

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA**



**IMPLEMENTACIÓN DE UN SISTEMA DE ENCRIPADO
CAÓTICO DE ORDEN FRACCIONARIO EN FPGA**

POR

ALFREDO DANIEL CORTÉS PRECIADO

**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA ELÉCTRICA**

OCTUBRE, 2016

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**



**IMPLEMENTACIÓN DE UN SISTEMA DE ENCRIPTADO
CAÓTICO DE ORDEN FRACCIONARIO EN FPGA**

POR

ALFREDO DANIEL CORTÉS PRECIADO

**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA ELÉCTRICA**

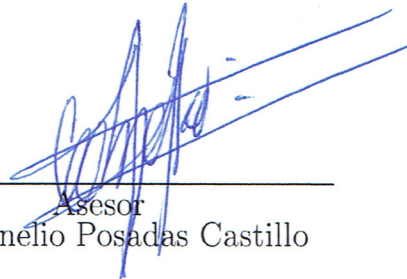
SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN,

OCTUBRE DE 2016

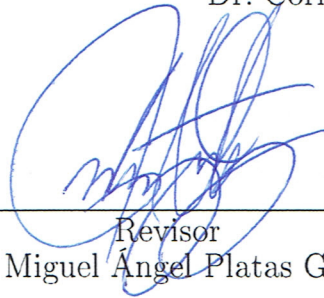
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis “IMPLEMENTACIÓN DE UN SISTEMA DE ENCRIPTADO CAÓTICO DE ORDEN FRACCIONARIO EN FPGA” realizada por el alumno **Alfredo Daniel Cortés Preciado**, con número de matrícula **1444614**, sea aceptada para su defensa como opción al grado de **Maestro en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica**.

El Comité de Tesis

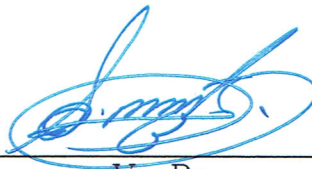


Asesor
Dr. Cornelio Posadas Castillo



Revisor
Dr. Miguel Ángel Platas Garza

Revisor
Dr. Roque Martínez Ortíz



Vo. Bo.
Dr. Simón Martínez Martínez
Subdirector de Estudios de Posgrado

A mis padres, Sonia y Alfredo por brindarme siempre su apoyo, en especial a mi madre por su confianza.

También a mis hermanas Denisse y Debany por comprenderme.

A mi novia, Alma por alentarme y acompañarme en más de la mitad de este proyecto.

Gracias a Dios y a ustedes por estar conmigo.

Agradecimientos

A mis padres por brindarme siempre su apoyo, y a mi familia en general por apoyarme y motivarme día con día.

A mi asesor, el Dr. Cornelio Posadas Castillo por guiarme a lo largo de este trabajo de investigación, así como proporcionarme sus valiosos comentarios y sugerencias para la culminación de este trabajo.

Al Dr. Miguel Ángel Platas Garza, por su apoyo y asesoría, para la aplicación en tiempo real del encriptado y desencriptado de información.

A mis profesores del programa Doctorado en Ingeniería Eléctrica (DIE), por los conocimientos proporcionados con los cuales comprendí los diferentes campos de estudio de esta investigación, especialmente al Dr. René Galindo Orozco, por su apoyo para comprender e interesarme en el modelado y simulación de sistemas dinámicos durante la licenciatura y por brindarme la carta de recomendación para ingresar al Posgrado.

A mis compañeros de Posgrado, en especial a Aldebarán, Miguel Tovar, Simón, Vidal, Antonio Zalapa, Omar y a las personas ajenas, Roberto Villarreal y Rubén Treviño, por ayudarme a comprender y reproducir todo lo necesario para la elaboración de este proyecto.

A las personas que me ayudaron a familiarizarme en este trabajo de investigación, Allan G. Soriano Sánchez, Eliezer Garza González y Otoniel García Sepúlveda.

Por último al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) y a la UANL por las becas de manutención y de estudios otorgadas durante mis estudios.

Resumen

IMPLEMENTACIÓN DE UN SISTEMA DE ENCRIPTADO CAÓTICO DE ORDEN FRACCIONARIO EN FPGA

Publicación No. _____

Alfredo Daniel Cortés Preciado

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Asesor: Dr. Cornelio Posadas Castillo

Octubre 2016

Este trabajo de investigación trata sobre implementar un sistema de encriptado mediante una tarjeta FPGA para la transmisión de información de forma segura, utilizando la sincronización maestro - esclavo, aprovechando el ancho de banda que ofrecen los osciladores caóticos de orden fraccionario, para hacer un encriptado eficiente. Las simulaciones con los osciladores caóticos de orden fraccionario son aproximaciones de sistemas en tiempo continuo aunque sean modeladas por ecuaciones en diferencias produciendo una dinámica caótica.

Se describen del campo de estudio de las redes complejas, las dos configuraciones, y las simulaciones se realizan utilizando la configuración bidireccional y la topología implementada es la de mundo pequeño. El algoritmo de mundo pequeño que se utiliza es el de Newman-Watts (NW).

Para seleccionar adecuadamente la señal caótica, se utilizan dos criterios, estos criterios se aplican en los dominios de tiempo y frecuencia, con el objetivo de obtener un mayor nivel de seguridad, se realiza la modulación en frecuencia de la señal caótica para enmascarar el mensaje, a una frecuencia audible por el humano.

La principal aplicación de este trabajo es la implementación física de un sistema de comunicación caótico, transmitiendo un audio encriptado, modulado en

frecuencia, utilizando el método de encriptado aditivo, y la configuración maestro - esclavo, para procesamiento en tiempo real o en línea, utilizando el software y hardware LabVIEW de NI con apoyo de dos tarjetas electrónicas NI myRIO 1900, una tarjeta para transmitir un audio encriptado y otra tarjeta para recuperar el audio original.

Palabras clave: Caos, sistemas caóticos, osciladores caóticos de orden fraccionario, redes complejas, redes de mundo pequeño NW, sincronización, transmisión de audio encriptado en tiempo real.

Contenido

Lista de figuras	X
Lista de tablas	XII
1. Introducción	1
1.1. Objetivo General	1
1.2. Objetivos Específicos	1
1.3. Antecedentes	2
1.3.1. Sincronía	2
1.3.2. Caos.	3
1.3.3. Criptología.	6
1.3.4. Encriptado caótico.	9
1.4. Motivación	9
1.5. Estructura del Trabajo	10
2. Redes Complejas	12
2.1. Teoría de grafos	12
2.2. Definiciones	13
2.3. Representaciones y topologías de las redes complejas	14
2.3.1. Redes con topología regular	16
2.3.1.1. Acoplamiento global	16
2.3.1.2. Acoplamiento estrella	17
2.3.1.3. Acoplamiento en anillo	18
2.3.2. Redes con topología irregular	18
2.3.2.1. Acoplamiento irregular	19
2.3.2.2. Acoplamiento anillo en configuración maestro - esclavo	19
2.4. Redes de mundo pequeño	21

2.4.1. Redes de mundo pequeño Newman y Watts	22
3. Osciladores caóticos de orden fraccionario	26
3.1. Cálculo fraccionario	26
3.2. Oscilador de Chen de orden fraccionario	28
3.3. Oscilador de Chua de orden fraccionario	30
3.4. Oscilador de Lorenz de orden fraccionario	35
3.5. Oscilador de Lü de orden fraccionario	38
3.6. Oscilador de Liu de orden fraccionario	40
4. Sincronización de redes complejas en topología mundo pequeño	44
4.1. Definiciones de sincronización	44
4.2. Sincronización de redes complejas	45
4.3. Sincronización de una red de 10 osciladores Chua de orden fraccionario	47
4.4. Sincronización de red de 18 osciladores Lorenz de orden fraccionario .	53
4.5. Sincronización de una red de 24 osciladores Liu de orden fraccionario	59
5. Encriptado de datos utilizando redes de osciladores caóticos	65
5.1. Criterios de selección de la señal caótica	65
5.1.0.1. Criterio 1: Selección basada en la energía de la señal	66
5.1.0.2. Criterio 2: Selección de energía del espectro de la señal	67
5.1.0.3. Espectro de las señales del oscilador caótico	68
5.2. Modulación en frecuencia del sistema caótico de orden fraccionario . .	69
5.3. Implementación física de audio encriptado modulado en frecuencia . .	74
5.3.1. Características importantes del software y hardware LabVIEW	74
5.3.2. Programación, Implementación y Resultados de audio encriptado	77
6. Conclusiones	93
6.1. Aportaciones del trabajo de Investigación	93
6.2. Trabajos a futuro	94

Lista de figuras

1.1. Dibujo realizado por C. Huygens mostrando su experimento.	2
1.2. Ejemplos del fenómeno de sincronía en el mundo	3
1.3. Plano de fase $x(t)$ vs $z(t)$ del atractor caótico de Lorenz.	5
1.4. Ejemplos de algunas características de sistemas caóticos.	7
1.5. Algunos ejemplos de cifrados	8
1.6. Método de encriptado aditivo.	10
2.1. Representación de redes: (a) grafo dirigido, (b) grafo no dirigido. . . .	13
2.2. Configuraciones de las redes	15
2.3. Red en acoplamiento global.	16
2.4. Red en acoplamiento estrella.	17
2.5. Red en acoplamiento anillo.	18
2.6. Red en acoplamiento irregular.	19
2.7. Red anillo en configuración bidireccional con nodo maestro.	20
2.8. Representación de las redes de mundo pequeño.	22
2.9. Formación de redes de mundo pequeño Newman-Watts.	23
2.10. Diferentes redes en topología anillo y mundo pequeño Newman-Watts.	24
3.1. Regiones de estabilidad de los sistemas fraccionarios.	29
3.2. Dinámica y atractor caótico del oscilador Chen de orden fraccionario.	31
3.3. Circuito de Chua.	32
3.4. Característica $i - v$ lineal a trozos del resistor no lineal del diodo Chua.	33
3.5. Dinámica y atractor caótico del oscilador Chua de orden fraccionario.	36
3.6. No linealidad del Oscilador Chua, mostrando dos puntos de quiebre. . .	37
3.7. Dinámica y atractor caótico del oscilador Lorenz de orden fraccionario.	39
3.8. Dinámica y atractor caótico del oscilador Lü de orden fraccionario . .	41
3.9. Dinámica y atractor caótico del oscilador Liu de orden fraccionario . .	43

4.1. Red de mundo pequeño de 10 osciladores Chua.	48
4.2. Planos de fase de algunos estados de la red Chua mostrando sincronía.	50
4.3. Sistema dinámico del error de sincronización de la red Chua	52
4.4. Red de mundo pequeño de 18 osciladores Lorenz.	53
4.5. Planos de fase de algunos estados de la red Lorenz mostrando sincronía	56
4.6. Sistema dinámico del error de sincronización de la red Lorenz	58
4.7. Red de mundo pequeño de 24 osciladores Liu.	59
4.8. Planos de fase entre algunos estados de la red Liu mostrando sincronía	62
4.9. Sistema dinámico del error de sincronización de la red Liu	64
5.1. Esquema de encriptado aditivo, modulando en frecuencia el estado $x(t)$	71
5.2. Niveles de energía de los estados caóticos con y sin modulación	72
5.3. Densidad espectral de los estados caóticos con y sin modulación	73
5.4. Tarjeta NI myRIO 1900	75
5.5. Diagrama de programación del sistema caótico para codificar audio	78
5.6. “Casos True” y “False” de la estructura “Case” del buffer.	79
5.7. Modelo matemático del oscilador de Lorenz en LabVIEW	80
5.8. Cálculo del arreglo de coeficientes binomiales.	81
5.9. Magnitud en base a las muestras del arreglo de coeficientes binomiales.	82
5.10. Convolución de la definición GL en LabVIEW	83
5.11. Diagrama para programar el oscilador caótico en LabVIEW FPGA.	84
5.12. Procedimiento de codificación en LabVIEW	85
5.13. Dinámica y atractor de Lorenz resultado de graficar $x(t)$ vs $y(t)$	86
5.14. Diagrama de programación del oscilador caótico para decodificar audio	87
5.15. Sincronización entre la tarjeta emisora y receptora.	88
5.16. Proceso de decodificación en LabVIEW	89
5.17. Sincronía y dinámica resultado de graficar $x_m(t)$ vs $x_s(t)$	90
5.18. Comunicaciones entre las tarjetas emisor y receptor	91
5.19. Implementación del sistema de encriptado caótico	91
5.20. Error entre estados $x(t)$ y comparación del audio enmascarado con $x(t)$	92

Lista de tablas

- 4.1. Condiciones iniciales de la red mundo pequeño de 10 osciladores Chua. 51
- 4.2. Condiciones iniciales de la red mundo pequeño de 18 osciladores Lorenz. 57
- 4.3. Condiciones iniciales de la red mundo pequeño de 24 osciladores Liu. 63

- 5.1. Niveles de energía de los estados del oscilador de Lorenz fraccionario. 67

Capítulo 1

Introducción

El presente capítulo menciona el objetivo general, los objetivos específicos así como también la motivación que dio lugar para la realización de este trabajo. Se presenta una introducción general del trabajo, brindando los conceptos necesarios para ayudar al lector a comprender la investigación.

1.1. Objetivo General

Implementar un sistema de encriptado mediante una tarjeta FPGA para la transmisión de información de forma segura, utilizando la sincronización maestro - esclavo, aprovechando el ancho de banda que ofrecen los osciladores caóticos de orden fraccionario, para hacer un encriptado eficiente.

1.2. Objetivos Específicos

- Programar en una tarjeta FPGA un sistema de comunicación caótico.
- Garantizar la sincronía de la red.
- Aprovechar la energía que osciladores de orden fraccionario presentan para un encriptado caótico más eficaz.
- Enmascarar un mensaje con una señal caótica en la banda de frecuencia que se encuentra el mensaje.
- Documentar todo el estudio teórico del trabajo propuesto en un documento de tesis y un artículo para congreso.

1.3. Antecedentes

En esta sección presentaremos los conceptos de sincronía, caos, criptología, así como encriptado caótico, conceptos necesarios para la comprensión de este trabajo de tesis.

1.3.1. Sincronía

El término sincronía se origina de la combinación de las palabras etimológicas griegas **syn**, que significa a la vez, y **chronos** ó **khronos**, que significa tiempo. Se interpreta como la acción de realizar dos o más eventos coincidiendo en el tiempo [1].

En el año de 1665, Christian Huygens un físico holandés, registró el primer fenómeno de sincronía al observar como oscilaban dos relojes de péndulos que eran sostenidos por una viga [2]. Huygens observó como los movimientos de cada péndulo oscilaban de manera opuesta pero que tanto el sonido como el movimiento se mantenían. También, si por alguna interferencia el sistema era perturbado, se recuperaba la sincronía después de algunos segundos. En la Figura 1.1, se ilustra el dibujo del experimento de C. Huygens.

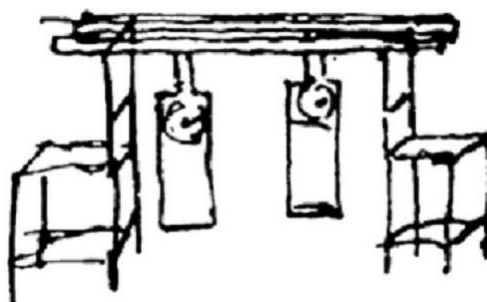


Figura 1.1: Dibujo realizado por C. Huygens mostrando su experimento.

La sincronía se define también en [3] como la propiedad que un conjunto de elementos, del mismo tipo o diferentes, adquieren un comportamiento común, iniciando de un ritmo o comportamiento individual distinto, por medio de un medio acoplante, el cual, en la mayoría de los casos, es excesivamente débil.

La Figura 1.2, presenta el fenómeno de sincronía en diferentes escenarios, en la vida cotidiana como en la naturaleza, Figura 1.2a, competencias deportivas, Figura

1.2c y Figura 1.2d, en la industria, Figura 1.2b, en el trabajo, Figura 1.2e y Figura 1.2f, etc.



(a)



(b)



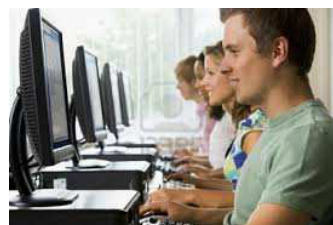
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 1.2: Ejemplos del fenómeno de sincronía en el mundo: (a) vida cotidiana como en la naturaleza, (c) y (d) competencias deportivas, (b) en la industria, (e) y (f) en el trabajo.

1.3.2. Caos.

El término caos proviene de la palabra etimológica griega $\chi\acute{\alpha}\omicron\varsigma$, que significa impredecible y se le asocia con un comportamiento desordenado [4], sin embargo,

es determinístico, este fenómeno está bien definido, es aperiódico y extremadamente sensible a condiciones iniciales [5, 6].

Henri Poincaré, un matemático francés, a finales del siglo XIX introdujo el pensamiento de la existencia del caos, en el sentido de que el comportamiento dependiera de la sensibilidad de las condiciones iniciales. Poincaré introdujo esta ideología, al preguntarse si el sistema solar siempre sería estable y reconociendo, a la par, que existían innumerables fenómenos que no eran completamente aleatorios sino más bien, no respondían a una dinámica lineal.

En 1963, el meteorólogo y matemático Edward Lorenz, intentaba predecir el comportamiento de la atmósfera por medio de unas ecuaciones, las cuáles en conjunto, eran parte de un modelo matemático [5, 7]. La simulación del modelo matemático de Lorenz (1.1), arrojaba una figura, que se ilustra en la Figura 1.3, y actualmente se le conoce como atractor de Lorenz. Después de repetir sus simulaciones, para valores de parámetros diferentes, obtuvo el mismo resultado; así luego de realizar un análisis sobre sus ecuaciones, determinó que el sistema presentaba un comportamiento diferente, al variar las condiciones iniciales.

El modelo matemático de Lorenz de orden entero [5, 7] se presenta a continuación:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sigma(y(t) - x(t)), \\ \dot{y}(t) &= x(t)(\rho - z(t)) - y(t), \\ \dot{z}(t) &= x(t)y(t) - \beta z(t),\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde los parámetros son: $\sigma = 10$, $\rho = 28$ y $\beta = \frac{8}{3}$.

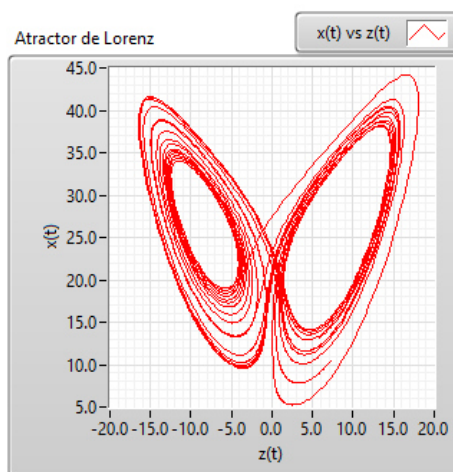


Figura 1.3: Plano de fase $x(t)$ vs $z(t)$ del atractor caótico de Lorenz.

Los sistemas caóticos, se distinguen porque presentan ciertas características, las cuáles son:

- **Atractores extraños:** Forma que describe como evolucionan las trayectorias de un sistema. Se les relaciona por presentar un comportamiento caótico. Para varios científicos, es importante considerar la dimensión del atractor para distinguir el comportamiento asintótico de un sistema, esto último se conoce como la dimensión fractal¹.
- **Sensibilidad a las condiciones iniciales:** El sistema presenta un comportamiento diferente ante una variación en las condiciones iniciales, aún y aunque sean muy próximas unas de otras, las trayectorias divergen con el paso del tiempo.
- **Exponentes de Lyapunov positivos:** Indican el cambio de separación o divergencia de dos trayectorias entre vectores de estado inicial muy cercanos entre sí. La existencia de los exponentes de Lyapunov positivos es muy común en sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales.

¹**Dimensión fractal:** Número racional que resulta al realizar un análisis de su dimensión a un atractor extraño.

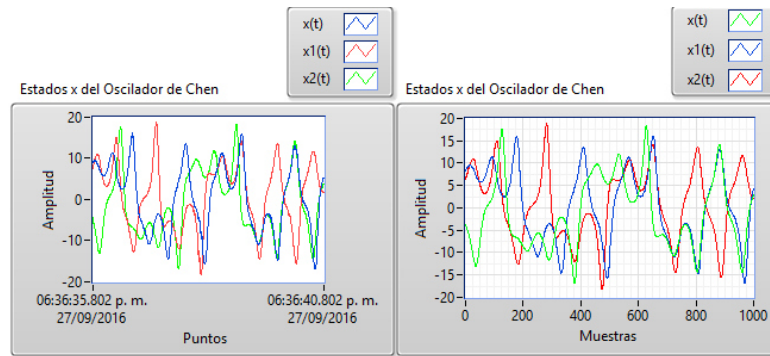
- **Dinámica no lineal:** La no linealidad se encuentra presente en los sistemas caóticos, los cuáles son modelados mínimo por un sistema de orden tres.

A continuación, se presentan tres de las características mencionadas por medio de la Figura 1.4, sensibilidad a las condiciones iniciales en el estado $x(t)$, 0.1, 0.12, 0.13 para los colores verde, rojo y azul Figura 1.4a, el atractor caótico de Rössler [8] en dos planos diferentes Figura 1.4b, y en el fractal de un triángulo equilátero Figura 1.4c.

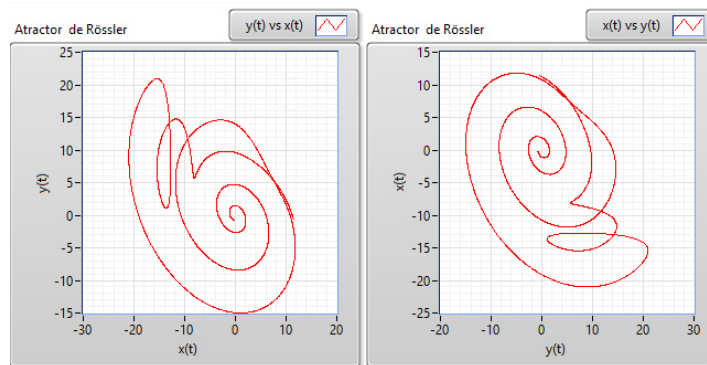
1.3.3. Criptología.

El término criptología se origina de la combinación de las palabras etimológicas griegas *kripto*, que significa oculto y *logos*, que significa discurso, la cuál es la disciplina encargada de estudiar la escritura secreta o los mensajes procesados de una forma, convirtiéndose en difíciles de descifrar para una persona [4].

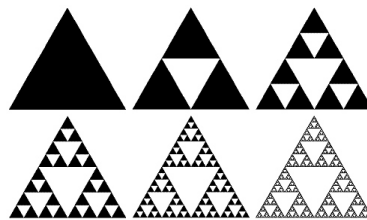
Dentro de los métodos de encriptado, existen varios tipos, algunos de ellos utilizan los algoritmos de sustitución, los cuáles se dividen en dos tipos, la sustitución monoalfabética y la polialfabética; también se encuentran diferentes tipos de cifrados, algunos de ellos son el de Julio César y el de Vigenère, los cuales se muestran en la Figura 1.5, la tabla utilizada para el cifrado de César Figura 1.5a, y la tabla utilizada para el cifrado de Vigenère Figura 1.5b.



(a)



(b)



(c)

Figura 1.4: Ejemplos de algunas características de sistemas caóticos: (a) Sensibilidad a las condiciones iniciales en el estado $x(t)$, 0.1, 0.12, 0.13 para los colores verde, rojo y azul, (b) Atractor caótico de Rössler en dos planos diferentes, (c) Fractal de un triángulo equilátero.

Original	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
Cifrado	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p
Original	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
Cifrado	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c

(a)

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
A	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
C	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B
D	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C
E	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D
F	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E
G	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F
H	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G
I	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
J	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
K	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
L	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
M	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
N	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
O	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
P	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Q	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
R	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
S	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
T	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
U	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
V	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
W	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
X	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
Y	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
Z	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y

(b)

Figura 1.5: Algunos ejemplos de cifrados: (a) Tabla utilizada para el cifrado de César, (b) Tabla utilizada para el cifrado de Vigenère

Los métodos de sustitución, reemplazan los caracteres del mensaje inicial por otros. Los caracteres sustituidos pueden ser símbolos, letras, dígitos, etcétera. Las dos divisiones de los métodos de sustitución se describen a continuación:

- **Sustitución monoalfabética:** Corresponde a la sustitución entre caracteres. Su funcionamiento consiste en reemplazar cada letra del alfabeto por otro carácter. El mensaje se cifra una vez que se defina la correspondencia entre alfabetos.
- **Sustitución polialfabética:** Este método difiere del anterior, debido a que después de establecer la correspondencia entre alfabetos, la asignación del

carácter se hace tomando en cuenta su posición dentro del mensaje así como el dígito que le corresponde al determinar la clave.

1.3.4. Encriptado caótico.

Con el trabajo de Pecora y Carroll, publicado en 1990 [9], en el que sincronizaron sistemas caóticos, surgieron trabajos sobre encriptado utilizando osciladores caóticos [10–12]. El encriptado caótico presentaba otra técnica de cifrar la información, diferente a las existentes, y su implementación fue y es hoy en día exitosa.

Existen diferentes métodos para el encriptado caótico, como la modulación caótica, conmutación entre atractores extraños y encriptado aditivo. En el capítulo 5, se presenta la aplicación de encriptado utilizando el encriptado aditivo.

El método de encriptado aditivo consiste en el envío de la información y en su encriptado, el cuál se realiza ocultando la información sumándole un estado del sistema caótico, después de ser encriptado se transmiten tanto el mensaje como otro estado del sistema caótico, cada uno por un canal público, donde todo lo anterior es realizado por el emisor, el receptor se encarga de descifrar el mensaje utilizando la llave o la señal caótica que fue transmitida, para generar una dinámica y sustraer al mensaje el estado similar con la que fue encriptado. La Figura 1.6, representa el método de encriptado aditivo [6, 10, 13].

1.4. Motivación

En esta investigación se obtiene la sincronización de redes de mundo pequeño, este tipo de redes llaman la atención debido a que no todos sus osciladores presentan conexiones como una red global y presenta la sincronía ahorrando costo de implementación. El uso de sistemas de orden fraccionario permiten modelar y describir un sistema con más precisión que los de orden entero y hace eficaz el encriptado de datos. Se describen por separado los temas, con la finalidad de agruparlos para lograr el objetivo de este trabajo y aplicarlo en la transmisión de información oculta (encriptado).

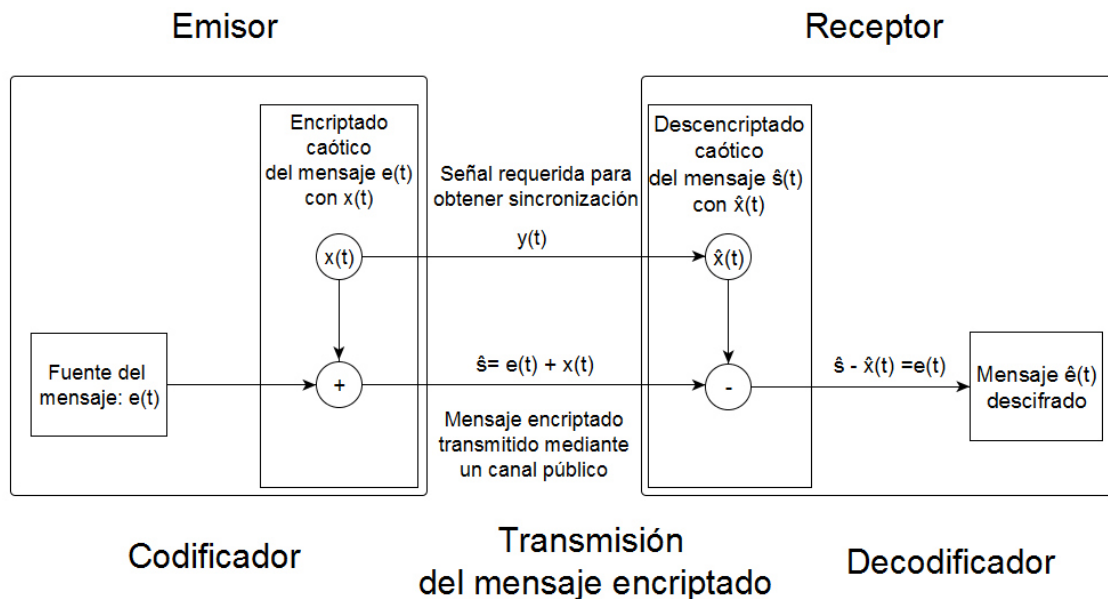


Figura 1.6: Método de encriptado aditivo.

1.5. Estructura del Trabajo

El capítulo 2 presenta los conceptos referentes de redes complejas, su similitud con la teoría de grafos, las clases de configuraciones, las diferentes topologías, el cálculo de la matriz de acoplamiento que es la descripción matemática de la red, así como algunos ejemplos para su comprensión. De manera similar, se describen las redes de mundo pequeño, los tipos que existen y se otorgan los conceptos para que el lector comprenda la formación de estos tipos de redes. Es importante mencionar que en este trabajo, sólo se utilizan redes de mundo pequeño del tipo Newman-Watts.

En el capítulo 3 se define el cálculo fraccionario, sus diferentes tipos, resaltando que las simulaciones se realizan con el método de Grünwald-Letnikov. También se presentan algunos sistemas caóticos de orden fraccionario, sus modelos matemáticos, así como los parámetros y el orden de la derivada q , requeridos para exhibir un comportamiento caótico.

La sincronización de redes complejas de mundo pequeño formadas por osciladores caóticos de orden fraccionario, se expone en el capítulo 4. Se presentan resultados sincronizando redes de mundo pequeño con diferente grado

de conectividad. Son proporcionadas las condiciones iniciales de los osciladores, el valor de la fuerza de acoplamiento, necesaria para obtener la sincronía en la red y se demuestra tanto por la dinámica de los osciladores presentes en la red como por el plano de fase la sincronía de la red. Se utiliza un teorema, para el cálculo de la fuerza de acoplamiento.

El capítulo 5 engloba todos los conceptos mencionados anteriormente para aplicarlos en el encriptado caótico, por medio del encriptado aditivo utilizando señales como audio, imagen y video. Se describen dos criterios, uno en el dominio del tiempo y otro en el de la frecuencia, para elegir el mejor estado de la señal caótica, de manera que el encriptado sea eficiente. Se implementa un sistema de comunicación caótico en tiempo real, para transmitir un audio (información) encriptado, modulado en frecuencia, para la posterior recuperación del audio (información) original, mediante el método de encriptado aditivo, utilizando otro sistema de comunicación caótico. Es importante resaltar, que las implementaciones son utilizadas usando software y hardware.

Para finalizar, el capítulo 6 presenta las conclusiones, aportaciones y el trabajo a futuro de esta investigación.

Capítulo 2

Redes Complejas

La importancia de las redes complejas en las últimas décadas ha incrementado, debido a que se encuentran en diferentes escenarios, como en redes de los tejidos del sistema nervioso, redes de regulación génicas, redes de neuronas, redes de computadoras, redes sociales, redes eléctricas, etc [19]. Este campo de estudio requiere el trabajo en equipo de distintas disciplinas como medicina, ingeniería, física, biología, sociología y entre sus objetivos se encuentran, determinar como se transmite una enfermedad entre diferentes regiones, como se transmite un virus de computadora, encontrar la variación del sistema nervioso entre pacientes sanos y con patologías, esto último utilizando redes neuronales [26].

El propósito de este capítulo es comprender el funcionamiento de la red, debido a que su estructura influye en la dinámica del sistema y entender las dinámicas emergentes de los elementos que son parte del sistema.

2.1. Teoría de grafos

La teoría de grafos, pertenece al campo de estudio de las matemáticas discretas y es la encargada de estudiar las propiedades de los grafos, como sus configuraciones y sus diferentes topologías.

Su nacimiento se remonta al año de 1736, cuando Leonhard Euler, matemático y físico suizo, publicó un trabajo, en el cuál resolvía el problema de los puentes de la ciudad de Königsberg [20]. Después del trabajo de Euler, se reportaron en la literatura soluciones de problemas, como el problema de los cuatros colores, donde se afirma, que con sólo cuatro colores es posible colorear un mapa [42], sin que dos

vecinos tengan el mismo color. Esta solución influyó en definiciones de conceptos y términos fundamentales de la teoría de grafos.

2.2. Definiciones

Una red puede modelarse matemáticamente por medio de un grafo [15]:

Definición 2.1 *Un grafo no dirigido (dirigido) $G = (\mathcal{N}, \mathcal{L})$ se compone de dos conjuntos \mathcal{N} y \mathcal{L} , tales que $\mathcal{N} \neq \emptyset$ y \mathcal{L} es un conjunto de pares desordenados (ordenados) de elementos de \mathcal{N} . Los elementos de $\mathcal{N} \equiv \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$ son los nodos (vértices o puntos) del grafo G , mientras los elementos de $\mathcal{L} \equiv \{l_1, l_2, \dots, l_K\}$ son los enlaces (aristas o líneas). En un grafo no dirigido, cada uno de sus enlaces es definido por un conjunto de pares de nodos i y j , y se denota como (i, j) o l_{ij} . Se dice que el enlace es incidente en los nodos i y j , o unido a dos nodos, los dos nodos i y j son referidos como los nodos finales del enlace l_{ij} . En un grafo dirigido, es importante considerar el orden de los dos nodos: l_{ij} significa un enlace del nodo i al j , y $l_{ij} \neq l_{ji}$.*

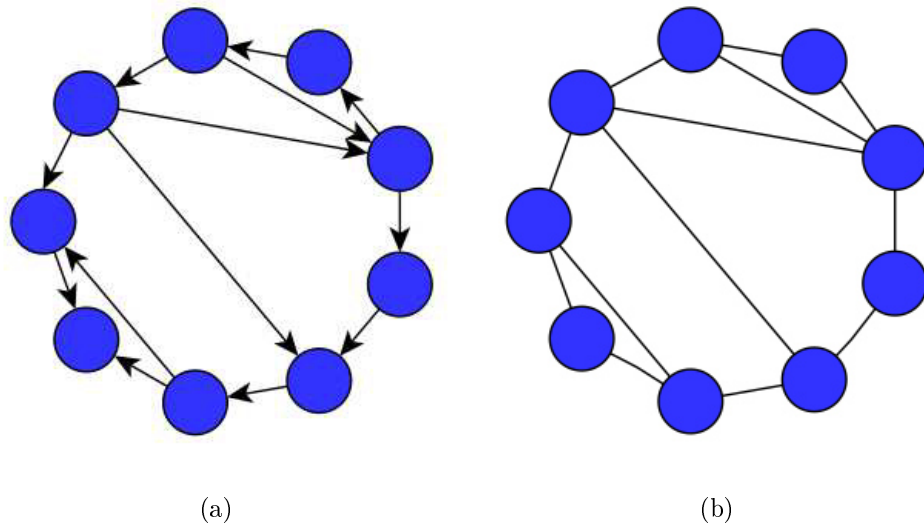


Figura 2.1: Representación de redes: (a) grafo dirigido, (b) grafo no dirigido.

La representación de los dos tipos de grafos se ilustra en la Figura 2.1. Los sistemas complejos, se distinguen porque presentan ciertas características, las cuáles son [15]:

- Se componen de muchos elementos interactuando entre sí.
- Cada elemento presenta una estructura interna propia y además se encarga de realizar una actividad.
- Presentan comportamientos emergentes.

Una red compleja, representada como un sistema complejo, es un conjunto de nodos interactuando entre sí, en donde cada nodo es una unidad fundamental de la red, la cuál contiene información detallada de la red [21]. El uso de la palabra compleja, se refiere a las características de los nodos y a la topología de la red. La relación entre los nodos y los osciladores se debe a que los nodos pueden representarse por modelos matemáticos, en este caso, de sistemas caóticos, los cuáles pueden ser descritos por ecuaciones diferenciales (tiempo continuo) o en diferencias (tiempo discreto); resulta importante mencionar, que las simulaciones con los osciladores caóticos de orden fraccionario son aproximaciones de sistemas en tiempo continuo aunque sean modeladas por ecuaciones en diferencias.

2.3. Representaciones y topologías de las redes complejas

Existen dos tipos de configuraciones dentro de las redes complejas, las cuáles son:

- Configuración maestro - esclavo.
- Configuración bidireccional.

La primer configuración se muestra en la Figura 2.2a es un caso especial, sólo un nodo de la red es un grafo dirigido y el resto de los nodos son grafos no dirigidos, esta combinación da lugar a que el nodo maestro imponga su dinámica a toda la red, es decir, la dinámica de los osciladores caóticos de la red compleja seguirá a la del oscilador maestro.

La segunda configuración (bidireccional), se ilustra en la Figura 2.2b la bidireccional, presenta una dinámica emergente, característico de los sistemas complejos, los nodos presentes en la red son grafos no dirigidos y esto produce una dinámica que es diferente a la de los osciladores caóticos que forman la red compleja.



Figura 2.2: Configuraciones de las redes: (a) maestro - esclavo, (b) bidireccional.

El término topología, se refiere a la forma de representar las conexiones entre los nodos presentes en una red. Existen dos clases de redes complejas, las cuáles se dividen por medio de la topología en la red. La primer clase son las redes regulares, ellas presentan un patrón de conexión definido. En cambio, las redes irregulares no cuentan con un patrón de conexión definido. Los tipos de topologías más comunes dentro de las redes complejas son la topología en acoplamiento global, topología en acoplamiento estrella y la topología en acoplamiento anillo.

La matriz $A \in \mathfrak{R}^{N \times N}$ con elementos a_{ij} , llamada matriz de acoplamiento, donde muestra las conexiones entre osciladores, si el oscilador i se conecta al oscilador j , entonces $a_{ij} = 1$, de otro modo $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ [21]. Los elementos de la diagonal de la matriz A son definidos como:

$$a_{ii} = - \sum_{j=1}^N a_{ij} = - \sum_{j=1}^N a_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.1)$$

Por lo anterior, si el grado del nodo i es d_i , entonces:

$$a_{ii} = -d_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.2)$$

A continuación, se presentan ejemplos del cálculo de la matriz de acoplamiento con las topologías más comunes de las redes complejas en clase regular y dos ejemplos con redes de clase irregular.

2.3.1. Redes con topología regular

2.3.1.1. Acoplamiento global

En esta configuración, cada nodo presente en la red, se conecta a los demás nodos, de manera que cualquier par de nodos están conectados en la red.

La Figura 2.3, muestra una red en acoplamiento global en configuración bidireccional y se muestra el cálculo de la matriz de acoplamiento de la red.

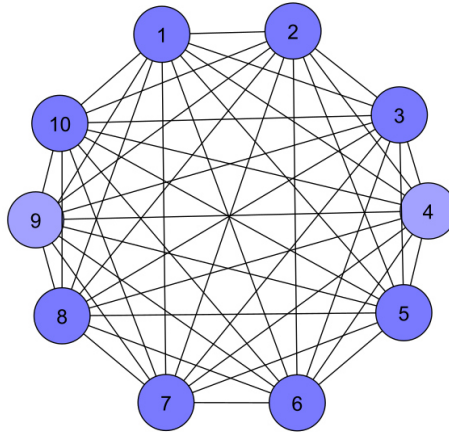


Figura 2.3: Red en acoplamiento global.

$$A = \begin{bmatrix} -N + 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -N + 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -N + 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -N + 1 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

El polinomio característico, es un método importante para encontrar los valores propios de matrices cuadradas, también se le conoce como el cálculo del determinante del sistema. Su ecuación es:

$$\det(\lambda I - A) = 0, \quad (2.4)$$

donde I es una matriz diagonal unitaria y λ representa a los valores propios del polinomio característico.

Para finalizar con la topología en acoplamiento global, es importante mencionar que esta matriz de acoplamiento presenta un solo valor propio en 0, de hecho es el

más grande, debido a que los demás son estrictamente negativos, y el resto son igual al tamaño de la red, es decir:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_N = -N. \quad (2.5)$$

2.3.1.2. Acoplamiento estrella

En la configuración estrella, un nodo de la red presenta enlaces con el resto de los nodos, el cuál se coloca al centro de la red, y los demás sólo tienen conexión con este nodo central.

La Figura 2.4, muestra una red en acoplamiento estrella en configuración bidireccional y se muestra el cálculo de la matriz de acoplamiento de la red.

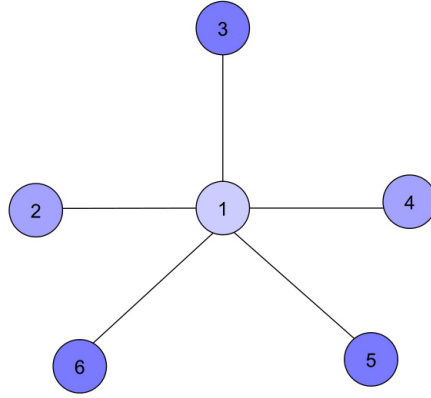


Figura 2.4: Red en acoplamiento estrella.

$$A = \begin{bmatrix} -N + 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

En esta topología, la matriz de acoplamiento presenta un solo valor propio en 0, de hecho es el más grande, debido a que los demás son estrictamente negativos, el segundo valor es igual a -1 y el más pequeño de los valores propios de la matriz de acoplamiento es igual al tamaño de la red, es decir:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_{N-1} = -1, \lambda_N = -N. \quad (2.7)$$

2.3.1.3. Acoplamiento en anillo

Para finalizar con las redes de clase regular, se presenta la red en acoplamiento anillo, en esta topología cada nodo de la red está conectado a sus nodos vecinos hasta formar un anillo. El número de conexiones que presenta cada nodo con sus nodos adyacentes, se determina por $\frac{k}{2}$, donde k es la conectividad y es un número par.

La Figura 2.5, muestra una red en acoplamiento anillo en configuración bidireccional y se muestra el cálculo de la matriz de acoplamiento de la red con $k = 2$.

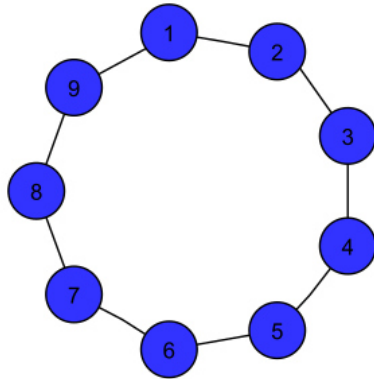


Figura 2.5: Red en acoplamiento anillo.

$$A = \begin{bmatrix} -k & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & -k & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & -k \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Esta matriz de acoplamiento, al igual que las anteriores, tiene su valor propio más grande en 0 y el segundo valor puede calcularse con la siguiente ecuación:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -4 \sum_{j=1}^{k/2} \sin^2\left(\frac{j\pi}{N}\right). \quad (2.9)$$

2.3.2. Redes con topología irregular

Esta división de las redes complejas, como se mencionó anteriormente, no tiene definido un patrón de conexión como en las redes de topología regular. A diferencia

de las redes regulares, en estas redes no puede determinarse de manera general, la matriz de acoplamiento. Debido a lo anterior, se presenta al lector el cálculo de la matriz de acoplamiento A , para una red en topología irregular y otra en acoplamiento anillo en configuración maestro-esclavo.

2.3.2.1. Acoplamiento irregular

La Figura 2.6, muestra una red en acoplamiento irregular en configuración bidireccional y se muestra el cálculo de la matriz de acoplamiento de la red.

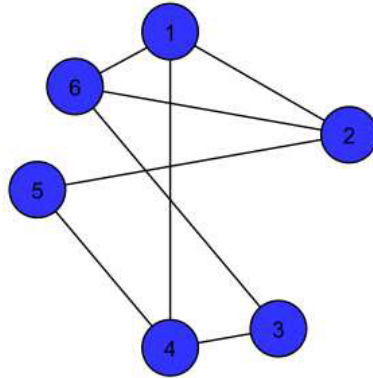


Figura 2.6: Red en acoplamiento irregular.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Los valores propios de la matriz de acoplamiento son: $\lambda(A) = \{0, -1.5858, -2, -3, -4.4142, -5\}$.

2.3.2.2. Acoplamiento en anillo en configuración maestro - esclavo

Ahora se presenta un ejemplo con una red en topología anillo, pero con un nodo, el nodo 1 como grafo dirigido, es decir la red tiene la configuración maestro - esclavo. Su matriz de acoplamiento se calcula similar a las anteriores, excepto para

el nodo maestro, que es la primer fila de la matriz. Como este nodo sólo transmite y no recibe información, los elementos de la primer fila son 0. Para el resto de las filas, la red se modela como grafos no dirigidos.

La Figura 2.7, muestra una red en acoplamiento anillo en configuración bidireccional, excepto el nodo 1, que tiene la configuración maestro - esclavo y se presenta el cálculo de la matriz de acoplamiento de la red.

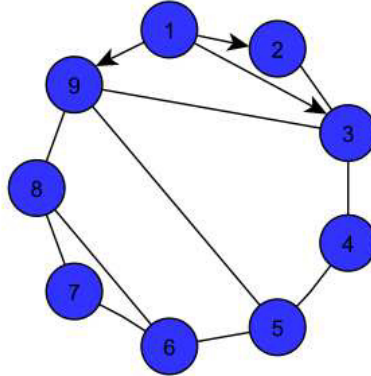


Figura 2.7: Red anillo en configuración bidireccional con nodo maestro.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Los valores propios de la matriz de acoplamiento son:

$$\lambda(A) = \{0, -0.2015, -0.9714, -1.7384, -2.7073, -3.1265, -3.8852, -4.4676, -5.9021\}.$$

2.4. Redes de mundo pequeño

Se denominan así debido a que existen o presentan una distancia corta entre nodos distantes en la red, incluso esta característica se presenta en redes de dimensión grande.

Existen dos modelos de redes de mundo pequeño, el primer modelo es entre las redes en anillo y aleatorias, mientras que el segundo modelo es entre las redes en anillo y globales, debido a que las primeras reconectan enlaces en los nodos de manera aleatoria y las segundas agregan aleatoriamente enlaces como en las redes globales.

La propiedad de agregar o reconectar enlaces se debe a una probabilidad p , variando entre $0 < p < 1$, en ambos casos si $p = 0$, se tiene una red en acoplamiento anillo, de lo contrario si $p = 1$, se tiene una red aleatoria en el primer modelo y una red global para el segundo modelo. La Figura 2.8, ilustra las dos representaciones de redes de mundo pequeño [13, 21, 23, 26].

La formación de este tipo de redes es la siguiente:

- Parte de una topología en acoplamiento anillo.
- Agregan o reconectan las conexiones entre los nodos aleatoriamente.
- Deben de cumplirse dos restricciones:
 - Cualquier par de nodos no debe tener más de una conexión entre ellos.
 - Cualquier nodo no puede tener conexión consigo mismo.

Existen dos algoritmos de mundo pequeño [21, 23, 26], el primero conocido como Watts y Strogatz (WS) Figura 2.8a y el siguiente denominado Newman y Watts (NW) Figura 2.8b.

El algoritmo WS parte de una topología en anillo en el que la reconexión de nodos se hace aleatoriamente, con la característica de que pierde su topología inicial llevando a la formación de grupos aislados.

El algoritmo NW parte también de una topología en anillo pero agrega enlaces aleatoriamente por lo que no se rompe ninguna conexión entre los nodos.

Debido a que el algoritmo de NW no conduce a la formación de grupos aislados, este algoritmo es preferido ya que es más sencillo de analizar.

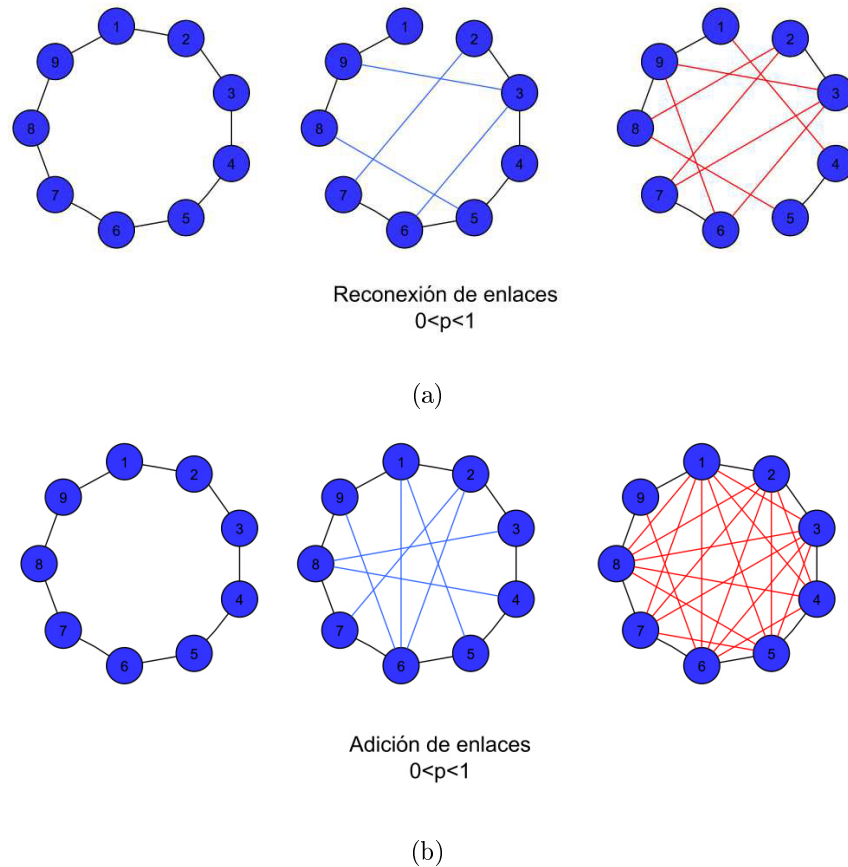


Figura 2.8: Representación de las redes de mundo pequeño: (a) Algoritmo de red de mundo pequeño WS, (b) Algoritmo de red de mundo pequeño NW

2.4.1. Redes de mundo pequeño Newman y Watts

El modelo de Red de mundo pequeño NW como se describió anteriormente, agrega enlaces de manera aleatoria debido a la probabilidad p , y se comporta de la siguiente manera:

- Si $p = 0$, el modelo de una red en acoplamiento anillo.
- Si $p = 1$, el modelo adquiere la característica de una red en acoplamiento global.

Debido a las propiedades anteriores, para obtener una red compleja de mundo pequeño NW la p debe encontrarse entre $0 < p < 1$. La Figura 2.9, muestra la formación de redes de mundo pequeño Newman-Watts, red regular en topología anillo Figura 2.9 $p = 0$, red de mundo pequeño NW Figura 2.9 $0 < p < 1$, y red regular en topología global Figura 2.9 $p = 1$ [21, 23, 26].

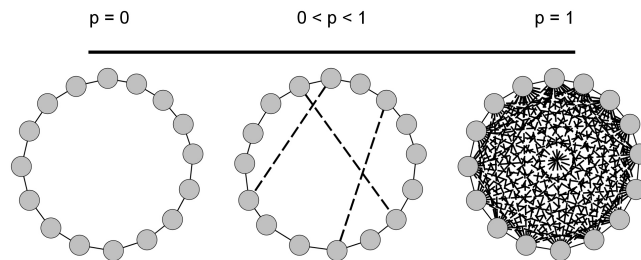


Figura 2.9: Formación de redes de mundo pequeño Newman-Watts.

En este trabajo, los nodos que conforman la red, representan osciladores caóticos de orden fraccionario modelados por ecuaciones en diferencias, y uno de los objetivos de este trabajo es la sincronización de las redes, por lo que al utilizar el modelo de NW no se generan grupos aislados y la sincronización resulta más fácil de obtener.

Como estas redes se generan a partir de una red en acoplamiento anillo, y recordando que las conexiones en estas redes se determinan mediante la relación $\frac{k}{2}$, donde la conectividad k es un número par, se presentan en la Figura 2.10, ejemplos de tres redes de mundo pequeño con el mismo número de nodos que son 24 pero con diferentes valores de k , los cuáles son $k = 2$ y $p = 0.1$, Figura 2.10a y Figura 2.10b a la izquierda, $k = 4$ y $p = 0.2$, Figura 2.10a y Figura 2.10b al centro, y $k = 6$ y $p = 0.3$, Figura 2.10a y Figura 2.10b a la derecha.

Por último, se presenta la matriz de acoplamiento A de la red de mundo pequeño NW de 24 nodos con $k = 6$ y $p = 0.3$, creada por el algoritmo de Newman y Watts, generado para realizar las simulaciones de este trabajo.

Los valores propios de la matriz de acoplamiento son:

$$\lambda(A) = \{0, -11.7304, -14.8488, -15.9679, -18.8201, -18.9445, -20.5596, -21, \\ -21.1095, -21.2266, -21.5249, -21.8676, -22.0000, -22.0745, -22.2808, -22.4813, \\ -22.7435, -23.0000, -23.0414, -23.2472, -23.5313, -24, -24, -24\}.$$

Capítulo 3

Osciladores caóticos de orden fraccionario

3.1. Cálculo fraccionario

Un número de aplicaciones donde el cálculo fraccional es usado crece rápidamente. Estos fenómenos matemáticos permiten describir un objeto real más preciso que los métodos clásicos del integrador [7, 16].

El cálculo fraccionario es una generalización de integración y diferenciación al operador fundamental del orden no entero ${}_a D_t^\alpha$, donde a y t son los límites de la operación y $\alpha \in \mathfrak{R}$ y se define como [7, 16]:

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}, & \alpha > 0, \\ 1, & \alpha = 0, \\ \int_a^t (d\tau)^{-\alpha}, & \alpha < 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Tres de las definiciones más usadas para la solución numérica del operador diferencial-integral general son la definición Grünwald-Letnikov(GL), la definición Riemann-Liouville(RL) y la definición de Caputo [7, 16].

Para el cálculo numérico de la derivada de orden fraccional puede usarse la siguiente relación derivada de la definición de Grünwald-Letnikov [7, 16]. Este enfoque se basa en el hecho que para una amplia clase de funciones, tres definiciones GL, RL y Caputo son equivalentes. La relación para la aproximación numérica explícita de

la derivada α en los puntos kh , donde $(k = 1, 2, \dots)$ tiene la forma:

$${}_{k-L_m/h}D_{t_k}^\alpha f(t) \approx h^{-\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t_k - j), \quad (3.2)$$

donde L_m es la “longitud de memoria”, h es el paso del tiempo del cálculo y $(-1)^j \binom{\alpha}{j}$ son los coeficientes binomiales $c_j^{(q)}$ ($j = 0, 1, \dots$). Para su cálculo puede usarse la siguiente expresión:

$$c_0^{(q)} = 1, \quad c_j^{(q)} = \left(1 - \frac{1+q}{j}\right) c_{j-1}^{(q)}, \quad q = \alpha = \text{derivada}. \quad (3.3)$$

La solución general de la ecuación diferencial fraccionaria puede expresarse como:

$${}_aD_t^q y(t) = f(y(t), t) = y(t_k) = f(y(t_k), t_k) h^q - \sum_{j=v}^k c_j^{(q)} y(t_k - j). \quad (3.4)$$

La simulación de sistemas de orden fraccionario usando los métodos de aproximación en el dominio del tiempo es complicada y debido a las características de la longitud de memoria de estos sistemas requiere un tiempo de simulación muy alto pero con la ventaja que es más preciso. Aplicando algunas ideas como por ejemplo, el principio de corta memoria, puede reducirse el costo de los métodos del dominio del tiempo. Los resultados obtenidos por estos métodos son más confiables que aquellos determinados usando la aproximación en el dominio de la frecuencia [16].

Se puede establecer la estabilidad de sistemas lineales y no lineales por medio de la matriz Jacobiana, linealizando el sistema en los puntos de equilibrio debido a los parámetros del sistema.

Existen diferentes conjuntos de puntos de equilibrio E y normalmente uno de ellos es el origen; también son puntos sillas y puntos focos-sillas [40].

Se tienen dos clasificaciones de sistemas de orden fraccionario [7, 16]:

- **Sistemas proporcionados:** El orden de q (derivada) es el mismo en todos los estados del sistema.
- **Sistemas no proporcionados:** Cada estado del sistema tiene diferente orden de q (derivada).

Definición 3.1 *La trayectoria $x(t) = 0$ del sistema (3.4) es t^{-q} asintóticamente estable si hay una q real positiva tal que*

$$\forall \|x(t)\| \quad \text{con} \quad t \leq t_0, \exists N(\|x(t)\|), \quad \text{tal} \quad \text{que} \quad \forall t \geq t_0, \|x(t)\| \leq Nt^{-q}. \quad (3.5)$$

El hecho de que los componentes de $x(t)$ decaigan lentamente a 0 después que t^{-q} permite que se llame al sistema fraccionario de memoria larga. La ley de estabilidad de t^{-q} es un caso especial de la estabilidad de Mittag-Leffler [7, 16].

Teorema 3.1 De acuerdo al teorema de estabilidad los puntos de equilibrio son asintóticamente estables para $q_1 = q_2 = \dots = q_n \equiv q$ si todos los valores propios λ_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) de la matriz Jacobiana $J = \partial f / \partial x$, donde $f = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ evaluados en el punto de equilibrio E^* , satisfacen la condición [7, 16]:

$$|\arg(\text{eig}(J))| = |\arg(\lambda_i)| > q \frac{\pi}{2}. \quad (3.6)$$

Teorema 3.2 Al considerar un sistema no proporcionado, tal que $q_1 \neq q_2 \neq \dots \neq q_n$ y suponer que m es el mínimo común múltiplo del denominador u_i de q_i , donde $q_i = v_i / u_i$, $u_i \in Z^+$ para $i = 1, 2, \dots, n$ y si consideramos una $\gamma = 1/m$. El sistema es asintóticamente estable si cumple que todas las raíces de λ de la siguiente ecuación $\det([\lambda^{mq_1} \quad \lambda^{mq_2} \quad \lambda^{mq_n}]I - J) = 0$, satisfacen la condición [7, 16]:

$$|\arg(\lambda_i)| > \gamma \frac{\pi}{2}. \quad (3.7)$$

Para que los sistemas proporcionados y no proporcionados sean caóticos y asintóticamente estables deben de cumplir con las condiciones anteriores y mantener al menos un λ en la región inestable [7, 16].

La Figura 3.1, presenta las regiones estables e inestables de estos sistemas.

Para determinar el orden mínimo para el cual un sistema es caótico donde $q = q_1 = q_2 = q_3$ se utiliza la relación siguiente [7, 16]:

$$q > \min\left(\frac{2}{\pi} |\arg(\lambda_i)|\right). \quad (3.8)$$

Entonces, si se tiene una medida de inestabilidad $\frac{\pi}{2m} - \min(|\arg(\lambda_i)|)$ negativa, el sistema no puede ser caótico [7, 16].

Con el cálculo fraccionario descrito, a continuación se presentan algunos osciladores caóticos, proporcionando la dinámica de sus estados y la formación de sus atractores, mediante simulación utilizando el software LabVIEW.

3.2. Oscilador de Chen de orden fraccionario

En 1999, Chen encontró un sistema autónomo simple tridimensional, el cual no es equivalente topológicamente al sistema de Lorenz y también presenta un atractor caótico.

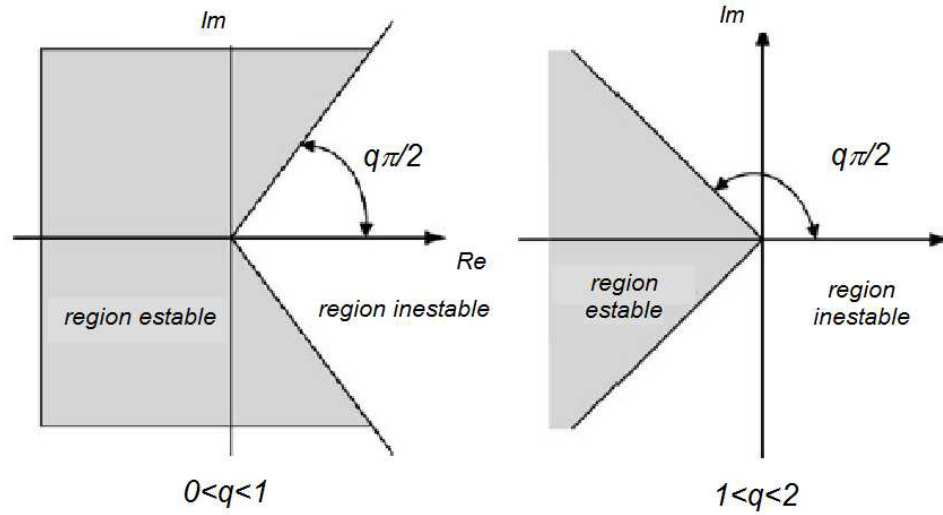


Figura 3.1: Regiones de estabilidad de los sistemas fraccionarios.

El oscilador de Chen es descrito por el siguiente conjunto de ecuaciones [7, 16]:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= a(y(t) - x(t)), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= dx(t) - x(t)z(t) + cy(t), \\ \frac{dz(t)}{dt} &= x(t)y(t) - bz(t), \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde $(a, b, c) \in R^3$. Cuando $(a, b, c) = (35, 3, 28)$ el atractor caótico existe.

Los puntos de equilibrio del sistema con los parámetros arriba son $E_1 = (0; 0; 0;)$, $E_2 = (7.9373; 7.9373; 21)$, y $E_3 = (-7.9373; -7.9373; 21)$.

La matriz Jacobiana del oscilador de Chen en el punto de equilibrio $E^* = (x^*, y^*, z^*)$ es dada por

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c - a - z^* & c & -x^* \\ y^* & x^* & -b \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Para el equilibrio E_1 se obtienen los valores propios $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 \approx 23.8359$, y $\lambda_3 \approx -30.8359$, para E_2 y E_3 se obtienen $\lambda_1 \approx -18.4280$, y $\lambda_{2,3} \approx 4.2140 \pm 14.8846j$. Los valores propios λ_1 , λ_2 y λ_3 muestran que el equilibrio es E_1 es un punto silla, el equilibrio E_2 y E_3 son puntos focos-sillas. Todos ellos satisfacen la condición de estabilidad para mantener el comportamiento caótico.

El oscilador de Chen de orden fraccionario es descrito como [7, 16]:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1}x(t) &= a(y(t) - x(t)), \\ {}_0D_t^{q_2}y(t) &= dx(t) - x(t)z(t) + cy(t), \\ {}_0D_t^{q_3}z(t) &= x(t)y(t) - bz(t), \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde $0 < q_1, q_2, q_3 \leq 1$, su orden total es denotado por $\bar{q} = (q_1, q_2, q_3) = q_1 + q_2 + q_3$.

La solución numérica del oscilador de Chen de orden fraccionario tiene la siguiente forma [7]:

$$\begin{aligned} x(t_k) &= (a(y(t_{k-1}) - x(t_{k-1})))h^{q_1} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_1)}x(t_k - j), \\ y(t_k) &= (dx(t_k) - x(t_k)z(t_{k-1}) + cy(t_{k-1}))h^{q_2} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_2)}y(t_k - j), \\ z(t_k) &= (x(t_k)y(t_k) - bz(t_{k-1}))h^{q_3} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_3)}z(t_k - j). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Utilizando la relación (3.8), se obtiene que el orden mínimo de la derivada $q > 0.8244$.

La dinámica y el atractor de 2 enrollamientos del oscilador de Chen se muestran en la Figura 3.2, donde los parámetros son: $a = 35$, $b = 3$, $c = 28$, $d = c - a = -7$, paso del tiempo $h = 0.005$ y el orden de las derivadas $q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$. Para este conjunto de parámetros el polinomio característico de los puntos de equilibrio E_2 y E_3 es

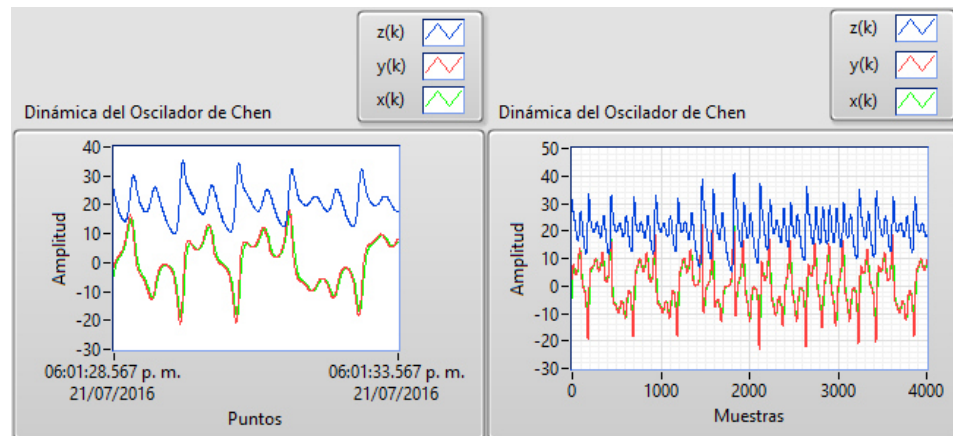
$$\lambda^{27} + 10\lambda^{18} + 84\lambda^9 + 4410 = 0, \quad (3.13)$$

y las raíces inestables son $\lambda_{1,2} \approx 1.0128 \pm 0.0153j$, porque $|\arg(\lambda_{1,2})| \approx 0.0151 < \frac{\pi}{2m}$, donde $m = 100$.

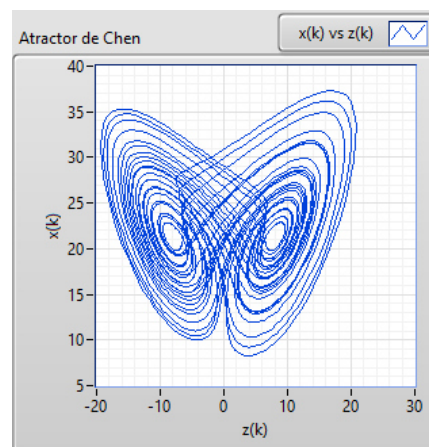
3.3. Oscilador de Chua de orden fraccionario

El oscilador de Chua presenta fenómenos como la bifurcación y el caos, incluso el Circuito de Chua, el cual se muestra en la Figura 3.3, exhibe los mismos fenómenos si satisface los criterios que son condiciones necesarias pero no suficientes, que debe de tener un circuito electrónico autónomo en el orden de exhibir caos [7]:

- Tres elementos que almacenen energía.



(a)



(b)

Figura 3.2: (a) Dinámica del oscilador Chen de orden fraccionario, (b) Atractor caótico del oscilador Chen de orden fraccionario.

- Un elemento no lineal.
- Un resistor localmente activo.

El diodo de Chua, siendo un resistor localmente activo no lineal, permite al circuito de Chua satisfacer las últimas dos condiciones. El circuito de Chua satisface todos los criterios anteriormente mencionados. El resistor activo suministra energía para separar trayectorias, la no linealidad proporciona plegadura y el espacio de

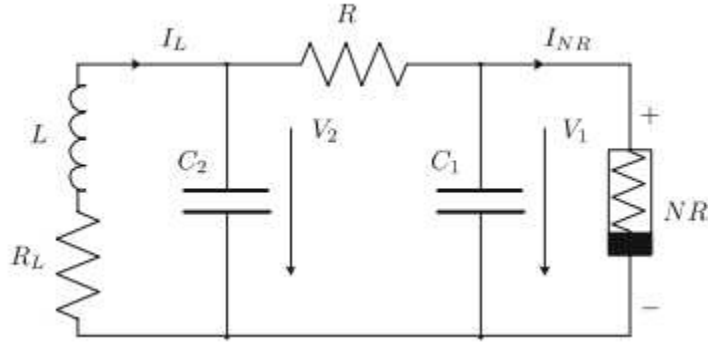


Figura 3.3: Circuito de Chua.

estados tridimensional permite estiramiento persistente y plegadura en una región acotada del espacio de estados.

El más simple y ampliamente más estudiado circuito de Chua no lineal consiste de cinco elementos, dos capacitores C_1 y C_2 , un inductor L , un resistor R y un resistor no lineal (NR), conocido como el diodo de Chua [7].

Al aplicar las leyes de Kirchhoff, tal circuito, generalmente conocido como oscilador de Chua, puede describirse por las siguientes ecuaciones [7]:

$$\begin{aligned}\frac{dV_1(t)}{dt} &= \frac{1}{C_1}[G(V_2(t) - V_1(t)) - f(V_1(t))], \\ \frac{dV_2(t)}{dt} &= \frac{1}{C_2}[G(V_1(t) - V_2(t)) + I_L(t)], \\ \frac{dI_L(t)}{dt} &= \frac{1}{L}[-V_2(t) - R_L I_L(t)],\end{aligned}\quad (3.14)$$

donde la conductancia $G = 1/R$, $I_L(t)$ es la corriente a través de la inductancia L , $V_1(t)$ y $V_2(t)$ son los voltajes sobre los capacitores C_1 y C_2 , respectivamente, y $f(V_1(t))$ es la característica $i - v$ de NR lineal a trozos del diodo de Chua, representado en la Figura 3.4, la cual puede describirse por las siguientes ecuaciones de estado:

$$I_{NR}(t) = f(V_1(t)) = G_b V_1(t) + \frac{1}{2}(G_a - G_b)(|V_1(t) + B_p| - |V_1(t) - B_p|), \quad (3.15)$$

con B_p siendo el voltaje de punto de quiebre de un diodo, y $G_a < 0$ y $G_b < 0$ siendo algunas constantes apropiadas (la pendiente de la resistencia lineal a trozos).

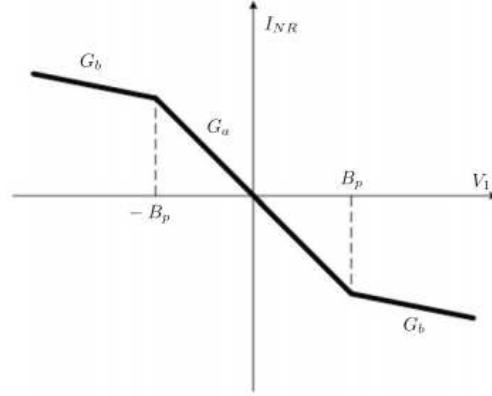


Figura 3.4: Característica $i - v$ lineal a trozos del resistor no lineal del diodo Chua.

Definiendo el cambio de escala

$$\begin{aligned}
 x &= V_1/B_p, & y &= V_2/B_p, & z &= I_L/B_p G, \\
 \alpha &= C_2/C_1, & \beta &= C_2/(LG^2), & \gamma &= C_2 R/(LG), \\
 m_1 &= G_b/G, & m_0 &= G_a/G, & \tau &= t|G/C_2|,
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

puede transformarse (3.14) en la siguiente forma correspondiente sin dimensiones del circuito de Chua [7]:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx(t)}{dt} &= \alpha(y(t) - x(t) - f(x)), \\
 \frac{dy(t)}{dt} &= x(t) - y(t) + z(t), \\
 \frac{dz(t)}{dt} &= -\beta y(t) - \gamma z(t),
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

donde

$$f(x) = m_1 x(t) + \frac{1}{2}(m_0 - m_1) \times (|x(t) + 1| - |x(t) - 1|), \tag{3.18}$$

y τ en las ecuaciones de transformación (3.16) es sin dimensiones de tiempo.

Para una descripción más detallada del análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio, las dinámicas de las regiones interior y exterior, se recomienda al lector la referencia [17].

Existe un número considerado de fenómenos eléctricos y magnéticos donde puede usarse el cálculo fraccional. En esta sección se consideran los modelos del inductor y el capacitor real.

El comportamiento del circuito puede describirse por tres ecuaciones diferenciales fraccionarias con diferente orden. Aplicando las leyes de Kirchhoff para los dos nodos de corriente y un lazo de tensión en el circuito mostrado en la Figura 3.3, se obtiene el siguiente modelo matemático del circuito para las variables de estado V_1 , V_2 y I_t :

$$C_1 {}_0D_t^{q_1} V_1(t) + I_{NR}(t) = \frac{V_2(t) - V_1(t)}{R_2}, \quad (3.19)$$

$$C_2 {}_0D_t^{q_2} V_2(t) - I(t) = \frac{V_1(t) - V_2(t)}{R_2},$$

$$L_1 {}_0D_t^{q_3} I(t) + V_2(t) + R_L I(t) = 0.$$

La ecuación anterior puede reescribirse en la siguiente forma [7, 18]:

$${}_0D_t^{q_1} V_1(t) = \frac{V_2(t) - V_1(t)}{C_1 R_2} - \frac{f(V_1(t))}{C_1}, \quad (3.20)$$

$${}_0D_t^{q_2} V_2(t) = \frac{V_1(t) - V_2(t)}{C_2 R_2} + \frac{I(t)}{C_2},$$

$${}_0D_t^{q_3} I(t) = \frac{-V_2(t) - R_L I(t)}{L_1},$$

donde V_1 es el voltaje a través del capacitor C_1 , V_2 es el voltaje a través del capacitor C_2 , I es la corriente por medio de la inductancia L_1 , q_1 es el orden real del capacitor C_1 , q_2 es el orden real del capacitor C_2 y q_3 es el orden real del inductor L_1 , $f(V_1)$ es la característica $i - v$ lineal a trozos del diodo de Chua.

Usando la transformación (3.16), puede reescribirse la ecuación anterior en la siguiente forma sin dimensiones [7, 18]

$${}_0D_t^{q_1} x(t) = \alpha(y(t) - x(t) - f(x)), \quad (3.21)$$

$${}_0D_t^{q_2} y(t) = x(t) - y(t) + z(t),$$

$${}_0D_t^{q_3} z(t) = -\beta y(t) - \gamma z(t),$$

donde $f(x)$ es una función lineal a trozos dependiente del estado x definida por:

$$f(x) = m_1 x(t) + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x(t) + 1| - |x(t) - 1|). \quad (3.22)$$

La solución numérica del oscilador de Chua de orden fraccionario tiene la

siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 x(t_k) &= (\alpha(y(t_{k-1}) - x(t_{k-1}) - f(x(t_{k-1}))))h^{q_1} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_1)} x(t_k - j), \\
 y(t_k) &= (x(t_k) - y(t_{k-1}) + z(t_{k-1}))h^{q_2} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_2)} y(t_k - j), \\
 z(t_k) &= (-\beta y(t_k) - \gamma z(t_{k-1}))h^{q_3} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_3)} z(t_k - j),
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

donde

$$f(x) = m_1 x(t_{k-1}) + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x(t_{k-1}) + 1| - |x(t_{k-1}) - 1|). \tag{3.24}$$

A continuación se presentan dos conjuntos de parámetros, el respectivo orden mínimo de la derivada para cada uno de ellos, obtenido de acuerdo a la relación (3.8), así como el Jacobiano de las ecuaciones (3.21) y (3.22) de acuerdo a la referencia [17]:

$$J = \begin{bmatrix} -\alpha(m_1 + 1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{bmatrix}, \tag{3.25}$$

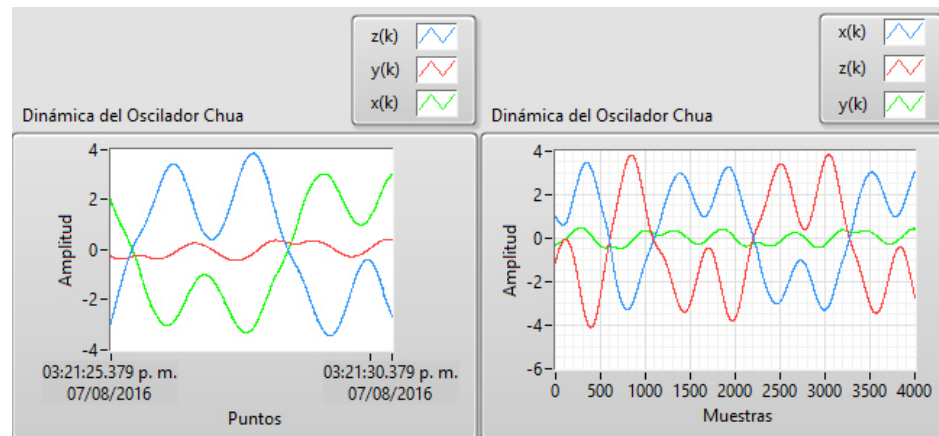
el orden mínimo de la derivada para el conjunto de parámetros $\alpha = 10.1911$, $\beta = 10.3035$, $\gamma = 0.1631$ y $m_0 = -0.8692$ y $m_1 = -1.1126$, es $q > 0.8936$.

Para el siguiente conjunto de parámetros $\alpha = 10.725$, $\beta = 10.593$, $\gamma = 0.268$ y $m_0 = -0.7872$ y $m_1 = -1.1726$, el orden mínimo de la derivada es $q > 0.9226$.

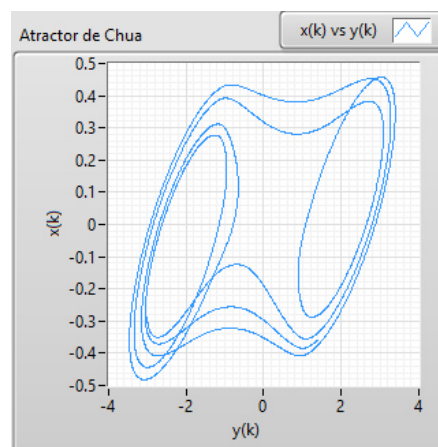
La dinámica y el atractor de 2 enrollamientos del oscilador de Chua se muestran en la Figura 3.5, donde los parámetros son: $\alpha = 10.725$, $\beta = 10.593$, $\gamma = 0.268$ y $m_0 = -0.7872$ y $m_1 = -1.1726$, con valores del orden de las derivadas de $q_1 = q_2 = 0.98$ y $q_3 = 0.94$ y el paso del tiempo $h = 0.005$. La no linealidad del Oscilador de Chua, se muestra en la Figura 3.6, representa los dos puntos de quiebre en la pendiente como resultado de los dos enrollamientos que presenta su atractor [7, 18].

3.4. Oscilador de Lorenz de orden fraccionario

En 1963, Edward Lorenz, intentaba predecir el comportamiento de la atmósfera por medio de un conjunto de ecuaciones, que eran parte de un modelo matemático [5].



(a)



(b)

Figura 3.5: (a) Dinámica del oscilador Chua de orden fraccionario, (b) Atractor caótico del oscilador Chua de orden fraccionario.

Obtuvo un atractor de la simulación de este modelo y descubrió que el sistema era sensible a condiciones iniciales al repetir las simulaciones del modelo. El por primera vez utilizó el término “efecto mariposa”, el cuál en la teoría del caos se refiere a la sensibilidad dependiente de las condiciones iniciales.

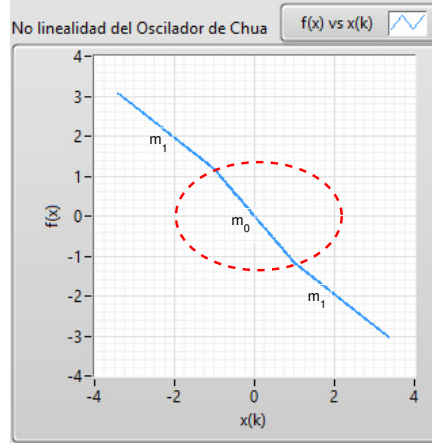


Figura 3.6: No linealidad del Oscilador Chua, mostrando dos puntos de quiebre.

El oscilador caótico de Lorenz es descrito por [7]:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= \sigma(y(t) - x(t)), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= x(t)(\rho - z(t)) - y(t), \\ \frac{dz(t)}{dt} &= x(t)y(t) - \beta z(t),\end{aligned}\tag{3.26}$$

donde σ es llamado el número de Prandtl y ρ es llamado el número de Rayleigh. Todos $\sigma, \rho, \beta > 0$, pero normalmente $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ y ρ es variado. El oscilador presenta comportamiento caótico para $\rho = 28$ y muestra órbitas para otros valores.

El oscilador de Lorenz tiene tres puntos de equilibrio, donde uno obviamente es el origen $E_1 = (0; 0; 0)$ y los otros dos son: $E_2 = (\sqrt{(\beta\rho - \beta)}; \sqrt{(\beta\rho - \beta)}; \rho - 1)$, $E_3 = (-\sqrt{(\beta\rho - \beta)}; -\sqrt{(\beta\rho - \beta)}; \rho - 1)$. La matriz Jacobiana del oscilador de Lorenz en el punto de equilibrio $E^* = (x^*, y^*, z^*)$ es dada por

$$J = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z^* & -1 & -x^* \\ y^* & x^* & -\beta \end{bmatrix}.\tag{3.27}$$

Los puntos de equilibrio del oscilador con los parámetros arriba son: $E_1 = (0; 0; 0)$, $E_2 = (8.4853; 8.4853; 27)$, y $E_3 = (-8.4853; -8.4853; 27)$.

El oscilador de Lorenz de orden fraccionario es descrito como [7]:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1}x(t) &= \sigma(y(t) - x(t)), \\ {}_0D_t^{q_2}y(t) &= x(t)(\rho - z(t)) - y(t), \\ {}_0D_t^{q_3}z(t) &= x(t)y(t) - \beta z(t). \end{aligned} \quad (3.28)$$

La solución numérica del oscilador de Lorenz de orden fraccionario tiene la siguiente forma [7]:

$$\begin{aligned} x(t_k) &= (\sigma(y(t_{k-1}) - x(t_{k-1})))h^{q_1} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_1)}x(t_k - j), \\ y(t_k) &= x(t_k)(\rho - z(t_{k-1})) - y(t_{k-1})h^{q_2} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_2)}y(t_k - j), \\ z(t_k) &= (x(t_k)y(t_k) - \beta z(t_{k-1}))h^{q_3} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_3)}z(t_k - j). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Utilizando la relación (3.8), se obtiene que el orden mínimo de la derivada $q > 0.9941$.

La dinámica y el atractor de 2 enrollamientos del oscilador de Lorenz se muestran en la Figura 3.7, donde los parámetros son: $\sigma = 10$, $\rho = 28$ y $\beta = \frac{8}{3}$, el orden de las derivadas $q_1 = q_2 = q_3 = 0.995$, y el paso del tiempo $h = 0.005$.

3.5. Oscilador de Lü de orden fraccionario

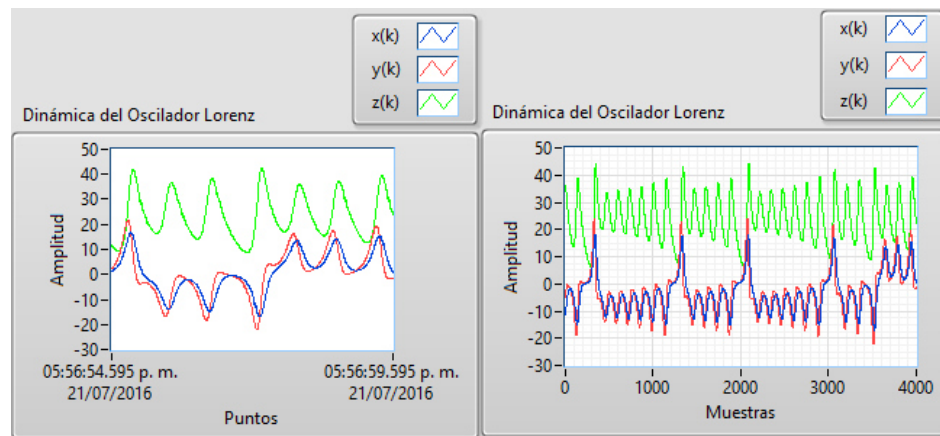
Un puente entre los sistemas de Lorenz y Chen es el denominado sistema de Lü.

El oscilador de Lü de orden fraccionario es descrito como [7]:

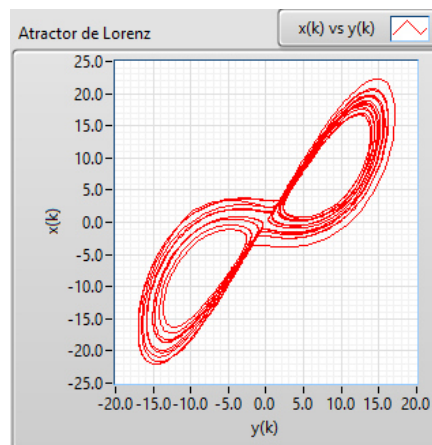
$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1}x(t) &= a(y(t) - x(t)), \\ {}_0D_t^{q_2}y(t) &= -x(t)z(t) + cy(t), \\ {}_0D_t^{q_3}z(t) &= x(t)y(t) - bz(t), \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde $0 < q_1, q_2, q_3 \leq 1$, son el orden de las derivadas, y a, b, c son los parámetros del sistema.

El sistema tiene tres puntos de equilibrio $E_1 = (0; 0; 0)$, $E_2 = (\sqrt{bc}; \sqrt{bc}; c)$ y $E_3 = (-\sqrt{bc}; -\sqrt{bc}; c)$.



(a)



(b)

Figura 3.7: (a) Dinámica del oscilador Lorenz de orden fraccionario, (b) Atractor caótico del oscilador Lorenz de orden fraccionario.

La matriz Jacobiana del oscilador de Lü en el punto de equilibrio $E^* = (x^*, y^*, z^*)$ es dada por

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ -z^* & c & -x^* \\ y^* & x^* & -b \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

La solución numérica del oscilador de Lü de orden fraccionario tiene la siguiente

forma [7]:

$$\begin{aligned}
 x(t_k) &= (a(y(t_{k-1}) - x(t_{k-1})))h^{q_1} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_1)} x(t_k - j), \\
 y(t_k) &= (-x(t_k)z(t_{k-1}) + cy(t_{k-1}))h^{q_2} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_2)} y(t_k - j), \\
 z(t_k) &= (x(t_k)y(t_k) - bz(t_{k-1}))h^{q_3} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_3)} z(t_k - j).
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Considerando los siguientes parámetros $a = 36$, $b = 3$ y $c = 20$, se obtienen el valor de los puntos de equilibrio faltantes de la matriz Jacobiana [7], $E_2 = (7.7460; 7.7460; 20)$ y $E_3 = (-7.7460; -7.7460; 20)$. Los valores propios para E_1 son $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 20$ y $\lambda_3 = -36$, mostrando que es un punto silla. Para E_2 y E_3 se tienen $\lambda_1 \approx -22.6516$ y $\lambda_{2,3} \approx 1.8258 \pm 13.6887j$, por lo que son puntos focos-sillas.

Utilizando la relación (3.8), se obtiene que el orden mínimo de la derivada $q > 0.9156$.

La dinámica y el atractor de 2 enrollamientos del oscilador de Lü se representan en la Figura 3.8, donde los parámetros son: $a = 36$, $b = 3$, $c = 20$ y el orden de las derivadas $q_1 = q_2 = q_3 = 0.95$, y el paso del tiempo $h = 0.005$.

3.6. Oscilador de Liu de orden fraccionario

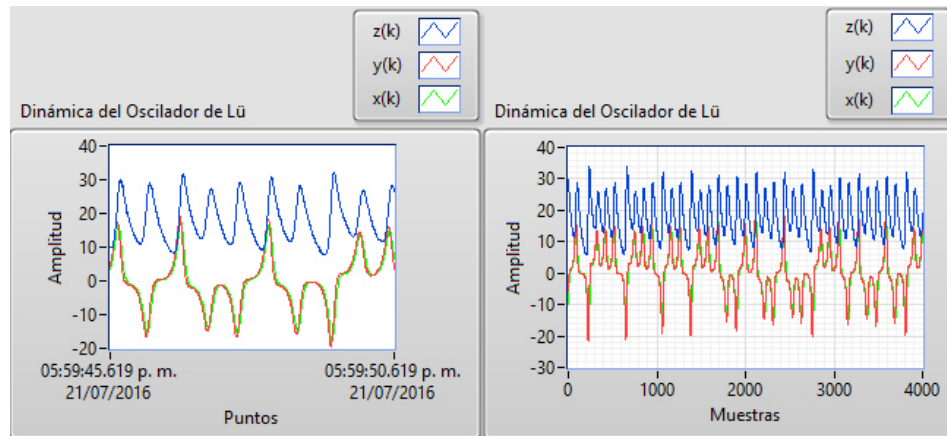
El modelo matemático de Liu se reporta en la literatura en el 2009 y al año siguiente se introduce el sistema de orden fraccionario [7].

El oscilador caótico de Liu es descrito por:

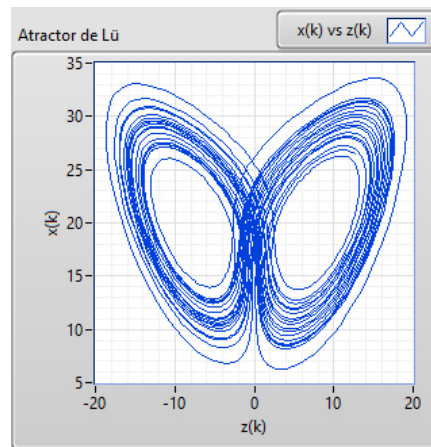
$$\begin{aligned}
 \frac{dx(t)}{dt} &= -ax(t) - ey^2(t), \\
 \frac{dy(t)}{dt} &= by(t) - kx(t)z(t), \\
 \frac{dz(t)}{dt} &= -cz(t) + mx(t)y(t),
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

donde los parámetros son: $a = e = 1$, $b = 2.5$, $c = 5$, $k = 4$.

El sistema tiene 5 puntos de equilibrio, dos de ellos son complejos y tres son puntos de equilibrio reales $E_1 = (0; 0; 0)$, $E_2 = (-0.88388; -0.940150; 0.664786)$, y $E_3 = (-0.88388; 0.940150; -0.664786)$.



(a)



(b)

Figura 3.8: (a) Dinámica del oscilador Lü de orden fraccionario, (b) Atractor caótico del oscilador Lü de orden fraccionario.

La correspondiente matriz Jacobiana evaluada en el equilibrio $E^* = (x^*, y^*, z^*)$ es

$$J = \begin{bmatrix} -a & -2ey^* & 0 \\ -kz^* & b & -kx^* \\ my^* & mx^* & -c \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Las raíces del polinomio característico evaluada en el equilibrio E_1 son $\lambda_1 = -1$,

$\lambda_2 = -5$, y $\lambda_3 = 2.5$, por lo que es un punto silla. Los valores propios obtenidos al evaluar la matriz Jacobiana en los puntos de equilibrio E_2 y E_3 son $\lambda_1 \approx -4.387767$ y $\lambda_{2,3} \approx 0.4438837 \pm 3.346383j$, por lo que son puntos focos-sillas.

El oscilador de Liu de orden fraccionario es descrito como [7]:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1}x(t) &= -ax(t) - ey^2(t), \\ {}_0D_t^{q_2}y(t) &= by(t) - kx(t)z(t), \\ {}_0D_t^{q_3}z(t) &= -cz(t) + mx(t)y(t). \end{aligned} \quad (3.35)$$

La solución numérica del oscilador de Liu de orden fraccionario tiene la siguiente forma:

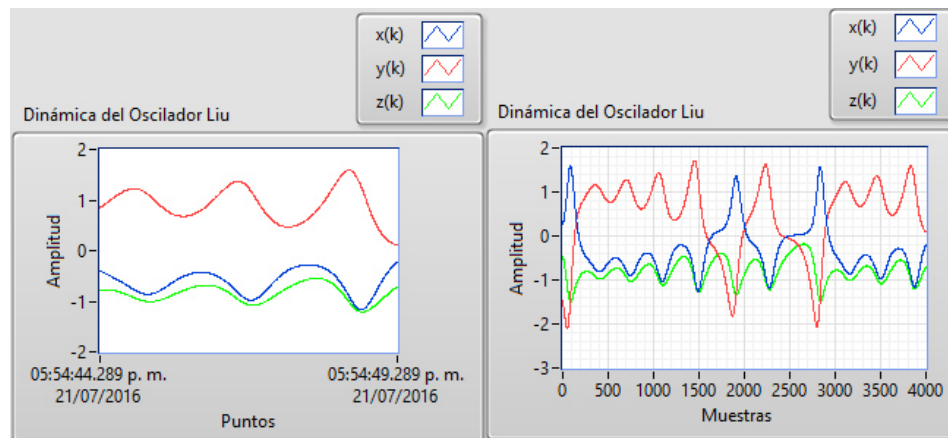
$$\begin{aligned} x(t_k) &= (-ax(t_{k-1}) - ey^2(t_{k-1}))h^{q_1} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_1)}x(t_k - j), \\ y(t_k) &= (by(t_{k-1}) - kx(t_k)z(t_{k-1}))h^{q_2} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_2)}y(t_k - j), \\ z(t_k) &= (-cz(t_{k-1}) + mx(t_k)y(t_k))h^{q_3} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_3)}z(t_k - j). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Utilizando la relación (3.8), se obtiene que el orden mínimo de la derivada $q > 0.916$.

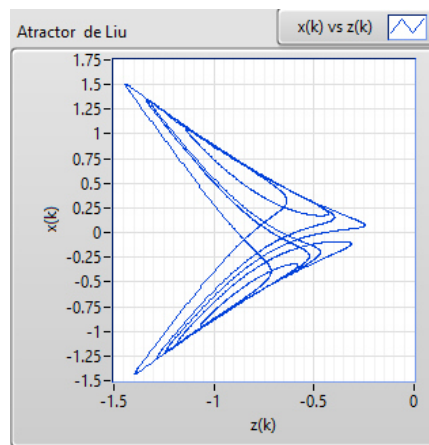
La dinámica y el atractor de 2 enrollamientos del oscilador de Liu se muestran en la Figura 3.9, donde los parámetros son: $a = e = 1$, $b = 2.5$, $c = 5$, $k = 4$ y el orden de las derivadas $q_1 = q_2 = q_3 = 0.95$, y el paso del tiempo $h = 0.005$. Para este conjunto de parámetros el polinomio característico de los puntos de equilibrio E_2 y E_3 es

$$\lambda^{285} + 3.5\lambda^{190} + 7.5\lambda^{95} + 50 = 0, \quad (3.37)$$

y las raíces inestables son $\lambda_{1,2} = 1.3417 \pm 0.1944j$, porque $|\arg(\lambda_{1,2})| \approx 0.1439 < \frac{\pi}{2m}$, donde $m = 100$.



(a)



(b)

Figura 3.9: (a) Dinámica del oscilador Liu de orden fraccionario, (b) Atractor caótico del oscilador Liu de orden fraccionario.

Capítulo 4

Sincronización de redes complejas en topología mundo pequeño

La sincronización es un fenómeno que se presenta en dos elementos o más coincidiendo en el tiempo. Los elementos pueden ser del mismo tipo o diferentes [1].

El propósito de este capítulo es la sincronización completa de redes complejas de mundo pequeño, donde sus elementos son osciladores caóticos de orden fraccionario, y son modelados por ecuaciones en diferencias. Los osciladores de orden fraccionario son aproximaciones de sistemas en tiempo continuo, por lo que su magnitud es en tiempo continuo y no en tiempo discreto.

4.1. Definiciones de sincronización

Existen diferentes tipos de sincronización utilizando redes complejas formadas por osciladores caóticos, los cuáles se definen a continuación [22]:

- **Sincronización completa:** la dinámica de la red obtiene esta sincronización, debido a que cada estado de los osciladores converge con los correspondientes estados de los demás, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \hat{x}(t)\| = 0. \quad (4.1)$$

- **Sincronización aproximada:** la diferencia entre las variables de estado del sistema entre dos conjuntos produce una cota asintótica:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \hat{x}(t)\| < \rho, \quad \rho > 0. \quad (4.2)$$

- **Sincronización generalizada:** en este tipo de sincronización, los elementos de las redes complejas son osciladores diferentes, la sincronización se logra al asociar la salida de uno de los osciladores como una función dada de la entrada del otro.

4.2. Sincronización de redes complejas

Considere una red dinámica con N osciladores interconectados, donde cada oscilador es una unidad fundamental, con dinámica dependiente de la naturaleza de la red.

Cada oscilador se define como sigue:

$$\dot{x}_i = f(x_i) + u_i, \quad x_i(0) \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.3)$$

donde N es el tamaño de la red, $x_i = [x_{i1} \ x_{i2} \ x_{i3}, \dots, x_{in-1}, \ x_{in}] \in \mathfrak{R}^n$ representa las variables de estado del oscilador i , $x_i(0) \in \mathfrak{R}^n$ son las condiciones iniciales del oscilador i , $u_i \in \mathfrak{R}^n$ es la ley de control y establece la sincronización entre mínimo dos osciladores y se define como sigue

$$u_i = c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (4.4)$$

El termino $c > 0$ representa la fuerza de acoplamiento, $\Gamma \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ es una matriz constante a determinar la variable de estado acoplada de cada oscilador. Definiendo a $\Gamma = \text{diag}[r_1, \ r_2, \dots, r_n]$ como una matriz diagonal, y si dos osciladores están enlazados por medio de su k variable de estado, entonces el elemento diagonal $r_k = 1$ para un particular k y $r_j = 0$ para $j \neq k$ [21].

La matriz $A \in \mathfrak{R}^{N \times N}$ con elementos a_{ij} , llamada matriz de acoplamiento, donde muestra las conexiones entre osciladores, si el oscilador i se conecta al oscilador j , entonces $a_{ij} = 1$, de otro modo $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ [21]. Los elementos de la diagonal de la matriz A son definidos como:

$$a_{ii} = - \sum_{j=1}^N a_{ij} = - \sum_{j=1}^N a_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.5)$$

Por lo anterior, si el grado del nodo i es d_i , entonces:

$$a_{ii} = -d_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.6)$$

Si los osciladores de la red son modelados como grafos no dirigidos, la matriz A es simétrica e irreducible y puede demostrarse que un valor propio de A es 0 y los demás son estrictamente negativos.

La red dinámica (4.3) [13, 21, 26] obtiene la sincronización completa si

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t) \quad \text{para } t \rightarrow \infty, \quad (4.7)$$

con lo cual la siguiente ecuación se satisface:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i - x_j\| = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad i \neq j. \quad (4.8)$$

La red dinámica (4.3) obtiene la sincronización (asintótica) si:

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t), \quad \text{como } t \rightarrow \infty. \quad (4.9)$$

La condición de acoplamiento garantiza que la sincronización de estado es una solución, $s(t) \in \mathfrak{R}^n$, de un nodo aislado, es decir:

$$\dot{s}(t) = f(s(t)). \quad (4.10)$$

Aquí $s(t)$ puede ser un punto de equilibrio, una órbita periódica, o un atractor caótico. Claramente la estabilidad de la sincronización de estado,

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t) = s(t), \quad (4.11)$$

de la red (4.3) es determinado por la dinámica de un nodo aislado y (4.4).

Basados en la teoría de estabilidad de Lyapunov, se presentan a continuación el Teorema 4.1 y el Lema 4.1 propuestos por Wang & Chen [13, 21, 23, 26], con una modificación debido a los sistemas de orden fraccionario, donde $\alpha = 1$ en el caso de sistemas de orden entero.

Teorema 4.1 *Considere la red dinámica (4.3), con valores propios de A en $0 = \lambda_1 > \lambda_2, \dots, \lambda_N$. Ahora suponga que existe una matriz diagonal $D > 0$ de $n \times n$ y dos constantes $\bar{d} < 0$ y $\tau > 0$ tales que:*

$$[{}_a D_t^\alpha f(s(t)) + d\Gamma]D + [{}_a D_t^\alpha f(s(t)) + d\Gamma]^T D \leq -\tau I_n, \quad (4.12)$$

para todo $d \leq \bar{d}$, donde $I_n \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ es una matriz unitaria. Si se cumple que la sincronización es exponencialmente estable, entonces

$$c\lambda_2 \leq \bar{d}. \quad (4.13)$$

Lema 4.1 *Considere la red (4.3). Sea λ_1 el valor propio mayor no cero de la matriz de acoplamiento A . La sincronización de estados de la red (4.3) definida por $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ es asintóticamente estable si*

$$\lambda_1 \leq \left| -\frac{T}{c} \right|, \quad (4.14)$$

donde $c > 0$ es la fuerza de acoplamiento de la red y $T > 0$ es una constante positiva tal que cero es un punto exponencialmente estable del sistema n -dimensional

$$\begin{aligned} {}_a D_t^\alpha z_1 &= f_1(z) - Tz_1, \\ {}_a D_t^\alpha z_2 &= f_2(z), \\ &\vdots \\ {}_a D_t^\alpha z_n &= f_n(z). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Las figuras relacionadas a mostrar la sincronización completa así como el error de sincronización entre los osciladores presentes en la redes se obtuvieron con ayuda del software LabVIEW.

4.3. Sincronización de una red de 10 osciladores Chua de orden fraccionario

Considere una red compleja de 10 osciladores caóticos Chua de orden fraccionario. La Figura 4.1, representa una red en topología mundo pequeño en configuración bidireccional, con una probabilidad de conexión $p = 0.8$ y una conectividad $k = 2$.

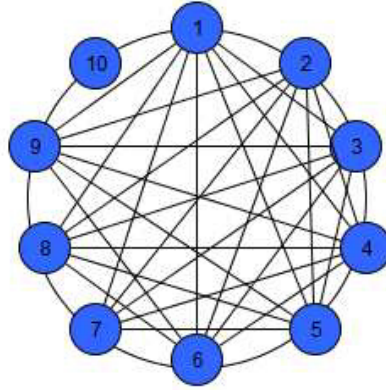


Figura 4.1: Red de mundo pequeño de 10 osciladores Chua.

El cálculo de la matriz de acoplamiento A para la red de la Figura 4.1 se presenta en

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -8 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -8 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -8 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -8 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -8 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -8 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Debido a que los osciladores presentes en la red están acoplados mediante el primer estado, la matriz diagonal $\Gamma = \text{diag}[1, 0, 0]$. Entonces, la ley de control es aplicada a los estados $x_i(t)$ de la red. Por lo tanto, el sistema de Chua de orden fraccionario presente en la red compleja 4.1 por medio de las ecuaciones (4.3), (4.4) y (4.5) se describe como

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x_i(t) &= \alpha(y_i(t) - x_i(t) - f_i(x)) + u_i, \\ {}_0D_t^{q_2} y_i(t) &= x_i(t) - y_i(t) + z_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N = 10, \\ {}_0D_t^{q_3} z_i(t) &= -\beta y_i(t) - \gamma z_i(t), \end{aligned} \quad (4.17)$$

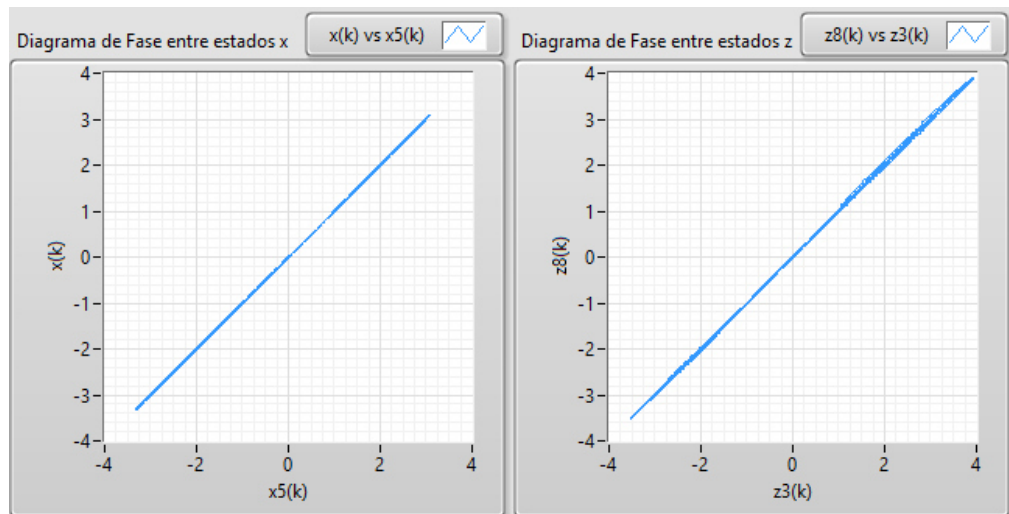
donde $f_i(x)$ es una función lineal a trozos dependiente de cada estado x_i definida por:

$$f_i(x) = m_1 x_i(t) + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x_i(t) + 1| - |x_i(t) - 1|). \quad (4.18)$$

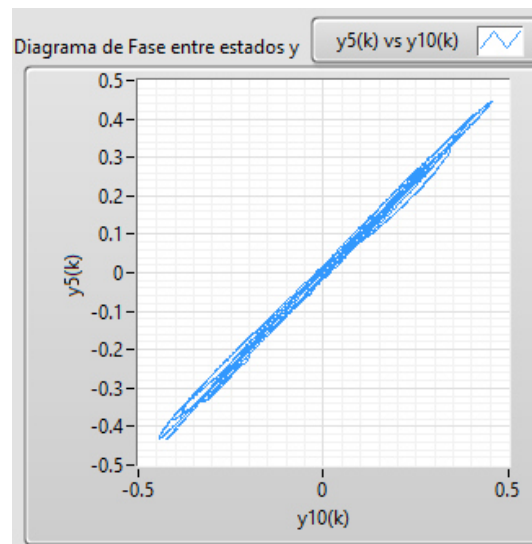
Las leyes de control para cada oscilador presente en la red son:

$$\begin{aligned} u_1 &= c(-9x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10}), \\ u_2 &= c(x_1 - 8x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9), \\ &\vdots \\ u_9 &= c(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_8 - 8x_9 + x_{10}), \\ u_{10} &= c(x_1 + x_9 - 2x_{10}). \end{aligned} \quad (4.19)$$

La tabla 4.1, muestra las condiciones iniciales, requeridas para la solución numérica de la red compleja de 10 osciladores Chua de orden fraccionario. La sincronía completa se obtiene con ayuda del Lema 4.1, con una $c = 5$ y para demostrar la sincronía la Figura 4.2, representa el plano de fase, donde se aprecia la sincronía entre los estados $x(k)$ vs $x_5(k)$, $y_5(k)$ vs $y_{10}(k)$ y $z_8(k)$ vs $z_3(k)$ de los osciladores presentes en la red 4.1.



(a)



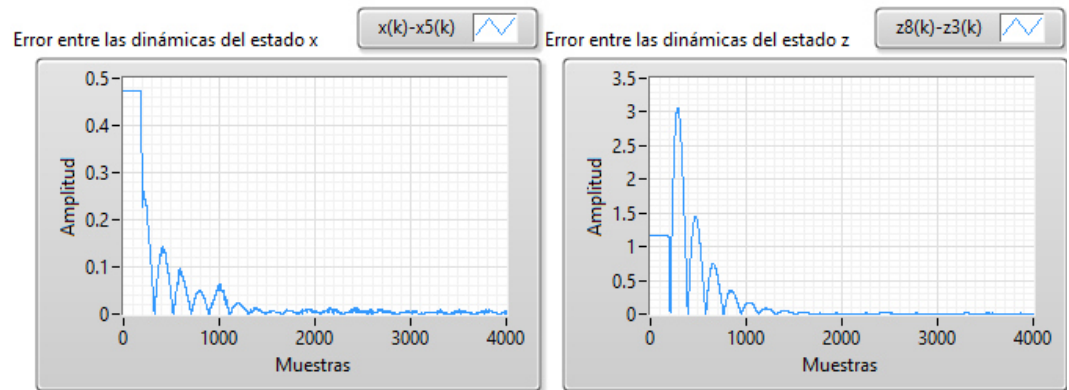
(b)

Figura 4.2: Planos de fase, donde se aprecia la sincronía entre los estados $x(k)$ vs $x_5(k)$ Figura 4.2a a la izquierda, $y_5(k)$ vs $y_{10}(k)$ Figura 4.2b y $z_8(k)$ vs $z_3(k)$ Figura 4.2a a la derecha, de los osciladores presentes en la red 4.1 para las variables de estado de cada oscilador.

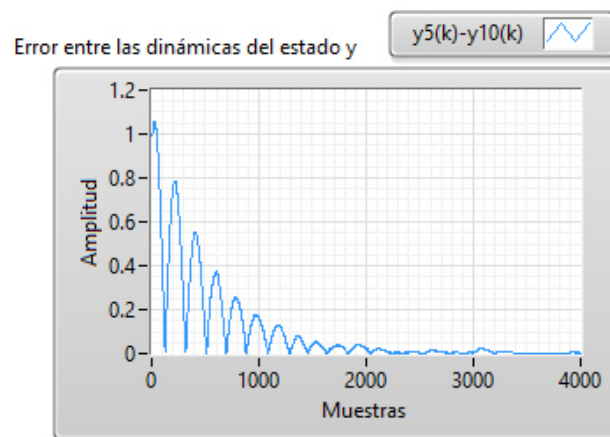
Condiciones iniciales aleatorias y diferentes en el rango -3 y 3.										
Oscilador \ Estado	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x(0)$	-2.2381	2.4803	0.7942	-2.4148	1.8883	2.4348	-1.329	.2813	2.745	2.7893
$y(0)$	-2.2381	2.4803	0.7942	-2.4148	1.8883	2.4348	-1.329	.2813	2.745	2.7893
$z(0)$	-2.2381	2.4803	0.7942	-2.4148	1.8883	2.4348	-1.329	.2813	2.745	2.7893

Tabla 4.1: Condiciones iniciales para la red de mundo pequeño de 10 osciladores Chua.

La sincronización completa, entre los estados $x(k) - x_5(k)$, $y_5(k) - y_{10}(k)$ y $z_8(k) - z_3(k)$ de la red de acuerdo a la ecuación (4.1), se ilustra en la Figura 4.3.



(a)



(b)

Figura 4.3: Sistema dinámico del error de sincronización mostrando sincronización completa, entre los estados $x(k) - x_5(k)$ Figura 4.3a a la izquierda, $y_5(k) - y_{10}(k)$ Figura 4.3b y $z_8(k) - z_3(k)$ Figura 4.3a a la derecha de la red Chua.

4.4. Sincronización de una red de 18 osciladores Lorenz de orden fraccionario

Considere una red compleja de 18 osciladores caóticos Lorenz de orden fraccionario. La Figura 4.4, representa una red en topología mundo pequeño en configuración bidireccional, con una probabilidad de conexión $p = 0.5$ y una conectividad $k = 4$.

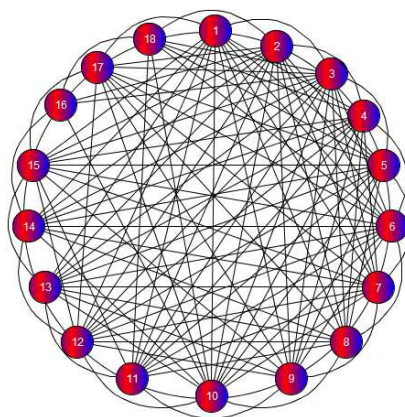


Figura 4.4: Red de mundo pequeño de 18 osciladores Lorenz.

El cálculo de la matriz de acoplamiento A para la red de la Figura 4.4 se presenta en

$$A = \begin{bmatrix} -16 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -17 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -17 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -15 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -16 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -16 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -15 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -14 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -14 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -16 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -14 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -15 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -14 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -13 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -14 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -13 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -10 \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

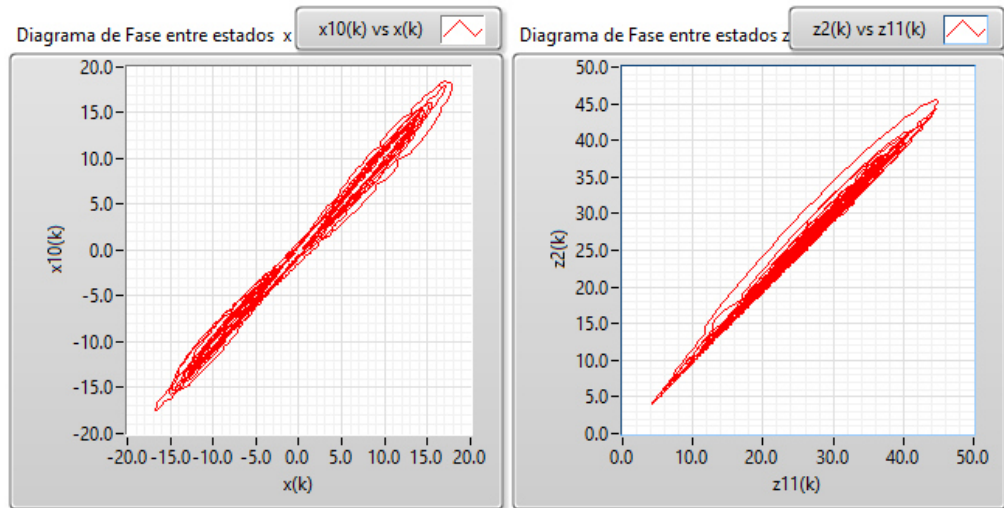
Debido a que los osciladores presentes en la red están acoplados mediante el segundo estado, la matriz diagonal $\Gamma = \text{diag}[0, 1, 0]$. Entonces, la ley de control es aplicada a los estados $y_i(t)$ de la red. Por lo tanto, el sistema de Lorenz de orden fraccionario presente en la red compleja 4.4 por medio de las ecuaciones (4.3), (4.4) y (4.5) se describe como

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x_i(t) &= \sigma(y_i(t) - x_i(t)), \\ {}_0D_t^{q_2} y_i(t) &= x_i(t)(\rho - z_i(t)) - y_i(t) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, N = 18, \\ {}_0D_t^{q_3} z_i(t) &= x_i(t)y_i(t) - \beta z_i(t). \end{aligned} \quad (4.21)$$

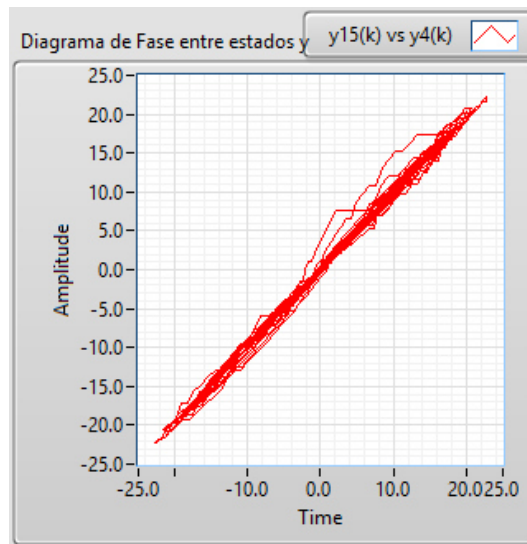
Las leyes de control para cada oscilador presente en la red son:

$$\begin{aligned} u_1 &= c(-16y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} \\ &\quad + y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14} + y_{15} + y_{17} + y_{18}), \\ u_2 &= c(y_1 - 17y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} \\ &\quad + y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14} + y_{15} + y_{16} + y_{17} + y_{18}), \\ u_3 &= c(y_1 + y_2 - 17y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} \\ &\quad + y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14} + y_{15} + y_{16} + y_{17} + y_{18}), \\ &\vdots \\ u_{16} &= c(y_2 + y_3 + y_{10} + y_{14} + y_{15} - 7y_{16} + y_{17} + y_{18}), \\ u_{17} &= c(y_1 + y_2 + y_3 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} \\ &\quad + y_{12} + y_{15} + y_{16} - 13y_{17} + y_{18}), \\ u_{18} &= c(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_{10} + y_{11} + y_{16} + y_{17} - 10y_{18}). \end{aligned} \quad (4.22)$$

La tabla 4.2, muestra las condiciones iniciales, requeridas para la solución numérica de la red compleja de 18 osciladores Lorenz de orden fraccionario. La sincronía completa se obtiene con ayuda del Lema 4.1, con una $c = 1$ y para demostrar la sincronía la Figura 4.5, representa el plano de fase, donde se aprecia la sincronía entre los estados $x_{10}(k)$ vs $x(k)$, $y_{15}(k)$ vs $y_4(k)$ y $z_2(k)$ vs $z_{11}(k)$ de los osciladores presentes en la red 4.4.



(a)



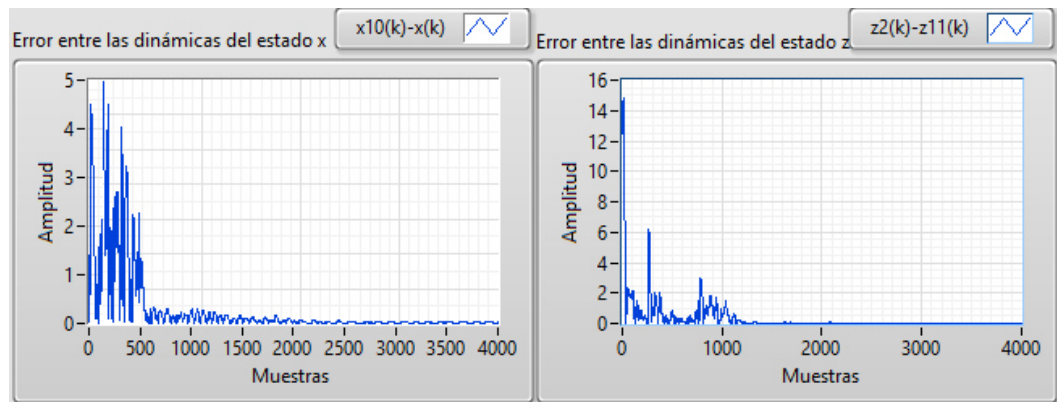
(b)

Figura 4.5: Planos de fase, donde se aprecia la sincronía entre los estados $x_{10}(k) - x(k)$ Figura 4.5a a la izquierda, $y_{15}(k) - y_4(k)$ Figura 4.5b y $z_2(k) - z_{11}(k)$ 4.5a a la derecha, de los osciladores presentes en la red 4.4 para las variables de estado de cada oscilador.

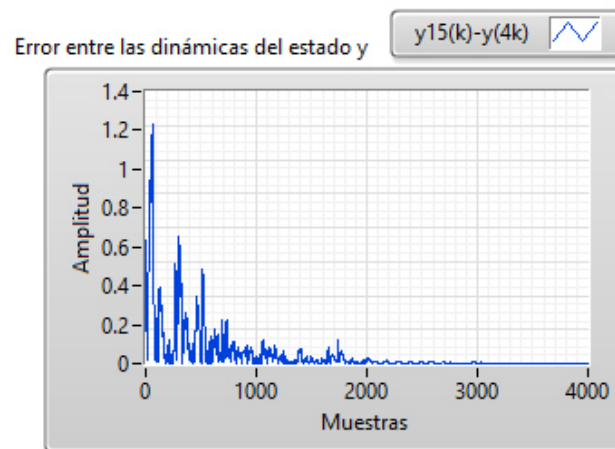
Condiciones iniciales aleatorias y diferentes en el rango -5 y 5.									
Oscilador \ Estado	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x(0)$	3.1472	-3.7301	4.0579	4.1338	1.32363	-4.0246	-2.215	0.4688	4.5751
$y(0)$	3.1472	-3.7301	4.0579	4.1338	1.32363	-4.0246	-2.215	0.4688	4.5751
$z(0)$	3.1472	-3.7301	4.0579	4.1338	1.32363	-4.0246	-2.215	0.4688	4.5751
Oscilador \ Estado	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$x(0)$	4.6489	-3.4329	4.7059	4.5717	-0.1462	3.0028	-3.5811	-0.7824	4.1574
$y(0)$	4.6489	-3.4329	4.7059	4.5717	-0.1462	3.0028	-3.5811	-0.7824	4.1574
$z(0)$	4.6489	-3.4329	4.7059	4.5717	-0.1462	3.0028	-3.5811	-0.7824	4.1574

Tabla 4.2: Condiciones iniciales para la red de mundo pequeño de 18 osciladores Lorenz.

La sincronización completa, entre los estados $x_{10}(k) - x(k)$, $y_{15}(k) - y_4(k)$ y $z_2(k) - z_{11}(k)$ de la red de acuerdo a la ecuación (4.1), se ilustra en la Figura 4.6.



(a)



(b)

Figura 4.6: Sistema dinámico del error de sincronización mostrando sincronización completa, entre los estados $x_{10}(k) - x(k)$ Figura 4.6a a la izquierda, $y_{15}(k) - y_4(k)$ Figura 4.6b y $z_2(k) - z_{11}(k)$ Figura 4.6a a la derecha de la red Lorenz.

4.5. Sincronización de una red de 24 osciladores Liu de orden fraccionario

Considere una red compleja de 24 osciladores caóticos Liu de orden fraccionario. La Figura 4.7, representa una red en topología mundo pequeño en configuración bidireccional, con una probabilidad de conexión $p = 0.2$ y una conectividad $k = 6$.

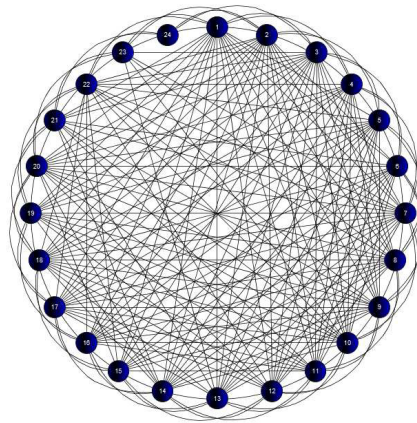


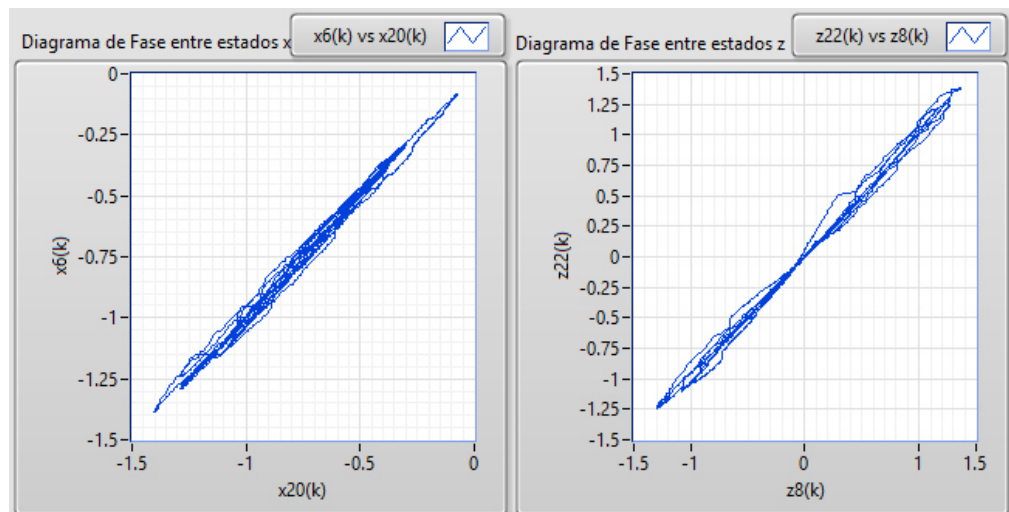
Figura 4.7: Red de mundo pequeño de 24 osciladores Liu.

El cálculo de la matriz de acoplamiento A para la red de la Figura 4.7 se presenta en

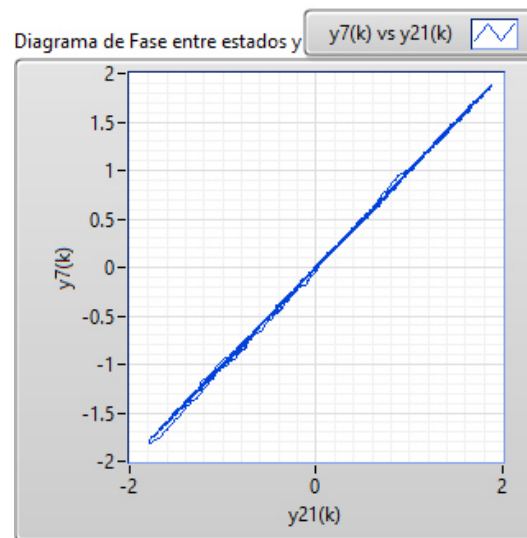
Las leyes de control para cada oscilador presente en la red son:

$$\begin{aligned}
u_1 &= c(-23y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11} + y_{12} & (4.25) \\
&\quad + y_{13} + y_{14} + y_{15} + y_{16} + y_{17} + y_{18} + y_{19} + y_{20} + y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_{24}), \\
u_2 &= c(y_1 - 23y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11} + y_{12} \\
&\quad + y_{13} + y_{14} + y_{15} + y_{16} + y_{17} + y_{18} + y_{19} + y_{20} + y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_{24}), \\
u_3 &= c(y_1 + y_2 - 23y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11} + y_{12} \\
&\quad + y_{13} + y_{14} + y_{15} + y_{16} + y_{17} + y_{18} + y_{19} + y_{20} + y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_{24}), \\
u_4 &= c(y_1 + y_2 + y_3 - 19y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11} + y_{12} \\
&\quad + y_{13} + y_{14} + y_{16} + y_{17} + y_{18} + y_{19} + y_{20} + y_{22}), \\
&\quad \vdots \\
u_{21} &= c(y_1 + y_2 + y_3 + y_6 + y_7 + y_9 + y_{10} + y_{11} \\
&\quad + y_{13} + y_{14} + y_{18} + y_{19} + y_{20} - 16y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_{24}), \\
u_{22} &= c(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{12} \\
&\quad + y_{15} + y_{16} + y_{17} + y_{18} + y_{19} + y_{20} + y_{21} - 19y_{22} + y_{23} + y_{24}), \\
u_{23} &= c(y_1 + y_2 + y_3 + y_7 + y_8 + y_{10} + y_{13} + y_{20} + y_{21} + y_{22} \\
&\quad - 11y_{23} + y_{24}), \\
u_{24} &= c(y_1 + y_2 + y_3 + y_{21} + y_{22} + y_{23} - 6y_{24}).
\end{aligned}$$

La tabla 4.3, muestra las condiciones iniciales, requeridas para la solución numérica de la red compleja de 24 osciladores Liu de orden fraccionario. La sincronía completa se obtiene con ayuda del Lema 4.1, con una $c = 0.8$ y para demostrar la sincronía la Figura 4.8, representa el plano de fase, donde se aprecia la sincronía entre los estados $x_6(k) - x_{20}(k)$, $y_7(k) - y_{21}(k)$ y $z_{22}(k) - z_8(k)$ de los osciladores presentes en la red 4.7.



(a)



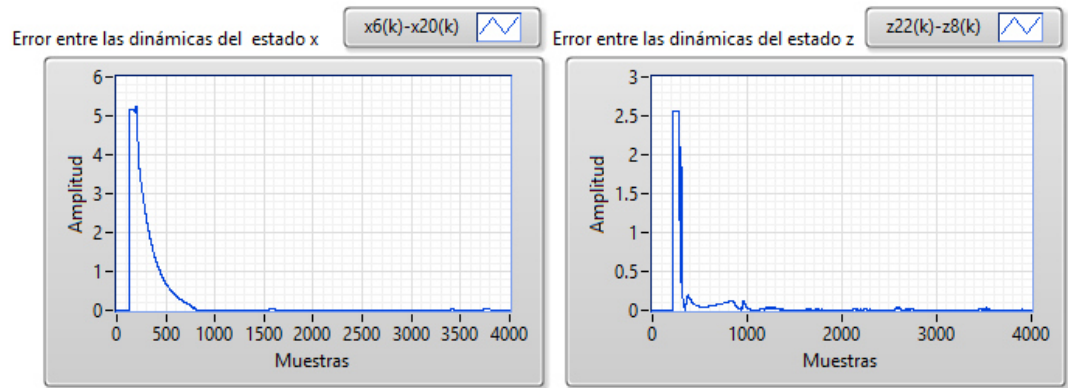
(b)

Figura 4.8: Planos de fase, donde se aprecia la sincronía entre los estados $x_6(k) - x_{20}(k)$ Figura 4.8a a la izquierda, $y_7(k) - y_{21}(k)$ Figura 4.8b y $z_{22}(k) - z_8(k)$ Figura 4.8a a la derecha, de los osciladores presentes en la red 4.7 para las variables de estado de cada oscilador.

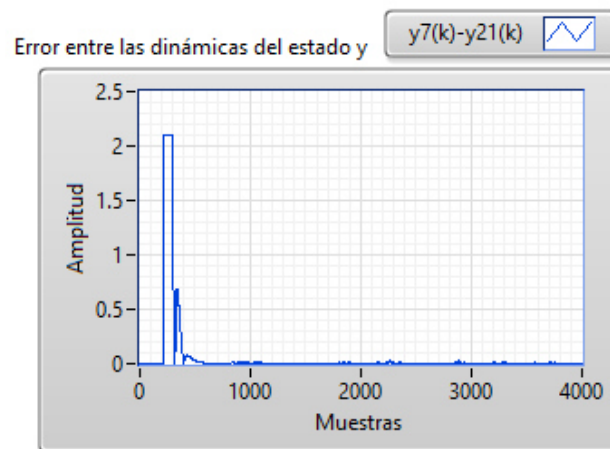
Condiciones iniciales aleatorias y diferentes en el rango -6 y 6.								
Oscilador \ Estado	1	2	3	4	5	6	7	8
$x(0)$	3.7767	4.8695	-4.4762	4.9605	1.5883	-4.8295	-2.658	0.5626
$y(0)$	3.7767	4.8695	-4.4762	4.9605	1.5883	-4.8295	-2.658	0.5626
$z(0)$	3.7767	4.8695	-4.4762	4.9605	1.5883	-4.8295	-2.658	0.5626
Oscilador \ Estado	9	10	11	12	13	14	15	16
$x(0)$	5.4901	5.5787	-4.1086	5.6471	5.486	-0.1755	3.6034	-4.2974
$y(0)$	5.4901	5.5787	-4.1086	5.6471	5.486	-0.1755	3.6034	-4.2974
$z(0)$	5.4901	5.5787	-4.1086	5.6471	5.486	-0.1755	3.6034	-4.2974
Oscilador \ Estado	17	18	19	20	21	22	23	24
$x(0)$	-0.9389	4.9888	3.5065	5.5139	1.8689	-5.5715	4.1896	5.2079
$y(0)$	-0.9389	4.9888	3.5065	5.5139	1.8689	-5.5715	4.1896	5.2079
$z(0)$	-0.9389	4.9888	3.5065	5.5139	1.8689	-5.5715	4.1896	5.2079

Tabla 4.3: Condiciones iniciales para la red de mundo pequeño de 24 osciladores Liu.

La sincronización completa, entre los estados $x_6(k) - x_{20}(k)$, $y_7(k) - y_{21}(k)$ y $z_{22}(k) - z_8(k)$ de la red de acuerdo a la ecuación (4.1), se ilustra en la Figura 4.9.



(a)



(b)

Figura 4.9: Sistema dinámico del error de sincronización mostrando sincronización completa, entre los estados $x_6(k) - x_{20}(k)$ Figura 4.9a a la izquierda, $y_7(k) - y_{21}(k)$ Figura 4.9b y $z_{22}(k) - z_8(k)$ Figura 4.9a a la derecha de la red Liu.

Capítulo 5

Encriptado de datos utilizando redes de osciladores caóticos

Este capítulo presenta dos criterios para la selección de la mejor señal caótica, estos criterios se basan en el dominio del tiempo y la frecuencia, con el objetivo de tener un mayor nivel de seguridad al utilizar el método de encriptado aditivo. Son proporcionados algunos conceptos sobre la teoría de señales y sistemas, para comprender como obtener los dos criterios de selección, mediante algunas simulaciones de ambos dominios.

Para finalizar, se implementa un sistema de comunicación caótico, para transmitir información encriptada y posteriormente mediante otro sistema de comunicación caótico, desencriptar la información transmitida, mediante el método de encriptado aditivo, para este caso particular la información es audio, todo esto en tiempo real o como también se le llama en línea por medio de simulación del software y hardware LabVIEW de National Instruments (NI), utilizando dos tarjetas electrónicas NI myRIO, debido a que una es para codificar y otra para decodificar la información. Se proporcionan las características de la tarjeta NI myRIO así como las simulaciones de LabVIEW tanto para la creación del sistema caótico como la del sistema de comunicación caótico.

5.1. Criterios de selección de la señal caótica

La finalidad de esta sección es justificar la selección de la mejor señal caótica utilizada en el método de encriptado aditivo con la intención de tener una mayor

seguridad al momento de transmitir información en el sistema de comunicación caótico.

Se proponen dos criterios, el primero de ellos, en el dominio del tiempo y el segundo en el dominio de la frecuencia [6]. El primer criterio se basa en la cantidad de energía presente en las señales del sistema caótico, mientras que el segundo toma en cuenta el espectro de las señales del sistema caótico para visualizar el ancho de banda, donde se concentra la mayor cantidad de energía en un rango de frecuencias.

Se presentan a continuación, los dos criterios utilizados para seleccionar la señal caótica para tener un mejor enmascaramiento en el sistema de comunicación caótico.

5.1.0.1. Criterio 1: Selección basada en la energía de la señal

La energía de una señal continua en el tiempo representada por $x(t)$, está dada por [6, 28]:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dx, \quad (5.1)$$

por lo que la energía de la señal está relacionada con el área bajo el cuadrado de la magnitud.

También, si

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dx < \infty, \quad (5.2)$$

se dice entonces, que $x(t)$ es de Energía finita. Aplicando un uniforme muestreo a $x(t)$, para una señal en tiempo discreto, la terminología equivalente a (5.1), es la siguiente:

$$E_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2, \quad (5.3)$$

que es la energía de una señal discreta en el tiempo $x(n) = x(t)|_{t=nT}$, siendo T el tiempo de muestreo.

En este criterio, se propone la elección de la señal caótica necesaria para enmascarar la información, mediante la magnitud de la Energía que las señales del sistema caótico presentan. Debido a los trabajos anteriormente reportados sobre esta aplicación, se recomienda atenuar la información que se desea enmascarar, con el objetivo de ocultar mejor la información. El atenuar la información, puede producir un resultado no favorable a la hora de descryptar la información, en gran parte debido a que pueden presentarse pérdidas de información o en caso de realizar una aplicación física, porque se desconoce el estado final de los componentes electrónicos.

La selección de la señal caótica para enmascarar el mensaje se determina por el resultado de la señal con mayor magnitud de energía. La tabla 5.1, muestra la magnitud de los niveles de energía de los estados del oscilador de Lorenz de orden fraccionario.

En el caso de realizar una implementación, seguramente la magnitud de los estados del oscilador de Lorenz presentarían una saturación, debido a que la magnitud es muy elevada. Es recomendable multiplicar por un factor de escalamiento al transmitir la señal caótica y después al recibir la señal multiplicarla por el inverso del factor de escalamiento, puesto que si se presenta una saturación se perdería información y podría perderse el caos.

Selección del estado con la mayor magnitud de Energía	
Estado	Magnitud
$x(t)$	2294000
$y(t)$	2905700
$z(t)$	22786000

Tabla 5.1: Niveles de energía de los estados del sistema de Lorenz fraccionario.

5.1.0.2. Criterio 2: Selección basada en la energía del espectro de la señal

Aunque seleccionar la señal caótica para enmascarar la información que se desea transmitir, basado en la magnitud de la energía de los estados del sistema caótico, resulta ventajoso es necesario observar el ancho de banda, para asegurar un mayor nivel de seguridad en el sistema de comunicación caótico encriptado, en el dominio de la frecuencia, es decir, considerar el rango de frecuencias en la que se localiza el espectro de la información que se desea enmascarar. Por esta razón, resulta conveniente considerar el análisis frecuencial por lo que se proporcionan algunos conceptos con la finalidad de comprender el análisis de las señales en el dominio de la frecuencia.

Para poder representar señales periódicas y aperiódicas en tiempo continuo y discreto se utiliza el análisis en frecuencia por medio de las series de Fourier y la transformada de Fourier. Estas herramientas descomponen las señales en función de componentes sinusoidales o exponenciales complejas. La descomposición recibe el nombre de espectro, proporcionando una identidad a la señal, debido a que el mismo la define. El cálculo del espectro de una señal enfoca su atención en señales de tiempo

discreto de duración finita.

Un análisis frecuencial de una señal en tiempo discreto $x(n)$ necesita una representación en el dominio de la frecuencia, dicha representación esta dada por la transformada de Fourier $X(\omega)$ de $x(n)$. La transformada de Fourier es una función periódica y continua de la frecuencia, por lo tanto, se necesita muestrearla para obtener una representación adecuada. De lo anterior, si $X(k)$ es N muestras del espectro y sea $x(n)$ N muestras de la señal en el dominio del tiempo, la relación entre ambas se debe a:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (5.4)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{\frac{j2\pi kn}{N}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (5.5)$$

Donde la Transformada de Fourier Discreta (*Discrete Fourier Transform*) es (5.4), y (5.5), es la Transformada de Fourier Discreta Inversa (*IDFT*). Un algoritmo más eficiente para calcular la transformada de Fourier discreta es el FFT [28] (*Fast Fourier Transform*), resultado de las propiedades de periodicidad y simetría del factor de fase $e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$.

5.1.0.3. Espectro de las señales del oscilador caótico

Existe una zona en la que se concentra la mayor cantidad de energía para cada señal, las frecuencias en la que se encuentra esta zona son llamadas ancho de banda de la señal [28, 34]. Existe un principio que establece la conservación de la energía en el dominio del tiempo y la frecuencia, esta relación de la energía en el dominio del tiempo y frecuencia está dada por el teorema de Parseval [28].

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 = E_x < \infty, \quad (5.6)$$

donde E_x representa la energía en ambos dominios.

Como se mencionó anteriormente, el ancho de banda es un concepto importante del análisis en frecuencia de las señales, el cual es el rango de frecuencias donde se concentra la mayor cantidad de energía o potencia de una señal y se mide en Hertz (Hz). El ancho de banda comprende el espectro de una señal hasta que la magnitud decae 3 decibeles (dB) por debajo de su valor inicial o la reducción de la amplitud de la señal a menos del 70.7% de la amplitud original.

5.2. Modulación en frecuencia del sistema caótico de orden fraccionario

En la sección anterior, se presentaron dos criterios para la selección de la señal caótica, uno en el dominio del tiempo y el otro en el dominio de la frecuencia. El determinar que criterio es mejor que otro para seleccionar la mejor señal caótica para enmascarar cierta información, puede producir un resultado no deseado, debido a que tanto el ancho de banda de la señal caótica como el de la información no coincidan en las mismas frecuencias.

Un resultado esperado en este trabajo de investigación es que para en caso de que la información transmitida sea audio, es seleccionar una señal caótica que enmascare el ancho de banda para encriptar mensajes de voz, el cual de acuerdo con [35] es de 2700 Hz, partiendo desde los 300 Hz hasta los 3000 Hz. Una parte fundamental en el reconocimiento de la señal, es la capacidad de audición de las personas.

La respuesta en frecuencia de la capacidad auditiva de un humano, tiene la tendencia de amplificar naturalmente el rango de frecuencias entre 1 kHz - 4 kHz (kilo Hertz), por lo que necesita de una menor ganancia para escuchar los sonidos que se encuentran en este rango a una ganancia requerida para escuchar los sonidos encontrados fuera del rango.

Por lo tanto, para aprovechar mejor la energía que la señal caótica brinda se necesita que el ancho de banda de la señal caótica coincida con el ancho de banda de la señal de audio. Entonces, la señal caótica se traslada (modula) al ancho de banda en la que se encuentra el mensaje de audio, dicho de otra forma, la energía de la señal caótica se moverá a la banda de frecuencias en la que se encuentra el mensaje de audio.

Debido al teorema de modulación [28], si

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega), \quad (5.7)$$

entonces

$$e^{j\omega_0 n} x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega - \omega_0). \quad (5.8)$$

Gracias a esta propiedad, al multiplicar una secuencia $x(n)$ por $e^{j\omega_0 n}$ es equivalente a trasladar en frecuencia el espectro $X(\omega)$ por ω_0 . Debido a la propiedad

de periodicidad, el cambio ω_0 aplicada a la señal del espectro $X(\omega)$ se aplica en cada período.

Por lo tanto, el resultado es

$$x(n) \cos(\omega_0 n) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2} [X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)]. \quad (5.9)$$

Utilizando los conceptos y ecuaciones definidos anteriormente, se procede a la modulación del sistema caótico de orden fraccionario

$$\begin{aligned} x_m &= x \cos(\omega_0 n), \\ y_m &= y \cos(\omega_0 n), \\ z_m &= z \cos(\omega_0 n), \end{aligned} \quad (5.10)$$

donde $\omega_0 = \frac{2\pi f_0}{F_s}$, siendo f_0 la frecuencia del ancho de banda del mensaje en la cual se necesita posicionar la señal caótica.

El esquema de encriptado aditivo con modulación en frecuencia, en este caso el estado $x(t)$, se representa mediante la Figura 5.1. La comparación entre los niveles de energía de los estados del sistema caótico de Lorenz de orden fraccionario con y sin modulación se ilustra en la Figura 5.2. Para finalizar se visualiza el espectro de los estados del sistema caótico de Lorenz fraccionario en la Figura 5.3.

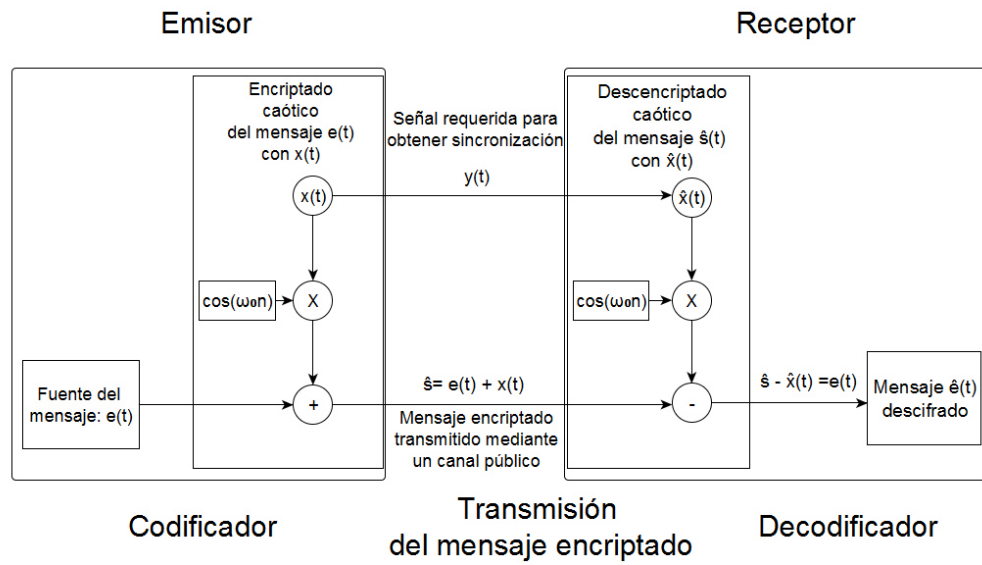
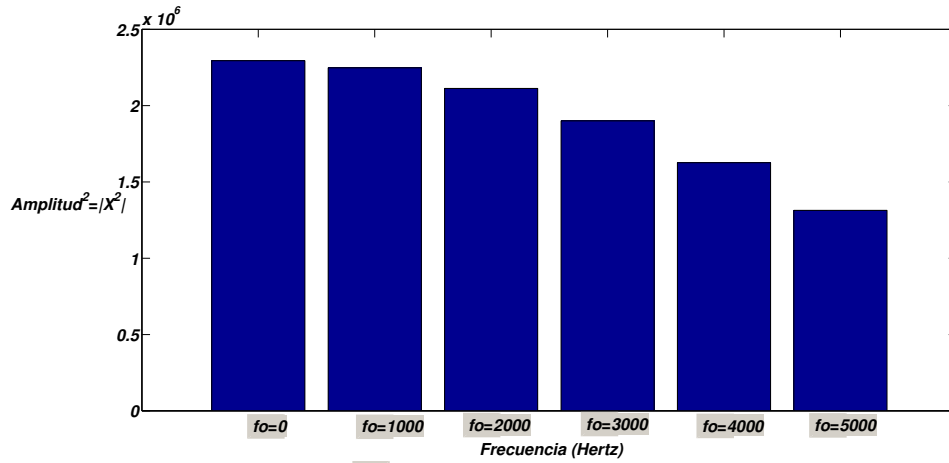
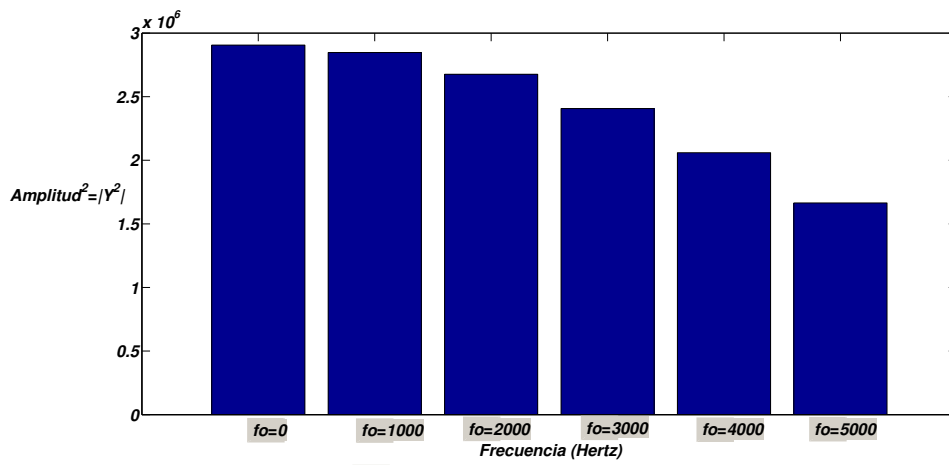


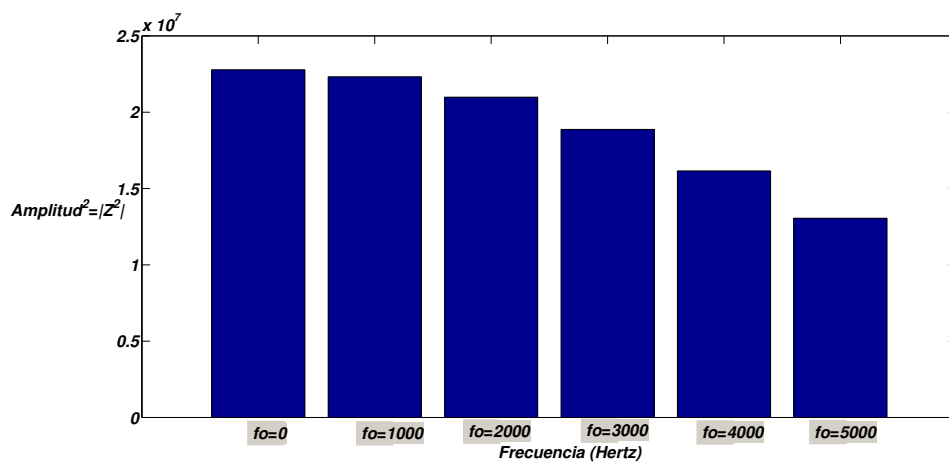
Figura 5.1: Esquema de encriptado aditivo, modulando en frecuencia el estado $x(t)$.



(a)

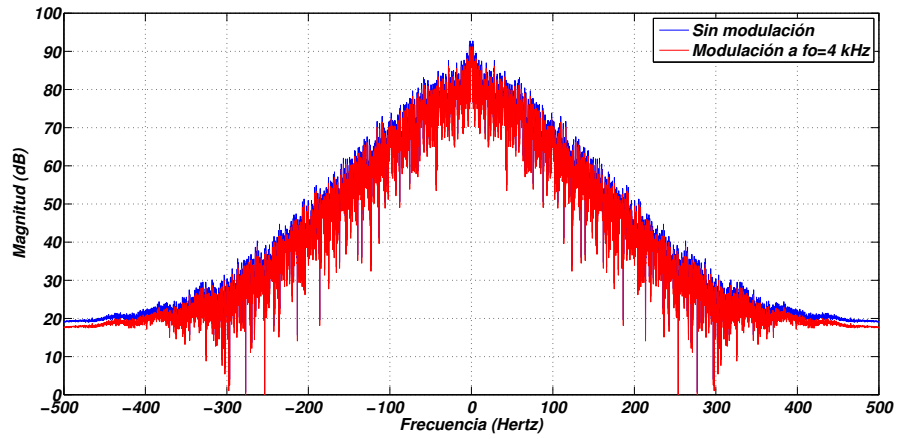


(b)

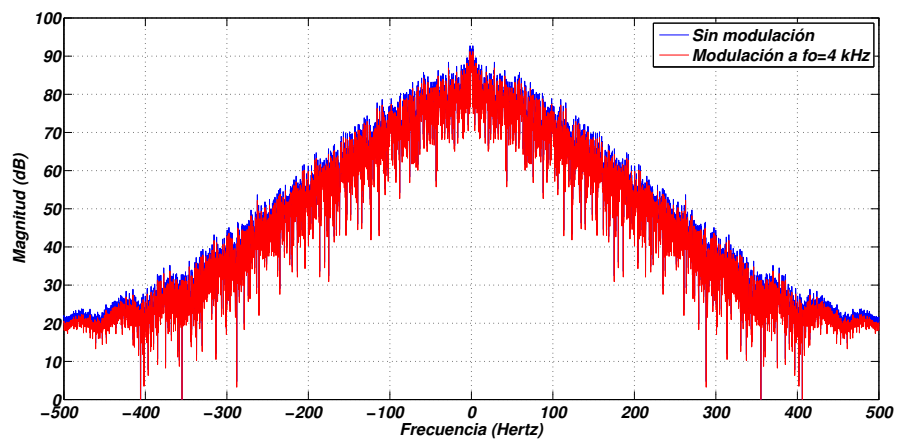


(c)

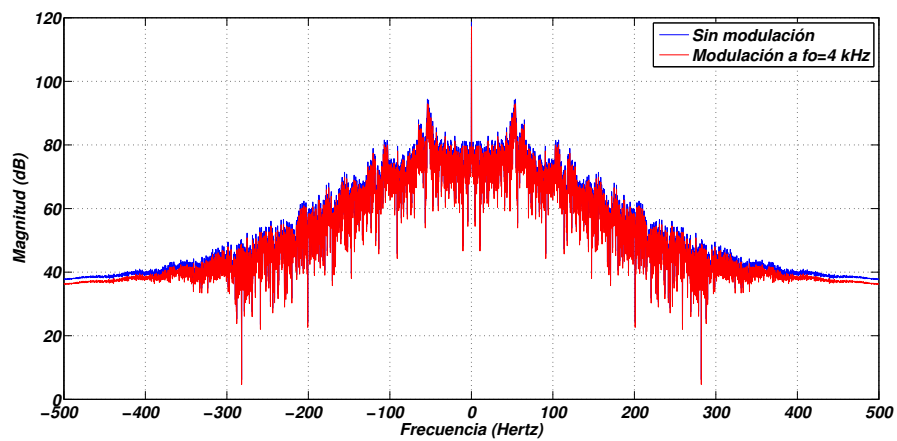
Figura 5.2: Niveles de energía de los estados caóticos con y sin modulación para diferentes valores de frecuencia f_0 : (a) Estado $x(t)$, (b) Estado $y(t)$, (c) Estado $z(t)$.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.3: Densidad espectral: (a) Estado $x(t)$, (b) Estado $y(t)$, (c) Estado $z(t)$.

5.3. Implementación física del encriptado de audio con modulación de frecuencia

Como se mencionó en la introducción de este capítulo, en esta sección se realiza la implementación física del sistema de comunicación caótico, con apoyo del software LabVIEW [30,36] de NI y hardware mediante 2 tarjetas electrónicas NI myRIO [37]. El primer paso para lograr este objetivo, es realizar la simulación del sistema caótico, en este caso de orden fraccionario en LabVIEW. La solución numérica de este sistema se lleva a cabo como se mencionó en el capítulo 3, utilizando la definición de Grünwald-Letnikov. Una vez que se generen tanto las dinámicas como el atractor caótico se cumple con el paso 1.

5.3.1. Características importantes del software y hardware LabVIEW

Debido a que se implementarán los sistemas propuestos, deben de considerarse factores que no se toman en cuenta al utilizar software, como lo son el voltaje de salida, las entradas y salidas analógicas, el tipo de alimentación, el tipo de comunicación entre el software y hardware, sin mencionar que existe una limitación en recursos ya que no es posible graficar datos, no se encuentran disponibles todas las funciones como elevar a una potencia, también normalmente se trabaja con tipos de datos enteros y de coma o punto fijo, este tipo de datos consiste en destinar una cantidad fija de dígitos para la parte entera y otra para la parte decimal.

Por esta razón, resulta conveniente conocer las características del hardware a utilizar, el cual es el sistema NI myRIO 1900, la Figura 5.4 ilustra el sistema NI myRIO 1900 [37]. Algunas de sus características son las siguientes:

- Procesador: Xilinx Zynq-7010 (MCU-FPGA), a 667MHz, 256 MB de almacenamiento no volátil, 512 MB DRAM para control y análisis determinantes.
- 4 entradas analógicas de 12 bits, 2 salidas analógicas de 12 bits.
- Compatibilidad con el software Labview y Xilinx ISE.
- FPGA Xilinx(cerca de celdas lógicas) reconfigurable para el procesamiento en línea y control personalizado.



Figura 5.4: Tarjeta NI myRIO 1900

Una vez conocidas las características del hardware a utilizar, el cual es compatible con el software LabVIEW [30, 36] y que para el procesamiento en línea se utiliza el módulo FPGA [41]. Ahora resulta necesario describir el software LabVIEW, LabVIEW [30, 36] es un ambiente de programación visual y el lenguaje de programación es un lenguaje gráfico. Se compone de dos ventanas, las cuales son el diagrama de bloques y el panel frontal. En el primero de ellos se localizan las funciones, estructuras, constantes o escalares, mientras que en el segundo se encuentran los controles e indicadores.

Lo que en realidad nos interesa de este software y hardware es la comunicación entre ellos, la cuál puede ser serial [31] o con el módulo Wi - Fi, y una vez que el programa en este caso el “**VI**” (Virtual Instrument) funcione correctamente, se puede cargar el “**VI**” a la tarjeta para solo con la alimentación hacer un procesamiento en línea, sin necesidad de tener una computadora con LabVIEW comunicandose con la tarjeta NI myRIO.

Para que el “**VI**” pueda funcionar en el módulo FPGA, es necesario que la programación del mismo sea compatible con el tipo de datos y funciones que están disponibles en este módulo, ya que como es posible hacer un procesamiento en línea, los recursos están limitados.

Una característica fundamental en LabVIEW es que debido a que la información se transmite mediante cables, es necesario optimizar la cantidad de los

mismos, ya que a mayor cantidad de cables aumenta la memoria del sistema. Esta parte es fundamental, debido los recursos que puede soportar la tarjeta NI myRIO.

Debido a que el tipo de dato doble precisión no esta disponible en el módulo FPGA, se tienen dos posibilidades, utilizar el tipo de dato de simple precisión o el de coma o punto fijo [32]. La elección del tipo de dato es muy importante ya que es necesario no sobrepasarse de los recursos del módulo FPGA, por lo tanto se decidió utilizar el tipo de dato coma o punto fijo debido a que ocupa menos espacio en memoria.

En LabVIEW, al efectuar operaciones matemáticas, como por ejemplo un bloque de multiplicación o división, aunque la entrada a la función pueda ser de tipo de dato, simple precisión o punto fijo, la salida esta diseñada para el tipo de dato doble precisión. Esta limitante se soluciona, al modificar las propiedades del bloque de función, es decir, el usuario tiene control de determinar el tipo de dato a la salida. Con el propósito de evitar errores por redondeo al manipular los registros se utilizó una longitud de palabra de 32 bits donde 11 bits son determinados para la parte decimal.

Para concluir esta sección, es de interés conocer las características de voltaje de la tarjeta NI myRIO, la cual tiene entradas y salidas analógicas, en este caso del puerto C.

Tiene 2 salidas analógicas llamadas “**Analog Output 0**” (AO0) y “**Analog Output 1**” (AO1). En cuanto a las entradas tiene dos entradas diferenciales, nombradas “**Analog Input 0**” (\pm AI0) y “**Analog Input 1**” (\pm AI1).

Por último, es necesario resaltar que esta tarjeta NI myRIO tiene entradas y salidas de audio. La forma de interactuar software y hardware son por medio de unas funciones disponibles en el módulo FPGA en el software. Estas funciones son tanto para la modalidad mono y la estéreo, es decir tiene tanto entradas como salidas de audio, llamadas **Audio In Left** y **Audio In Right** para las entradas, y **Audio Out Left** y **Audio Out Right** para la salida. Así como estas funciones correspondientes al audio, se encuentran en el módulo FPGA también existen las correspondientes para el voltaje, llamadas “**Connector**” **A**, **B** y **C**. Ligadas tanto a AO1 y AO0 como para AI1 y AI0.

5.3.2. Programación, Implementación y Resultados del encriptado de audio

Con el objetivo de explicar como se realizó el experimento de transmisión por medio de un canal público de un audio encriptado, para tener un mayor nivel de seguridad y posteriormente recuperar el audio, todo en tiempo real, se divide por etapas la explicación, para que se comprenda como llevar a cabo el experimento.

En primer lugar, es necesario implementar el oscilador caótico, en este caso el de Lorenz fraccionario. En la Figura 5.5, se muestra el diagrama general para la codificación del mensaje en el módulo FPGA.

Para el cálculo numérico de la derivada de orden fraccional puede usarse la siguiente relación derivada de la definición de Grünwald-Letnikov [7,16]. Este enfoque se basa en el hecho que para una amplia clase de funciones, tres definiciones GL, RL y Caputo son equivalentes. La relación para la aproximación numérica explícita de la derivada α en los puntos kh , donde ($k = 1, 2, \dots$) tiene la forma:

$${}_{k-L_m/h}D_{t_k}^\alpha f(t) \approx h^{-\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t_k - j), \quad (5.11)$$

donde L_m es la “longitud de memoria”, h es el paso del tiempo del cálculo y $(-1)^j \binom{\alpha}{j}$ son los coeficientes binomiales $c_j^{(q)}$ ($j = 0, 1, \dots$). Para su cálculo puede usarse la siguiente expresión:

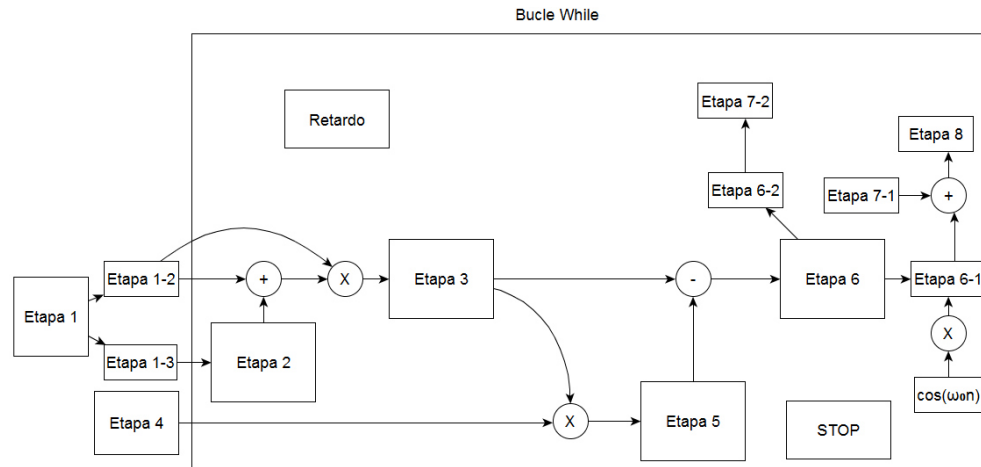
$$c_0^{(q)} = 1, \quad c_j^{(q)} = \left(1 - \frac{1+q}{j}\right) c_{j-1}^{(q)}, \quad q = \alpha = \text{derivada}. \quad (5.12)$$

La solución general de la ecuación diferencial fraccionaria puede expresarse como:

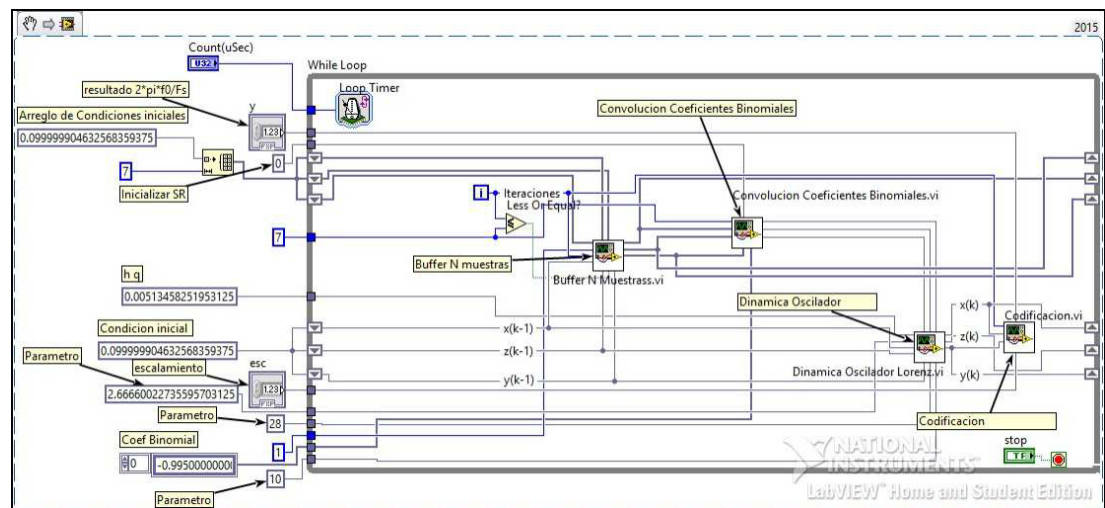
$${}_aD_t^q y(t) = f(y(t), t) = y(t_k) = f(y(t_k), t_k) h^q - \sum_{j=v}^k c_j^{(q)} y(t_k - j). \quad (5.13)$$

Para continuar, se explica que corresponde cada etapa del diagrama.

- Etapa 1:** Esta etapa, como puede observarse en Figura 5.5a, se encuentra fuera del bucle “**While**” así como también se divide en dos etapas. La Etapa 1-2 corresponde a los parámetros del sistema caótico de Lorenz, así como el resultado h^q , elevar el paso de integración $h = 0.005$ al orden de la derivada $q = 0.995$. La Etapa 1-3, incluye el conjunto de condiciones iniciales como



(a)



(b)

Figura 5.5: Diagrama de programación del sistema caótico para codificar audio: (a) División por etapas del diagrama para codificar audio, (b) Implementación del diagrama para codificar audio en LabVIEW.

constante y también como arreglo, debido a que es necesario almacenar en un arreglo el valor correspondiente con cada iteración del bucle. En este caso el tamaño del arreglo de entrada es de 7, pero debido a que LabVIEW inicia cualquier conteo desde 0, el arreglo tiene 8 elementos. Este último dato es fundamental para continuar con la etapa 2.

- Etapa 2:** Esta etapa se realiza dentro del bucle, pero necesita información de la etapa 1-3. Lo que se hace en esta etapa, es un buffer. Ya que uno de los inconvenientes que se presentan al omitir esta Etapa 2, es que LabVIEW no puede determinar el tamaño del array de salida debido a que este crece de manera exponencial ya que esta dentro de un bucle “**While**”. La solución es utilizar un buffer [38] con la intención de que adquiera toda la dinámica generada con cada iteración pero que almacene las últimas 8 muestras. En la Figura 5.6, se muestran ambos casos de la estructura “**Case True**” y “**Case False**” del buffer.

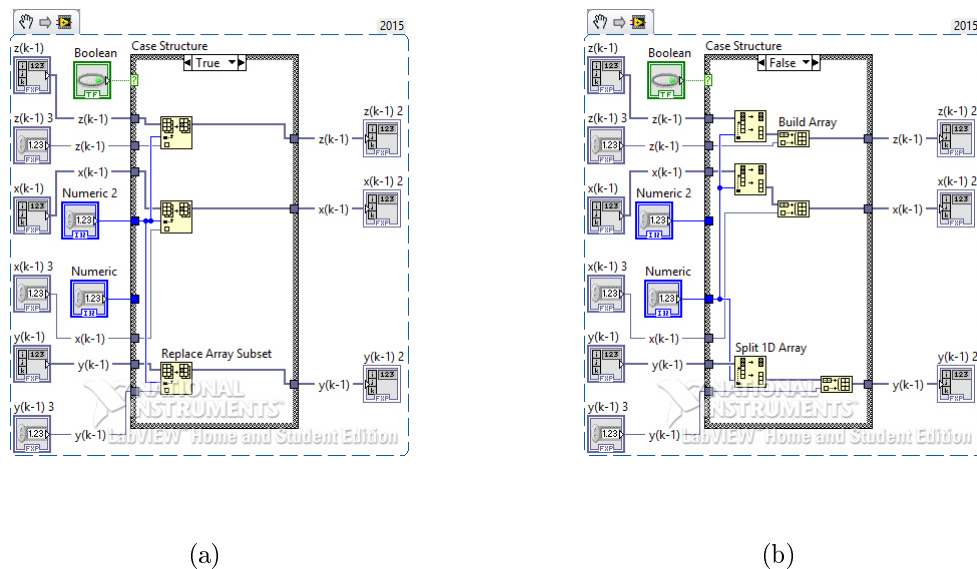


Figura 5.6: (a) “**Caso True**”, (b) “**Caso False**” de la estructura “**Case**” del buffer.

Se utiliza una estructura “**Case**”, con sus respectivos casos, “**Verdadero**” (“**True**”) y el “**Falso**” (“**False**”). La condición para decidir en que caso ir es si el número de iteraciones del “**While**” es menor o igual a 7. Si es true, la dinámica sale del caso con el tamaño del arreglo correspondiente, en cambio en el caso false el cual logra que solo se almacenen las últimas 8 muestras y LabVIEW pueda determinar el tamaño del arreglo de salida, el cual es 7. Es importante comprender que no con 8 muestras se obtiene la dinámica, tampoco que el buffer pierde la dinámica, no es así, toda la dinámica se adquiere y procesa, solo que cada 8 muestras nuevas el buffer se actualiza y las almacena para posteriormente procesarlas.

- **Etapa 3:** Esta etapa corresponde a la generación de la dinámica del sistema caótico. En el diagrama claramente se encuentra después de las etapas 2 y 1, ya que para ello necesita los parámetros del modelo matemático. Esta parte corresponde a la primera parte de la solución numérica de los sistemas de orden fraccionario, utilizando la definición GL, que es el modelo matemático del sistema multiplicado por h^q . El modelo matemático de Lorenz de orden fraccionario se representa en la Figura 5.7

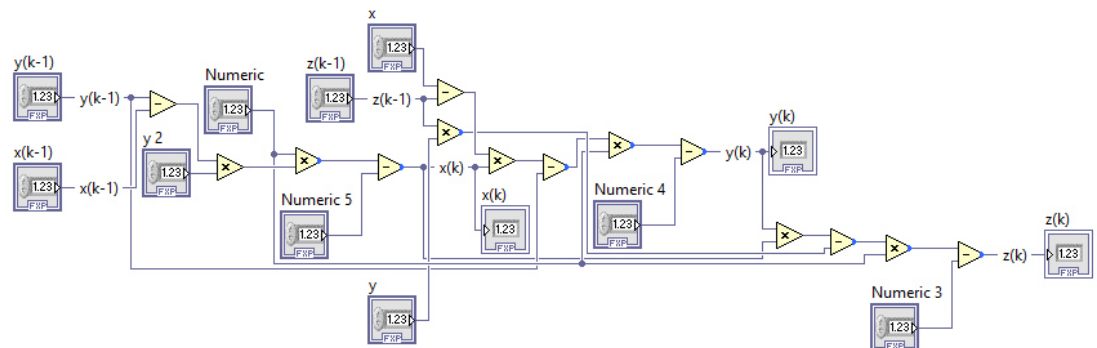


Figura 5.7: Modelo matemático del oscilador de Lorenz implementado en LabVIEW.

- **Etapa 4:** El cálculo de los coeficientes binomiales, corresponde a la Etapa 4. El cálculo de los coeficientes binomiales, se ilustra en la Figura 5.8. El número de iteraciones y el número de muestras en el arreglo coinciden, ya que se incrementa en 1 el número de iteraciones del bucle.
- **Etapa 5:** Esta etapa corresponde a la creación de la segunda parte de la solución numérica de los sistemas de orden fraccionario, de acuerdo a la definición GL, que es la convolución o producto punto entre el arreglo de coeficientes binomiales por la dinámica generada con cada iteración del bucle. Claramente el tamaño de los arreglos debe ser el mismo, en este caso 7, para que se pueda realizar la operación. Esta operación no se hace de forma directa, primero se invierten los elementos de la dinámica del sistema generada con cada iteración. Es decir, se acomodan de mayor a menor magnitud. Esta operación

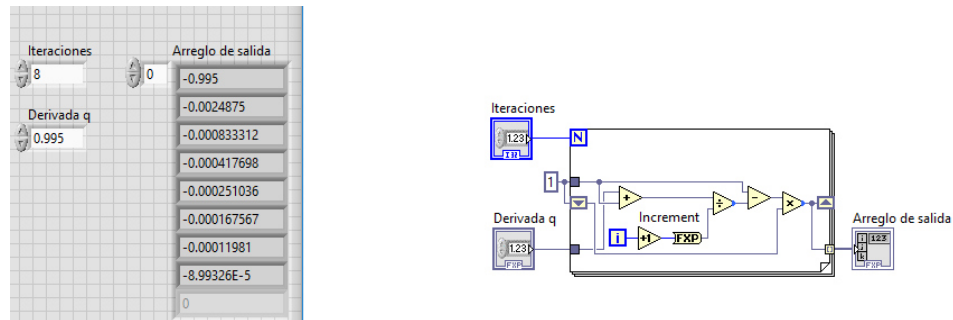


Figura 5.8: Cálculo del arreglo de coeficientes binomiales.

se ilustra a continuación:

$$\begin{aligned}
 &C_1x_1, \\
 &C_1x_2 + C_2x_1, \\
 &C_1x_3 + C_2x_2 + C_3x_1, \\
 &\vdots \\
 &C_1x(n) + C_2x_{n-1} + \cdots + C_{n-1}x_2 + C_nx_1.
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

En la ecuación (5.14), el término C_n representa al arreglo de coeficientes binomiales, x_n es la dinámica, en este caso del estado $x(t)$ del sistema caótico y n representa el número de muestras. La Figura 5.9, representa la relación de la magnitud en base a las 8 muestras de los coeficientes binomiales, con la derivada $q = 0.995$. La forma de implementar en LabVIEW la convolución se presenta en la Figura 5.10.

- **Etapa 6:** La solución numérica de los sistemas de orden fraccionario, implementada en el módulo FPGA del software LabVIEW, con tipo de dato punto fijo, de 32 bits la longitud de la palabra y 11 bits para la parte decimal corresponde a la Etapa 6.
- **Bucle while:** Este bucle es utilizado para realizar la solución numérica del oscilador de Lorenz de orden fraccionario. Dentro, se encuentra el botón de

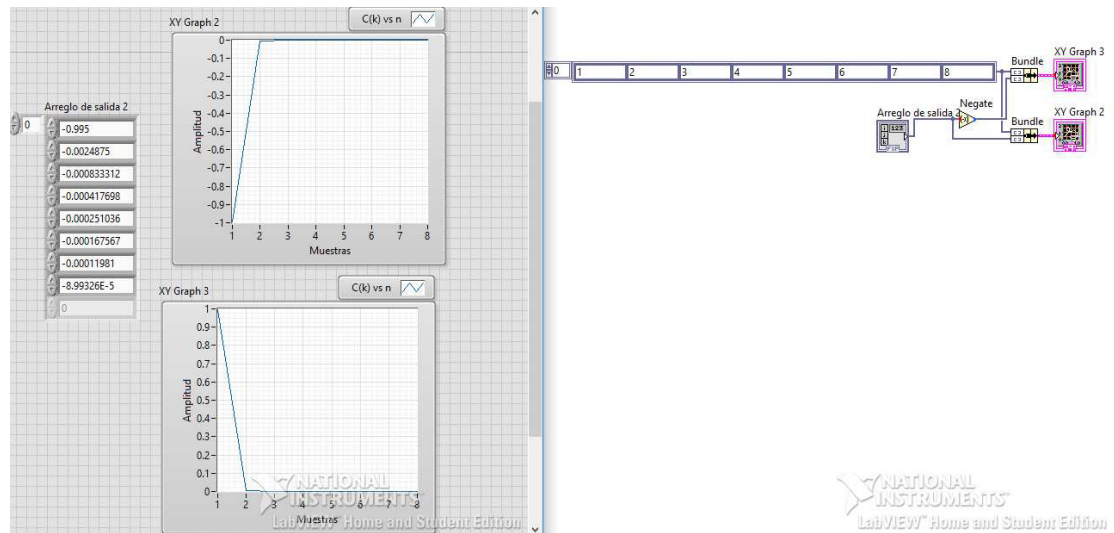


Figura 5.9: Magnitud en base a las muestras del arreglo de coeficientes binomiales.

STOP para detener la simulación. También se encuentra el retardo de tiempo, en este caso es recomendable utilizar un retardo ya que el no hacerlo podría hacer que el sistema aborte debido a que no se almacena un espacio de memoria para la función del bucle “**While**”.

La Figura 5.11, muestra la forma de implementar la solución numérica del oscilador de Lorenz de orden fraccionario. Esta parte incluye hasta ahora desde la etapa 1 hasta la etapa 6. Pueden observarse algunos triángulos hacia abajo del lado izquierdo y otros triángulos hacia arriba del lado derecho a la misma altura, como un espejo. Estos triángulos son llamados registros de desplazamiento (“**Shift Register**”) y son utilizados para almacenar datos en los bucles “**For**” y “**While**”. Los datos pasados se encuentran a la izquierda $x(k - 1)$ y los actuales a la derecha $x(k)$. La salida de estos registros depende de los valores de entrada y de los valores anteriores.

Ahora se explican las siguientes etapas, correspondientes a la sincronización, codificación, decodificación de audio y modulado en frecuencia. Como puede observarse en la Figura 5.2, la energía del estado $z(t)$ es la de mayor amplitud, pero dado su espectro representado por la Figura 5.3, es una candidata muy pobre para enmascarar adecuadamente el mensaje de audio. Entonces los estados libres

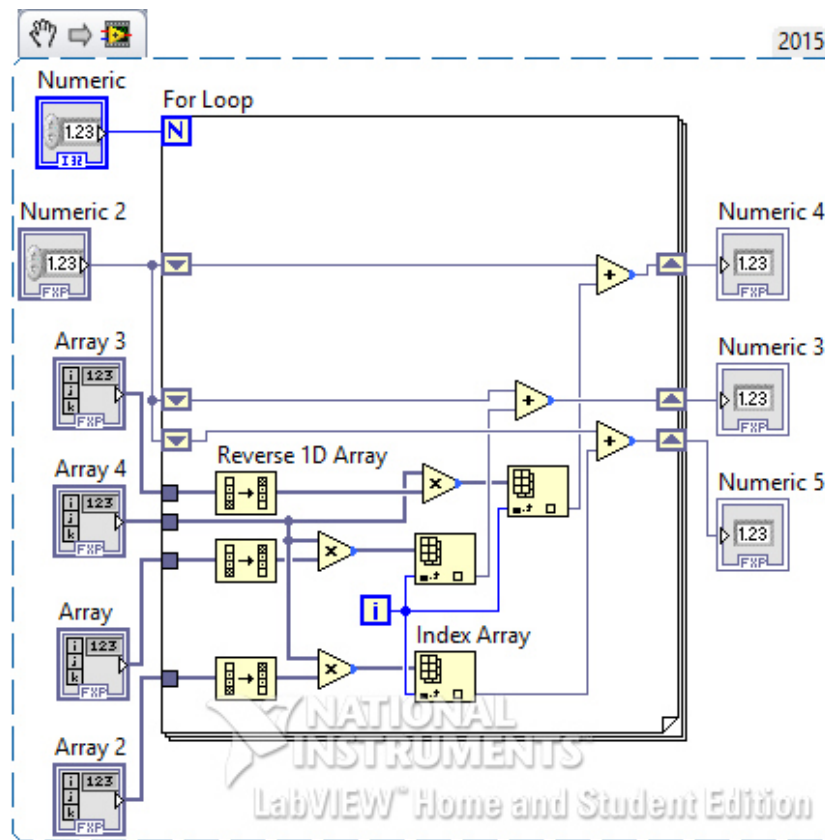


Figura 5.10: Convolución o producto punto entre el arreglo de coeficientes binomiales por la dinámica generada con cada iteración del bucle.

$x(t)$ y $y(t)$ aunque tienen poca energía, su ancho de banda es mejor comparado con el de $z(t)$.

- Etapa 6-2:** El estado del sistema caótico, utilizado para obtener la sincronía es determinado en esta etapa. En este caso, como se mencionó anteriormente, hay un límite en los recursos en este módulo FPGA, por lo tanto, se utiliza solamente la configuración maestro - esclavo. El maestro corresponde a la etapa de codificación y el esclavo a la de la etapa de decodificación. Primero se selecciona el estado adecuado, utilizando el Lema 4.1, el estado $y(t)$ es el ideal para obtener sincronía completa. El cálculo de la matriz de acoplamiento

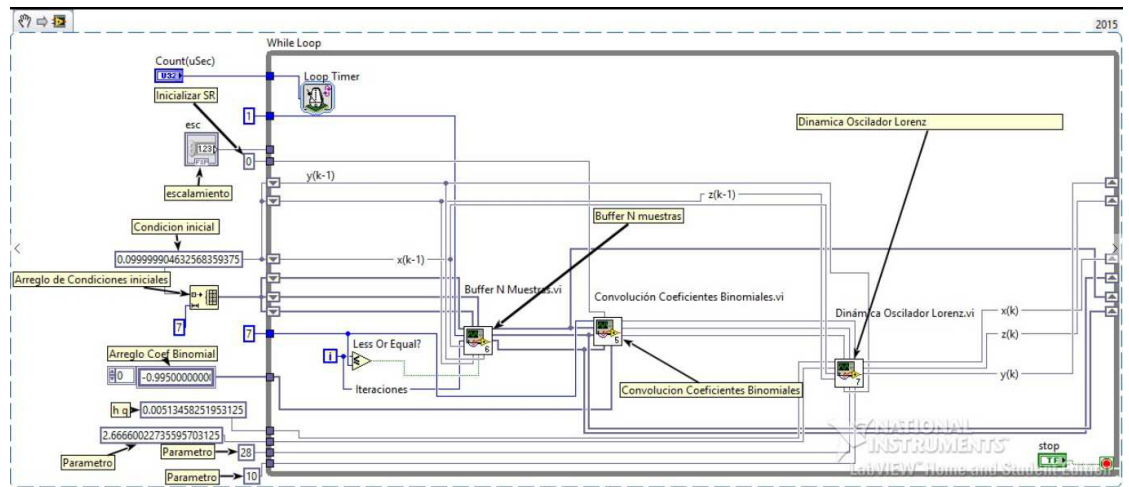


Figura 5.11: Diagrama para programar el oscilador caótico en LabVIEW FPGA.

para la red de la Figura 2.2a, es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

donde la primer fila corresponde al maestro y la última fila al esclavo. Así que al menos en la etapa codificadora, no hay ley de control.

- **Etapa 7-2:** Esta etapa corresponde a transmitir el estado $y(t)$ con el objetivo de lograr la sincronización con la tarjeta que decodifica el mensaje. Se multiplica por un factor de escalamiento, el cual es de magnitud 50 y su salida se transmite por el “**Connector C**”, por medio de AO0.
- **Etapa 6-1:** La modulación en frecuencia, del estado $x(t)$ se lleva a cabo en esta etapa. La frecuencia a la cual se traslada el estado $x(t)$ es de $f_0 = 4$ kHz. Por lo tanto, con la relación de $\omega_0 = \frac{2\pi f_0}{F_s}$, el estado $x(t)$ se multiplica por $\cos(.57n)$, donde n es el número de muestras del bucle, debido a que en el bucle while, el retardo es de $T = 22$ micro segundos (μseg) y su inversa es aproximadamente a $F_s = \frac{1}{T} \approx 44.1$ kHz. Este tiempo de muestreo de $22 \mu\text{seg}$, es un condición necesaria para poder procesar audio.

- **Etapa 7-1:** La función de audio de entrada, presente en el módulo FPGA corresponde a esta etapa. La modalidad es mono, así que la función “**Audio In Left**” fue utilizada para adquirir y procesar el audio, en este caso desde el ordenador donde se tiene la comunicación software y hardware o en el mejor de los casos, cuando el programa ya funcione correctamente, cargar el “**VI**” a la tarjeta para que una vez alimentada la tarjeta codificadora con cualquier dispositivo de audio, como un celular por ejemplo.
- **Etapa 8:** Esta última etapa del diagrama de la Figura 5.5a, corresponde a la transmisión del enmascaramiento del audio (codificación) con el estado $x(t)$ modulado en frecuencia, utilizando el método de encriptado aditivo. Primero al igual que el estado $y(t)$ se multiplica por un escalamiento de 50, luego se realiza el enmascaramiento con $x(t)$ para después transmitir audio encriptado mediante AO1 y “**Audio Out Left**”, utilizando el “**Connector**” C. La programación del oscilador caótico para codificar audio y transmitir el estado $x(t)$ con el objetivo de obtener sincronía con el estado $x(t)$ de la tarjeta receptora se ilustra en la Figura 5.12.

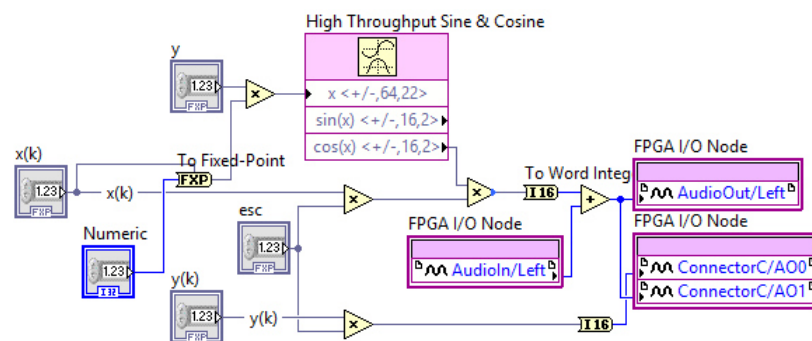


Figura 5.12: Programación del oscilador caótico para codificar audio y transmitir el estado $x(t)$ con el objetivo de obtener sincronía con el estado $x(t)$ de la tarjeta receptora.

Hasta ahora, con estas etapas, deben de cumplirse dos cosas. La primera es que si no hay audio, ya sea por una pausa o que se acabe la información es que debería de formarse el atractor de Lorenz, resultado de graficar mediante un osciloscopio

el estado $x(t)$ vs $y(t)$. La Figura 5.13a, muestra el atractor caótico de Lorenz y la dinámica del estado $y(t)$ se visualiza en “Channel 1” (Ch1 café) y la del estado $x(t)$ en “Channel 2” (Ch2 azul) se representan en la Figura 5.13b.

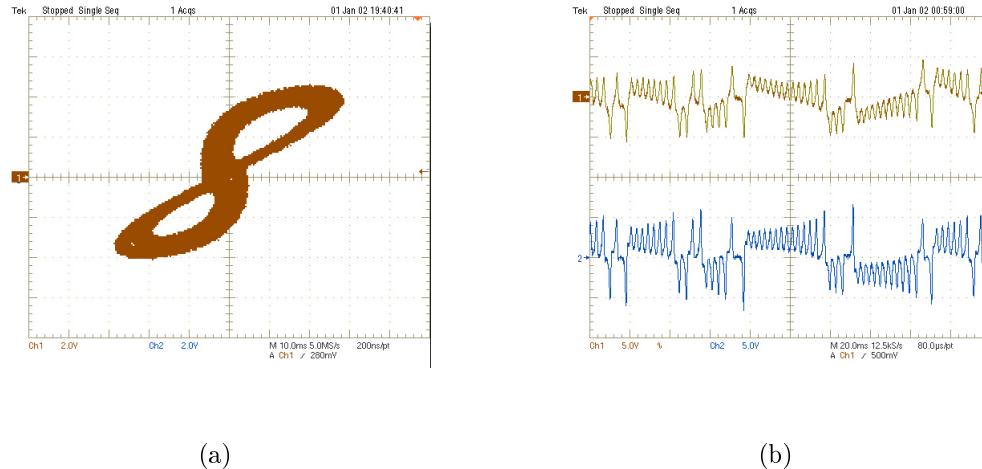


Figura 5.13: (a) Atractor de Lorenz, (b) Dinámica del oscilador Lorenz resultado de graficar $x(t)$ vs $y(t)$, obtenidos con apoyo de un osciloscopio digital Tektronix.

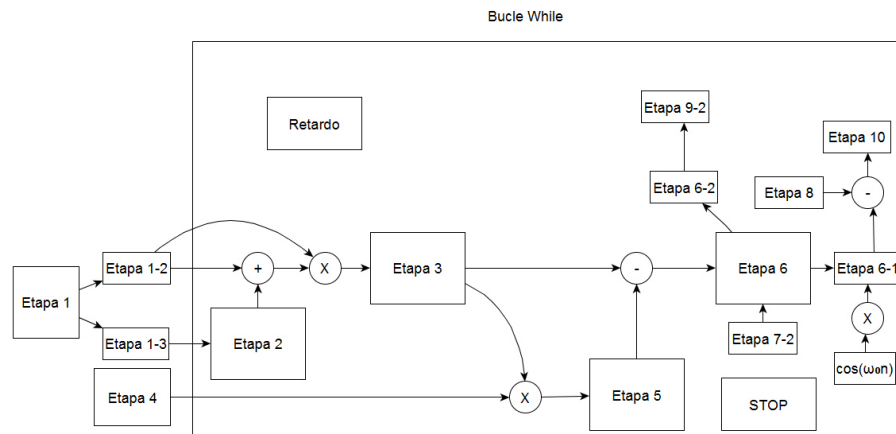
Se procede entonces a la explicación de la parte que decodifica el mensaje en el módulo FPGA, con apoyo del diagrama general de la Figura 5.14a.

- **Etapa 7-2:** Esta etapa es el resultado de recibir la transmisión del estado $y(t)$ de la tarjeta que codifica mediante AI0. Entonces la ley de control para la sincronización entre el sistema caótico de la tarjeta que codifica y la que decodifica el audio, es de

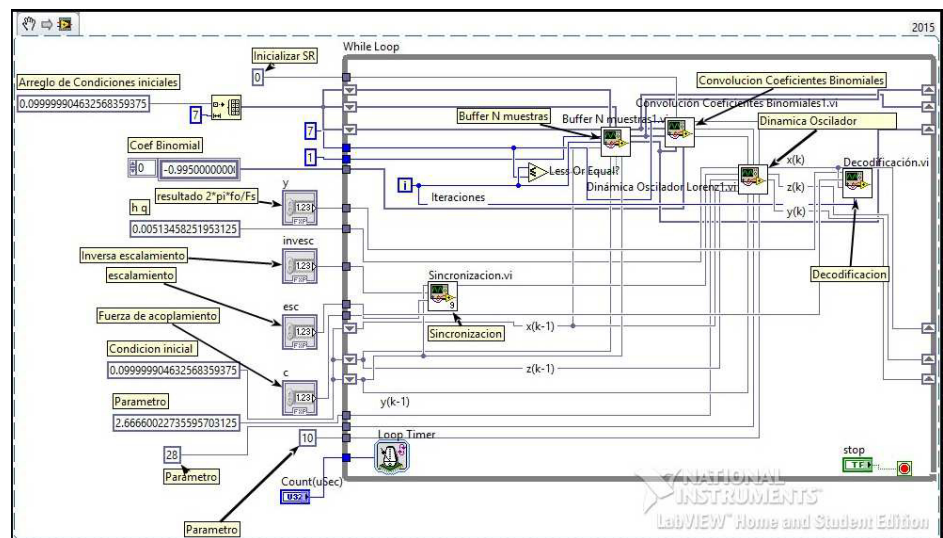
$$u(t) = c(-y_m(t) + y_s(t)), \quad (5.16)$$

donde el subíndice m corresponde al maestro y el s al esclavo. Primero debe de multiplicarse y_m por el inverso del factor de escalamiento que es 0.002. La fuerza de acoplamiento para obtener la sincronía fue de $c = 5$ como mínimo y de $c = 25$ como valor máximo, conservando la dinámica característica del sistema de Lorenz fraccionario. En la Figura 5.15 se presenta la sincronización entre la tarjeta emisora y receptora implementada en LabVIEW.

- **Etapa 6-2:** Una vez realizada la etapa anterior, se obtiene la sincronía entre el sistema caótico de la tarjeta que codifica el audio con la que decodifica. Se selecciona en esta etapa el estado $x(t)$.



(a)



(b)

Figura 5.14: Diagrama de programación del oscilador caótico para decodificar audio: (a) División por etapas del diagrama para decodificar audio, (b) Implementación del diagrama para decodificar audio en LabVIEW.

- **Etapa 9-2:** Con la finalidad de comprobar la sincronía entre los sistemas caóticos presentes en las tarjetas, se transmite el estado $x(t)$ multiplicado por el mismo factor de escalamiento que es de 50, mediante AO1.

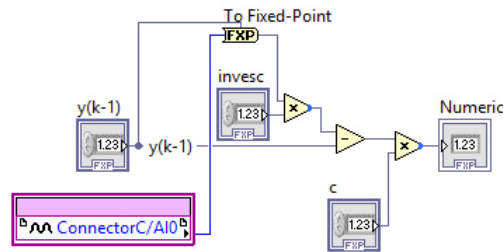


Figura 5.15: Sincronización entre la tarjeta emisora y receptora implementada en LabVIEW.

- **Etapa 6-1:** Para decodificar completamente el audio que fue encriptado, como en la etapa con el mismo nombre de la tarjeta que codifica, se realiza la modulación del estado $x(t)$ multiplicado por el escalamiento de 50, a la misma frecuencia a la que se traslada el estado $x(t)$ de la tarjeta emisora. Es decir se multiplica $x(t)$ con $\cos(0.57n)$.
- **Etapa 8:** Esta etapa corresponde a la entrada del audio encriptado, al bucle del sistema de comunicación caótico, mediante AI1 para su posterior decodificación.
- **Etapa 10:** Por último, la recuperación y transmisión del audio desencriptado se realizan en esta etapa utilizando el método de encriptado aditivo. Se realiza una resta al audio encriptado (AI1) con $x(t)$ modulado en frecuencia y se transmite por AO0 del “Connector” C y “Audio Out Left”. La programación del oscilador caótico para decodificar audio y transmitir el estado $x(t)$ con el objetivo de demostrar sincronía con el estado $x(t)$ de la tarjeta emisora se ilustra en la Figura 5.16.

Ahora se tiene un sistema de comunicación caótico, utilizando el método de encriptado aditivo, utilizando dos tarjetas NI myRIO 1900, una para la parte emisora (codificadora) y otra para la parte receptora (decodificadora), con el objetivo de transmitir en tiempo real audio encriptado y posteriormente con la operación inversa a como se encriptó el audio, recuperar el audio original, con fines de seguridad.

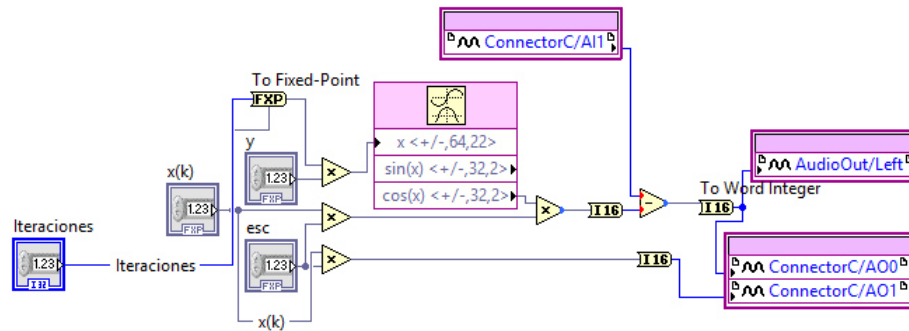
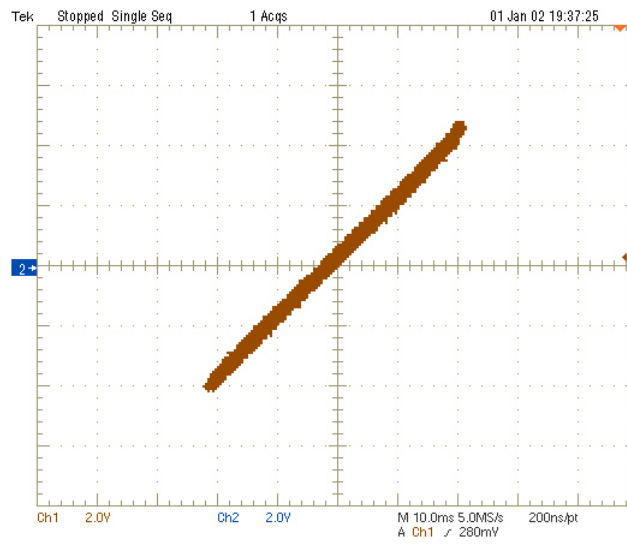


Figura 5.16: Programación del oscilador caótico para decodificar audio y transmitir el estado $x(t)$ con el objetivo de demostrar sincronía con el estado $x(t)$ de la tarjeta emisora.

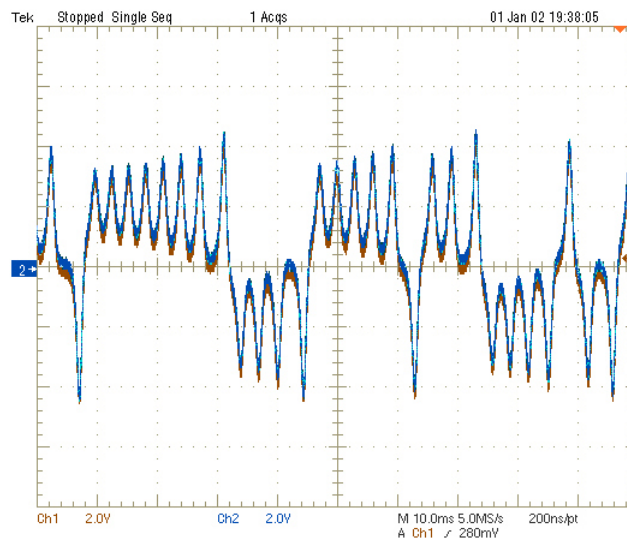
Se puede concluir que utilizando el estado $x(t)$ y $y(t)$ presentes en ambas tarjetas, puede visualizarse el atractor caótico de Lorenz de orden fraccionario, con apoyo de un osciloscopio, al graficar un estado contra otro, así como observar la sincronía presente entre los estados $x_m(t)$ y $x_s(t)$. La sincronía entre los estados $x(t)$ se observa en la Figura 5.17a y la dinámica en la Figura 5.17b. En cuanto al audio, es posible escuchar, el audio enmascarado, como el audio recuperado.

Se presentan ahora los componentes o materiales necesarios para la implementación del sistema de comunicación caótico utilizando el método de encriptado aditivo. La Figura 5.18, muestra las comunicaciones entre las tarjetas emisor y receptor con puntas para osciloscopio para la implementación. La implementación del sistema de encriptado caótico de orden fraccionario se ilustra en la Figura 5.19, donde pueden observarse las dos tarjetas NI myRIO 1900, el osciloscopio Tektronix y el atractor caótico de Lorenz.

- Dos tarjetas electrónicas NI myRIO 1900, con su respectiva alimentación.
- Cables jumper macho-macho.
- Dos cables auxiliares ultra delgados con entrada de 3.5 mm.
- Dos adaptadores de audio con entrada plug de 3.5 mm a 2 jacks stereo.
- Bocinas con entrada de audio 3.5 mm.



(a)



(b)

Figura 5.17: (a) Sincronía, (b) Dinámica resultado de graficar $x_m(t)$ vs $x_s(t)$, obtenidos con apoyo de un osciloscopio digital Tektronix.

- Dos cables para puntas de osciloscopio caimán.
- Un osciloscopio digital.

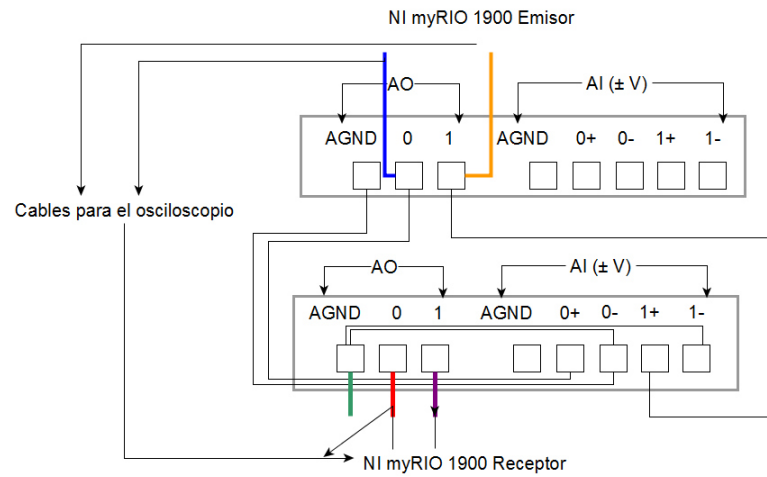


Figura 5.18: Comunicaciones entre las tarjetas emisor y receptor con puntas para osciloscopio.

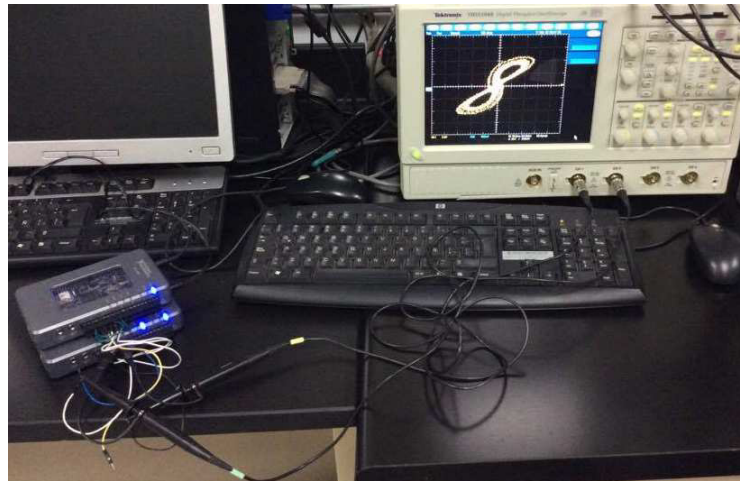
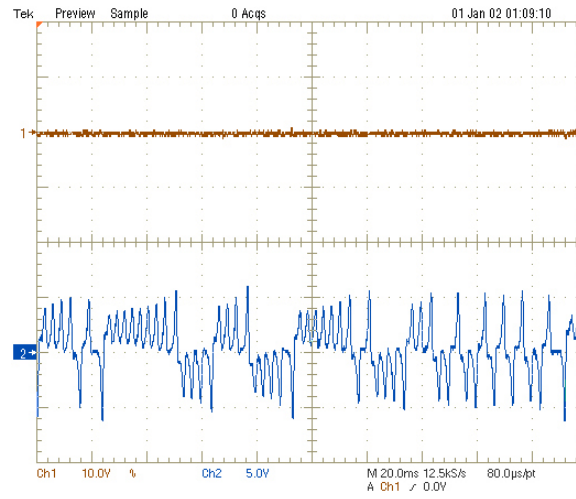
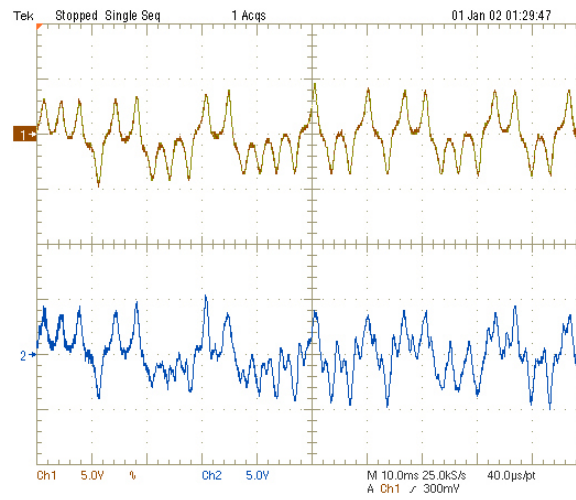


Figura 5.19: Atractor caótico de Lorenz, resultado de graficar $x(t)$ vs $y(t)$ con apoyo de un osciloscopio digital Tektronix.

Por último en la Figura 5.20a, se muestra el error entre los estados $x(t)$, $e(t) = x_m(t) - x_s(t)$ en Ch1 (café) y la dinámica del estado $x(t)$ se ilustra en Ch1 (azul). La comparación entre la dinámica $x(t)$ Ch1 (café) con el audio enmascarado con el estado $x(t)$ Ch2 (azul) se observa en la Figura 5.20b.



(a)



(b)

Figura 5.20: (a) Error entre estados $x(t)$ de la tarjeta emisora y receptora, (b) Comparación del audio enmascarado con estado $x(t)$, obtenidos con apoyo de un osciloscopio digital Tektronix.

Capítulo 6

Conclusiones

El objetivo principal de este trabajo de investigación trató sobre implementar un sistema de encriptado mediante una tarjeta FPGA para la transmisión de información de forma segura, utilizando la sincronización maestro - esclavo.

Para obtener un encriptado eficiente, se aprovechó el ancho de banda que los osciladores caóticos de orden fraccionario ofrecen.

Las simulaciones se realizaron con la configuración bidireccional y la topología utilizada fue la de mundo pequeño. El algoritmo de mundo pequeño que se utilizó es el de Newman-Watts (NW).

Con el objetivo de obtener un mayor nivel de seguridad, se realizó la modulación en frecuencia de la señal caótica para enmascarar adecuadamente el mensaje, a una frecuencia audible por el humano, utilizando dos criterios [6], estos criterios se basaron en los dominios de tiempo y frecuencia.

La principal aplicación de este trabajo se mostró en el capítulo 5, sobre la implementación física de un sistema de comunicación caótico, transmitiendo un audio encriptado, modulado en frecuencia, utilizando el método de encriptado aditivo, y la configuración maestro - esclavo, para procesamiento en tiempo real o en línea, utilizando el software y hardware LabVIEW de NI con apoyo de dos tarjetas electrónicas NI myRIO 1900, una se encargó de transmitir un audio encriptado y otra recuperó el audio original.

6.1. Aportaciones del trabajo de Investigación

Entre las aportaciones más destacadas de este trabajo son las siguientes:

- Sincronización completa de redes complejas en topología mundo pequeño, formadas por osciladores caóticos de orden fraccionario idénticos, en configuración bidireccional.
- Utilización de dos criterios para la selección de la señal caótica respecto a sus características de energía y frecuencia, en la implementación física.
- Modulación de la señal caótica, en la implementación física, generando un mejor enmascaramiento, debido a que la frecuencia de la señal caótica y la del audio coinciden en la misma banda de frecuencia.
- Implementación en tiempo real de un sistema de comunicación caótico, transmitiendo un audio encriptado, modulado en frecuencia, para su posterior recuperación, mediante el método de encriptado aditivo, utilizando dos tarjetas NI myRIO 1900 de NI, una para la parte codificadora y otra para la decodificadora.

6.2. Trabajos a futuro

Los siguientes trabajos futuros a realizar son los siguientes:

- Garantizar la sincronía de la red, por medio de un estudio del error de sincronización.
- Aprovechar la energía que osciladores de orden fraccionario presentan para un encriptado entre múltiples usuarios.
- Enmascarar más de un mensaje en una sola señal caótica en diferentes bandas de frecuencia mediante el incremento del ancho de banda.
- Encriptado de video con audio.
- Programar en una tarjeta FPGA un sistema de comunicación caótico para la transmisión de video con y sin modulación de frecuencia.

Bibliografía

- [1] O. U. Color, *Diccionario Enciclopédico*.
- [2] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Science*.
- [3] C. Posadas-Castillo, C. Cruz-Hernández, and R. M. López-Gutiérrez, “Experimental realization of synchronization in complex networks with chua’s circuits like nodes chaos,” *Solitons and Fractals*, vol. 40, pp. 1963–1975, 2009.
- [4] E. de Echegaray, “Diccionario general etimológico de la lengua española,” vol. 2.
- [5] E. N. Lorenz, “Deterministic nonperiodic flow,” *J. Atmos. Sci.*, vol. 20, pp. 130–141, 1963.
- [6] A. G. Soriano-Sánchez, C. Posadas-Castillo, M. A. Platas-Garza, and D. A. Diaz-Romero, “Performance improvement of chaotic encryption via energy and frequency location criteria,” *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 112, pp. 14–27, 2015.
- [7] I. Petráš, “Fractional-order nonlinear systems: Modeling, analysis and simulation,” *Springer*, 2011.
- [8] S. C. Manrubia, A. S. Mikhailov, and D. H. Zanette, *Emergence of Dynamical Order: Synchronization Phenomena in Complex Systems*.
- [9] L. M. Pecora and T. L. Carroll, “Synchronization in chaotic systems,” *Phys. Rev. Lett*, vol. 64, pp. 821–824, 1990.
- [10] F. Dachselt and W. Schwarz, “Chaos and cryptography,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 48, no. 12, 2001.

- [11] C. E. Shannon, “Communication theory of secrecy systems,” *The bell system technical*, 1946.
- [12] W. Diffie and M. Hellman, “New directions in cyptography,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 22, no. 6, 1976.
- [13] A. G. Soriano-Sánchez, C. Posadas-Castillo, and M. A. Platas-Garza, “Synchronization of generalized chua’s chaotic oscillators in small-world topology,” *JOURNAL OF Engineering Science and Technology Review*, vol. 8, no. 2, pp. 185–191, 2015.
- [14] C. E. Shannon, “A mathematical theory of communication,” *The bell system technical*, vol. 27, pp. 379–423 and 623–656, 1948.
- [15] S. Boccaletti, V. Latorab, Y. Morenod, M. Chavez, and D. U. Hwang, “Complex networks: Structure and dynamics,” *Physics Reports*, vol. 424, pp. 175–308, 2006.
- [16] I. Petráš and D. Bednárová, “Fractional-order chaotic systems,” *IEEE Press*, pp. 1031–1038, 2009.
- [17] J. Pospíšil, Z. Kolka, J. Horská, and J. Brzobohatý, “Simplest ode equivalent of chua’s equations,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 10, no. 1, pp. 1–23, 2000.
- [18] I. Petráš, “A note on the fractional-order chua’s system,” *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 38, no. 1, pp. 140–147, 2008.
- [19] M. E. J. Newman, “The structure and function of complex networks,” 2003.
- [20] L. Euler, “Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis,” *Comment. Acad. Sci. U. Petrop.*, vol. 8, pp. 128–140, 1741.
- [21] X. F. Wang, “Complex networks: Topology, dynamics and synchronization,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 12, no. 5, pp. 885–916, 2008.
- [22] S. Bocaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. L. Valladares, and C. S. Zhou, “The synchronization of chaotic systems,” *Physics Reports*, vol. 366, pp. 1–101, 2002.

- [23] X. F. Wang and G. Chen, "Synchronization in small-world dynamical networks," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 12, no. 1, pp. 187–1927, 2002.
- [24] L. E. Cornelise, L. P. Gagne, and R. C. Seewald, "Long-term average speech spectrum at the chest-level microphone location," *JSLPA*, vol. 15, no. 3, 1991.
- [25] G. A. Manley, "Frequency response of the middle ear of geckos," *J. comp. Physiol*, vol. 81, pp. 251–258, 1972.
- [26] X. F. Wang and G. Chen, "Complex networks: Small-world, scale-free and beyond," *IEEE CIRCUITS AND SYSTEMS MAGAZINE*, 2003.
- [27] J. L. Calvo-Rolle, "Scilab: Programación y simulación," *Alfaomega Ra-Ma*, 2010.
- [28] J. G. Proakis and D. G. Manolakis, *Tratamiento Digital de Señales*.
- [29] D. D. R. Stinson, *Cryptography: Theory and Practice*.
- [30] National-Instruments, "Labview student ambassador: Labview core 1 participant guide," *National Instruments*, 2014.
- [31] Hewlett-Packard, Company, Intel-Corporation, Microsoft-Corporation, ST-NXP, Wireless, and Texas-Instruments, "Universal serial bus 3.0 specification," 2008.
- [32] Texas-Instruments, "Tms320c64x dsp library programmer's reference," *Texas Instruments Incorporated*, 2003.
- [33] MT-036 and TUTORIAL, "Op amp output phase-reversal and input over-voltage protection," *Analog Devices, Inc*, 2009.
- [34] M. J. Roberts, *Análisis mediante métodos de transformada y MATLAB*.
- [35] W. Tomasi, *Sistemas de Comunicaciones Electrónicas*.
- [36] National-Instruments, "Labview student ambassador: Labview core 2 participant guide," *National Instruments*, 2014.
- [37] National-Instruments and Hardware, "User guide and specifications ni myrio-1900," *National Instruments*, 2013.

- [38] R. A. Kirsch, "National bureau of standards," *U. S. DEPARTMENT OF COMMERCE*, 1953.
- [39] M. O. Paiva, "Voltage-to-frequency/frequency-to-voltage converter," *Microchip Technology, Inc.*, 2002.
- [40] H. K. Khalil, *Nonlinear systems*.
- [41] LABVIEW-FPGA, "how to program fpgas without any vhdl knowledge," *National Instruments*.
- [42] R. Fritsch and G. Fritsch, "The four-color theorem: History, topological foundations, and idea of proof," *Springer*.