ENSEÑAR GEOMETRÍA EN CONTEXTOS DE DISEÑO: LA PROPORCIÓN CORDOBESA

Eje 3: Interdisciplina y articulación entre materias

Carlos Federico[1], Néstor Díaz[1], María Arias Mercader[1,2]
Facultad de Arquitectura y Urbanismo[1], Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación[2].
Universidad Nacional de La Plata
cvfederico@yahoo.com.ar

Palabras clave: ENSEÑANZA - GEOMETRÍA – DISEÑO – INTERDISCIPLINA – PROPORCIÓN CORDOBESA

INTRODUCCÓN: LA PROPORCIÓN CORDOBESA

El curso de posgrado *Geometría y Arte: Morfogeneradores geométricos en el Diseño*, pertenece al Programa de Actualización Profesional de la Facultad de Arquitectura y Urbanismo de la UNLP. Los docentes a cargo, provenientes del campo de la enseñanza de la Matemática y de la Arquitectura, abordamos ciertas problemáticas de geometría y del arte, desde una perspectiva interdisciplinaria que favorece la construcción de conocimientos teóricos y prácticos relativos a las vinculaciones entre dichas disciplinas, desde un enfoque integrador.

Siguiendo a Agazzi (2002), desde un enfoque sistémico, un trabajo de investigación interdisciplinar aborda el problema de comprensión de un objeto complejo. Dicho problema debe determinarse de manera exacta, y también deben individuarse los distintos aspectos del mismo que, para poder ser analizados y comprendidos, requieren de la cooperación de disciplinas bien individualizadas. Por otra parte, la comprensión interdisciplinaria se evidencia al integrar conocimientos y modos de pensar de dos o más disciplinas, para crear productos, resolver problemas y ofrecer explicaciones sobre el mundo (Boix Mansilla, Miller & Gardner, 2000).

Entre los tópicos abordados en el curso, se encuentra la Proporción Cordobesa como parte del estudio de las proporciones notables.

En el año 1944, la Universidad Central de Madrid, quiso demostrar la atemporalidad de la Proporción Áurea, para lo cual propuso rastrear su influencia en las distintas arquitecturas en una ciudad milenaria. A tal fin, fue seleccionada la ciudad de Córdoba, en Andalucía.

¿Por qué Córdoba? La ciudad estuvo varios siglos bajo el dominio árabe, y convivieron en ella tres culturas, la árabe, la cristiana y la judía, sin que los conquistadores hubieran sustituido en cada caso a la población, pese a las numerosas ocupaciones por las que atravesó. Además, fue allí donde se efectuó la traducción al árabe de “Los elementos” de Euclides, que se estudiaban en sus escuelas, por lo que era conocido el problema de la división de un segmento en “media y extrema razón”. Por lo tanto, se suponía que dicha ciudad sería sensible a tal canon de armonía presente en la naturaleza.

El estudio tenía como antecedente el realizado en 1876 por el filósofo alemán Gustav Fechner, con el propósito de mostrar la absoluta belleza de la proporción áurea. Dicho trabajo consistió en presentar a varios cientos de personas de su círculo cultural, diez secciones, pidiéndoles que eligieran la más bella. La mayoría eligió el rectángulo áureo.

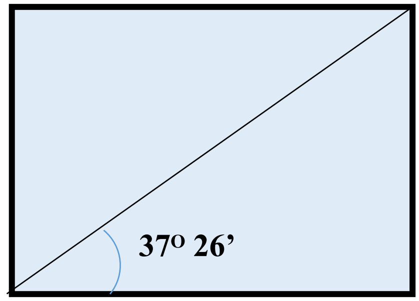
Sin embargo, contrariamente a lo esperado, en la arquitectura cordobesa no se encontró la presencia del número de oro, por lo que el proyecto fue cancelado.

Años más tarde, en 1951, la diputación de Córdoba pidió al arquitecto Rafael de la Hoz Arderius que realizara una prueba de aptitud para ingresantes a la Facultad de Arquitectura, con el propósito de otorgar becas. En la misma éste incluyó un test ya usado en la Universidad de Yale, que retomaba el trabajo de Fechner. En el test se presentaban dos rectángulos, uno muy alargado y otro próximo a un cuadrado, y se solicitaba que se dibujara un tercer rectángulo ideal, que no fuera “desproporcionadamente alto ni bajo, un rectángulo bello, equilibrado, perfecto” (de la Hoz Arderius, 1996).

De la Hoz Arderius esperaba que ese tercer rectángulo tuviera proporción áurea. Recordemos que llamamos *módulo* o *proporción* de un rectángulo cuyas longitudes de sus lados son a y b, a $\text{máx}(a, b)/\text{mín}(a, b)$. Cuando este cociente es un número racional, decimos que el rectángulo tiene *proporción estática*; y cuando es irracional, decimos que tiene *proporción dinámica*. Es decir, el citado arquitecto esperaba que $\text{máx}(a, b)/\text{mín}(a, b) = ø$, donde ø es el número de oro, $ø = 1,618\ldots$

Sin embargo, en la prueba de Córdoba, no se encontró ningún rectángulo en divina proporción. En cambio, la mayoría de los estudiantes dibujó un rectángulo de proporción 1,3. Repitió entonces la experiencia, para personas nacidas o con larga residencia en la ciudad de Córdoba, encontrándose nuevamente la proporción 1,3 en muy alta frecuencia. El fracaso en hallar la proporción áurea condujo a Rafael de la Hoz Arderius (1996) hacia una nueva proporción, una proporción desconocida que aguardaba a ser anunciada, acechando desde hacía siglos en la arquitectura cordobesa. La llamó proporción cordobesa, siendo la misma un número irracional denominado número cordobés, que se denota por C.

De la Hoz (1996) analizó posibles razones por las que el pueblo cordobés prefería esta proporción. Atendiendo a que Córdoba fue fundada por los romanos e integró el Imperio Romano durante ocho siglos, estudió las esculturas del museo arqueológico local, hallando que se encuentran en proporción 1,3.



Y, fundamentalmente, encontró que la arquitectura cordobesa está ordenada, consciente o inconscientemente, en torno a esta proporción, (de la Hoz Arderius, 1996).

Como todos los rectángulos semejantes tiene sus diagonales paralelas, es a partir de la identificación de esas diagonales, correspondientes a rectángulos cordobeses colocados en posición vertical y horizontal, que de La Hoz Arderius analizó y relevó la presencia de rectángulos cordobeses en las obras arquitectónicas más importantes de Córdoba.

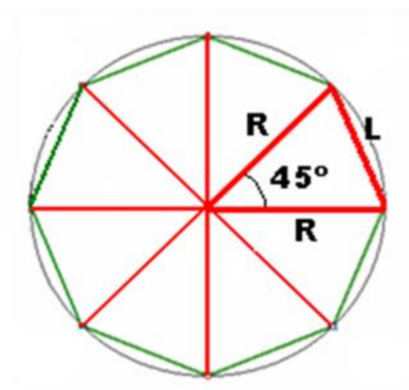
La Gran Mezquita de Córdoba, considerado el elemento más representativo de la arquitectura musulmana en España, se encuentra en proporción cordobesa y tiene espacios bien diferenciados que mantienen dicha proporción: el bosque de columnas, la puerta de Al-Hakan II, la fachada del Mihrab… A esto se añade la presencia de dicha proporción en la fachada interior de la Sinagoga de Córdoba, construida en el siglo XIV, único ejemplo de arquitectura judía en Andalucía.

En cuanto a los edificios cristianos, la proporción cordobesa se encuentra, entre otros, en la cubierta de Santa Marina de Aguas Santas, del siglo XII; en la iglesia de la Merced, erigida en el siglo XVIII; y en la fachada del Convento de Capuchinos. Es decir, los edificios de las distintas religiones de la ciudad están en proporción C.

Buscando otras razones de la elección de esa proporción, el arquitecto se preguntó si habrían influido cuestiones climáticas en el uso de la misma, y encontró posibles vinculaciones de la arquitectura en proporción cordobesa con el clima.

Córdoba es una de las regiones de España donde las lluvias tienen mayor intensidad y duración, por lo que sus tejados tienen la mayor pendiente que posibilitaban las tejas, que en tiempos pasados no se ataban ni clavaban, y que alcanza los 37º. Asimismo, las fachadas solían contar también con un frontón triangular, con una inclinación de 37º. En ambos casos, el ángulo, en la práctica, coincide con el que forma la diagonal del rectángulo cordobés con uno de sus lados: 37º 26'.

A estos análisis, se suma otra consideración. Se sabe que la proporción áurea surge de la relación entre el radio de la circunferencia y el lado del decágono regular inscripto; que la proporción cuadrada surge de la relación entre el radio de la circunferencia y el lado del hexágono regular inscripto; que la proporción armónica surge de la relación entre el lado de un cuadrado inscripto y el radio de la circunferencia. Es decir, se consideran el radio de la circunferencia y los lados de los polígonos regulares inscriptos de cuatro, seis y diez lados. De la Hoz Arderius consideró entonces el polígono regular de ocho lados, y propuso que la relación cordobesa debe surgir de la relación entre el radio de la circunferencia y el lado del octógono regular inscripto.



$$L^2 = R^2 + R^2 - 2\,R\,R\,\cos 45^\circ$$

$$L^2 = 2R^2 - 2R^2\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$L^2 = 2R^2 - R^2\sqrt{2}$$

$$L^2 = R^2\left(2 - \sqrt{2}\right)$$

$$L = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$\frac{R}{L} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \approx 1{,}3065\ldots$$

El octógono resulta una forma constructiva frecuente dado la sencillez de su trazado geométrico, y por ser una buena aproximación poligonal al círculo. Esta relación con el octógono no es casual, dado que, así como en las arquitecturas islámica y romana, en toda la arquitectura cordobesa es recurrente el uso del octógono.

La "bóveda cordobesa", solución constructiva que se emplea en la Gran Mezquita de Córdoba, tiene forma octogonal. Esa es, además, la forma de la bóveda del Mihrab, el recinto sagrado más importante de la misma, y también es parte de la cubierta de la Catedral inserta en la Gran Mezquita. Asimismo son octogonales las torres principales de la fortaleza de la Malmuerta, partiendo de un cuadrado la torre de la iglesia de San Nicolás, y a partir de una base circular que luego se torna octogonal, la torre del Alcázar. Por otra parte sus plazas, como la de Aguilar de la Frontera o la desaparecida plaza de Gallo, tienen planta octogonal. La misma planta que sus fuentes, tales como la de La Merced, El Potro y San Andrés. Se podría seguir enumerando casos.

Finalizada su investigación en Córdoba, de la Hoz Arderius tuvo acceso a otro estudio de Fechner, quien midió los cuadros relevantes de numerosas pinacotecas europeas, y al hallar su proporción media encontró que la misma era 1,3. Esto lo llevó a buscar y encontrar dicha proporción en numerosas obras arquitectónicas, pertenecientes a distintos cortes espacio-temporales, tales como el Panteón de Agripa en Roma, el acueducto romano de Segovia, la Giralda de Sevilla, el Arco de L'Etoile en París, el Arco de la Victoria en Madrid y la Catedral Metropolitana de Santa Fé de Bogotá, la Iglesia de la Compañía de Jesús de la ciudad de Córdoba en Argentina, entre otras.

OBJETIVOS

Con distinto grado de generalidad, nos proponemos que los cursantes:

- construyan conocimientos acerca de la proporción cordobesa;
- identifiquen dicha proporción en distintas obras arquitectónicas;
- valoren la proporción cordobesa como morfogenerador de hechos proyectuales.

ACCIONES DESARROLLADAS

Siguiendo el marco de la Didáctica Francesa, los cursantes, graduados y estudiantes avanzados de carreras de Diseño y de Profesorados en Matemática, resuelven problemas que favorecen la construcción de conocimientos funcionales, es decir, se proponen situaciones didácticas que hacen funcionar al conocimiento como regulador eficaz que permite controlar las mismas (Brousseau, 2007). Los problemas propuestos apuntan a que los cursantes se apropian de los modos de producir y de comunicar de la Matemática, a la que consideramos un producto cultural y social. Se recurre a contextos tanto intramatemáticos como extramatemáticos. En particular, el contexto del diseño contribuye a otorgar sentido al conocimiento matemático para aquellos cursantes que provienen de dicho campo, a la vez que ofrecen un contexto poco explotado para los futuros docentes de Matemática.

Los distintos módulos del curso se desarrollan partiendo de los conocimientos matemáticos, en particular los geométricos, involucrados en la generación de formas en el campo del diseño; e inversamente, partiendo del análisis y comprensión de ciertos hechos de diseño, considerando el aspecto geométrico de su proceso creativo.

En todos los casos, se realiza una presentación del tópico que recurre a aspectos históricos, entendiendo, como plantea González Urbaneja (2004), que la historia de la Matemática pone en evidencia tanto la dimensión cultural de la Matemática como su impacto en la historia del Pensamiento. De acuerdo al autor, la historia aporta a la comprensión de los problemas matemáticos a través de la interpretación del contexto y del proceso que lleva a formular y reformular un concepto matemático, y de la identificación de las cuestiones que el mismo resuelve, evidenciando las características dinámicas de la actividad científica.

Dicha presentación se alterna con actividades de resolución de problemas a cargo de los cursantes.

DESARROLLO PARCIAL DE UN TRABAJO PRÁCTICO

Corresponde al Módulo I: La Proporción. Córdoba y Andalucía: la proporción cordobesa.

Se ha seleccionado una secuencia de actividades, que giran alrededor del rectángulo cordobés. En el mismo trabajo practico, una segunda secuencia se desarrolla alrededor del octógono regular. La secuencia de actividades se organiza a partir de la resolución de problemas de complejidad creciente, en la que los contenidos puestos en juego en las primeras actividades son reinvertidos en las actividades siguientes.

Actividad 1: Empezando a construir

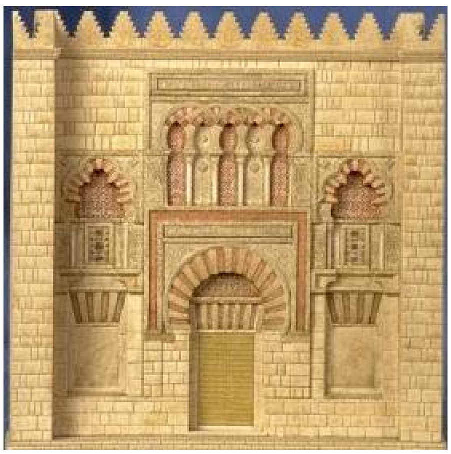
Construyan un rectángulo cordobés. Justifiquen la construcción llevada a cabo.

Comentario: A partir de la recuperación de los conocimientos disponibles construidos a lo largo de la formación general de grado, y de nociones abordadas en la presentación del tema, como la relación entre el radio y el lado del octógono regular, se pretende que los cursantes lleven a cabo una construcción con regla y compás. Esta tarea ofrece la posibilidad de utilizar multiplicidad de estrategias constructivas.

Actividad 2: Rectángulos por todas partes

Dibujen las elevaciones de las siguientes imágenes correspondientes a la Mezquita de Córdoba (siglo VIII – siglo XVI) e identifiquen los rectángulos cordobeses utilizados como morfogeneradores.

Comentario: Comprendidas las condiciones que cumple un rectángulo cordobés, los cursantes están en condiciones de identificarlos en obras arquitectónicas. En este caso, la proporción cordobesa y la forma del rectángulo son identificadas como morfogeneradores geométricos (generación de formas a partir de figuras geométricas y de sus propiedades), que se ubican en forma subyacente o en forma manifiesta. Esta actividad favorece la construcción de esquemas de interpretación y análisis de obras de diseño a partir de la utilización de modelos geométricos. Por otra parte, permite que los alumnos adviertan la relación entre la Geometría y otros objetos del mundo de la cultura, y valoren la importancia de los conceptos geométricos tratados.

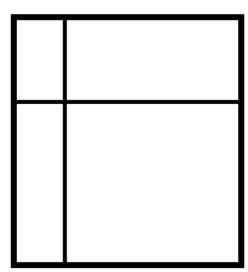


Portada de Al-Hakam II.
Puerta de entrada en la fachada occidental (siglo X).

Interior.
Bosque de columnas
(tercera ampliación -987-).

Actividad 3: Diseñando un póster cordobés. (Adaptado de un problema presentado por Moya Molina, G. (1996), VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática "Thales").

Si observan la estructura del siguiente póster notarán que se trata de un rectángulo donde se ha elegido un punto interior, se ha trazado por ese punto paralelas a los lados del rectángulo y de esa forma se lo ha divido en cuatro rectángulos.

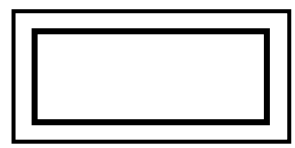


Si se desea obtener propuestas alternativas de cómo estructurar el diseño de un "póster cordobés": ¿Cómo eligen el punto en el interior de un rectángulo cordobés para que los cuatro rectángulos sean cordobeses? ¿Y para que sean dos? ¿Y para que sólo uno de los ellos siga siendo cordobés? ¿Y para que sólo sean tres? ¿Es posible que uno sea un cuadrado y otro un rectángulo cordobés? Dibujen cada una de las soluciones halladas.

Comentario: Ahora los discentes tienen que reutilizar los conocimientos acerca del rectángulo cordobés construidos en las dos primeras actividades, para representar rectángulos cordobeses bajo ciertas restricciones, que complejizan el problema inicial. Para resolver la actividad, se recurre a la utilización de modelos geométricos para fundamentar aspectos del Diseño. Es necesario que comprendan las ideas directrices de la Geometría aportadas, correspondientes a la teoría de proporciones.

Actividad 4: Aspiraciones vanas de un vano

Dada una "ventana" donde la hoja está en proporción cordobesa. ¿Cuál es el ancho del marco que habría que ponerle para que el conjunto quede en proporción áurea?



Comentario: Se reinvierten las nociones antes abordadas, vinculando la proporción áurea y la cordobesa. Como la actividad no puede resolverse en el registro gráfico, obliga a recurrir al algebraico. El trabajo en distintos marcos (Douady, 1984), favorece la construcción de la red de nociones vinculada al campo conceptual de las proporciones (Vergnaud, 1990).

Actividad 5: Practicando con *cartabón cordobés*

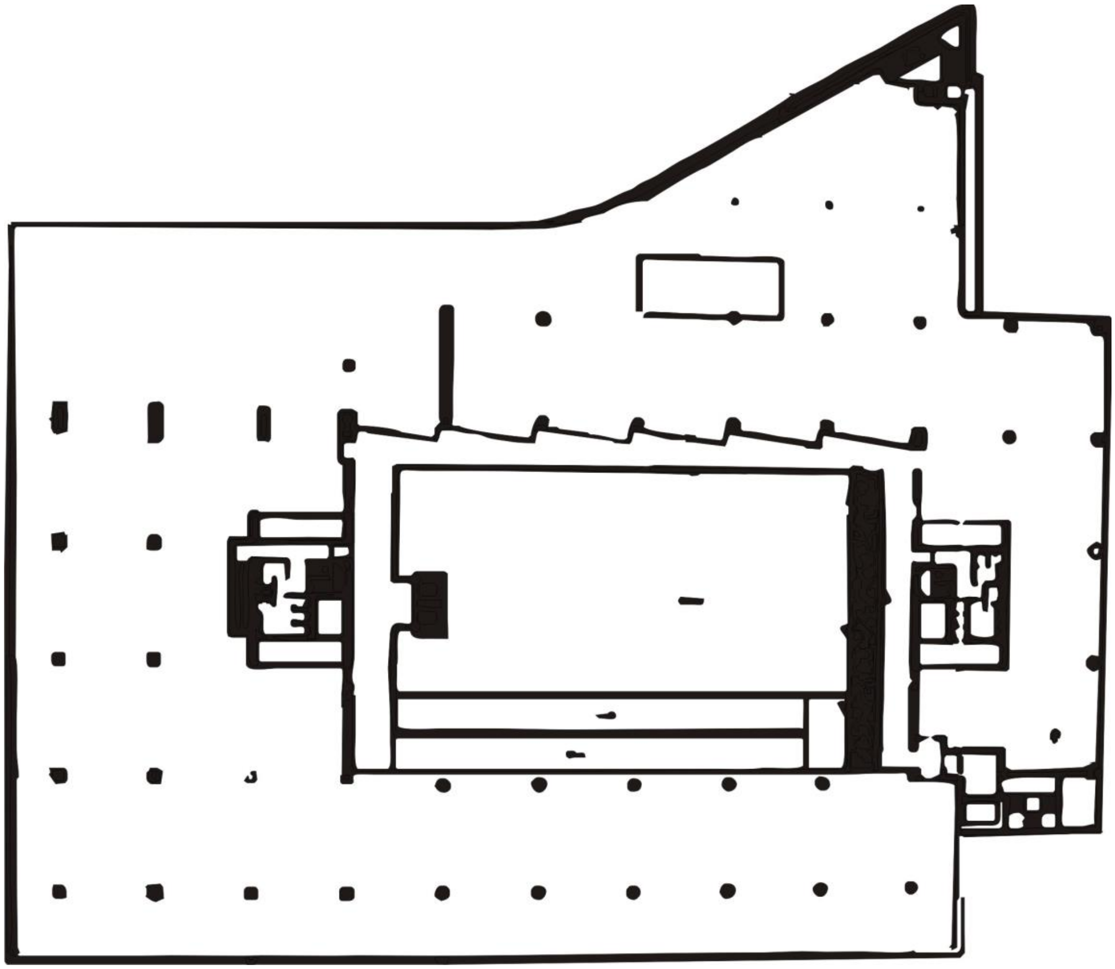
Habiendo aprendido a usar el *cartabón cordobés* (instrumento de dibujo técnico) para detectar rectángulos o para facilitar la construcción de rectángulos, en este caso de módulo C; resuelvan el ítem a) o el ítem b):

a) Analicen la fachada del Convento de Capuchinos en la ciudad de Córdoba, España.

Comentario: En la imagen se muestra la resolución realizada por un grupo de cursantes. Los segmentos indican las diagonales de los rectángulos cordobeses que involucran puntos significativos de la fachada. Los cursantes cuentan con la imagen de la fachada, sin el análisis en cuestión.

b) Analicen la planta del nivel cero del edificio del *Centro Nacional de Supervisión y Organización de Telefónica, Aravac-Madrid,* y dibujen convenientemente los rectángulos cordobeses detectados.

Bosquejo de la planta baja del Centro Nacional de Supervisión y Organización de Telefónica (1993) en Madrid del Arq. Rafael de la Hoz Arderius.



Comentario: Los cursantes pueden elegir entre dos hechos arquitectónicos cuya documentación gráfica se presenta. Se solicita abordar la resolución de la actividad utilizando el llamado cartabón cordobés y graficar siguiendo las pautas utilizadas en el curso. En el problema retoma el trabajo en el marco geométrico, analizando obras con otras restricciones que las de la Actividad 2.

RESULTADOS

De las encuestas implementadas por la FAU-UNLP y completadas por los cursantes surge que:

- Los contenidos resultaron novedosos, por su tratamiento y ser poco conocidos.
- Los cursantes consideraron transferible al aula, en otros niveles educativos, este enfoque interdisciplinario.

De los resultados de los trabajos monográficos, se desprende que:

- Los alumnos se involucraron con la propuesta.

- La producción fue satisfactoria.
- La disparidad en los niveles de las producciones se vincula con las diferentes formaciones y experiencias áulicas de los cursantes.
- En los grupos de trabajo interdisciplinarios, se detectó mayor rendimiento que en los de una misma formación disciplinar.
- Algunos de los trabajos fueron reformulados para su transferencia al aula.

ALGUNAS CONCLUSIONES

- La metodología empleada favorecería la construcción de aprendizajes de Geometría y de Diseño.
- El trabajo interdisciplinario de los cursantes colaboraría en la elaboración de producciones más ricas y de mayor profundidad, que el trabajo en grupos de una misma formación disciplinar.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Agazzi, E. (2002). El Desafió de la Interdisciplinaridad: dificultades y logros. Seminario en Departamento de Filosofía, Universidad de Navarra. Recuperado de http://www.unav.es/gep/DesafioInterdisciplinaridad.html

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: libros del Zorzal.

de la Hoz Arderius, R. (1996). La Proporción cordobesa. En de la Fuente Martos, M., & Rodríguez, M. T. (Eds.). *VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática" Thales": cultura y matemáticas: Córdoba, 7 al 10 de septiembre de 1995*. Universidad de Córdoba, Servicio de Publicaciones.

Douady, R. (1984). Juego de cuadros y dialéctica herramienta-objeto en la enseñanza de la matemática. Universidad París VII. (Traducción de circulación interna).

Federico, C. y Díaz, N. (2005). La hija no reconocida de la familia de las proporciones. *Journal of Mathematics & Design Vol.2*, 89-95.

Federico, C. Díaz, N. y Arias Mercader M. (2006). La proporción cordobesa. Una secuencia de actividades para su enseñanza. *Journal of Mathematics & Design Vol.6*, 21-28.

González, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma*, *45*, 17-28.Recuperado de https://revistasuma.es/IMG/pdf/45/017-028.pdf

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*(2), 3.

Boix Mansilla, V., Miller, W. C., & Gardner, H. (2000). On disciplinary lenses and interdisciplinary work. *Interdisciplinary curriculum: Challenges to implementation*, 17-38.