vt, Sd} = 34018\text{N}$$

Cada tornillo deberá soportar una cuarta parte de ese esfuerzo, por lo que hemos dimensionado correctamente los tornillos para que no rompan ante la sollicitación.

Por último la barra estabilizadora deberá soportar un esfuerzo a flexión que en el caso habitual será mínimo, pero que en el caso de actuar la fuerza accidental aumenta considerablemente.

Esta fuerza es de 2407N y las dimensiones de la barra son de 5x2cm esta de acero con  $f_y=27500\text{N/cm}^2$ .

Hacemos similares cálculos a los anteriores:

$$M_{cr} = W_{el,y} * \frac{\pi^2 * E}{L_c^2} * C_1 * i_{f,z}^2$$

con los valores de:

$W_{el,y}=(2*3.333/1)\text{cm}^3$	$E=2.1*10^7\text{N/cm}^2$
$L_c=2*35\text{cm}$	$C_1=1.88$
$i_{f,z}=0.289*h$	$h=1.5\text{cm}$
$M_{cr}=177110.9\text{Ncm}$	$f_y=26500\text{N/cm}^2$

$$\lambda_{LT} := \sqrt{W_y \cdot \frac{f_y}{M_{cr}}}$$

$$\lambda=0.9987$$

$$\Phi_{LT}=0.5(1+\alpha_{LT}(\lambda_{LT}-0.2)+\lambda_{LT}^2)$$

$$\Phi=1.3$$

$$\chi_{LT}=1/(\Phi_{LT}+(\Phi_{LT}^2-\lambda_{LT}^2)^{1/2})<1$$

$$\chi=0.468$$

$$M_{max}/2 < M_{b,Rd} = \chi W_y \frac{f_y}{\gamma_{M1}}$$

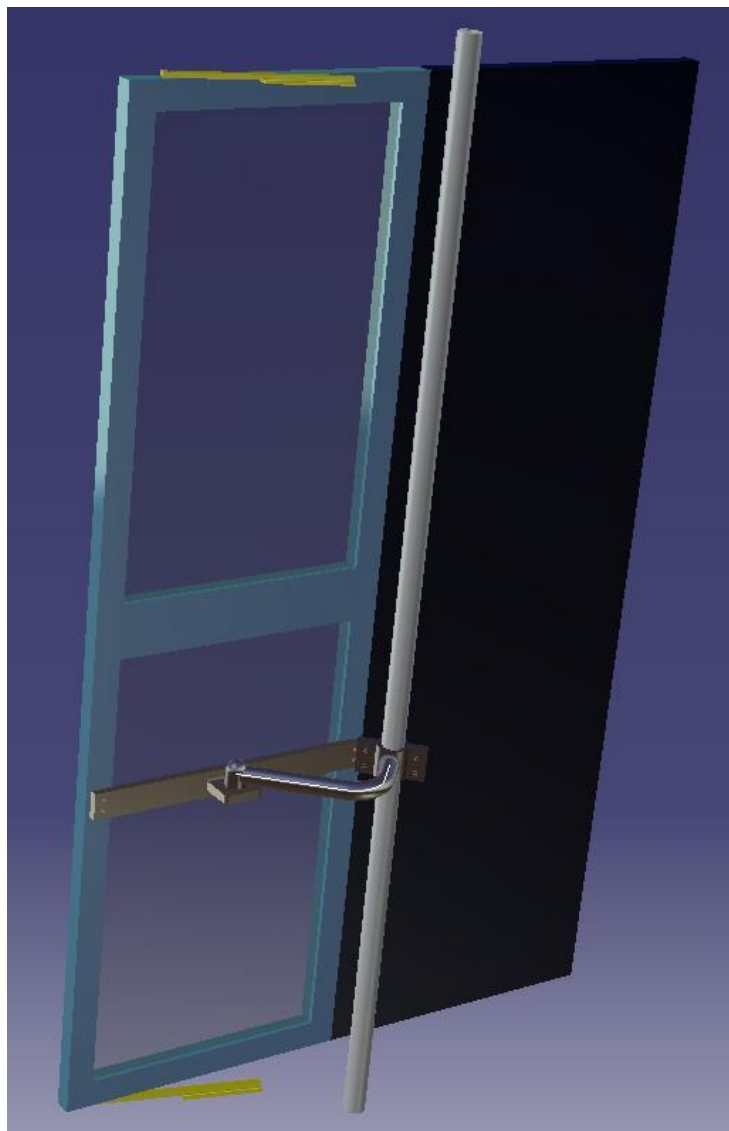
$$M_{b,Rd} = 78781\text{Ncm}$$

Cumple perfectamente la sollicitación, posiblemente si quisiésemos limar las medidas sería posible incluso rebajar en 2milimetro la altura de la pieza, pero con esa medida es suficiente.



## **9. DISEÑO Y PLANOS DE UN MECANISMO DE APERTURA DE PUERTAS CON CATIA V5:**

El diseño definitivo de nuestro mecanismo de apertura de puertas para autobuses será como el que aparece a continuación en 3D, que está hecho con CATIA V5. Está compuesto a grandes rasgos de una barra vertical, que gira sobre si misma al estar unida al motor; dos estabilizadores, cuya función es la de hacer que la puerta se abra paralelamente a la carrocería; la puerta, una barra en “L”, una abrazadera y una barra de perfil rectangular que nos permite unir la puerta a la barra en “L”.



Los planos tanto del conjunto como de cada uno de los elementos por separado se encuentran en el ANEXO A.



## **10. CONCLUSIONES GENERALES DEL PROYECTO:**

Después del estudio realizado durante la elaboración de este proyecto, podemos afirmar que se han alcanzado los objetivos que se propusieron en un inicio. Se han ampliado los conocimientos en el área de los mecanismos adentrándonos en la síntesis de mecanismos, y a su vez el proyecto ha sido una labor de investigación y aprendizaje constante, desde el trabajo en equipo coordinando esfuerzos, ideas y conclusiones, hasta la asimilación de una metodología de trabajo dentro del campo de la investigación, y dentro de esta metodología:

- Ser lo suficientemente pacientes para entender que puede haber más de una solución y planteamiento posible cuando queremos resolver un problema, en este caso la elaboración de un mecanismo que realice un trabajo deseado.
- En un estudio de investigación todo resultado obtenido ya sea satisfactorio o no, así como el proceso realizado y la forma de plantear el estudio han de quedar reflejados y comentados para continuar después con el estudio, como base para otros estudios o para no volver a repetir los mismo errores o los mismos aciertos con la consecuente pérdida de tiempo.

Otra conclusión es sobre la gran capacidad que nos otorga la utilización del ordenador tanto en el método analítico como en el método de simulación en Working Model, en concreto el programa de simulación nos permite predecir el comportamiento cinemático y dinámico en todas las etapas del proceso de diseño, desde la etapa de concepto a la de prototipo.

En cualquiera de estas etapas, éste tipo de análisis es una herramienta de gran valor, proporcionando al ingeniero suficiente cantidad de datos para estudiar la influencia de diferentes parámetros: posición, velocidad, fuerzas, aceleraciones, etc. aunque en nuestro proyecto sólo hemos atendido a posiciones. Aligera la tarea del diseñador en el desarrollo y análisis de los mecanismos y poder realizar de forma más

rápida y precisa el estudio en las primeras fases de diseño y pretende ser una ayuda para el diseño mecánico debido a que el programa permite experimentar con la simulación mecánica, sin tener la necesidad de fabricar los mismos.

Así mismo también puede enfocarse como un software que sirve de apoyo didáctico para los alumnos que cursen las asignaturas relacionadas con el diseño de elementos de máquinas, dinámica de máquinas, teoría y diseño de mecanismos.

Tras el estudio del mecanismo a través de Working Model y MathCad, elegimos el mecanismo más favorable, dimensionamos cada elemento del mecanismo que soporte los esfuerzos permanentes, además de los esfuerzos variables y accidentales. No solo debemos dimensionar los elementos sino también las uniones soldadas y atornilladas.

Con todo esto calculado nos dispusimos a la modelización a través de CATIA V5 de cada elemento y el ensamblaje de ellos. Esto nos ha permitido el aprendizaje de otro de los programas más importantes que existen en el mundo ingenieril, este programa tiene un amplio abanico de subprogramas que pueden realizar infinidad de tareas, nos centramos únicamente en los de modelización y presentación.

## **11. PRESUPUESTO:**

En este capítulo se incluye el estudio económico, siendo una difícil tarea ya que al tratarse de un proyecto de investigación y desarrollo influyen muchos factores siendo uno de los más importantes la experiencia del ingeniero para:

- Encontrar la bibliografía y estudios anteriores sobre la teoría y práctica relacionadas con el proyecto a realizar, así como investigaciones anteriores realizadas por el propio autor del estudio que le puedan ayudar a continuar en la misma línea de investigación.
- Proyectos similares realizados con lo que la nueva investigación sería de carácter paralelo a la actual y haciendo uso de la misma metodología que funcionó con éxito en otros proyectos.
- Equipo humano y su experiencia en la realización de proyectos similares.
- Material que se utiliza: mejores laboratorios, software avanzado y adaptado, material más avanzado y más apropiado para realizar los sucesivos proyectos de investigación.
- Red de contactos en diferentes especialidades que convergen en el proyecto, siendo necesario en muchas ocasiones conocimientos y experiencias de otras personas fuera del equipo de trabajo, ampliando así la cooperación con diferentes instituciones, empresas y organismos de investigación, estadísticos, laboratorios, consultoría, etc.

Por tanto el tiempo empleado en el desarrollo del prototipo o nuevo mecanismo depende directamente de la habilidad del equipo o de la persona encargada de hacer ese proceso.

A continuación se incluyen unas tablas en las que van a quedar desglosadas los diferentes costes, directos, indirectos y totales.

Se estima para un año 230 días laborables, 1840 horas al año, 8 horas por día laboral.

ACTIVIDAD	HORAS EMPLEADAS TOTALES
Síntesis gráfica de mecanismos	200
Síntesis analítica de mecanismos	350
Generación en Working Model	350
Generación en CATIA V5	100
Cálculos de resistencia	40
Elaboración de informe	120
Total horas empleadas por el equipo	<b>1160</b>

Costes Directos:

<b>Costes de personal</b>		
CONCEPTO	INGENIERO TÉCNICO INDUSTRIAL	COSTE TOTAL EQUIPO DE TRABAJO
Sueldo bruto más incentivos	30.100 €	60.200 €
Cotización a la Seguridad Social	12.642 €	25.284 €
Coste total anual	42.742 €	85.484 €
Coste por hora trabajada	23,23 €/h	46,46 €/h
Número de horas trabajadas	580	1160
<b>Coste total</b>	<b>13.473,4 €</b>	<b>26.946,8 €</b>

<b>Material amortizable</b>			
DENOMINACIÓN	CANTIDAD	IMPORTE (€)	TOTAL (€)
Software Autodesk – Autocad 2009	2	5.000	10.000
Software Working Model 2D	2	1.600	3.200
Software CATIA V5	2	6.500	13.000
Software básico: Mathcad, Office, etc.	2	390	780
Puesto ordenador sobremesa completo	2	850	1.700
Material de oficina no consumible	2	3.500	7.000

DENOMINACIÓN	TIEMPO DE AMORTIZACIÓN (AÑOS)	COSTE AMORTIZACIÓN PUESTO (€/h)
Software Autodesk – Autocad 2009	1	2,72
Software Working Model 2D	4	0,22
Software CATIA V5	1	3,53
Software básico: Windows 7, Office, etc.	4	0,053
Ordenador sobremesa	6	0,077
Material de oficina no consumible	10	0,2

DENOMINACIÓN	HORAS USO EQUIPO	COSTES DE AMORTIZACIÓN (€)
Software Autodesk - Autocad 2009	120	326,4
Software Working Model 2D	350	77
Software CATIA V5	100	353
Software básico: Windows 7, Office, etc.	1.160	61,5
Ordenador sobremesa	1.160	89,2
Material de oficina no consumible	1.160	232
	<b>TOTAL</b>	<b>1139,1</b>

<b>Costes de mantenimiento y actualización</b>				
DENOMINACIÓN	COSTES DE MANTENIMIENTO Y ACTUALIZACIÓN ANUAL (€)	CANTIDAD	COSTE HORARIO DE MANTENIMIENTO POR PUESTO (€/h)	COSTE TOTAL (€)
Software Autodesk - Autocad 2009	3.000	2	1,63	195,7
Software Working Model 2D	950	2	0,52	180,7
Software CATIA V5	5.000	2	2,72	272
Software básico: Windows 7, Office, etc.	100	2	0,054	63,1
Ordenador sobremesa	70	2	0,04	44,1
Material de oficina no consumible	50	2	0,03	31,5
			<b>TOTAL</b>	<b>787,1</b>

Material no amortizable: papel, utensilios de dibujo, impresora...

<b>Material no amortizable</b>	
CONCEPTO	COSTE DE MATERIAL (€)
Material fungible no inventable	<b>250</b>



Resumen Costes directos:

CONCEPTO	COSTES TOTALES (€)
Costes totales de personal	26.946,8
Costes totales de material amortizable	1139,1
Costes mantenimiento y actualización	787,1
Costes de material no amortizable	250
Costes totales directos	<b>29.123</b>

Costes indirectos:

CONCEPTO	COSTES TOTALES (€)
Gastos de explotación	1.000
Gastos administrativos y de dirección	1.500
Costes totales indirectos	<b>2.500</b>

**COSTE TOTAL** = Costes directos + Costes indirectos = 29.123 + 2.500 = **31.623 €**

**BENEFICIOS (15%)** = COSTE TOTAL \* 0,15 = 31.623 \* 0,15 = **4.743 €**

**PRECIO FINAL** = COSTE TOTAL + BENEFICIO = 31.623 + 4.743 = **36.366 €**

**COSTE TOTAL DEL PROYECTO: 36.366 €**

**TREINTA Y SEIS MIL TRESCIENTOS SESENTA Y SEIS EUROS**



## **12. LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN:**

Como se pudo indicar en la parte de objetivos a cumplir en el proyecto, el estudio que se ha realizado no incluye un análisis de las velocidades, aceleraciones (estudio dinámico) de las diferentes partes que componen los mecanismos que se han ido presentando a lo largo del proyecto. Por tanto, como líneas futuras de investigación, habrá que realizar dicho estudio determinando así definitivamente si un diseño debe seguir siendo modificado para reducir los esfuerzos o ayudarnos a decidir entre la instalación de un mecanismo u otro.

Al tratarse de mecanismos sencillos en su mayoría, no constituidos por más de 5 barras podría realizarse un estudio dinámico de una manera convencional pero se propone realizarlo con algún software tipo I-DEAS, con lo que también se puede experimentar con la elasticidad de los materiales y ajustarse aún más a la realidad.

También se propone continuar el proyecto en el proceso de fabricación, en una cadena de fabricación y montaje.

En cuanto al software utilizado, está planteado un mecanismo en dos dimensiones, por tanto podría ser interesante el estudio de los mecanismos en las 3 dimensiones y ya no sólo para un mecanismo de apertura de puertas, que no tiene mucho sentido analizarlo en las 3 dimensiones, pero si plantear la síntesis de mecanismo en el espacio.

Otro punto de estudio detallado será el pretensado de los tornillos de las abrazaderas, estos necesitan ejercer un esfuerzo tal que permita la transmisión óptima del par motor. Además del estudio de superficies entre el eje motor y las abrazaderas, que en muchos casos sería interesante una superficie rugosa de estudio en lugar de una superficie lisa.



### **13. SOFTWARE EMPLEADO:**

➤ Working Model:

“Working Model” (del inglés *Computer Aided Engineering*) es un paquete de simulación de movimiento, que permite a estudiantes, ingenieros, diseñadores, y animadores construir y analizar rápidamente *sistemas mecánicos* en PCs. Con la posibilidad de aplicar las leyes de la mecánica sobre un diseño virtual antes de construir prototipos, los ingenieros pueden probar un mecanismo en sus primeras etapas y saber con gran exactitud si el diseño está listo para construir o requiere más tiempo para su ajuste y refinamiento.

Es posible importar la geometría de los sistemas de CAD más conocidos o dibujar directamente en Working Model; poner a punto modelos con motores, muelles, actuadores, engranajes, poleas, gravedad variable, campos de fuerza definibles, amortiguadores, cuerdas, separadores, uniones, fricción variable, y ranuras; medir y analizar los datos de la simulación tales como fuerzas, aceleraciones, velocidades, posiciones, energía, y plotear la información como gráficos o exportarla a paquetes numéricos, de análisis o de elementos finitos.

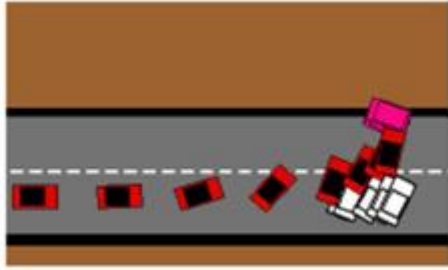
La parametrización permite definir ecuaciones tanto para la geometría de piezas como para las posiciones de las restricciones. Los usuarios pueden arrastrar, estirar, o modificar el diseño, y Working Model lo construye automáticamente, manteniendo todas las restricciones paramétricas. Con Working Model Basic, lenguaje de script embebido Visual Basic, se pueden crear scripts para automatizar tareas, hacer iteraciones cambiando sucesivamente el diseño, o incluso crear interfaces personalizados para un equipo de diseño o departamento de ventas.

*Características del programa:*

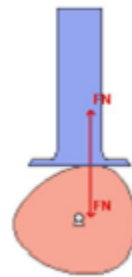
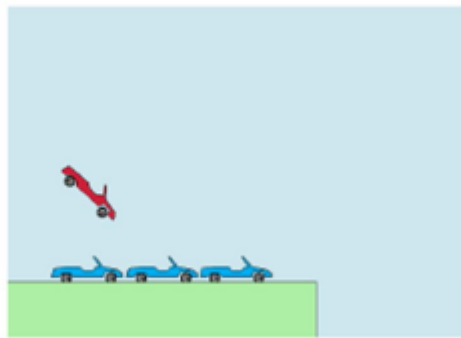
- Prueba de múltiples versiones de su diseño.
- Rápido "ejecutar-analizar-refinar", siendo el ciclo anterior de gran ayuda para optimizar los diseños antes de construir prototipos físicos.
- Reducir la creación de prototipos físicos, reduciendo el gasto de esta actividad.
- Control del entorno de simulación.
- Ejecutar, detener, reiniciar, paso a paso o pausar la simulación en cualquier momento.
- Permite la medición de fuerzas, par, aceleración, etc. que actúan sobre un objeto.
- Salida de datos como vectores o en números y gráficos en unidades métricas o Inglesa.
- Importe sus dibujos CAD en 2D en formato DXF.
- Los valores de entrada de las ecuaciones, sliders y enlaces DDE a Matlab y Excel.
- Diseño de vínculos con las juntas de unión, ranuras, motores, resortes y amortiguadores.
- Creación de cuerpos y especificar sus propiedades de masa, velocidad inicial, carga electrostática, etc.
- Simulación de contacto, colisiones y fricción.
- Analizar las estructuras con vigas flexibles los esfuerzos cortantes, momento flector y los respectivos diagramas.
- Ejecutar o editar los scripts para optimizar simulaciones, modelos de documentos, etc.
- Registro de datos de simulación y creación de gráficos o archivos de vídeo AVI para su reproducción.
- Crear presentaciones visualmente atractivas, adjuntando fotos.

*Ejemplos de aplicación:*

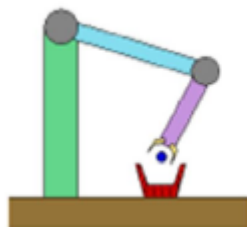
Reconstrucción de Accidentes:



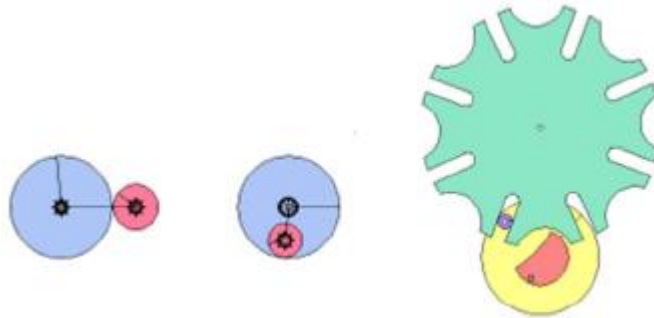
Animación:



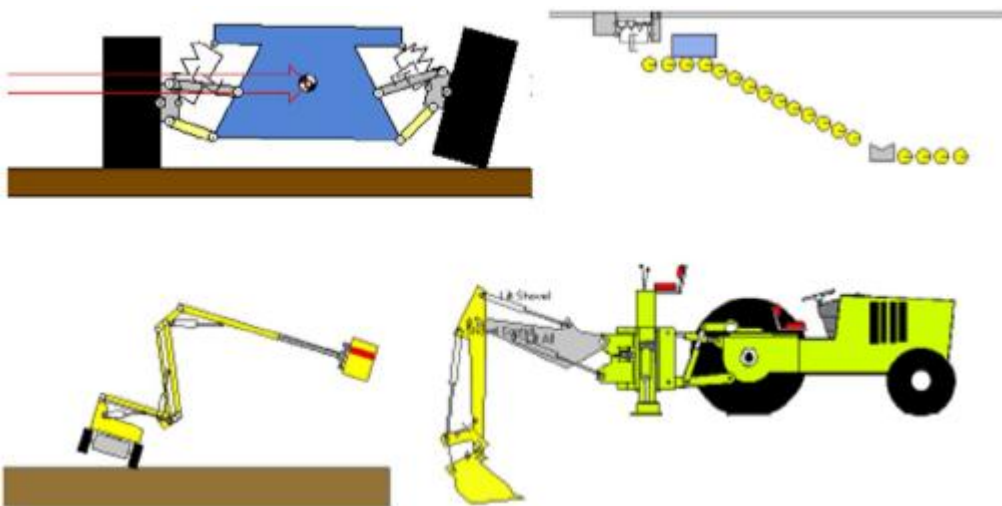
Controles:



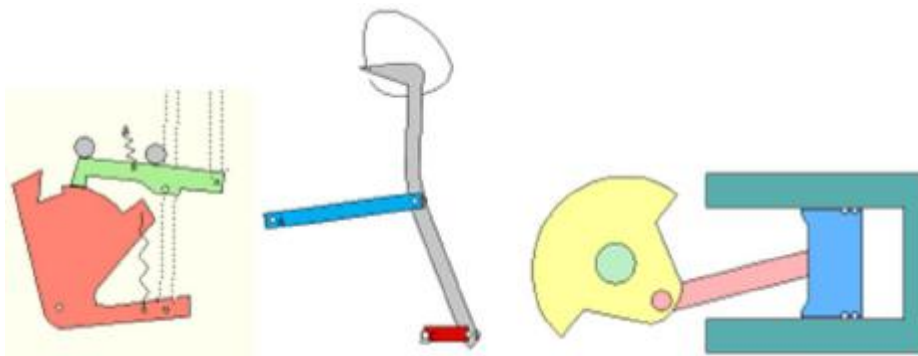
Engranajes:



Máquinas:

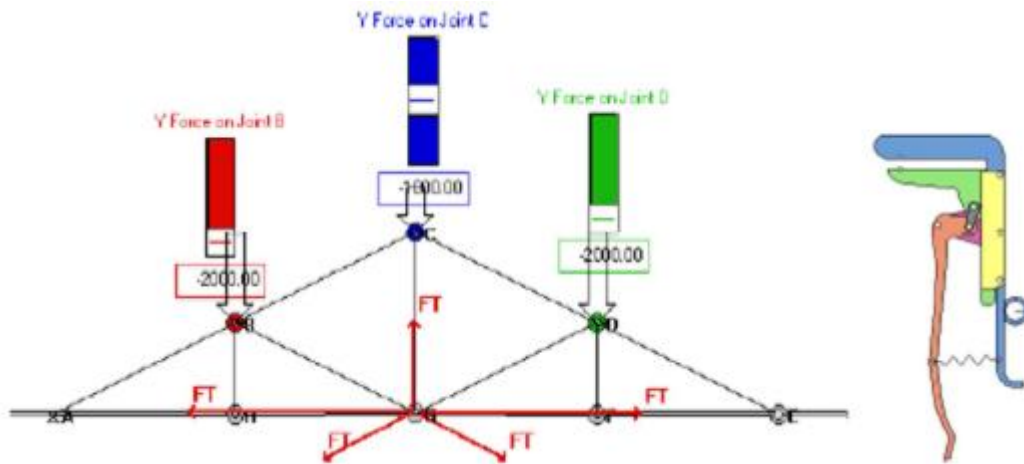


Mecanismos:





Estática:



Utilizado como herramienta en la propuesta y resolución de ejercicios de simulación en varios libros de texto (estática, dinámica y diseño de máquinas):

Publisher	Title	Author
McGraw-Hill	Vector Mechanics 6th edition	Beer and Johnston
McGraw-Hill	Design of Machinery 2/e	Norton
McGraw-Hill	Design of Machinery 3/e	Norton
Oxford University Press	Mechanics of Machines	Cleghorn
Prentice-Hall	Engineering Mechanics Statics and Dynamics 3/e	Bedford and Fowler
Prentice-Hall	Engineering Mechanics Statics and Dynamics	Hibbeler
Prentice-Hall	Engineering Mechanics, Statics	Hibbeler
Prentice-Hall	Engineering Mechanics, Dynamics	Hibbeler

➤ MathCad:

“*Mathcad*” es un programa algebraico de computadora similar a Mathematica, distribuido por PTC. A diferencia de Mathematica, MathCad es más intuitivo de usar, permite el uso de plantillas de funciones en las que solo es necesario escribir los valores deseados, incluso para graficar funciones.

*Descripción:*

Mathcad es un entorno de documentación técnica con prestaciones de cálculo numérico y simbólico, que permite explorar problemas, formular ideas, analizar datos, modelar y chequear escenarios, determinar la mejor solución, como así también documentar, presentar y comunicar los resultados.

Algunas de las capacidades matemáticas de Mathcad están basadas en parte del código del programa algebraico Maple (Núcleo MathSoft de Maple o Mathsoft Kernel Maple, MKM).

MathCad se encuentra organizado como una hoja de trabajo, en las que las ecuaciones y expresiones se muestran gráficamente, no como simple texto.

Dentro de las capacidades de MathCad se encuentran:

- Resolver ecuaciones diferenciales con varios métodos numéricos.
- Graficar funciones en dos o tres dimensiones.
- El uso del alfabeto griego (letras griegas mayúsculas y minúsculas).
- Cálculo de expresiones simbólicas.
- Operaciones con arreglos (vectores y matrices).
- Solución simbólica de un sistema de ecuaciones.
- Encontrar la gráfica (la curva de tendencia) de un grupo de datos.
- Implementación de subprogramas.
- Encontrar raíces de polinomios y funciones.
- Funciones estadísticas y distribuciones de probabilidad.
- Encontrar valores propios o autovalores y vectores propios o autovectores.

➤ AutoCad:

“Autodesk-AutoCAD” es un programa de diseño asistido por computadora (CAD: "Computer Aided Design"; en inglés, Diseño Asistido por computadora) para dibujo en 2D y 3D. Actualmente es desarrollado y comercializado por la empresa Autodesk.

Al igual que otros programas de Diseño Asistido por Ordenador (DAC), AutoCAD gestiona una base de datos de entidades geométricas (puntos, líneas, arcos, etc.) con la que se puede operar a través de una pantalla gráfica en la que se muestran éstas, el llamado editor de dibujo. La interacción del usuario se realiza a través de comandos, de edición o dibujo, desde la línea de órdenes, a la que el programa está fundamentalmente orientado. Las versiones modernas del programa permiten la introducción de éstas mediante una interfaz gráfica de usuario o en inglés GUI, que automatiza el proceso.

Como todos los programas y de DAC, procesa imágenes de tipo vectorial, aunque admite incorporar archivos de tipo fotográfico o mapa de bits, donde se dibujan figuras básicas o primitivas (líneas, arcos, rectángulos, textos, etc.), y mediante herramientas de edición se crean gráficos más complejos. El programa permite organizar los objetos por medio de capas o estratos, ordenando el dibujo en partes independientes con diferente color y grafismo. El dibujo de objetos seriados se gestiona mediante el uso de bloques, posibilitando la definición y modificación única de múltiples objetos repetidos.

➤ Catia V5:

“Catia V5” es un programa informático de diseño, fabricación e ingeniería asistida por computadora comercial realizado por Dassault Systèmes (CATIA: "computer-aided three dimensional interactive application"; en inglés, Aplicación Interactiva Tridimensional Asistida por Ordenador). El programa está desarrollado para proporcionar apoyo desde la concepción del diseño hasta la producción y el análisis de productos.

Provee una arquitectura abierta para el desarrollo de aplicaciones o para personalizar el programa. Las interfaces de programación de aplicaciones, CAA2 (o CAAV5), se pueden programar en Visual Basic y C++.

Fue inicialmente desarrollado para servir en la industria aeronáutica. Se ha hecho un gran hincapié en el manejo de superficies complejas. CATIA también es ampliamente usado en la industria del automóvil para el diseño y desarrollo de componentes de carrocería. Concretamente empresas como el Grupo VW (Volkswagen, Audi, SEAT y Škoda), BMW, Renault, Peugeot, Daimler AG, Chrysler, Smart y Porsche hacen un amplio uso del programa. La industria de la construcción también ha incorporado el uso del software para desarrollar edificios de gran complejidad formal; el museo de la fundación Guggenheim en Bilbao, España, es un hito arquitectónico que ejemplifica el uso de esta tecnología.

#### **14. BIBLIOGRAFÍA:**

- “A Simple and General Method for Kinematic Synthesis of Spatial Mechanisms” (Jimenez, J.M.; Álvarez, G.; Cardenal, J.; Cuadrado J. Source).
- “Diseño de maquinaria” (Robert L. Norton).
- “Fundamentos de mecanismos y máquinas para ingenieros” (Roque Calero y José Carta).
- “Kinematic And Dynamic Simulation Of Multibody Systems” (Javier García de Jalón y Eduardo Bayo).
- “Manual de Automóviles” (Arias Paz).
- “Síntesis de mecanismos” (Justo Nieto).
- <http://www.design-simulation.com/wm2d/success.php>
- Código Técnico de la Edificación.
- “Estructuras metálicas. Cálculo” (Argüelles Álvarez, Ramón)