Einfache Feldfunktionenreihen zur Nachbildung beliebiger singularitätenfreier Vakuumfelder in torusförmigen Gebieten in Reduce- und Fortran-Darstellung

Simple Series of Harmonic Functions for Representing Arbitrary,Nonsingular Vacuum Fields in Toroidal Regimes in Reduce and Fortran Representation

W. Dommaschk

IPP 0/38 Okt.1978

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

8046 GARCHING BEI MÜNCHEN

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Einfache Feldfunktionenreihen zur Nachbildung beliebiger singularitätenfreier Vakuumfelder in torusförmigen Gebieten in Reduce- und Fortran-Darstellung

Simple Series of Harmonic Functions for Representing Arbitrary,Nonsingular Vacuum Fields in Toroidal Regimes in Reduce and Fortran Representation

W. Dommaschk

IPP 0/38 Okt.1978

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

IPP 0/38 W. Dommaschk

Einfache Feldfunktionenreihen zur Nachbildung beliebiger singularitätenfreier Vakuumfelder in torusförmigen Gebieten in Reduce- und Fortran-Darstellung

Simple Series of Harmonic Functions for Representing Arbitrary, Nonsingular Vacuum Fields in Toroidal Regimes in Reduce and Fortran Representation

Abstract

Sequences for simple-structured, linearly independent scalar potentials whose linear superposition is especially suited to, for example, analytical representation and optimization of stellarator fields are implicitly defined by recursion formulas and then explicitly generated by Reduce and represented in Fortran. The potentials, in cylindrical coordinates ρ, ϕ, and z, are components of a Fourier series in ϕ whose coefficients are nonseparable functions of ρ and z. For one of these sequences, the Fourier coefficients together with their derivatives with respect to ρ and z are explicitly represented for arbitrary azimuthal mode numbers m and for "poloidal" mode numbers up to $\ell = 5$. The sequence is complete in the sense that it is able to satisfy exactly certain Cauchy boundary conditions at a prescribed value of ρ (normalized to 1) and arbitrary finite values of z(i.e. Dirichlet and Neumann conditions can be satisfied simultaneously and independently of each other). The boundary conditions may be prescribed in the form of two independent Fourier series whose coefficients are polynomials of arbitrary degree in z (up to 5 in the present Fortran representation) which prescribe the potential and its normal derivative as functions of ϕ and z at $\rho = 1$.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung *)

Zur analytischen Nachbildung verschiedener Vakuumfelder werden nachfolgend einige Serien von einfach aufgebauten Potentialfunktionen angegeben. Es seien ρ, ϕ, z Zylinderkoordinaten. Das Feld soll hauptsächlich in der näheren Umgebung eines Kreises $\rho = 1$, $z = 0$ (dessen Radius die Längeneinheit von z und ρ sein soll) dargestellt bzw. angenähert werden. Für die Potentialfunktionen V wird (neben $V = \phi$) die Form:

$$V = f(z,\rho)\cdot e^{\pm i|m|\phi}, \qquad |m| = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{1}$$

angenommen, wobei

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) - \left(\frac{m}{\rho}\right)^2\cdot f = 0 \tag{2}$$

wegen $\Delta V = 0$. Aus Rechenzeitgründen sollten zur Feldapproximation Linearkombinationen aus möglichst einfach berechenbaren Ausdrücken der Form (1) verwendet werden. Nachfolgend werden einfache Lösungsreihen für f angegeben, die man ohne den üblichen (auf Bessel- und Winkelfunktionen führenden) Separationsansatz erhält.

----

*) Der vorliegende Bericht ist eine erweiterte Fassung des internen Berichtes RPR-N38: W. Dommaschk, "Einfache Skalarpotentiale für Feldapproximationen" vom 7.7.1977.

2. Homogenes $f(z,\rho)$:[1]

Homogene der Gleichung (2) genügende Funktionen $f(z,\rho)$, die nur positive Potenzen von z und ρ enthalten, sind mit Hilfe von Kugelfunktionen darstellbar. Die folgende direkte Herleitung, die z.T. auch negative Potenzen von ρ zuläßt, erscheint jedoch einfacher. Um diese Funktionen näher zu kennzeichnen, wird folgende Bezeichnungsweise vereinbart:

$$f(z,\rho) = H_{m,n}(z,\rho), \text{ wobei}$$
$$H_{m,n}(tz,t\rho) = t^{m+n}H_{m,n}(z,\rho) \tag{3}$$

In Übereinstimmung mit (2) und (3) kann dann gesetzt werden:

$$H_{m,o} = \rho^m \tag{4}$$
$$H_{m,1} = z\rho^m; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{5}$$

Für die Erzeugung weiterer $H_{m,n}$ wird die mit (2,3,4,5) verträgliche Vorschrift aufgestellt:

$$\frac{\partial H_{m,n}}{\partial z} = nH_{m,n-1} \tag{6}$$

Zusammen mit dem Eulerschen Satz für homogene Funktionen

$$z\frac{\partial H_{m,n}}{\partial z} + \rho\frac{\partial H_{m,n}}{\partial \rho} = (m+n)H_{m,n} \tag{7}$$

erhält man aus (6):

$$\rho\frac{\partial H_{m,n}}{\partial \rho} = (m+n)H_{m,n} - znH_{m,n-1} \tag{8}$$

Durch je zweimalige Anwendung von (6) und (8) in (2) ergibt sich die Rekursionsformel:

$$(2m+n)H_{m,n} = (2(m+n)-1)zH_{m,n-1} - (n-1)(z^2+\rho^2)H_{m,n-2} \tag{9}$$

----

[1] Die Bedeutung von "homogen" bzw. "inhomogen" bezieht sich hier und nachfolgend auf die in (3) (2. Zeile) angesprochene Eigenschaft.

Mit (4,5) erhält man daraus z.B.:

$$H_{m,2} = \{z^2 - \frac{\rho^2}{2(m+1)}\}\rho^m \qquad (10)$$

$$H_{m,3} = \{z^2 - \frac{(6m+9)\rho^2}{(2m+2)(2m+3)}\}z\rho^m \qquad (11)$$

Aus (4,5,9) lassen sich für $n \geq 0$ (n ist der höchste in $H_{m,n}$ auftretende Exponent von z) alle $H_{m,n}$ ermitteln, die nicht im Indexbereich $m < 0,\ n \geq 2|m|$ liegen. Da man aus $H_{m,n}$ den Faktor ρ^m abspalten kann, wird noch die Bezeichnungsweise

$$H_{m,n} = P_{m,n} \cdot \rho^m \qquad (12)$$

eingeführt. Soweit aus (4,5,9) erhältlich, sind die $P_{m,n}$ im Anhang 1 für $|m| \leq 6$, $0 \leq n \leq 6$ als Reduce-Output angegeben (wobei $R \equiv \rho$ und $P(m,n) \equiv P_{m,n}$). Der Vollständigkeit halber sei hier noch vermerkt, daß man im vorliegenden Fall durch Kelvin Transformation $H_{m,n}/r^{2(m+n)+1}$ als weitere Lösungen von (2) erhält ($r^2 = \rho^2 + z^2$).

3. Inhomogenes $f(z,\rho)$:[1)]

Anstelle von (3) wird hier der Ansatz gewählt:

$$f(z,\rho) = I_{m,n}, \text{ wobei}$$

$$I_{m,n} = \sum_{k=0}^{2k\leq n} \frac{z^{n-2k}}{(n-2k)!} C_{m,k}(\rho);\ m = 0,1,2,\ \ldots \qquad (13)$$

Die Summation läuft bis zur niedrigst möglichen nichtnegativen Potenz von z. Damit (2) identisch erfüllt wird, muß gelten:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho} C_{m,0}(\rho)\right) - \frac{m^2}{\rho^2} C_{m,0}(\rho) = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho} C_{m,1}(\rho)\right) - \frac{m^2}{\rho^2} C_{m,1}(\rho) + C_{m,0}(\rho) = 0 \qquad (14)$$

. . . .

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}C_{m,k}(\rho)\right) - \frac{m^2}{\rho^2}C_{m,k}(\rho) + C_{m,k-1}(\rho) = 0$$

. . . .

Für $m \neq 0$ kann dieses Gleichungssystem gelöst werden durch die Rekursionsformel:

$$C_{m,k}(\rho) = \frac{1}{2m}\int_1^\rho C_{m,k-1}(\eta)\left(\left(\frac{\eta}{\rho}\right)^m - \left(\frac{\rho}{\eta}\right)^m\right)\eta d\eta \tag{15}$$

wobei:

$$C_{m,o}(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\rho^m+\rho^{-m}), \text{ bzw.:} & (16\ D) \\ \frac{1}{2m}(\rho^m-\rho^{-m}) & (16\ N) \end{cases}$$

Für $m = 0$ erhält man durch Grenzübergang aus (15):

$$C_{o,k}(\rho) = \int_1^\rho C_{o,k-1}(\eta)(\ln(\eta) - \ln(\rho))\eta d\eta \tag{17}$$

und dazu aus (16):

$$C_{o,o}(\rho) = \begin{cases} 1, \text{ bzw.} & (18\ D) \\ \ln(\rho) \quad (\equiv A \text{ im Anhang 2}) & (18\ N) \end{cases}$$

Die zwei durch D und N gekennzeichneten Fälle ergeben zwei verschiedene Folgen der $C_{m,k}$, die im Anhang 2 als Reduce-Output explizit angegeben und dort mit CD(m,k) und CN(m,k) bezeichnet sind[2]. Dementsprechend ergeben sich zwei verschiedenartige Funktionsfolgen für $I_{m,n}$. Sie haben die nützliche Eigenschaft:

$$(I_{m,n})_{\rho=1} = \begin{cases} \frac{z^n}{n!}, \text{ bzw.} & (19\ D) \\ 0 & (19\ N) \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial I_{m,n}}{\partial\rho}\right)_{\rho=1} = \begin{cases} 0, \text{ bzw.} & (20\ D) \\ \frac{z^n}{n!} & (20\ N) \end{cases}$$

----

[2] Anhang 3 enthält zwei Fortran Subroutinen "IMN" und "CMK" zur numerischen Darstellung von $I_{m,n}$ und $C_{m,k}$ und partieller Ableitungen dieser Funktionen für beliebiges m und $n \leq 5$, $k \leq 2$. Die betreffenden, gegenüber Anhang 2 weitergehenden Formeln lassen sich unschwer aus der "Formelsammlung" in der Subroutine CMK ersehen.

Die mit D (Dirichlet) bzw. N (Neumann) gekennzeichneten Fälle führen somit auf zwei sich gegenseitig ergänzende Funktionsfolgen. Im Fall D können durch beliebige Linearkombination verschiedenartige Potentialfunktionen erzeugt werden, deren Normalableitung auf der gedachten Zylinderfläche $\rho = 1$ verschwindet. Den Fourierkoeffizienten dieser Potentialfunktionen (bezüglich ϕ) kann eine Dirichlet-Bedingung vorgeschrieben werden, welche diesen Koeffizienten für $\rho = 1$ eine z-Abhängigkeit in Form einer Potenzreihe oder eines Polynoms mit vorgebbaren Koeffizienten auferlegt. Im Fall N gilt Entsprechendes mit vertauschten Rollen für das Potential und die Normalableitung, d.h. es wird hier anstelle der Dirichlet-Bedingung eine Neumann-Bedingung vorgegeben. Nach Addition der für die Fälle D und N gebildeten Funktionen können somit Potentialfunktionen konstruiert werden, die auf der Zylinderfläche $\rho = 1$ in der beschriebenen Weise Cauchysche Randbedingungen, d.h. vorgebbare Randbedingungen sowohl für den Wert als auch für die Normalableitung des Potentials erfüllen. Das resultierende Potential ist dabei im allgemeinen singulär für $\rho = 0$, $\rho = \infty$ und $z = \pm\infty$.

Mit Hilfe der Funktionen $I_{m,n}$ können Potentialfunktionen mit bestimmten Eigenschaften konstruiert werden. So ergibt z.B. das Potential:

$$V_{m,\ell} = I^{(D)}_{m,\ell} \times \cos(m\phi+\delta) \pm I^{(N)}_{m,\ell-1} \times \sin(m\phi+\delta) \qquad (21)$$

für $m > 0$, $\ell > 0$ ein Feld mit helikaler Struktur. Dabei beziehen sich D und N auf die genannte Fallunterscheidung, m ist die azimutale, ℓ die poloidale Feldperiodenzahl und δ ein fester Phasenwinkel. Das obere bzw. untere Vorzeichen ergibt eine Rechts- bzw. Linksschraubenstruktur.

Im Spezialfall $m = 5$, $\ell = 2$ ergaben Vergleichsrechnungen eine im Plasmabereich brauchbare Übereinstimmung des Gradienten von

$$\tilde{V} = \phi + \sqrt{t_o^*(m-t_o^*)} \cdot V_{m,\ell}, \quad 0 \leq t_o^* \leq \frac{m}{2} \qquad (22)$$

mit dem wirklichen $m = 5$, $\ell = 2$ Stellarator-Vakuumfeld. In der Normierung von (22) entsprechen $\rho = 1$, $z = 0$ der mittleren Lage der magnetischen Achse des wirklichen Stellaratorfeldes, und der sich aus (22) auf dieser Kreislinie ergebende Feldstärke-Betrag $|\nabla\tilde{V}| = |\nabla\phi| = 1$ entspricht der mittleren azimutalen Feldkomponente am mittleren Ort der magnetischen Achse beim wirklichen Stellaratorfeld. Den Wert $t_o^* = \lim(\vartheta/\phi)$ für $\phi\to\infty$ (wobei $\vartheta = \vartheta(\phi)$ = poloidale Winkelposition einer Feldlinie in Bezug auf $\rho = 1$, $z = 0$) erhält man aus (22) in der infinitesimalen Umgebung der (hier exakt kreisförmigen) magnetischen Achse $\rho = 1$, $z = 0$ bei Vernachlässigung der Kreiskrümmung. Numerische Ergebnisse haben in Fall $m = 1$, $\ell = 2$ gezeigt, daß t_o^* dem richtigen zu $\tilde{V}$ gehörenden t_o-Wert (bei Berücksichtigung der Kreiskrümmung) sehr nahe kommt.

4. Allgemeines $f(z,\rho)$

Die durch (1) definierten Fourierkoeffizienten $f(z,\rho)$ der Skalarpotentiale wurden bisher durch Rekursionsformeln (9,15) dargestellt, die vom speziellen Aufbau von $f(z,\rho)$ abhängig waren. Nachfolgend wird eine allgemeinere Rekursionsformel aufgestellt, bei der keine speziellen Annahmen hinsichtlich der Struktur von $f(z,\rho)$ gemacht werden.

Zur näheren Kennzeichnung der verschiedenen Funktionen wird, ähnlich wie bisher, die Bezeichnungsweise $f(z,\rho) = A_{m,n}(z,\rho)$ verwendet. Der Index m (der bei der Rekursion festgehalten wird) legt die Zugehörigkeit zu $\exp(\pm i|m|\phi)$ in (1) fest. Der Index n unterscheidet die durch Rekursion auseinander hervorgehenden Funktionen. Es wird nun vorausgesetzt, es sei ein $f(z,\rho) = A_{m,n}$ bekannt, das die Gleichung (2) bereits identisch erfüllt. Die nächstfolgende Funktion $A_{m,n+1}(z,\rho)$ wird dann mit der willkürlich wählbaren Konstanten α durch den Ansatz

$$A_{m,n+1}(z,\rho) = \int_{\alpha}^{z} A_{m,n}(\xi,\rho)\,\partial\xi + R_n(\rho) \tag{23}$$

definiert, der sich weiter unten als zulässig erweist. Dabei wird partiell (bei festgehaltenem ρ) integriert und die von z unabhängige Funktion $R_n(\rho)$ wird aus der Forderung bestimmt, daß $A_{m,n+1}$

ebenso wie $A_{m,n}$ die Gleichung (2) identisch erfüllen soll. Durch Einsetzen von (23) in (2) entsteht für $R(\rho)$ die Gleichung

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho R_n'(\rho)) - \left(\frac{m}{\rho}\right)^2 R_n(\rho) + A_{m,n,z}(\alpha,\rho) = 0, \tag{24}$$

die nicht von z abhängt und damit den Ansatz (23) rechtfertigt. In (24) ist $(') \equiv d/d\rho$ und $A_{m,n,z} \equiv \partial A_{m,n}(z,\rho)/\partial z$. Zur Ableitung von (24) wurde die Umformung

$$A_{m,n,z} = \int_{\alpha}^{z} A_{m,n,zz}(\xi,\rho)\,\partial\xi + A_{m,n,z}(\alpha,\rho) \tag{25}$$

benützt, wonach sich zeigt, daß die Integrandensumme der in (24) zunächst noch auftretenden Integrale verschwindet, weil $A_{m,n}$ voraussetzungsgemäß die Gleichung (2) erfüllt.

Durch Vergleich von (24) mit (14) und (15) erhält man als mögliche Lösung von (24)

$$R_n(\rho) = \frac{1}{2m}\int_{\beta}^{\rho} A_{m,n,z}(\alpha,\eta)\left\{\left(\frac{\eta}{\rho}\right)^m - \left(\frac{\rho}{\eta}\right)^m\right\}\eta d\eta \tag{26}$$

wobei für die untere Integrationsgrenze anstelle von 1 etwas allgemeiner die willkürliche Konstante β gesetzt wurde. Die gesuchte Rekursionsformel erhält man durch Einsetzen von (26) in (23).

Ein spezielles Anwendungsbeispiel von (23,26) ist die explizite Darstellung der Funktionenreihe (13), die früher auf dem Umweg über die Funktionen $C_{m,k}(\rho)$ erhalten wurde. Für den Start der Rekursionsformel (23) erhält man aus (13) $I_{m,o} = C_{m,o}$, d.h. eine der durch (16D) bis (18N) explizit bekannten Funktionen. Durch sukzessive Anwendung von (23,26) mit $\alpha = 0$ und $\beta = 1$ erhält man explizit die entsprechenden $I_{m,n}$ für $n > 0$.

Herrn Professor Schlüter danke ich für sein Interesse an dieser Arbeit.

5. Anhang 1 (Reduce-Output zu 2.)

Potential:

$$V(\rho,\phi,z) = P_{m,n} \cdot \rho^{m} \cdot e^{\pm i|m|\phi}$$

Eigenschaften:

$$\Delta V = 0$$

$$V(\rho t,\phi,zt) = t^{m+n}\, V(\rho,\phi,z)$$

Bezeichnungen:

$P_{m,n} \equiv P(m,n)$

$\rho \equiv R$

$$P(0,0) = 1$$

$$P(0,1) = Z$$

$$P(0,2) = Z^{2} - 1/2*R^{2}$$

$$P(0,3) = Z^{3} - 3/2*Z*R^{2}$$

$$P(0,4) = Z^{4} - 3*Z^{2}*R^{2} + 3/8*R^{4}$$

$$P(0,5) = Z^{5} - 5*Z^{3}*R^{2} + 15/8*Z*R^{4}$$

$$P(0,6) = Z^{6} - 15/2*Z^{4}*R^{2} + 45/8*Z^{2}*R^{4} - 5/16*R^{6}$$

$$P(1,0) = 1$$

$$P(1,1) = Z$$

$$P(1,2) = Z^{2} - 1/4*R^{2}$$

$$P(1,3) = Z^{3} - 3/4*Z*R^{2}$$

$$P(1,4) = Z^{4} - 3/2*Z^{2}*R^{2} + 1/8*R^{4}$$

$$P(1,5) = Z^{5} - 5/2*Z^{3}*R^{2} + 5/8*Z*R^{4}$$

$$P(1,6) = Z^{6} - 15/4*Z^{4}*R^{2} + 15/8*Z^{2}*R^{4} - 5/64*R^{6}$$

$$P(2,0) = 1$$

$$P(2,1) = Z$$

$$P(2,2) = Z^{2} - 1/6*R^{2}$$

$$P(2,3) = Z^{3} - 1/2*Z*R^{2}$$

$$P(2,4) = Z^{4} - Z^{2}*R^{2} + 1/16*R^{4}$$

$$P(2,5) = Z^{5} - 5/3*Z^{3}*R^{2} + 5/16*Z*R^{4}$$

$$P(2,6) = Z^{6} - 5/2*Z^{4}*R^{2} + 15/16*Z^{2}*R^{4} - 1/32*R^{6}$$

$$P(3,0) = 1$$

$$P(3,1) = Z$$

$$P(3,2) = Z^{2} - 1/8*R^{2}$$

$$P(3,3) = Z^{3} - 3/8*Z*R^{2}$$

$$P(3,4) = Z^{4} - 3/4*Z^{2}*R^{2} + 3/80*R^{4}$$

$$P(3,5) = Z^{5} - 5/4*Z^{3}*R^{2} + 3/16*Z*R^{4}$$

$$P(3,6) = Z^{6} - 15/8*Z^{4}*R^{2} + 9/16*Z^{2}*R^{4} - 1/64*R^{6}$$

$$P(4,0) = 1$$

$$P(4,1) = Z$$

$$P(4,2) = Z^{2} - 1/10*R^{2}$$

$$P(4,3) = Z^{3} - 3/10*Z*R^{2}$$

$$P(4,4) = Z^{4} - 3/5*Z^{2}*R^{2} + 1/40*R^{4}$$

$$P(4,5) = Z^{5} - Z^{3}*R^{2} + 1/8*Z*R^{4}$$

$$P(4,6) = Z^{6} - 3/2*Z^{4}*R^{2} + 3/8*Z^{2}*R^{4} - 1/112*R^{6}$$

$$P(5,0) = 1$$

$$P(5,1) = Z$$

$$P(5,2) = Z^{2} - 1/12*R^{2}$$

$$P(5,3) = Z^{3} - 1/4*Z*R^{2}$$

$$P(5,4) = Z^{4} - 1/2*Z^{2}*R^{2} + 1/56*R^{4}$$

$$P(5,5) = Z^{5} - 5/6*Z^{3}*R^{2} + 5/56*Z*R^{4}$$

$$P(5,6) = Z^{6} - 5/4*Z^{4}*R^{2} + 15/56*Z^{2}*R^{4} - 5/896*R^{6}$$

$$P(6,0) = 1$$

$$P(6,1) = Z$$

$$P(6,2) = Z^2 - 1/14*R^2$$

$$P(6,3) = Z^3 - 3/14*Z*R^2$$

$$P(6,4) = Z^4 - 3/7*Z^2*R^2 + 3/224*R^4$$

$$P(6,5) = Z^5 - 5/7*Z^3*R^2 + 15/224*Z*R^4$$

$$P(6,6) = Z^6 - 15/14*Z^4*R^2 + 45/224*Z^2*R^4 - 5/1344*R^6$$

$P((-1),0) = 1$

$P((-1),1) = Z$

$P((-2),0) = 1$

$P((-2),1) = Z$

$P((-2),2) = Z^{2} + 1/2*R^{2}$

$P((-2),3) = Z^{3} + 3/2*Z*R^{2}$

$P((-3),0) = 1$

$P((-3),1) = Z$

$P((-3),2) = Z^{2} + 1/4*R^{2}$

$P((-3),3) = Z^{3} + 3/4*Z*R^{2}$

$P((-3),4) = Z^{4} + 3/2*Z^{2}*R^{2} + 3/8*R^{4}$

$P((-3),5) = Z^{5} + 5/2*Z^{3}*R^{2} + 15/8*Z*R^{4}$

$P((-4),0) = 1$

$P((-4),1) = Z$

$P((-4),2) = Z^{2} + 1/6*R^{2}$

$P((-4),3) = Z^{3} + 1/2*Z*R^{2}$

$P((-4),4) = Z^{4} + Z^{2}*R^{2} + 1/8*R^{4}$

$P((-4),5) = Z^{5} + 5/3*Z^{3}*R^{2} + 5/8*Z*R^{4}$

$P((-4),6) = Z^{6} + 5/2*Z^{4}*R^{2} + 15/8*Z^{2}*R^{4} + 5/16*R^{6}$

$P((-5),0) = 1$

$P((-5),1) = Z$

$P((-5),2) = Z^{2} + 1/8*R^{2}$

$P((-5),3) = Z^{3} + 3/8*Z*R^{2}$

$$P((-5),4) = Z^{4} + 3/4*Z^{2}*R^{2} + 1/16*R^{4}$$

$$P((-5),5) = Z^{5} + 5/4*Z^{3}*R^{2} + 5/16*Z*R^{4}$$

$$P((-5),6) = Z^{6} + 15/8*Z^{4}*R^{2} + 15/16*Z^{2}*R^{4} + 5/64*R^{6}$$

$$P((-6),0) = 1$$

$$P((-6),1) = Z$$

$$P((-6),2) = Z^{2} + 1/10*R^{2}$$

$$P((-6),3) = Z^{3} + 3/10*Z*R^{2}$$

$$P((-6),4) = Z^{4} + 3/5*Z^{2}*R^{2} + 3/80*R^{4}$$

$$P((-6),5) = Z^{5} + Z^{3}*R^{2} + 3/16*Z*R^{4}$$

$$P((-6),6) = Z^{6} + 3/2*Z^{4}*R^{2} + 9/16*Z^{2}*R^{4} + 1/32*R^{6}$$

6. Anhang 2 (Reduce-Output zu 3.)

Potential:

$$V(\rho,\phi,z) = \left\{ \sum_{k=0}^{2k\leq n} \frac{z^{n-2k}}{(n-2k)!} C_{m,k}(\rho) \right\} \cdot e^{\pm i|m|\phi}$$

Eigenschaften:

$$\Delta V = 0$$

$$V_{\rho=1} = \begin{cases} \frac{z^n}{n!} \cdot e^{\pm i|m|\phi}, \text{ bzw.} & \text{D)} \\ 0 & \text{N)} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)_{\rho=1} = \begin{cases} 0 \text{ , bzw.} & \text{D)} \\ \frac{z^n}{n!} \cdot e^{\pm i|m|\phi} & \text{N)} \end{cases}$$

Bezeichnungen:

$$C_{m,k}(\rho) \equiv \begin{cases} CD(m,k) & \text{D)} \\ CN(m,k) & \text{N)} \end{cases}$$

$$\rho \equiv R$$

$$\ln(\rho) \equiv A$$

Weitere Formeln lassen sich aus der "Formelsammlung" in der Fortran Liste der Subroutine CMK im Anhang 3 ersehen.

$$CD(0,0):=1$$

$$CD(0,1):=(-R^{2}+2 \cdot A+1)/4$$

$$CD(0,2):=(R^{4}-8 \cdot R^{2} \cdot A+4 \cdot R^{2}-4 \cdot A-5)/64$$

$$CD(0,3):=(-R^{6}+18 \cdot R^{4} \cdot A-18 \cdot R^{4}+36 \cdot R^{2} \cdot A+9 \cdot R^{2}+6 \cdot A+10)/2304$$

$$CD(1,0):=(R^{2}+1)/(2 \cdot R)$$

$$CD(1,1):=(-R^{4}-4 \cdot R^{2} \cdot A+4 \cdot R^{2}-3)/(16 \cdot R)$$

$$CD(1,2):=(R^{6}+12 \cdot R^{4} \cdot A-21 \cdot R^{4}+36 \cdot R^{2} \cdot A+15 \cdot R^{2}+5)/(384 \cdot R)$$

$$CD(1,3):=(-R^{8}-24 \cdot R^{6} \cdot A+52 \cdot R^{6}-216 \cdot R^{4} \cdot A+72 \cdot R^{4}-120 \cdot R^{2} \cdot A-116 \cdot R^{2}-7)/(18432 \cdot R)$$

$$CD(2,0):=(R^{4}+1)/(2 \cdot R^{2})$$

$$CD(2,1):=(-R^{6}+3 \cdot R^{2}-2)/(24 \cdot R^{2})$$

$$CD(2,2):=(R^{8}-24 \cdot R^{4} \cdot A+12 \cdot R^{4}-16 \cdot R^{2}+3)/(768 \cdot R^{2})$$

$$CD(2,3):=(-R^{10}+120 \cdot R^{6} \cdot A-140 \cdot R^{6}+240 \cdot R^{4} \cdot A+100 \cdot R^{4}+45 \cdot R^{2}-4)/(46080 \cdot R^{2})$$

$$CD(3,0):=(R^{6}+1)/(2 \cdot R^{3})$$

$$CD(3,1):=(-3 \cdot R^{8}+2 \cdot R^{6}+6 \cdot R^{2}-5)/(96 \cdot R^{3})$$

$$CD(3,2):=(3 \cdot R^{10}-5 \cdot R^{8}-10 \cdot R^{6}+30 \cdot R^{4}-25 \cdot R^{2}+7)/(3840 \cdot R^{3})$$

$$CD(3,3):=(-R^{12}+3 \cdot R^{10}+15 \cdot R^{8}-120 \cdot R^{6} \cdot A+40 \cdot R^{6}-75 \cdot R^{4}+21 \cdot R^{2}-3)/(92160 \cdot R^{3})$$

$$CD(4,0):=(R^{8}+1)/(2 \cdot R^{4})$$

$$CD(4,1):=(-6 \cdot R^{10}+5 \cdot R^{8}+10 \cdot R^{2}-9)/(240 \cdot R^{4})$$

$$CD(4,2):=(R^{12} - 2*R^{10} + 5*R^{4} - 6*R^{2} + 2)/(1920*R^{4})$$

$$CD(4,3):=(- 2*R^{14} + 7*R^{12} - 35*R^{8} + 70*R^{6} - 63*R^{4} + 28*R^{2} - 5)/(322560*R^{4})$$

$$CD(5,0):=(R^{10} + 1)/(2*R^{5})$$

$$CD(5,1):=(- 10*R^{12} + 9*R^{10} + 15*R^{2} - 14)/(480*R^{5})$$

$$CD(5,2):=(10*R^{14} - 21*R^{12} + 7*R^{10} + 35*R^{4} - 49*R^{2} + 18)/(26880*R^{5})$$

$$CD(5,3):=(- 5*R^{16} + 18*R^{14} - 14*R^{12} - 14*R^{10} + 70*R^{6} - 98*R^{4} + 54*R^{2} - 11)/(1290240*R^{5})$$

$$CD(6,0):=(R^{12} + 1)/(2*R^{6})$$

$$CD(6,1):=(- 15*R^{14} + 14*R^{12} + 21*R^{2} - 20)/(840*R^{6})$$

$$CD(6,2):=(15*R^{16} - 32*R^{14} + 14*R^{12} + 42*R^{4} - 64*R^{2} + 25)/(53760*R^{6})$$

$$CD(6,3):=(- 5*R^{18} + 18*R^{16} - 18*R^{14} + 42*R^{6} - 72*R^{4} + 45*R^{2} - 10)/(1935360*R^{6})$$

$$CN(0,0):=A$$

$$CN(0,1):=(-R^{2}*A+R^{2}-A-1)/4$$

$$CN(0,2):=(2*R^{4}*A-3*R^{4}+8*R^{2}*A+2*A+3)/128$$

$$CN(0,3):=(-6*R^{6}*A+11*R^{6}-54*R^{4}*A+27*R^{4}-54*R^{2}*A-27*R^{2}-6*A-11)/13824$$

$$CN(1,0):=(R^{2}-1)/(2*R)$$

$$CN(1,1):=(-R^{4}+4*R^{2}*A+1)/(16*R)$$

$$CN(1,2):=(R^{6}-12*R^{4}*A+9*R^{4}-12*R^{2}*A-9*R^{2}-1)/(384*R)$$

$$CN(1,3):=(-R^{8}+24*R^{6}*A-28*R^{6}+72*R^{4}*A+24*R^{2}*A+28*R^{2}+1)/(18432*R)$$

$$CN(2,0):=(R^{4}-1)/(4*R^{2})$$

$$CN(2,1):=(-R^{6}+3*R^{4}-3*R^{2}+1)/(48*R^{2})$$

$$CN(2,2):=(R^{8}-8*R^{6}+24*R^{4}*A+8*R^{2}-1)/(1536*R^{2})$$

$$CN(2,3):=(-R^{10}+15*R^{8}-120*R^{6}*A+80*R^{6}-120*R^{4}*A-80*R^{4}-15*R^{2}+1)/(92160*R^{2})$$

$$CN(3,0):=(R^{6}-1)/(6*R^{3})$$

$$CN(3,1):=(-R^{8}+2*R^{6}-2*R^{2}+1)/(96*R^{3})$$

$$CN(3,2):=(R^{10}-5*R^{8}+10*R^{6}-10*R^{4}+5*R^{2}-1)/(3840*R^{3})$$

$$CN(3,3):=(-R^{12}+9*R^{10}-45*R^{8}+120*R^{6}*A+45*R^{4}-9*R^{2}+1)/(276480*R^{3})$$

$$CN(4,0):=(R^{8} - 1)/(8*R^{4})$$

$$CN(4,1):=(- 3*R^{10} + 5*R^{8} - 5*R^{2} + 3)/(480*R^{4})$$

$$CN(4,2):=(R^{12} - 4*R^{10} + 5*R^{8} - 5*R^{4} + 4*R^{2} - 1)/(7680*R^{4})$$

$$CN(4,3):=(- R^{14} + 7*R^{12} - 21*R^{10} + 35*R^{8} - 35*R^{6} + 21*R^{4} - 7*R^{2} + 1)/(645120*R^{4})$$

$$CN(5,0):=(R^{10} - 1)/(10*R^{5})$$

$$CN(5,1):=(- 2*R^{12} + 3*R^{10} - 3*R^{2} + 2)/(480*R^{5})$$

$$CN(5,2):=(2*R^{14} - 7*R^{12} + 7*R^{10} - 7*R^{4} + 7*R^{2} - 2)/(26880*R^{5})$$

$$CN(5,3):=(- R^{16} + 6*R^{14} - 14*R^{12} + 14*R^{10} - 14*R^{6} + 14*R^{4} - 6*R^{2} + 1)/(1290240*R^{5})$$

$$CN(6,0):=(R^{12} - 1)/(12*R^{6})$$

$$CN(6,1):=(- 5*R^{14} + 7*R^{12} - 7*R^{2} + 5)/(1680*R^{6})$$

$$CN(6,2):=(5*R^{16} - 16*R^{14} + 14*R^{12} - 14*R^{4} + 16*R^{2} - 5)/(107520*R^{6})$$

$$CN(6,3):=(- 5*R^{18} + 27*R^{16} - 54*R^{14} + 42*R^{12} - 42*R^{6} + 54*R^{4} - 27*R^{2} + 5)/(11612160*R^{6})$$

<u>Anhang 3 (Fortran-Listen zu 3.)</u>

Numerische Darstellung der Funktionen $I_{m,n}$ und $C_{m,k}$ und ihrer 1. partiellen Ableitungen durch die Subroutinen IMN und CMK.

Beschreibung für IMN (vgl. auch Kommentare in den Fortran-Listen):

Aufruf (IMN ruft CMK automatisch):

CALL IMN(IDN,M,N,R,Z,OI,RI,ZI)

Parameterliste:

IDN = Input, 1 oder 2, 1 ≙ Fall D (Dirichlet), 2 ≙ Fall N (Neumann),

M = Input, nichtnegative beliebige ganze Zahl, Index m in $I_{m,n}$ und $C_{m,k}$, azimutale Modenzahl

N = Input, 0,1,2,3,4 oder 5, Index n in $I_{m,n}$, poloidale Feldperiodenzahl = N+IDN-1

R = Input, ρ, Radialkoordinate, (Normierung vgl. Einleitung)

Z = Input, z, Axialkoordinate, (Normierung vgl. Einleitung, z ist nicht die magnetische Achse!)

OI = Output, Zahlenwert von $I_{m,n}$

RI = Output, Zahlenwert der partiellen Ableitung $\partial I_{m,n}/\partial\rho$

ZI = Output, Zahlenwert der partiellen Ableitung $\partial I_{m,n}/\partial Z$

Beschreibung für CMK:

Aufruf:

CALL CMK(IDN,M,K,R,OC,RC)

Parameterliste (nicht genannte Parameter haben gleiche Bedeutung wie bei IMN):

K = Input, 0,1 oder 2, Index k in $C_{m,k}$

OC = Output, Zahlenwert von $C_{m,k}$

RC = Output, Zahlenwert von $\partial C_{m,k}/\partial\rho$

```
      SUBROUTINE IMN(IDN,M,N,R,Z,OI,RI,ZI)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DATA C2,C3,C4,C5/5.0D-1,1.666666666666667D-1,4.166666666666667D-2,
     $ 8.333333333333333D-3/
C
C     IMN BERECHNET DIE FUNKTIONEN I(M,N) AUS RPR-N38 UND DEREN 1. AB-
C     LEITUNG NACH R UND Z FUER IDN=1 (FALL D) ODER IDN=2 (FALL N),
C     N=0,1,2,3,4 ODER 5, UND M=BELIEBIG GANZZAHLIG NICHTNEGATIV, WOBEI:
C     OI=I(M,N) , RI=D(I(M,N))/DR, ZI=D(I(M,N))/DZ.
C
      I=N+1
      CALL CMK(IDN,M,0,R,OC0,RC0)
      GOTO (100,101,102,103,104,105), I
   10 WRITE(6,1010) IDN,M,N,R,Z
      STOP
C
  100 OI=OC0
      RI=RC0
      ZI=0.0D0
      GOTO 999
  101 OI=OC0*Z
      RI=RC0*Z
      ZI=OC0
      GOTO 999
  102 CALL CMK(IDN,M,1,R,OC1,RC1)
      Z2=Z*Z
      OI=(OC0*Z2+OC1+OC1)*C2
      RI=(RC0*Z2+RC1+RC1)*C2
      ZI=OC0*Z
      GOTO 999
  103 CALL CMK(IDN,M,1,R,OC1,RC1)
      Z2=Z*Z
      OI=(OC0*Z2+OC1*6.0D0)*Z*C3
      RI=(RC0*Z2+RC1*6.0D0)*Z*C3
      ZI=(OC0*Z2+OC1+OC1)*C2
      GOTO 999
  104 CALL CMK(IDN,M,1,R,OC1,RC1)
      CALL CMK(IDN,M,2,R,OC2,RC2)
      Z2=Z*Z
      OI=((OC0*Z2+OC1*1.2D1)*Z2+OC2*2.4D1)*C4
      RI=((RC0*Z2+RC1*1.2D1)*Z2+RC2*2.4D1)*C4
      ZI=(OC0*Z2+OC1*6.0D0)*Z*C3
      GOTO 999
  105 CALL CMK(IDN,M,1,R,OC1,RC1)
      CALL CMK(IDN,M,2,R,OC2,RC2)
      Z2=Z*Z
      OI=((OC0*Z2+OC1*2.0D1)*Z2+OC2*1.2D2)*Z*C5
      RI=((RC0*Z2+RC1*2.0D1)*Z2+RC2*1.2D2)*Z*C5
      ZI=((OC0*Z2+OC1*1.2D1)*Z2+OC2*2.4D1)*C4
  999 RETURN
 1010 FORMAT(2X,'STOP(IMN,LBL10),    IDN =',I3,3X,'M =',I3,3X,'N =',I3,
     $ 3X,'R =',1PD15.6,3X,'Z =',D15.6)
      END
```

```
      SUBROUTINE CMK(IDN,M,K,R,OC,RC)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DATA RA,RL,MA/-1.0D0,-1.0D0,-1/
C
C     CMK BERECHNET DIE FUNKTIONEN C(M,K) AUS RPR-N38 UND DEREN 1. AB-
C     LEITUNG NACH R FUER IDN=1 (FALL D) ODER IDN=2 (FALL N), K=0,1 ODER
C     2, UND M=BELIEBIG GANZZAHLIG NICHTNEGATIV, WOBEI:
C     OC=I(M,K), RC=D(I(M,K))/DR.
C
      IF(K*(2-K).LT.0) GOTO 40
      IF(M.LE.K) GOTO 20
      I=3*IDN+K+10
      IF(M.EQ.MA) GOTO 10
      MA=M
      M1=(M+1)*(M+2)
      M2=(M+1)*(M-2)
      M3=(M-1)*(M-2)
      M4=(M-1)*(M+2)
      M5=64*M*(M*M-1)*(M*M-4)
      M6=2*(M+2)*(M+2)*(M-2)
      M7=2*(M-2)*(M-2)*(M+2)
      M8=(M+1)*(M+2)*(M-4)
      M9=(M-1)*(M-2)*(M+4)
      GOTO 15
C
   10 IF(R.EQ.RA) GOTO 30
   15 RA=R
      U=R**M
      V=1.0D0/U
      GOTO 30
   20 I=6*IDN+M*(5-M)/2+K-5
      IF(R.EQ.RL) GOTO 30
      RL=R
      A=DLOG(R)
   30 R2=R*R
C
      GOTO (100,101,102,111,112,122,200,201,202,211,212,222,500,501,
     $ 502,600,601,602), I
   40 WRITE(6,1010) IDN,M,K,I,R
      STOP
C
C      IDN=1,M.LE.K,(M= 2.ZIFFER, K= 3.ZIFFER IM LABEL):
  100 OC=1.0D0
      RC=0.0D0
      GOTO 999
  101 OC=(-R2+A+A+1.0D0)*2.5D-1
      RC=(-R2+1.0D0)/(R+R)
      GOTO 999
  102 OC=((R2-8.0D0*A+4.0D0)*R2-4.0D0*A-5.0D0)*1.5625D-2
      RC=((R2-4.0D0*A)*R2-1.0D0)/(1.6D1*R)
      GOTO 999
  111 OC=((-R2-4.0D0*A+4.0D0)*R2-3.0D0)/(1.6D1*R)
      RC=((-3.0D0*R2-4.0D0*A)*R2+3.0D0)/(1.6D1*R2)
      GOTO 999
  112 OC=(((R2+1.2D1*A-2.1D1)*R2+3.6D1*A+1.5D1)*R2+5.0D0)/(3.84D2*R)
      RC=(((5.0D0*R2+3.6D1*A-5.1D1)*R2+3.6D1*A+5.1D1)*R2-5.0D0)
     $ /(3.84D2*R2)
```

```
      GOTO 999
  122 R4=R2*R2
      OC=((R4-2.4D1*A+1.2D1)*R4-1.5D1*R2+3.0D0)/(7.68D2*R2)
      RC=((R4-8.0D0*A)*R4-1.0D0)/(1.28D2*R2*R)
      GOTO 999
C
C     IDN=2,M.LE.K,(M= 2.ZIFFER, K= 3.ZIFFER IM LABEL):
  200 OC=A
      RC=1.0D0/R
      GOTO 999
  201 OC=((-A+1.0D0)*R2-A-1.0D0)*2.5D-1
      RC=((-A-A+1.0D0)*R2-1.0D0)/(4.0D0*R)
      GOTO 999
  202 OC=(((2.0D0*A-3.0D0)*R2+8.0D0*A)*R2+A+A+3.0D0)*7.8125D-3
      RC=(((4.0D0*A-5.0D0)*R2+8.0D0*A+4.0D0)*R2+1.0D0)/(6.4D1*R)
      GOTO 999
  211 OC=((-R2+4.0D0*A)*R2+1.0D0)/(1.6D1*R)
      RC=((-3.0D0*R2+4.0D0*A+4.0D0)*R2-1.0D0)/(1.6D1*R2)
      GOTO 999
  212 OC=(((R2-1.2D1*A+9.0D0)*R2-1.2D1*A-9.0D0)*R2-1.0D0)/(3.84D2*R)
      RC=(((5.0D0*R2-3.6D1*A+1.5D1)*R2-1.2D1*A-2.1D1)*R2+1.0D0)
     $ /(3.84D2*R2)
      GOTO 999
  222 OC=((((R2-8.0D0)*R2+2.4D1*A)*R2+8.0D0)*R2-1.0D0)/(1.536D3*R2)
      RC=(((3.0D0*R2-1.6D1)*R2+2.4D1*A+1.2D1)*R2*R2+1.0D0)/(7.68D2*R2*R)
      GOTO 999
C
C     IDN=1,M.GT.K,(K= 3.ZIFFER IM LABEL):
  500 OC=(U+V)*5.0D-1
      RC=(U-V)*DFLOAT(M)/(R+R)
      GOTO 999
  501 MH=8*(M*M-1)
      OC=(U*(R2*DFLOAT(M*(1-M))+DFLOAT(M2))+V*(R2*DFLOAT(M*(M+1))
     $ -DFLOAT(M4)))/DFLOAT(M*MH)
      RC=(U*(-R2*DFLOAT(M4)+DFLOAT(M2))+V*(-R2*DFLOAT(M2)+DFLOAT(M4)))
     $ /(R*DFLOAT(MH))
      GOTO 999
  502 OC=(U*((R2*DFLOAT(M*M3)-DFLOAT(M7))*R2+DFLOAT(M8))
     $     +V*((R2*DFLOAT(M*M1)-DFLOAT(M6))*R2+DFLOAT(M9)))
     $ /DFLOAT(M5)
      MH=2*(M*M-4)*(M*M-4)
      RC=(U*((R2*DFLOAT(M*M9)-DFLOAT(MH))*R2+DFLOAT(M*M8))
     $ +V*((-R2*DFLOAT(M*M8)+DFLOAT(MH))*R2-DFLOAT(M*M9)))
     $ /(R*DFLOAT(M5))
      GOTO 999
C
C     IDN=2,M.GT.K,(K= 3.ZIFFER IM LABEL):
  600 OC=(U-V)/DFLOAT(M+M)
      RC=(U+V)/(R+R)
      GOTO 999
  601 MH=8*M*(M*M-1)
      OC=(U*(R2*DFLOAT(1-M)+DFLOAT(1+M))-V*(R2*DFLOAT(1+M)+DFLOAT(1-M)))
     $ /DFLOAT(MH)
      RC=(U*(-R2*DFLOAT(M4)+DFLOAT(M*(M+1)))+V*(R2*DFLOAT(M2)
     $ +DFLOAT(M*(1-M))))/(R*DFLOAT(MH))
      GOTO 999
  602 MH=2*(M*M-4)
```

```
      OC=(U*((R2*DFLOAT(M3)-DFLOAT(MH))*R2+DFLOAT(M1))
     $ +V*((-R2*DFLOAT(M1)+DFLOAT(MH))*R2-DFLOAT(M3)))/DFLOAT(M5)
      RC=(U*((R2*DFLOAT(M9)-DFLOAT(M6))*R2+DFLOAT(M*M1))
     $ +V*((R2*DFLOAT(M8)-DFLOAT(M7))*R2+DFLOAT(M*M3)))
     $ /(R*DFLOAT(M5))
  999 RETURN
 1010 FORMAT(2X,'STOP(CMK,LBL40),    IDN =',I3,3X,'M =',I3,3X,'K =',I3,
     $ 3X,'I =',I3,5X,'R =',1PD15.6)
      END
```