

**MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK
GARCHING BEI MÜNCHEN**

**Zur Effizienz der
Ionen-Bernstein-Wellen-Heizung
von Fusionsplasmen**

Heinrich Werthmann
(*Dissertation*)

IPP 5/58

Juni 1994

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über
die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

**Zur Effizienz der
Ionen-Bernstein-Wellen-Heizung
von Fusionsplasmen**

Heinrich Werthmann

Zur Effizienz der Ionen-Bernstein-Wellen-Heizung von Fusionsplasmen

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades

an der
Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Leopold-Franzens-Universität Innsbruck

vorgelegt von

Mag. Heinrich Werthmann

Garching bei München, im Mai 1994

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Grundlagen der thermonuklearen Fusion	1
1.2	Plasmawellen und ihre Anwendung zur Radiofrequenz-Heizung	4
1.3	Reaktorrelevanz der Ionen-Bernstein-Wellen-Heizung	7
1.4	Problemstellung und Übersicht der Arbeit	10
2	Die konstitutive Relation	16
2.1	Das lineare Maxwell-Vlasov-Gleichungssystem	16
2.2	Die konstitutive Relation der Stromdichte	18
2.3	Die konstitutive Relation im "slab"	20
2.4	Logarithmisch divergente Terme in $\underline{\sigma}(x, x'; k_y, k_{ })$	25
3	Lokale Analyse der Wellengleichung	30
3.1	Eikonalapproximation und Leistungsbilanz	30
3.2	Die lokale Dispersionsrelation	39
4	Die Lösung der nichtlokalen Wellengleichung	43
4.1	Eine Galerkin-Finite-Elemente-Methode zur numerischen Integration der nichtlokalen Wellengleichung	43
4.2	Approximation der konstitutiven Relation	45
4.3	Testfunktionen	49
4.4	Auswertung der lokalen Terme der Wellengleichung	51
4.5	Auswertung der nichtlokalen Terme der Wellengleichung	54
4.6	Die Anpassung der Finite-Elemente-Lösung an WKB-Moden als Randbedingung	67
4.7	Der IBW-Code	74

5 Die Leistungsbilanz	76
5.1 Allgemeine Bemerkung zur Leistungsbilanz	76
5.2 Die lokal dissipierte Leistung im "slab"	79
5.3 Ein Kriterium marginaler Stabilität einer linearen Driftwelle, der "Universellen Instabilität"	89
5.4 Zur Kompatibilität der WKB-Leistungsbilanz mit der lokalen Leistungsbilanz des räumlich dispersiven "slab"	93
6 Numerische Ergebnisse zur Modenkonzersion der langsamen Welle in eine Ionen-Bernstein-Welle	97
6.1 Die Modenkonzersion der IBW in eine SW in der Nähe der kalten LH-Resonanz	98
6.2 Die lokale Dispersionsrelation des IBW-Modenkonzersionsproblems in der Nähe einer Ionen-Zyklotron-Harmonischen	108
6.3 Die Modenkonzersion der IBW in eine SW in der Nähe einer Ionen-Zyklotron-Harmonischen	118
6.4 Leistungsdepositionsprofile	134
6.5 Die Modenkonzersionen unter dem Einfluß von Stößen	146
7 Zusammenfassung	152
Literaturverzeichnis	155

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Grundlagen der thermonuklearen Fusion

Seit den 50'er Jahren werden Möglichkeiten der Energiegewinnung durch kontrollierte Kernfusion erforscht. Bei der Verschmelzung leichter Atomkerne wird Bindungsenergie frei, die in einem künftigen Fusionsreaktor der technischen und wirtschaftlichen Nutzung zugänglich gemacht werden soll. Im Hinblick auf einen solchen Reaktor ist als aussichtsreichste Fusionsreaktion die Deuterium-Tritium-Reaktion



anzusehen, wobei 17.6 MeV in Form von kinetischer Energie der Reaktionsprodukte frei werden [Wes 87]. Um in reaktorrelevante Leistungsbereiche vorzudringen, die einen täglichen Energieausstoß in der Größenordnung einiger Gigawattstunden vorsehen, sind also makroskopische Stoffmengen an Wasserstoff-Isotopen zu fusionieren. Im Bereich der thermonuklearen Fusion verfolgt man dabei die Strategie ein D-T Brennstoffgemisch derart aufzuheizen, daß seine Kerne thermische Geschwindigkeiten besitzen, die groß genug sind, um hinreichend oft deren gegenseitige Coulomb-Abstoßung zu überwinden und eine ausreichende Fusionsrate sicherzustellen.

Nun besitzt der Wirkungsquerschnitt der Reaktion (1.1), ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, daß jeweils ein Deuterium- und Tritiumkern ihre elektrostatische Potentialbarriere durchtunneln und einen stabilen Bindungszustand eingehen, ein Maximum bei einer kinetischen Energie von 64 keV im Schwerpunktsystem beider Ausgangskerne. Die thermischen Teilchenenergien des Brennstoffgemisches eines thermonuklearen Fusionsreaktors sollten also von vergleichbarer Größenordnung sein, ebenso die entsprechenden Temperaturen, falls diese in ihrem Energieäquivalent $T = \kappa T^\circ$ gemessen werden, mit κ der Boltzmann-Konstanten. Konkret wird die Heizung des D-T Brennstoffs auf eine Minimaltemperatur von rund 10 keV (das entspricht 100 Mio. Kelvin) als ausreichend erachtet, da die erwünschten Fusionsreaktionen im Hochenergiewendel der Verteilungsfunktionen der Wasserstoff-Isotope erfolgen können [Wes 87]. Ein makroskopisches Gemenge derart hochenergetischer Teilchen liegt aber immer im Plasmazustand vor, also im wesentlichen als ein elektrisch leitendes Aggregat von Wasserstoff-Ionen und freien Elektronen. Im Unterschied zu Neutralteilchengasen zeigen Plasmen einerseits eine Vielzahl kollektiver Effekte basierend auf der Wechselwirkung einer großen Zahl von Plasmateilchen, andererseits unterliegen sie in ausgeprägter Weise dem Einfluß elektromagnetischer Felder.

Diese Eigenschaften können genutzt werden, um Plasmen mittels Magnetfelder einzu-

schließen, wobei die geladenen Plasmateilchen auf Gyrationenbahnen gezwungen werden, die grob vereinfacht den Feldlinien folgen¹. Durch geeignet gewählte Magnetfeldgeometrien können die Plasmateilchen dann wenigstens für einen gewissen Zeitraum innerhalb räumlich begrenzter Gebiete gehalten werden.

Das Ziel des Einschlusses des extrem heißen Fusionsplasmas ist eine Minimierung seines direkten Kontaktes mit materiellen Gefäßwänden und damit verbunden seine thermische Isolierung, deren Güte durch die Energieeinschlußzeit τ_E (im stationären Zustand definiert man: $\tau_E = \text{thermischer Energieinhalt} / \text{totale Heizleistung}$) quantifiziert werden kann. Es muß gewährleistet sein, daß der aufgeheizte Brennstoff lange genug thermisch isoliert bleibt, um durch Kernfusion mehr Energie pro Zeiteinheit aus dem Reaktor zu gewinnen, als extern Heizleistung zugeführt werden muß. In der Literatur ist die quantitative Formulierung der Leistungsbilanz eines "Minimal-Fusionsreaktors", der eine sich selbst erhaltende Reaktionskette dadurch aufbaut, daß die gesamte aus den Fusionsreaktionen gewonnene Leistung unter einem Wirkungsgrad von $\eta = 0.3$ in die externe Heizung des Fusionsbrennstoffs investiert wird, als Lawson-Bedingung bekannt. Dieses Kriterium liefert bei gegebener Brennstofftemperatur eine Untergrenze für mögliche Produkte aus Brennstoffdichte und Energieeinschlußzeit τ_E von Reaktorplasmen [Law 57].

Gegenwärtig versprechen im wesentlichen zwei Entwicklungslinien von Experimenten einen erfolgreichen magnetischen Einschluß; das sind zum einen Maschinen vom Stellarator-Typ, zum anderen solche vom Tokamak-Typ. In beiden Fällen besitzt das Plasma eine toroidale Gestalt. Die entsprechenden Magnetfeldgeometrien sind durch helikale Magnetfeldlinien charakterisiert, die jene ineinander geschachtelten toroidalen Flächen konstanten Drucks aufspannen, die als magnetische Flußflächen bezeichnet werden. Der wesentliche Unterschied beider Maschinentypen besteht darin, daß im Stellarator ausschließlich externe Spulen die Magnetfeldkonfiguration zum Einschluß des Plasmas definieren, während im Tokamak die poloidale² Komponente des Magnetfeldes durch einen zusätzlich im Plasma induzierten toroidalen Strom erzeugt wird. Dabei wirkt das Plasma wie eine Sekundärspule eines Transformators, wobei die Induktion dieses Stromes natürlich nur gepulst erfolgen kann; Tokamaks sind also a priori nicht stationär zu betreiben. Dies stellt im Hinblick auf einen Reaktoreinsatz einen offensichtlichen Nachteil des Tokamak-Konzepts dar. Zur Verlängerung der Pulsdauer eines potentiellen Tokamak-Reaktors wäre also ein effizienter nicht-induktiver Stromtrieb wünschenswert.

Die nötige Mindesttemperatur von rund 10 keV des D-T Brennstoffes macht die Frage nach geeigneten Heizmethoden zu einem essentiellen Problem der Entwicklung eines Fusionsreaktors. Tokamaks, die gegenwärtig einen gewissen Entwicklungsvorsprung gegenüber dem Stellarator-Konzept besitzen, verfügen über eine "natürliche" Form der

¹Einen Spezialfall einer solchen Gyrationenbahn bildet die helikale Trajektorie eines geladenen Teilchens im homogenen Magnetfeld.

²Im Tokamak werden Richtungsangaben im allgemeinen auf die charakteristische Flußflächenstruktur bezogen. Sind die magnetischen Flußflächen Kreistori, so entspricht einem Umlauf in toroidaler Richtung der Umlauf um den großen Torusradius, bzw. einem Umlauf in poloidaler Richtung jener um den Kleinen. Die Flächennormale definiert schließlich die radiale Richtung.

Plasmaheizung, nämlich der resistiven Ohm'schen Heizleistung des im Plasma induzierten toroidalen Stromes. Dessen Stromstärken sind allerdings nach oben durch Erfordernisse der Plasmastabilität beschränkt. Darüber hinaus ist die Ohm'sche Heizleistung dem lokalen spezifischen Widerstand des Plasmas proportional, der mit $T^{-3/2}$ abfällt [Wes 87]. Mit zunehmender Temperatur und damit verbunden, zunehmenden Elektronen-Bremsstrahlungsverlusten, wird also die Leitfähigkeit des Plasmas verbessert und die Ohm'sche Heizung ineffizient, sodaß der erreichbare Temperaturbereich auf 3-4 keV beschränkt bleibt [Cai 91]. Daher ist der Einsatz externer Heizungen unumgänglich.

Derzeit werden zwei Strategien zur Zusatzheizung eines Fusionsplasmas im thermonuklearen Reaktor verfolgt. Zum einen ist dies die in vielen Experimenten getestete, technisch anspruchsvolle Heizung durch Neutralteilcheninjektion. Diese beruht auf der Deposition kinetischer Energie extern eingeschossener schneller Teilchen im Plasma. Dabei werden hochenergetische, makroskopische Flüsse geladener Teilchen erzeugt, die nach einer Beschleunigungsphase durch Ladungsaustauschstöße neutralisiert werden müssen, um so die das Plasma einschließenden Magnetfelder passieren zu können. Kritisch in diesem Zusammenhang ist die Frage nach der erreichbaren Eindringtiefe des Teilchenstrahls.

Die alternative Strategie der Wellenheizung im Radiofrequenzbereich (RF-Heizung) beruht auf der Einstrahlung elektromagnetischer Wellen ins Zentralplasma. Resonante Teilchen, d.h. etwas vereinfacht, Teilchen deren Gyrationbewegungen lokal eine Umlauffrequenz besitzen, die der Schwingungsfrequenz der elektromagnetischen Welle entspricht, werden im Wellenfeld sehr stark beschleunigt (oder auch verzögert). Unter bestimmten Umständen können solche Teilchen ihre Energiegewinne aus der resonanten Wechselwirkung derart auf nichtresonante Teilchen übertragen, daß effektiv Wellenenergie ins Plasma dissipiert wird, d.h. letzteres geheizt wird. Man spricht in diesem Fall von einer Zyklotron-Resonanz-Heizung. In ähnlicher Weise kann die ins Plasma eingestrahlte RF-Leistung durch den Effekt der Landau-Dämpfung dissipiert werden, wo nun die resonante Wechselwirkung auf einer mit dem Wellenfeld abgestimmten Bewegungs Komponente der Plasmateilchen parallel zum statischen Magnetfeld³ beruht. Beide Absorptionsmechanismen werden in der Literatur zusammenfassend als stoßfreie Wellendämpfung bezeichnet. Eine weitere Form der Leistungsdissipation ist die Stoßdämpfung von RF-Wellen, die im Unterschied zu den zuvor genannten nicht auf einer resonanten Welle-Teilchen-Wechselwirkung basiert; vielmehr wird durch Coulomb-Kollisionen der Plasmateilchen die kinetische Energie ihrer kohärenten Bewegung im Wellenfeld dissipiert.

Die Darstellung der Heizproblematik eines Fusionsplasmas wäre unvollständig, ohne den Effekt der durch die Reaktion (1.1) erzeugten schnellen α -Teilchen zu erwähnen. Diese unterliegen ebenfalls dem magnetischen Einschluß und besitzen so ausreichend Zeit, um selbst durch Stöße das Plasma zu heizen. Bei kontinuierlicher Erhöhung der Plasmatemperatur (und damit der D-T Fusionsrate) durch externe Heizung würde man also an

³Als statisches Magnetfeld wird hier das auf der schnellen Zeitskala der RF-Wellen unveränderliche Feld des magnetischen Einschlusses bezeichnet.

einen Punkt gelangen, an dem die α -Teilchen Heizleistung alleine alle Leistungsverluste des Plasmas ausgleicht. Ist dieser sogenannte Zündpunkt des Plasmas erst einmal erreicht, kann im Prinzip auf weitere externe Heizung verzichtet werden. Die aus einer entsprechenden Leistungsbilanz formulierte Zündbedingung ist dem Lawson-Kriterium mit einem Wirkungsgrad von $\eta \approx 0.136$ äquivalent [Miy 89].

1.2 Plasmawellen und ihre Anwendung zur RF-Heizung

Im Gegensatz zu einem Neutralgas ist ein Fusionsplasma in der Lage eine große Zahl unterschiedlicher Wellentypen zu tragen, die in ihren Eigenschaften zum Teil erheblich von elektromagnetischen Vakuumwellen abweichen. Grundsätzlich sind also Heizmethoden basierend auf verschiedensten Wellentypen denkbar, die allerdings, um für einen Einsatz unter Reaktorbedingungen tauglich zu sein, diverse Anforderungen physikalischer, technischer aber auch ökonomischer Natur erfüllen müssen.

Eine solche ist zunächst einmal die Verfügbarkeit von Quellen bzw. Generatoren in entsprechenden Leistungs- und Frequenzbereichen, die ausreichend preiswert sind. Die durch solche Quellen bereitgestellte Leistung muß dann über geeignete Strukturen in das Plasma eingekoppelt werden können. Diese Koppler, etwa Antennen oder Wellenleiter, müssen dabei geometrische Abmessungen besitzen, die mit den Erfordernissen eines Einbaus in einen Fusionsreaktor kompatibel sind. Sie sollten weiters den hohen Neutronenflüssen, die im Reaktor zu erwarten sind, standhalten können. Schließlich ist eine ausreichende Akzessibilität des Kernplasmas erforderlich, d.h. die der Heizmethode zugrundeliegende Physik muß erlauben, daß die im Plasma angeregten Wellen sich bis in die Nähe des Plasmazentrums ausbreiten können, um dort ihre Leistung deponieren. Realistische Gefahren stellen diesbezüglich eine Reflexion der Wellen im Randbereich des Plasmas, aber auch die Heizung dieses Randschichtplasmas dar. Abgesehen davon, daß damit der Zweck der Heizung verfehlt wäre, würde ersteres zu einer erhöhten Wandbelastung im Reaktor führen, bzw. letzteres die Stabilität des gesamten magnetischen Einschlusses gefährden.

Um solche Gefahren vermeiden zu können, ist ein profundes Verständnis der Eigenschaften von Plasmawellen und insbesondere ihrer Ausbreitung Voraussetzung. Die Charakteristika dieser Wellen, auf die im folgenden kurz eingegangen werden soll, hängen zunächst einmal davon ab, ob das Plasma als kalt angesehen werden kann, d.h. ob der Einfluß der thermischen Bewegung der Plasmateilchen auf die Wellenausbreitung vernachlässigbar ist. Im Falle eines magnetisierten Plasmas ist das zulässig, falls in Parallelrichtung zum Magnetfeld die Phasengeschwindigkeiten der Wellen sehr viel größer als die thermischen Geschwindigkeiten der Teilchensorten sind, bzw. in Normalrichtung die Wellenlängen sehr viel größer als die thermischen Gyroradien.

Das kalte magnetisierte Plasma verhält sich im allgemeinen doppelbrechend [Sti 61], d.h. es existieren zu einer gegebenen Frequenz zwei verschiedene Wellentypen. Deren Eigenschaften hängen stark von ihrer Ausbreitungsrichtung ab, da das Magnetfeld im Plasma

eine Anisotropie definiert. Konkret unterscheidet man bei Parallelausbreitung eine R-Mode und eine L-Mode, die eine rechts- bzw. links-zirkular polarisierte, transversale Welle darstellen und eine Resonanz bei der Elektronen- bzw. Ionen-Zyklotronfrequenz (Zyklotronfrequenz = Gyrationfrequenz) besitzen. Dabei bedeutet Resonanz im kalten Plasma, daß die Wellenzahl der Moden gegen Unendlich divergiert; die Resonanz definiert also eine Frequenz, an der die Approximation des kalten Plasmas zusammenbricht. Weiters unterscheidet man bei Normalausbreitung die ordentliche Welle (O-Mode) und die außerordentliche Welle (X-Mode). Letztere besitzt gleich zwei Resonanzen, nämlich bei der sogenannten oberen bzw. unteren Hybridfrequenz (UH = upper hybrid, LH = lower hybrid). Bei der O-Mode handelt es sich um eine transversale, linear polarisierte Welle, während die X-Mode eine gemischt transversal-longitudinale Welle darstellt. Solche longitudinalen oder, was dasselbe ist, elektrostatischen Anteile können bei Plasmawellen im Gegensatz zu Vakuumwellen auftreten, da im Plasma freie Ladungsträger vorhanden sind.

Schließlich ist auch die Einteilung der beiden kalten Plasmamoden in eine schnelle Welle (FW = fast wave) bzw. langsame Welle (SW = slow wave) möglich, die eine für alle Ausbreitungsrichtungen einheitliche Klassifizierung darstellt. Wie die R- und L-Mode bei Änderung der Ausbreitungsrichtung in die O- und X-Mode übergehen, und welche dieser Moden nun die SW bzw. FW darstellen, hängt bei gegebener Wellenfrequenz in komplizierter Weise von der Magnetfeldstärke und der Plasmadichte ab und kann einem in der Literatur als CMA-Diagramm bekannten Schema entnommen werden.

Je nach verwendetem Wellentyp, Frequenzbereich bzw. Resonanzmechanismus unterscheidet man verschiedene Wellenheizmethoden (eine gute Übersicht findet man in [Cai 91]). Experimentell am erfolgreichsten sind wohl die Ionen-Zyklotron-Resonanz-Heizung im Frequenzbereich einiger 10 MHz und seit der Entwicklung leistungsfähiger Gyrotrons (Hochfrequenzquellen im 100 GHz-Bereich mit einer Leistung von mehr als 100 kW) die Elektronen-Zyklotron-Resonanz-Heizung. Auch im unteren Hybridfrequenzbereich (einige GHz) ist Wellenheizung möglich, doch haben sich LH-Wellen eher für Stromtriebexperimente als geeignet erwiesen. Die eingestrahlte Wellenenergie wird dabei durch Landau-Dämpfung am Schwanz der Elektronen-Verteilungsfunktion derart absorbiert, daß man in toroidaler Richtung einen nicht-induktiven Strom treibt. So könnte der durch den Ohm'schen Transformator notwendigerweise gepulst induzierte toroidale Strom im Tokamak-Plasma ersetzt werden, um wenigstens im Prinzip den kontinuierlichen Betrieb eines Tokamak-Fusionsreaktors zu ermöglichen.

Sind im realen, also heißen Plasma die zuvor genannten Bedingungen der kalten Plasmannäherung nicht erfüllt, so führen thermische Effekte zunächst zu mehreren neuen Moden, wie etwa den annähernd longitudinal polarisierten Ionen-Bernstein-Wellen (IBW). Die Eigenschaften jener Wellen, die bereits im kalten Plasma auftreten und die am Plasmarand kontinuierlich in elektromagnetische Vakuumwellen übergehen, bleiben auch im heißen Plasma für die meisten Frequenzen im wesentlichen unverändert. In der Nähe von Resonanzen werden jedoch, wie bereits angedeutet, auch für diese Wellen thermische Effekte wichtig. Das gilt beispielsweise für die SW im Frequenzbereich etwas oberhalb der

unteren Hybridfrequenz, der im Rahmen dieser Arbeit von besonderem Interesse ist, bei Dichten wie sie typisch in der Plasmarandschicht von Tokamaks gefunden werden. Die FW kann sich unter diesen Umständen generell nicht ausbreiten, bzw. die kalte SW, die an der unteren Hybridfrequenz eine Resonanz besitzt, nicht in Normalrichtung zum statischen Magnetfeld, sodaß auch keine X-Mode existiert. Die thermischen Effekte wirken sich nun derart aus, daß im Falle einer Ausbreitung fast senkrecht zum Magnetfeld die kalte LH-Resonanz der SW durch eine Modenkonzersion der SW in eine IBW mit endlicher Wellenzahl ersetzt wird.

Die Ionen-Bernstein-Wellen bilden eine ganze Familie von Wellen, wobei die verschiedenen Moden durch einen diskreten Index n charakterisiert werden, der einen Teilbereich der natürlichen Zahlen durchläuft ($n = 1, 2, 3, \dots$). Die Frequenz ω der n -ten IBW liegt zwischen der n - und $(n + 1)$ -ten Ionen-Zyklotron-Harmonischen,

$$n\Omega_{Ci} < \omega < (n + 1)\Omega_{Ci} , \quad (1.2)$$

wobei jedenfalls alle IBW eine Frequenz sehr viel kleiner als die Elektronen-Zyklotron-Frequenz Ω_{Ce} besitzen. In Normalrichtung zum statischen Magnetfeld ist die Wellenlänge $2\pi/k_{\perp}$ der IBW im Widerspruch zur Voraussetzung der kalten Plasmaapproximation von der Größenordnung des thermischen Ionen-Gyroradius ρ_i^{Gyro} , sodaß die Dynamik der IBW im Unterschied zur langwelligen SW wesentlich durch Finite-Gyroradius-Effekte bestimmt wird⁴. Diese Effekte entstehen dadurch, daß eine nicht vernachlässigbare Zahl von Plasmateilchen (in diesem Fall Ionen) so große Gyroradien besitzen, daß sie während ihrer Gyrationbewegung die räumliche Variation des elektromagnetischen Wellenfeldes der Mode senkrecht zum statischen Magnetfeld wahrnehmen können.

Anhand des Verhältnisses der parallelen Phasengeschwindigkeit^{5,6} zur thermischen Geschwindigkeit der Elektronen werden zwei Typen von IBW unterschieden [Bra 93]. Ist die Ungleichung $v_{phase}^{\parallel} \gg v_{th}^e$ erfüllt, so spricht man von "reinen IBW", deren Oszillation im wesentlichen durch die Ionen-Dynamik allein bestimmt wird. Ist hingegen $v_{phase}^{\parallel} \ll v_{th}^e$ realisiert, handelt es sich um sogenannte "neutralisierte IBW". Da letztere für typische Tokamak-Parameter immer starker Elektronen-Landau-Dämpfung unterliegen, können sie sich in diesen Konfigurationen kaum ausbreiten. Bedenkt man nun, daß die Bedingung der Existenz reiner IBW insbesondere im Falle senkrechter Propagation erfüllt ist, so genügen die Wellenzahlen der in Tokamaks anzutreffenden IBW offenbar der Ungleichung $k_{\parallel} \ll k_{\perp}$.

⁴Tatsächlich divergieren im Grenzfall des kalten Plasmas die Wellenzahlen sämtlicher Zweige der IBW gegen Unendlich.

⁵Im folgenden beziehen sich die Richtungsangaben "parallel" bzw. "senkrecht", falls nicht ausdrücklich anders angegeben, immer auf das statische Magnetfeld.

⁶Bemerkenswert ist, daß die Phasengeschwindigkeiten $v_{phase} = \omega/k \ll c$ der IBW ihren Gruppengeschwindigkeiten entgegengesetzt sind; man spricht in einem solchen Fall von rückwärts laufenden Wellen.

1.3 Reaktorrelevanz der Ionen-Bernstein-Wellen-Heizung

Bisher bei weitem nicht so umfangreich getestet wie die zuvor genannten Wellenheizmethoden, ist die Plasmaheizung mit Hilfe von Ionen-Bernstein-Wellen (IBW) im Frequenzbereich einiger 100 MHz. Die im Rahmen der vorliegenden Arbeit durchgeführten theoretischen Untersuchungen haben einige wesentliche Aspekte dieser speziellen RF-Heizmethode zum Gegenstand, die über ihre mögliche Reaktorrelevanz Aufschluß geben können.

Zwei im Hinblick auf dieses Heizschema entscheidende Fragen werden durch die im wesentlichen longitudinale Polarisierung der IBW aufgeworfen. Das ist einmal, da elektrostatische Wellen verschwindende Poynting-Vektoren besitzen, ob mit diesen Wellen überhaupt effizient Energie transportiert werden kann. Die Frage ist positiv zu beantworten, da IBW über einen kinetischen Korrektur zum Leistungsfluß verfügen, die wesentlich größer als ihr rein elektromagnetischer Poynting-Fluß ist [Bra 93]. Der kinetische Leistungsfluß wird dabei von einer an die IBW gekoppelten kohärenten Bewegung der geladenen Plasmateilchen getragen. Die andere Frage betrifft die Anregung der IBW. Diese ist offenbar nicht am Plasmarand möglich, da transversal polarisierte Vakuumwellen nicht direkt an die longitudinalen IBW gekoppelt werden können. Die Anregung der IBW muß folglich innerhalb des Plasmas auf indirekte Weise erfolgen. Als Kopplungsmechanismus im Randschichtplasma sieht das IBW-Heizschema die bereits erwähnte Modenkonzersion der SW in eine IBW in der Nähe der kalten LH-Resonanz vor. Die externe Anregung der SW am Plasmarand sollte möglich sein, da diese über eine entsprechende transversale Komponente verfügt. Zu Beginn dieser Arbeit war allerdings völlig ungeklärt wie effizient die Konversion der SW in eine IBW unter Reaktorbedingungen erfolgen kann. Eine signifikante Reflexion der über die SW eingestrahlt Leistung oder gar die Heizung des Randschichtplasmas können a priori nicht ausgeschlossen werden und stellen ernsthafte Gefahren für die Realisierbarkeit des gesamten Heizschemas dar.

Das IBW-Heizschema, das auf Puri und Ono zurückgeht [Pur 79]-[Ono 79], läßt sich nun in folgender Weise skizzieren: Zunächst wird am Plasmarand⁷ die SW bei einer Wellenfrequenz angeregt, die so zu wählen ist, daß die LH-Resonanz, anders als etwa im Falle der LH-Heizung, in der Abschältschicht⁸ eines Tokamaks lokalisiert ist. Diese extern angeregte SW wird sich dann weiter ins Plasmaintere ausbreiten, um durch Finite-Gyroradius-Effekte in der Nähe der kalten Resonanz, also noch innerhalb der Abschältschicht, in eine IBW konvertiert zu werden. Letztere soll dann weiter ins Zentralplasma propagieren, um dort über einen geeigneten Absorptionsmechanismus⁹ ihre Leistung zu deponieren.

⁷Der Koppler befindet sich dabei aus Gründen der Zugänglichkeit auf der Torusaußenseite, üblicherweise in Höhe der Mittelebene.

⁸Unter der Abschältschicht versteht man jenen peripheren Bereich des Tokamaks, in dem die Magnetfeldlinien materielle Gefäßeinbauten schneiden. Da die Plasmateilchen in etwa den Magnetfeldlinien folgen, werden sie in diesem Bereich nach kurzer Zeit auf ein materielles Hindernis, beispielsweise eine Prallplatte treffen, sodaß das Plasma dort gewissermaßen abgeschält wird.

⁹In Frage kommen beispielsweise die Resonanzabsorption an der nächsten Ionen-Zyklotron-Harmonischen, aber auch nichtlineare Prozesse bei $\omega \approx (n + 1/2)\Omega_{Ci}$, mit ungeradem n [Cai 91].

Ein typisches Modenkonzersionsszenario, wie es der Anregung der IBW zugrunde liegt, kann am besten anhand einer Lösung der lokalen Dispersionsrelation des heißen Plasmas, also des Brechungsindex n in Normalrichtung veranschaulicht werden. Eine solche Lösung n_{\perp} ist in Figur 1, Kapitel 6 dargestellt. In dieser Graphik ist n_{\perp} für den Fall $n_{\parallel} = 7$ gegen die radiale Koordinate x im Bereich der Abschältschicht aufgetragen, wo exponentiell abfallende Dichte- und Temperaturprofile angenommen werden. Der Limiter¹⁰ des Tokamaks ist dabei bei $x_a = 41\text{cm}$ lokalisiert, die Wand bei $x_{\text{Wand}} \geq x_b = 44\text{cm}$. Wenn man in Richtung abnehmender x , d.h. von außen nach innen vorgeht, sieht man im Plot zunächst den Zweig der langsamen Welle, der nur für $n_{\parallel}^2 \geq 1$ propagativ ist. Im Anschluß daran folgt in der Nähe der kalten LH-Resonanz ein im folgenden als Modenkonzersionsschicht bezeichneter Bereich, wo drei simultan existierende Moden den SW-Zweig mit dem IBW-Zweig verbinden, der weiter ins Plasmainnere führt. Als Frequenz wurde bei dem in Fig. 1 dargestellten numerischen Beispiel 438 MHz gewählt. Diese liegt im gegebenen Fall im Frequenzbereich zwischen vierter und fünfter Ionen-Zyklotron-Harmonischer, d.h. es wird an die IBW mit Index 4 angekoppelt. Man beachte den Unterschied zur LH-Heizung, die für die gewählten Parameter Frequenzen im Bereich von rund 8 GHz erfordern würde.

Eine erfolgreiche Realisierung des IBW-Heizschemas unter Reaktorbedingungen würde voraussetzen, daß die SW in der Abschältschicht praktisch vollständig in eine IBW transformiert werden kann, ohne dabei das dort vorhandene Randschichtplasma zu heizen. Betrachtet man das Modenkonzersionsszenario aus Fig. 1, Kapitel 6 im Grenzfall des kalten Plasmas, wo die Wellenzahlen des IBW-Zweigs gegen Unendlich divergieren, so daß die Phasengeschwindigkeit $v_{\perp}^{ph} = c/n_{\perp}$ der SW an der LH-Resonanz gegen Null geht, dann könnten auch kleinste dissipative Effekte, die im Bereich der Resonanz wirksam werden, die SW effizient dämpfen. Grundsätzlich wird man also auch im heißen Plasma die Gefahr einer signifikanten Leistungsdeposition in der Abschältschicht in Betracht ziehen müssen. Ebenso ist eine teilweise oder sogar vollständige Reflexion der SW a priori nicht auszuschließen. Um rigorose Aussagen über das Modentransformationsverhalten machen zu können, ist das Studium der lokalen Dispersionsrelation nicht ausreichend; vielmehr muß dazu die relevante Wellengleichung im Bereich der Modenkonzersionsschicht gelöst werden.

Sieht man vorerst jedoch einmal vom Problembereich der Akzessibilität des Reaktor-Kernplasmas ab, die primär von der Effizienz der indirekten Anregung der IBW, also vom Modentransformationsverhalten der SW kritisch bestimmt wird, so können aufgrund eher qualitativer Überlegungen einige spezifische, im Hinblick auf Reaktor Anwendungen wünschenswerte Eigenschaften des IBW-Heizschemas angegeben werden. Ono nennt als solche beispielsweise [Ono 92]:

- Die externe Anregung der SW ist aufgrund ihrer Polarisierung durch einen sogenannten Grill [Bra 77], das ist eine Anordnung phasengekoppelter Wellenleiter, möglich.

¹⁰Ein Limiter ist ein solider, materieller Gefäßeinbau, der z.B. dem Schutz exponierter Antennen oder auch einfach der Definition eines Plasmarandes dienen kann.

Die besonders einfache Struktur dieses Kopplers und seine geometrischen Abmessungen wären mit den Erfordernissen der Plasmaheizung im Tokamak-Reaktor kompatibel.

- Die Energiedeposition der IBW könnte im Zentralplasma innerhalb wohldefinierter Ionen-Zyklotron-Resonanz-Schichten erfolgen, wobei auch noch bei relativ hohen Harmonischen die Ionen direkt geheizt werden können (d.h. ohne den Umweg über die Elektronen).
- IBW heizen wegen ihrer geringen Phasengeschwindigkeit normal zum Magnetfeld im wesentlichen Bulk-Ionen, ohne dabei in der Ionen-Verteilungsfunktion einen stark ausgeprägten Schwanz zu generieren. Dieses Verhalten hat den Vorteil, daß mit sehr schnellen Teilchen verbundene Verlustmechanismen vermieden werden können.
- Es sind reaktorrelevante Szenarios denkbar, in denen IBW Tritium-Ionen direkt heizen, ohne der Absorption durch α -Teilchen zu unterliegen, die die Akzessibilität des Reaktorkernes behindern könnte. Durch geeignete Parameterwahl können IBW lokal starker Elektronen-Landau-Dämpfung ausgesetzt werden, und so möglicherweise zum Stromtrieb im brennenden Zentralplasma benutzt werden.

Um ein abgerundetes Gesamtbild des gegenwärtigen Status der IBW-Heizung zu erhalten, sind obenstehende, an sie geknüpfte Erwartungen experimentellen Befunden gegenüberzustellen. Eine detaillierte Übersicht bisher durchgeführter Experimente findet man in [Ono 92]; hier sei nur auf einige wichtige Ergebnisse hingewiesen.

Die ersten IBW-Heizexperimente an Tokamaks wurden am JIPPTII-U (Japanese Institute of Plasma Physics Tokamak II-Upgrade) durchgeführt, wo bei einer Frequenz von 40 MHz und RF-Leistungen von 60-80 kW eine effiziente Heizung der Ionen des Zentralplasmas beobachtet wurde [Ono 85]. Am PLT (Princeton Large Torus) wurde mit verschiedenen Majoritäts- und Minoritätsheizszenarien¹¹ bei 30 und 90 MHz experimentiert. Neben der Entdeckung des Effektes einer möglichen Unterdrückung von Niederfrequenz-turbulenzen im Tokamak durch IBW-Heizung [Tri 87], konnte insbesondere eine effiziente, nichtlineare Heizung der Deuterium-Majorität bei $3/2\Omega_{C,D}$ mit RF-Leistungen bis zu 650 kW erzielt werden. Im Hochdichtebereich wurden IBW-Heizexperimente an Alcator-C durchgeführt, bei einer Frequenz von 184 MHz. Diese waren bei Elektrodichten bis zu $2 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ erfolgreich; bei höheren Dichten wurde allerdings ein signifikanter Abfall der Effizienz der Ionenheizung beobachtet. Mit einem CO₂-Laser-Streuexperiment ist jedenfalls an Alcator-C der direkte Nachweis der durch Modenkonzersion angeregten IBW gelungen.

¹¹Von einer Minoritätsheizung spricht man, falls in einem Plasma mit mehreren Ionensorten eine Spezies, die nur zu einem geringen prozentuellen Anteil im Plasma vertreten ist, geheizt wird.

Jüngere Experimente an DIII-D (30-60 MHz), einem großen Divertor-Tokamak¹², waren weit weniger erfolgreich und haben auch bei einer Einkopplung einer maximalen RF-Leistung von 1 MW für einen Zeitraum von 0.1 sec kaum zur Heizung des Zentralplasmas geführt. Stattdessen wurde Ionenheizung im Randschichtplasma beobachtet, korreliert mit hoher parametrischer Zerfallsaktivität¹³, was zu einigen Zweifeln an der Effizienz des IBW-Kopplungsprozesses Anlaß gibt. Beide Effekte, Heizung der Randschicht-Ionen und parametrische Zerfallsaktivität, waren am stärksten, falls sich eine Ionen-Zyklotron-Harmonische in der Plasmarandschicht befand [Pin 93].

Künftig sind auch am FTU (Frascati-Tokamak-Upgrade) IBW-Heizexperimente geplant, wobei erstmals ein Wellenleiterkoppler bei einer Frequenz von 430 MHz zum Einsatz kommen soll. Falls die FTU-Experimente, die sich im RF-Leistungsbereich von maximal 1.5 MW bewegen sollen, im Hochdichte-Regime erfolgreicher sind als jene an DIII-D, wäre der Einsatz ähnlicher Wellenleiter zur Heizung eines brennenden Plasmas denkbar. Dann wären allerdings Heizleistungen von mindestens 50 MW im Reaktor-Kernplasma zu deponieren, was in gegenwärtigen Experimenten bei weitem noch nicht realisiert werden konnte.

In vorliegender Arbeit wurde im Hinblick auf solche Experimente weitgehend versucht, sich bei der Wahl der Parameter zu den numerischen Rechnungen, wie sie in Kapitel 6 präsentiert werden, an realistischen FTU-Daten zu orientieren. Ferner ist darauf hinzuweisen, daß, obwohl obenstehende Auswahl an IBW-Heizexperimenten nur Tokamak-Konfigurationen berücksichtigt, die Heizmethode grundsätzlich auch in anderen Maschinen-Typen einsetzbar ist.

1.4 Problemstellung und Übersicht der Arbeit

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist eine theoretische Untersuchung der Realisierbarkeit der zuvor beschriebenen IBW-Heizmethode, unter dem Aspekt der Effizienz der Ankopplung der extern angeregten SW an eine IBW. Die entscheidende Frage in diesem Zusammenhang ist, ob es in der Modenkonzersionsschicht gelingt, einen signifikanten Anteil der Leistung der SW auf die IBW zu übertragen. Des weiteren soll der Einfluß lokaler Dämpfungsmechanismen auf die Modenkonzersionseffizienz geklärt werden, d.h. insbesondere, ob es zur Heizung des Randschichtplasmas kommen kann. Diese Untersuchung erfordert im Bereich der Modenkonzersionsschicht zum einen die Lösung der relevanten Wellengleichung, zum anderen aber auch die Erstellung entsprechender Leistungsdepositionsprofile.

¹²Der Divertor ist eine Magnetfeldkonfiguration, die im Bereich der Abschältschicht des Plasmas die Teilchenflüsse in vordefinierter Weise auf sogenannte Prallplatten hinführt, mit dem Ziel den direkten Kontakt des heißen Plasmas mit materiellen Gefäßwänden zu minimieren.

¹³Der parametrische Zerfall ist eine resonante, nichtlineare Wechselwirkung einer eingestrahnten Pumpwelle mit zwei anderen Plasmamoden, die im Verlauf der Wechselwirkung Energie aus der Pumpwelle beziehen. Die Summen ihrer Frequenzen und Wellenzahlen müssen dabei mit Frequenz bzw. Wellenzahl der Pumpwelle übereinstimmen.

Die Wellengleichung besitzt in ihrer allgemeinen Form die Gestalt

$$\frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \wedge \left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \wedge \underline{E} \right) = \underline{E} + \frac{4\pi i}{\omega} \underline{J}, \quad (1.3)$$

wo \underline{J} die an die Welle gekoppelte Stromdichtestörung bezeichnet. Die selbstkonsistente Lösung der Wellengleichung erfordert deren Schließung mit Hilfe eines expliziten Ausdrucks für die Stromdichte als Funktional $\underline{\mathcal{F}}[\underline{E}]$ des elektrischen Wellenfeldes. Die Beziehung $\underline{J} = \underline{\mathcal{F}}[\underline{E}]$ wird als konstitutive Relation der Stromdichte bezeichnet und im Detail in Kapitel 2 der vorliegenden Arbeit diskutiert.

In die Definition der Stromdichte,

$$\underline{J} = \sum_{\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} d^3v \underline{v} \tilde{f}_{\alpha}, \quad (1.4)$$

die neben der Summation über die Teilchensorten eine Geschwindigkeitsraumintegration umfaßt, geht die durch die Wellen hervorgerufene Korrektur \tilde{f}_{α} zur ungestörten Verteilungsfunktion F_{α} ein. Daraus ist ersichtlich, daß zur Herleitung der konstitutiven Relation die Kenntnis eines expliziten Ausdrucks für \tilde{f}_{α} erforderlich ist. Ein solcher kann formal durch Trajektorienintegration¹⁴ der adäquaten kinetischen Gleichung, das ist die lineare Vlasov-Gleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{x}} + \Omega_{C\alpha} (\underline{v} \wedge \underline{b}) \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \right) \tilde{f}_{\alpha} = -\frac{eZ_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v} \wedge \underline{B} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{v}} F_{\alpha}, \quad (1.5)$$

gewonnen werden, wie eingehend in den Abschnitten 2.1 und 2.2 erläutert wird.

Die für die Beschreibung der Ausbreitung von IBW relevante konstitutive Relation ist notwendig nichtlokal. Dies hängt mit den kleinen Wellenlängen der IBW zusammen, die bewirken, daß die Dynamik der Ionen-Bernstein-Moden wesentlich durch Finite-Gyroradius-Effekte bestimmt wird. Anschaulich bedeutet dies, daß eine nicht vernachlässigbare Zahl von Teilchen im Laufe ihrer Gyrationbewegung Raumbereiche durchfliegt, deren Längenausdehnung senkrecht zum statischen Magnetfeld vergleichbar mit der Wellenlänge der IBW ist. Solche Teilchen, die etwa zu einer Zeit t den Ort \underline{x} passieren, konnten in der Vergangenheit $t' < t$ entlang ihrer Gyrationbahnen die räumliche Variation des elektrischen Wellenfeldes der IBW "spüren", sodaß die Stromdichte, die sie zur Zeit t am Aufpunkt \underline{x} tragen, durch das elektrische Wellenfeld nichtlokal bestimmt wird. Etwas mathematischer ausgedrückt heißt das, daß $\underline{J} = \underline{\mathcal{F}}[\underline{E}]$ in Form einer Integraldarstellung vorliegt und die Wellengleichung (1.3) vom Typ einer Integro-Differentialgleichung ist, was erhebliche mathematische Schwierigkeiten in sich birgt.

Den konkreten Rechnungen wird in vorliegender Arbeit als Modellgeometrie ein sogenannter "slab" zugrunde gelegt, da die Modenkonversionsschicht, verglichen mit den

¹⁴Dabei handelt es sich um eine Charakteristikenmethode, wobei die Charakteristiken der linearen Vlasov-Gleichung mit den vom Wellenfeld ungestörten Teilchenbahnen identisch sind.

geometrischen Abmessungen eines Tokamaks von geringer Dicke ist. Der "slab" wird durch die Annahmen charakterisiert, daß alle Gradienten der Plasmaparameter¹⁵ in x -Richtung und das statische Magnetfeld parallel zur z -Richtung eines cartesischen Koordinatensystems (x, y, z) ausgerichtet sind. Im Torus entspricht x der radialen, y der poloidalen und z der toroidalen Richtung, sodaß in dieser Geometrie insbesondere die Effekte der poloidalen Variation des statischen Magnetfeldes¹⁶ vernachlässigt werden. Der "slab" ist für IBW eine gute Näherung der tatsächlichen Verhältnisse im Tokamak, da sie aufgrund ihrer Wellenzahlen $k_{\parallel} \ll k_{\perp}$ ohnedies kaum durch die poloidale Magnetfeldvariation beeinflusst werden können. Die entsprechende nichtlokale konstitutive Relation des heißen "slab"-Plasmas ist explizit gegeben [Bra 91] und wird in Abschnitt 2.3 präsentiert. Im Rahmen des gegenständlichen Forschungsvorhabens war überdies die genaue Untersuchung der mathematischen Eigenschaften einer Integraldarstellung des Kernes dieser integralen konstitutiven Relation erforderlich, die zur Identifizierung logarithmisch divergenter Beiträge führte. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in Abschnitt 2.4 dargestellt.

Kapitel 4 hat die Lösung der nichtlokalen Wellengleichung des Modenkversionsproblems der IBW-Heizung zum Inhalt. Diese erfolgt im "slab" durch Anwendung eines Galerkin-Finite-Elemente-Verfahrens (im folgenden FEL-Verfahren) innerhalb eines x -Intervalls $[x_a, x_b]$, das die Modenkversionsschicht einschließt. Die FEL-Methode, die im Detail in Abschnitt 4.1 erläutert wird, basiert auf der sogenannten schwachen Form der Wellengleichung. Diese erhält man durch Skalarmultiplikation der Wellengleichung mit einer geeigneten Klasse von vektorwertigen Testfunktionen, auf deren Wahl näher in Abschnitt 4.3 eingegangen wird, und anschließender Integration über das Intervall $[x_a, x_b]$. Eine partielle Integration dient der Reduktion der Ordnung des Differentialoperators und bringt einen sogenannten Randterm in die Gleichung ein, der es erlaubt, dem System in natürlicher Weise Randbedingungen aufzuprägen.

Die Spezifikation dieser Randbedingung hat, wie in Abschnitt 4.6 im Detail erläutert wird, derart zu erfolgen, daß sie mit der integralen Natur der Wellengleichung sowohl mathematisch als auch physikalisch kompatibel ist. Das wird durch die Forderung sichergestellt, daß das elektrische Wellenfeld in Schichten, die an das Intervall $[x_a, x_b]$ angrenzen und einige Ionen-Gyroradien breit sind, durch WKB-Moden (WKB = Wentzel-Kramers-Brioullin) dargestellt werden kann. Die Wellenzahlen und Polarisierungen dieser WKB-Moden werden bei gegebener Wellenfrequenz aus einer lokalen Analyse der Wellengleichung, die in Abschnitt 3.2 durchgeführt wird, gewonnen. Konkret sind in dem in Fig. 1, Kapitel 6 dargestellten Modenkversionsszenario drei WKB-Moden involviert; eine extern angeregte SW, eine reflektierte SW und eine transmittierte IBW. Die Amplituden der reflektierten und transmittierten WKB-Mode sind dann analog zu einem Streuproblem als Unbekannte aufzufassen.

Den nächsten Schritt der FEL-Lösungsprozedur bildet innerhalb des Intervalls $[x_a, x_b]$

¹⁵Das sind die thermische Geschwindigkeit v_{th}^{α} , die Gyrofrequenz $\Omega_{C\alpha}$ und die Plasmafrequenz $\omega_{P\alpha}$.

¹⁶Diese entsteht dadurch, daß im Tokamak das statische Magnetfeld, ähnlich dem Feld innerhalb einer Ringspule, im wesentlichen mit dem Inversen der Entfernung zur Torusachse abfällt.

ein Galerkin-Ansatz für das gesuchte elektrische Wellenfeld als Linearkombination der gewählten Testfunktionen mit unbekanntem Galerkin-Koeffizienten, wie in Abschnitt 4.5 eingehend erläutert wird. Man erhält in der Folge, falls die Wellengleichung mit Stetigkeitsbedingungen zwischen der FEL-Wellenlösung und den WKB-Moden an den Punkten $x = x_a$ und $x = x_b$ ergänzt wird, ein lineares algebraisches System, das formal $\underline{S} \cdot \underline{\epsilon} = \underline{b}$ geschrieben werden kann. Dabei bezeichnet $\underline{\epsilon}$ einen Vektor, dessen Elemente sowohl die unbekanntem WKB-Amplituden als auch die unbekanntem Galerkin-Koeffizienten sind. Die Koeffizientenmatrix \underline{S} wird aus historischen Gründen als "stiffness"-Matrix bezeichnet und \underline{b} stellt einen Vektor bekannter Größen dar. Im konkreten Beispiel wird \underline{b} durch die Vorgabe der WKB-Amplitude der extern angeregten, einlaufenden SW spezifiziert. Die formale Lösung der Wellengleichung erhält man durch Inversion der "stiffness"-Matrix, $\underline{\epsilon} = \underline{S}^{-1} \cdot \underline{b}$.

Die explizite Auswertung der "stiffness"-Matrix erfordert schließlich eine mathematisch aufwendige 5-fach Integration. Unter der wenig restriktiven Annahme, daß die Gleichgewichtsplasmaparameter auf Längenskalen sehr viel größer als die thermischen Gyroradien variieren, können vier dieser Integrationen analytisch ausgeführt werden. Diese etwas länglichen Rechnungen werden im Detail in den Abschnitten 4.2, 4.4 und 4.5 präsentiert. Die letzte zur Berechnung der "stiffness"-Matrix erforderliche Integration, die Inversion dieser Matrix und damit die Lösung des algebraischen Gleichungssystems werden dann mit Hilfe eines im Verlauf dieser Arbeit entwickelten Fortran-Programms, dem sogenannten IBW-Code, numerisch durchgeführt, wie in Abschnitt 4.7 nachzulesen ist.

In Abschnitt 4.6 wird die globale Leistungsbilanz einer so erhaltenen numerischen Lösung der nichtlokalen Wellengleichung präsentiert, die Aufschluß über die Effizienz der Ankopplung an die IBW gibt. Sie hat in ihrer dimensionslosen Form die Gestalt $T + R + A = 1$, wo T , R und A den Transmissions-, Reflexions- bzw. Absorptionskoeffizienten des über die extern angeregte SW eingestrahlten Leistungsflusses bezeichnen. Die Koeffizienten T und R können direkt aus der asymptotischen WKB-Analyse, wie sie in Abschnitt 3.1 formuliert wird, gewonnen werden, da an den Randpunkten $x = x_a$, x_b die WKB-Approximation voraussetzungsgemäß Gültigkeit besitzt.

Darüberhinaus ist die Formulierung einer lokalen Leistungsbilanz innerhalb der Modenkonzersionsschicht erforderlich, einerseits um Leistungsdepositionsprofile zu erstellen, andererseits um den Absorptionskoeffizienten A direkt berechnen zu können. Letzterer kann dann benutzt werden, um zusammen mit den asymptotischen Ausdrücken für T und R die Energieerhaltung einer spezifischen numerischen Lösung der Wellengleichung zu bestätigen. Zu diesem Zweck wird in Abschnitt 5.1 und 5.2 ein expliziter Ausdruck für die lokal in der Modenkonzersionsschicht dissipierte Leistung P_{abs} hergeleitet, der aus zwei Beiträgen besteht. Der erste, der hier als Stix-Term bezeichnet wird, ist positiv definit und beschreibt den irreversiblen Energieaustausch der resonanten Wechselwirkung einzelner Teilchen mit dem elektromagnetischen Wellenfeld. Der zweite, der diamagnetischer Term genannt werden kann, basiert auf dem irreversiblen Energieaustausch zwischen dem elektromagnetischen Wellenfeld und der diamagnetischen Driftbewegung.

Dieser Beitrag hat deshalb den Charakter eines kollektiven Effektes zu dem auch nicht-resonante Teilchen beitragen.

Der diamagnetische Term ist nicht positiv definit, sodaß die lokal dissipierte Leistung insgesamt negativ werden kann. Im Falle $P_{\text{abs}} < 0$ wird Energie irreversibel von den Plasmateilchen in das elektromagnetische Wellenfeld transferiert. Insbesondere sollte es also möglich sein aus der Bedingung $P_{\text{abs}} = 0$, gewissermaßen als Kontrollrechnung, ein Kriterium marginaler Stabilität linearer Driftwellen¹⁷ zu reproduzieren. Tatsächlich kann auf diese Weise in Abschnitt 5.3 ein solches aus der Literatur bekanntes Kriterium (wie es in [Kra 65] gegeben ist) für eine Dichtegradient getriebene elektrostatische Oszillation, der sogenannten universellen Instabilität, hergeleitet werden. Schließlich wird in Abschnitt 5.4 die Kompatibilität des expliziten Ausdrucks für P_{abs} mit der unabhängig erstellten WKB-Leistungsbilanz sichergestellt.

In Kapitel 6 werden diverse, mit Hilfe des IBW-Codes errechnete numerische Resultate präsentiert. Darunter sind neben den lokalen Dispersionsrelationen der verschiedenen Modenkonzersionszenarien die zugehörigen Lösungen der nichtlokalen Wellengleichung, gegebenenfalls samt Leistungsdepositionsprofil. Solche Lösungen wurden insbesondere auch in Form parametrischer Studien errechnet, die eine umfassende Beurteilung der Effizienz der für die IBW-Heizung essentiellen Modenkonzersion erlauben. Die Eigenschaften des IBW-Kopplungsmechanismus können dann aufgrund der in vorliegender Arbeit geklärten Fragestellungen wie folgt zusammengefaßt werden:

- Die Modenkonzersion der SW in eine IBW in der Nähe der kalten LH-Resonanz ist immer vollständig, in dem Sinne, daß die über die SW eingekoppelte Leistung nicht reflektiert wird. Falls lokale Dämpfung vermieden werden kann, ist eine effiziente Ankopplung an die IBW möglich. Dies ist eine entscheidende Voraussetzung für die Realisierbarkeit des IBW-Heizungsschemas.
- Beide Moden, die SW und die IBW, unterliegen für hinreichend große Werte des parallelen Brechungsindex n_{\parallel} starker Elektronen-Landau-Dämpfung. Um eine damit verbundene parasitäre Heizung der Abschältschicht zu vermeiden, sollte das mittlere n_{\parallel} des über die Antenne eingekoppelten Spektrums nicht zu groß sein.
- Die IBW erweist sich als sehr sensitiv gegenüber Ionen-Zyklotron-Dämpfung, sodaß, um eine Heizung des Randschichtplasmas zu vermeiden, die Wellenfrequenz nicht nahe einer Ionen-Zyklotron-Harmonischen in der Peripherie des Plasmas gewählt werden soll.
- Durch Stoßdämpfung kann ein nicht vernachlässigbarer Anteil der eingestrahnten Leistung dissipiert werden, sodaß im Falle einer anomalen Vergrößerung der effektiven Stoßfrequenzen, wie etwa durch Stöße mit Neutralen, die Anwendbarkeit der IBW-Heizmethode unter Reaktorbedingungen zweifelhaft erscheint.

¹⁷Driftwellen sind Dichte- und Temperaturgradient getriebene Wellen des inhomogenen Plasmas im niederfrequenten Bereich weit unterhalb der Ionen-Gyrationsfrequenz.

Eine ausführlichere Zusammenfassung dieser Ergebnisse findet man in Kapitel 7.

Abschließend ist zu erwähnen, daß die numerische Lösung der integralen Wellengleichung, die einen der Schwerpunkte der vorliegenden Arbeit bildet, erstmals von Sauter durchgeführt wurde, der bereits zeigte, daß eine Ankopplung an die IBW prinzipiell möglich sein sollte [Sau 92]. In vorliegender Arbeit wird allerdings bei der Integration der Wellengleichung ein anderer Weg als in Ref. [Sau 92] beschritten; in Fragen der Numerik ebenso, wie bei der Wahl der Randbedingungen, was erst eine Quantifizierung des reflektierten bzw. transmittierten Anteils der über die SW eingekoppelten Leistung ermöglicht. Darüber hinaus wird in vorliegender Arbeit der Einfluß diverser dissipativer Mechanismen auf die Modenkonversionseffizienz untersucht, konkret der Ionen-Zyklotron-Resonanz-Dämpfung, der Elektronen-Landau-Dämpfung, bzw. der Wellendämpfung durch Stöße. Die entsprechenden Untersuchungsergebnisse erlauben deshalb eine weitaus umfassendere Beurteilung der Modenkonversion und damit des IBW-Heizschemas, als sie bisher möglich war.

Kapitel 2

Die konstitutive Relation

2.1 Das lineare Maxwell-Vlasov-Gleichungssystem

Das zur Beschreibung von Radiofrequenz-Heizszenarien adäquate Gleichungssystem umfaßt im linearen Regime eines heißen Plasmas neben der Gleichung für die stationäre Verteilungsfunktion F_α ,

$$\left[\underline{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{x}} + \Omega_{C\alpha} \underline{v} \wedge \underline{b} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \right] F_\alpha = 0, \quad (2.1)$$

die lineare Vlasov-Gleichung [Sti 61]-[Swa 89]

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{x}} + \Omega_{C\alpha} \underline{v} \wedge \underline{b} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{v}} \right] \tilde{f}_\alpha = -\frac{eZ_\alpha}{m_\alpha} \left[\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v} \wedge \underline{B} \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{v}} F_\alpha, \quad (2.2)$$

die die Störung \tilde{f}_α der stationären Verteilungsfunktion durch die Wellenfelder bestimmt, und das System der Maxwell-Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{E} = 4\pi \rho, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{B} = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \wedge \underline{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underline{E} + \frac{4\pi}{c} \underline{J} \quad (2.5)$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \wedge \underline{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underline{B}. \quad (2.6)$$

Lineare Vlasov-Gleichung und Maxwell-Gleichungen sind einerseits über das elektrische Wellenfeld \underline{E} und das magnetische Wellenfeld \underline{B} , andererseits über die mit der Störung \tilde{f}_α der Verteilungsfunktion assoziierte Korrektur der Ladungsdichte ρ bzw. die entsprechende Störung der Stromdichte \underline{J} gekoppelt. Konkret sind ρ und \underline{J} als Momente (d.h. Integrationen über den Geschwindigkeitsraum) von \tilde{f}_α gegeben,

$$\rho = \sum_\alpha eZ_\alpha \int_{\mathbb{R}^3} d^3v \tilde{f}_\alpha \quad (2.7)$$

bzw.

$$\underline{J} = \sum_{\alpha} e Z_{\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 v \underline{v} \tilde{f}_{\alpha}, \quad (2.8)$$

wo α den Teilchensortenindex bezeichnet. In Gl. (2.1) geht neben den Phasenraumkoordinaten $(\underline{x}, \underline{v})$ die Zyklotron- oder Gyrofrequenz $\Omega_{C\alpha} = e Z_{\alpha} |\underline{B}^{stat}| / m_{\alpha} c$ ein, mit $e > 0$ der elektrischen Elementarladung, c der Vakuumlichtgeschwindigkeit, Z_{α} der Kernladungszahl, bzw. m_{α} den Massen der Teilchen der Sorte α und \underline{B}^{stat} dem statischen Magnetfeld. Schließlich bezeichnet \underline{b} den Einheitsvektor in Richtung von \underline{B}^{stat} .

Die Lösung der Gl. (2.2) kann formal für beliebiges F_{α} als Integral entlang der ungestörten Teilchentrajektorien, den Charakteristiken der linearen Vlasov-Gleichung, angeschrieben werden,

$$\tilde{f}_{\alpha} = -\frac{e Z_{\alpha}}{m_{\alpha}} \int_{-\infty}^t dt' \left[\underline{E}' + \frac{1}{c} \underline{v} \wedge \underline{B}' \right] \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \underline{v}} F_{\alpha} \right)'. \quad (2.9)$$

Dabei repräsentieren \underline{E}' und \underline{B}' die Wellenfelder bzw. $\left(\frac{\partial}{\partial \underline{v}} F_{\alpha} \right)'$ den Geschwindigkeitsraumgradienten der ungestörten Verteilungsfunktion entlang der durch die Zeit t' parametrisierten ungestörten Trajektorien $(\underline{q}, \underline{v})$.

Die Berechnung konkreter Lösungen des Maxwell-Vlasov-Systems erfordert jedenfalls eine nähere Spezifikation der Gleichgewichtsverteilung F_{α} , sodaß die Lösung des Systems grundsätzlich in zwei Schritten erfolgen muß. Der erste, der aus der Berechnung einer Gleichgewichtsverteilung F_{α} durch Integration von Gl. (2.1) besteht, ist notwendig um den Geschwindigkeitsraumgradienten von F_{α} bestimmen zu können, der in die formale Lösung (2.9) eingeht. Im zweiten Schritt sind dann die Maxwell-Gleichungen (2.3) bis (2.6) zu lösen, die zusammen mit den Relationen (2.7) und (2.8) und der Charakteristikenlösung (2.9) ein geschlossenes Gleichungssystem für die gesuchten Wellenfelder \underline{E} und \underline{B} bilden.

Dieses System kann schließlich durch Elimination des Magnetfeldes \underline{B} noch vereinfacht werden. Dazu sind zunächst die Relationen (2.5) und (2.6) in bekannter Weise zur Wellengleichung zu kombinieren:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \wedge \left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \wedge \underline{E} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{E} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \underline{J}. \quad (2.10)$$

Da die Gleichungen (2.2) bis (2.6) mit (2.7) und (2.8) linear in den gestörten Größen sind, kann für diese eine harmonische Zeitabhängigkeit angesetzt werden,

$$\tilde{f}_{\alpha}, \rho, \underline{J}, \underline{E}, \underline{B} \propto e^{-i\omega t}, \quad (2.11)$$

mit $\omega \in \mathbb{C}$. Die Wellengleichung lautet dann:

$$\frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \wedge \left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \wedge \underline{E} \right) = \underline{E} + \frac{4\pi i}{\omega} \underline{J}. \quad (2.12)$$

Weiters kann mit Hilfe des Induktionsgesetzes (2.6) das Magnetfeld durch

$$\underline{B} = -i \frac{c}{\omega} \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \wedge \underline{E} \quad (2.13)$$

ausgedrückt werden, sodaß es in der Charakteristikenlösung (2.9) nicht mehr explizit auftritt. Wegen $\text{div}(\text{rot}(\cdot)) \equiv 0$ ist damit auch automatisch Gl. (2.4) erfüllt.

Falls die ungestörten Teilchentrajektorien (d.h. die Trajektorien der Einzelteilchen in der durch $\underline{B}^{stat}(\underline{x})$ definierten statischen Magnetfeldgeometrie) als bekannt vorausgesetzt werden, bildet Gl. (2.12) zusammen mit den Relationen (2.8), (2.9) und (2.13) ein geschlossenes Gleichungssystem, das als Unbekannte nur das elektrische Wellenfeld enthält.

Vice versa ist durch eine solche Lösung \underline{E} über Gl. (2.13) und (2.9) die zugehörige Störung \tilde{f}_α der Verteilungsfunktion und durch (2.8) die Stromdichte \underline{J} eindeutig bestimmt. Darüber hinaus liefert die Maxwell-Gleichung (2.3) die Störung ρ der Ladungsdichte, die jedoch unabhängig davon auch durch die Relation (2.7) determiniert ist. Hier erhebt sich die Frage, ob beide Gleichungen kompatibel sind. Das ist der Fall, da die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{J} = 0, \quad (2.14)$$

die die Erhaltung der elektrischen Ladung sicherstellt, sowohl aus den Maxwell-Gleichungen (2.3) und (2.5) als auch, unabhängig davon, aus der linearen Vlasov-Gleichung (2.2) unter Berücksichtigung der Definitionen (2.7) und (2.8) der Momente folgt; die Eindeutigkeit der Stromdichte \underline{J} zieht also die Eindeutigkeit von $\rho = -\frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{J}$ nach sich.

2.2 Die konstitutive Relation der Stromdichte

Entsprechend den Ausführungen im vorangehenden Abschnitt erfordert die Untersuchung von linearen Wellenphänomenen im heißen Plasma die Lösung der Wellengleichung (2.12) zusammen mit dem Ausdruck

$$\underline{J} = - \sum_{\alpha} \frac{e^2 Z_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 v \underline{v} \int_{-\infty}^t dt' \underline{E}' \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \underline{v}} F_{\alpha} \right)' \quad (2.15)$$

für die Stromdichteperturbation, der aus Gl. (2.8) und (2.9) unter Vernachlässigung des kleinen Terms $\frac{1}{c} \underline{v} \wedge \underline{B}'$, vgl. [Bra 91], gewonnen wurde. Die Stromdichte in der Form (2.15) beschreibt dabei kollektive Effekte¹ der Plasmateilchen.

In Ref. [Bra 91] wird mit Hilfe der Darstellung der Stromdichte und der Felder durch

¹Offensichtlich wird eine solche Beschreibung dann schlecht, wenn Einzelteilcheneffekte signifikant werden, d.h. wenn die Wellenlänge von derselben Größenordnung der Debye-Länge oder kleiner ist.

ihre Fourier-Transformierten und unter Ausnutzung einer Besselfunktionsentwicklung sowohl die Trajektorienintegration entlang der ungestörten Teilchenbahnen als auch die Integration über den Geschwindigkeitsraum in Gl. (2.15) analytisch ausgeführt. In der Folge wird für die Stromdichte eine konstitutive Relation der Form

$$\underline{J}(\underline{x}_\perp, z, t) = \int_{\mathbb{R}^2} d^2x' \underline{\sigma}(\underline{x}_\perp, \underline{x}'_\perp) \cdot \underline{E}(\underline{x}'_\perp, z, t) \quad (2.16)$$

hergeleitet, bzw. eine Integraldarstellung des Leitfähigkeitskernes $\underline{\sigma}(\underline{x}_\perp, \underline{x}'_\perp)$. Dabei gehen folgende Annahmen ein:

- Das statische Magnetfeld \underline{B}^{stat} sei geradlinig, d.h. parallel oder antiparallel zur z -Richtung \underline{e}^3 orientiert ($\underline{b} := \iota \underline{e}^3$, mit $\iota = \underline{b} \cdot \underline{e}^3 \in \{-1, +1\}$). Sein Betrag $|\underline{B}^{stat}|$ variere nur normal zu \underline{b} , also mit $\underline{x}_\perp := \underline{b} \wedge (\underline{x} \wedge \underline{b})$.
- Die Driftapproximation sei sowohl zur Lösung der Gleichung (2.1) als auch zur Bestimmung der Charakteristiken von Gl. (2.2) anwendbar. Insbesondere soll die Normalkomponente $\underline{Y}_\perp := \underline{b} \wedge (\underline{Y} \wedge \underline{b})$ der Führungszentrumsposition $\underline{Y} = \underline{x} + \frac{1}{\Omega_{C\alpha}} \underline{v} \wedge \underline{b}$ entlang der ungestörten Teilchentrajektorien bis auf Terme zweiter Ordnung der Driftapproximation eine Konstante der Bewegung² sein. Dadurch sind die ungestörten Orbits eindeutig bestimmt und analytisch darstellbar.
- Die ungestörte Verteilungsfunktion F_α sei eine nicht gedriftete Maxwell-Verteilung $F_{\alpha, M} = (\pi^{1/2} v_{th\alpha}^\alpha)^{-3} n_\alpha \exp(-(v/v_{th\alpha}^\alpha)^2)$, wo Teilchenzahldichte n_α und thermische Geschwindigkeit $v_{th\alpha}^\alpha$ nur von der Konstanten der Bewegung \underline{Y}_\perp abhängen. Eine solche Verteilung ist bis auf Terme in zweiter Ordnung der Driftapproximation eine spezielle Lösung von Gl. (2.1).

Die konstitutive Relation (2.16) ist im Fourier-Raum der Ortskoordinate z algebraisch, da das Plasma in Parallelrichtung als homogen vorausgesetzt wurde. Die Nichtlokalität in den Normalkoordinaten \underline{x}_\perp beruht auf thermischen Effekten; wegen der thermischen Streuung der Geschwindigkeiten jener Teilchen, die am Ort \underline{x} die Stromdichte \underline{J} erzeugen, konnten diese in der Vergangenheit alle möglichen Trajektorien durchlaufen und waren so der Einwirkung der dort herrschenden elektrischen Felder ausgesetzt³. Da die Teilchen diese Felder gewissermaßen im Gedächtnis behalten, wird die Stromdichte durch die Felder offenbar nichtlokal bestimmt.

²Diese Annahme ist gleichbedeutend damit, daß die " $\frac{\partial}{\partial \underline{x}} |\underline{B}^{stat}|$ -Drift" vernachlässigbar ist. Im Rahmen der linearen Vlasov-Theorie ist das der Fall, wenn die Plasmateilchen zwischen zwei Stößen, die jeweils zum Verlust der wohldefinierten Phasenbeziehung ihrer Bewegung und der Oszillation des Wellenfeldes führen, nur so kurze Wegstrecken zurücklegen können, daß der Einfluß dieser Drift auf die Gestalt ihrer Bahnen unerheblich bleibt. In der Abschältschicht eines Tokamaks kann wegen des langsamen Abfalls des statischen Magnetfelds, im wesentlichen mit dem Inversen des Abstandes zur Torusachse, \underline{Y}_\perp in guter Näherung als Konstante der Bewegung angesehen werden.

³Dieser Effekt wird als räumliche Dispersion bezeichnet.

2.3 Die konstitutive Relation im "slab"

Im folgenden sei (x, y, z) ein cartesisches Koordinatensystem und $(\underline{e}^1, \underline{e}^2, \underline{e}^3)$ die zugehörige Orthonormalbasis. Als Plasma-"slab" wird im gegenständlichen Zusammenhang eine Konfiguration bezeichnet, die einerseits durch ein geradliniges statisches Magnetfeld mit Richtungsvektor $\underline{b} = \iota \underline{e}^3$ (wo $\iota \in \{-1, +1\}$) charakterisiert ist, andererseits durch in x -Richtung orientierte Gradienten der Gleichgewichtsplasmamparameter n_α , v_{ih}^α und $\Omega_{C\alpha}$. Diese im Vergleich zu realen IBW-Heizexperimenten vereinfachte Geometrie (solche Experimente werden zumeist innerhalb toroidaler Magnetfeldkonfigurationen von Tokamaks durchgeführt) liegt allen folgenden Rechnungen zugrunde und ist zur Modellierung des Bereichs um die Mittelebene der Abschältschicht vor der Mündung eines Kopplers und insbesondere zur Beschreibung der vergleichsweise dünnen Modenkonversionsschicht ausreichend. Die x -Koordinate entspricht dann der radialen, y und z der poloidalen bzw. toroidalen Koordinate im Tokamak.

In diesem Abschnitt wird, um spätere Verweise zu ermöglichen, die für den beschriebenen Plasma-"slab" relevante konstitutive Relation und einige ihrer wichtigen Grenzfälle im Detail präsentiert. Diese konstitutive Relation stellt den Spezialfall der Relation (2.16), wie sie in Ref. [Bra 91] hergeleitet wird, dar in dem die Plasmamparameter nicht mit y variieren.

Im "slab" kann man für das elektrische Wellenfeld

$$\underline{E}(\underline{x}, t) = e^{-i\omega t} \sum_{k_y} e^{ik_y y} \sum_{k_{\parallel}} e^{ik_{\parallel} z} \underline{E}(x; k_y, k_{\parallel}) \quad (2.17)$$

ansetzen, bzw. für die Stromdichte analog

$$\underline{J}(\underline{x}, t) = e^{-i\omega t} \sum_{k_y} e^{ik_y y} \sum_{k_{\parallel}} e^{ik_{\parallel} z} \underline{J}(x; k_y, k_{\parallel}), \quad (2.18)$$

da die Homogenität in y - und z -Richtung eine entsprechende exponentielle Abhängigkeit erlaubt. Die Ansätze setzen diskrete k_y - und k_{\parallel} -Spektren voraus, die im Falle der externen Einkopplung dieser Wellen von der Geometrie des Kopplers bestimmt werden. Hier wird der Einfachheit halber angenommen, daß das System in y - und z -Richtung periodisch mit der Periodenlänge L_y bzw. L_z ist, wodurch man die Spektren $k_y = \frac{2\pi n}{L_y}$ bzw. $k_{\parallel} = \frac{2\pi n}{L_z}$ erhält, mit $n \in \mathbf{Z}$. Die konstitutive Relation kann als Relation zwischen den Amplituden dieser Ansätze geschrieben werden:

$$\underline{J}(x; k_y, k_{\parallel}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \underline{\sigma}(x, x'; k_y, k_{\parallel}) \cdot \underline{E}(x'; k_y, k_{\parallel}) \quad (2.19)$$

Dabei ist der Leitfähigkeitskern im Ortsraum $\underline{\sigma}(x, x'; k_y, k_{\parallel})$ durch die Fourier-Rücktransformation

$$\underline{\sigma}(x, x'; k_y, k_{\parallel}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x x} \int_{-\infty}^{\infty} dk'_x e^{-ik'_x x'} \underline{\tilde{\sigma}}(k_x, k'_x; k_y, k_{\parallel}) \quad (2.20)$$

des Kernes $\underline{\tilde{\sigma}}(k_x, k'_x; k_y, k_{||})$ im Fourier-Raum gegeben, der seinerseits in der Integraldarstellung

$$\underline{\tilde{\sigma}}(k_x, k'_x; k_y, k_{||}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx'' e^{i(k'_x - k_x)x''} \underline{\sigma}(k_{\perp}, k'_{\perp}; \psi, \psi'; k_{||}; x'') \quad (2.21)$$

vorliegt. Insgesamt umfaßt die konstitutive Relation (2.19) also eine 4-fach Integration, die aufgrund der komplizierten mathematischen Struktur ihrer Integranden im allgemeinen nicht analytisch ausführbar ist. Im folgenden wird $\underline{\sigma}(k_{\perp}, k'_{\perp}; \psi, \psi'; k_{||}; x'')$, wo $k_{\perp} := \text{sgn}(k_x)(k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$ und $k'_{\perp} := \text{sgn}(k'_x)(k_x'^2 + k_y^2)^{1/2}$, bzw. $\psi := \arctan(k_y/k_x)$ und $\psi' := \arctan(k_y/k'_x)$ gilt⁴, als σ -Tensor bezeichnet. Dieser besteht aus zwei Beiträgen,

$$\underline{\sigma}(k_{\perp}, k'_{\perp}; \psi, \psi'; k_{||}; x'') = \sum_{s=0}^1 \underline{\sigma}^{(s)}(k_{\perp}, k'_{\perp}; \psi, \psi'; k_{||}; x'') , \quad (2.22)$$

die hier Stix-Term ($s = 0$) bzw. diamagnetischer Term ($s = 1$) genannt werden. Diese Namensgebung resultiert aus dem in Abschnitt 5.2 diskutierten expliziten Ausdruck für die lokal von einer Welle dissipierte Leistung $P_{\text{abs}}^{\alpha}(\underline{x}) = \sum_{s=0}^1 P_{\text{abs}}^{(s)\alpha}(\underline{x})$, wo der "s = 0"-Term in Gl. (2.22) mit dem Beitrag $P_{\text{abs}}^{(0)\alpha}(\underline{x})$, bzw. der "s=1"-Term mit $P_{\text{abs}}^{(1)\alpha}(\underline{x})$ assoziiert ist. Der Stix-Term des Leitfähigkeitskernes beschreibt den mit einem makroskopischen Massetransport verbundenen konvektiven Anteil der durch die Wellenfelder erzeugten Stromdichte, während der diamagnetische Term, der proportional zu Dichte- und Temperaturgradienten ist, den durch entsprechende diamagnetische Driften erzeugten Anteil berücksichtigt. Mathematisch gesehen tritt dieser diamagnetische Beitrag auf, da Dichte und Temperatur der Gleichgewichtsverteilung anstelle von x von der Führungszentrumsvariablen Y_x abhängen. Entsprechende Terme $\underline{\tilde{\sigma}}^{(s)}(k_x, k'_x; k_y, k_{||})$ bzw. $\underline{\sigma}^{(s)}(x, x'; k_y, k_{||})$ lassen sich in der Folge auch im Leitfähigkeitskern des Fourier-Raums ebenso wie im Leitfähigkeitskern des Ortsraums identifizieren. Eine tiefergehendere Diskussion der Bedeutung von Stix-Beitrag und diamagnetischem Beitrag im Hinblick auf die lokal dissipierte Leistung findet man in Abschnitt 5.2.

Für den Stix-Term in Gl. (2.22) gilt nun

$$\underline{\sigma}^{(0)}(k_{\perp}, k'_{\perp}; \psi, \psi'; k_{||}; x'') = \sum_{\alpha} \frac{1}{8\pi^2} \frac{\omega_{P\alpha}^2(x'')}{|k_{||}|v_{th\alpha}^{\alpha}(x'')} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\psi' - \psi)} \underline{T}_{\alpha}^n(k_{\perp}, k'_{\perp}; \psi, \psi'; k_{||}; x'') , \quad (2.23)$$

wo $\omega_{P\alpha}(x) = (4\pi e^2 Z_{\alpha}^2 n_{\alpha}(x)/m_{\alpha})^{1/2}$ die Plasmafrequenz der Teilchensorte α bezeichnet und $\underline{T}_{\alpha}^n(k_{\perp}, k'_{\perp}; \psi, \psi'; k_{||}; x'')$ die Struktur

$$\underline{T}_{\alpha}^n(k_{\perp}, k'_{\perp}; \psi, \psi'; k_{||}; x'') = \underline{R}(\psi) \cdot \underline{\hat{T}}_{\alpha}^n(k_{\perp}, k'_{\perp}; k_{||}; x'') \cdot \underline{R}^{-1}(\psi') \quad (2.24)$$

aufweist, mit

$$\underline{R}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad (2.25)$$

⁴"arctan" bezeichne hier den Hauptzweig der Arcus-Tangens-Funktion, mit $\arctan(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$.

der Drehmatrix einer Drehung um die z -Achse um den Winkel ψ . Ihre Inverse $\underline{R}^{-1}(\psi)$ erhält man durch die Substitution $\psi \rightarrow -\psi$ in Gl. (2.25). Über den Tensor $\underline{\hat{T}}_\alpha^n(k_\perp, k'_\perp; k_\parallel; x'')$ in Gl. (2.24), der durch

$$\underline{\hat{T}}_\alpha^n(k_\perp, k'_\perp; k_\parallel; x'') := \quad (2.26)$$

$$\begin{bmatrix} -i \frac{n^2}{\mu\mu'} S^n(\mu, \mu') Z(x_n^\alpha) & \frac{n}{\mu} D^n(\mu, \mu') Z(x_n^\alpha) & \frac{i}{2} \text{sgn}(k_\parallel) \frac{n}{\mu} S^n(\mu, \mu') Z'(x_n^\alpha) \\ -\frac{n}{\mu'} D^n(\mu', \mu) Z(x_n^\alpha) & -iT^n(\mu, \mu') Z(x_n^\alpha) & \frac{i}{2} \text{sgn}(k_\parallel) D^n(\mu', \mu) Z'(x_n^\alpha) \\ \frac{i}{2} \text{sgn}(k_\parallel) \frac{n}{\mu'} S^n(\mu, \mu') Z'(x_n^\alpha) & -\frac{i}{2} \text{sgn}(k_\parallel) D^n(\mu, \mu') Z'(x_n^\alpha) & \frac{i}{2} x_n^\alpha S^n(\mu, \mu') Z'(x_n^\alpha) \end{bmatrix}$$

definiert ist, gehen einerseits die Funktionen

$$S^n(\mu, \mu') := 2I_n(\frac{1}{2}\mu\mu') e^{-\frac{1}{4}(\mu^2 + \mu'^2)}, \quad (2.27)$$

$$D^n(\mu, \mu') := \left(\mu I'_n(\frac{1}{2}\mu\mu') - \mu' I_n(\frac{1}{2}\mu\mu') \right) e^{-\frac{1}{4}(\mu^2 + \mu'^2)}, \quad (2.28)$$

bzw.

$$T^n(\mu, \mu') := \left[\left(\frac{2n^2}{\mu\mu'} + \mu\mu' \right) I_n(\frac{1}{2}\mu\mu') - \frac{\mu^2 + \mu'^2}{2} I'_n(\frac{1}{2}\mu\mu') \right] e^{-\frac{1}{4}(\mu^2 + \mu'^2)}, \quad (2.29)$$

und damit modifizierte Besselfunktionen der ersten Art in den Leitfähigkeitskern ein, andererseits die Plasmadispersionsfunktion⁵ $Z(x_n^\alpha)$ und ihre Ableitung $Z'(x_n^\alpha)$. Dabei wird für die Argumente die Kurznotation

$$x_n^\alpha := \frac{\omega - n\Omega_{C\alpha}(x'')}{|k_\parallel|v_{th}^\alpha(x'')} \quad (2.30)$$

benutzt, aus deren Gestalt ersichtlich wird, daß $x_n^\alpha = O(1)$ gerade die Bedingung für das Auftreten einer Zyklotronresonanz an der n -ten Harmonischen darstellt ($n = 0$ bedeutet Landau-Dämpfung); die Summation über n in Gl. (2.23) entspricht dann einer Summation über alle Harmonischen der Zyklotronfrequenzen. Schließlich bezeichnen

$$\mu := k_\perp \varrho_\alpha^{Gyro}(x'') \quad \text{und} \quad \mu' := k'_\perp \varrho_\alpha^{Gyro}(x'') \quad (2.31)$$

dimensionslose Wellenzahlen in Normalrichtung, mit $\varrho_\alpha^{Gyro} = \omega v_{th}^\alpha / \Omega_{C\alpha}$, dem thermischen Gyroradius der Spezies α .

Für den diamagnetischen Beitrag in Gl. (2.22) gilt nun

$$\underline{\sigma}^{(1)}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; x'') = \sum_\alpha \frac{1}{8\pi^2} \frac{\omega_{P\alpha}^2(x'')}{|k_\parallel|v_{th}^\alpha(x'')} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\psi' - \psi)} \underline{U}_\alpha^n(k_\perp, k'_\perp; \psi; k_\parallel; x'') \quad , \quad (2.32)$$

mit

$$\underline{U}_\alpha^n(k_\perp, k'_\perp; \psi; k_\parallel; x'') = \underline{R}(\psi) \cdot \underline{\hat{U}}_\alpha^n(k_\perp, k'_\perp; k_\parallel; x'') \quad . \quad (2.33)$$

⁵ $Z(\zeta) := \pi^{-1/2} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} du [\exp(-u^2)/(u-\zeta)] + i\sigma\pi^{1/2} \exp(-\zeta^2)$, wo "P f" das Cauchy-Hauptwertintegral bezeichnet und $\sigma = 0$ für $\text{Im}(\zeta) > 0$, $\sigma = 1$ für $\text{Im}(\zeta) = 0$, bzw. $\sigma = 2$ für $\text{Im}(\zeta) < 0$ gilt.

In obenstehender Gleichung ist der Tensor $\underline{\hat{U}}_\alpha^n(k_\perp, k'_\perp; k_\parallel; x'')$ durch

$$\underline{\hat{U}}_\alpha^n(k_\perp, k'_\perp; k_\parallel; x'') = \frac{\rho_\alpha^{Gyro}(x'')}{L^{(n_\alpha)}(x'')} \underline{V}(k_\perp, k'_\perp; k_\parallel; x'') \otimes \underline{e}^2 + \frac{\rho_\alpha^{Gyro}(x'')}{L^{(v_{ih}^\alpha)}(x'')} \underline{W}(k_\perp, k'_\perp; k_\parallel; x'') \otimes \underline{e}^2 \quad (2.34)$$

definiert, mit

$$\underline{V}(k_\perp, k'_\perp; k_\parallel; x'') = \frac{i n}{2\mu} S^n(\mu, \mu') Z(x_n^\alpha) \underline{e}^1 + \frac{1}{2} D^n(\mu', \mu) Z(x_n^\alpha) \underline{e}^2 - \frac{i}{4} \text{sgn}(k_\parallel) S^n(\mu, \mu') Z'(x_n^\alpha) \underline{e}^3, \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \underline{W}(k_\perp, k'_\perp; k_\parallel; x'') = & \quad (2.36) \\ & \left[\frac{i n}{4\mu} S^n(\mu, \mu') Z''(x_n^\alpha) + \frac{i n}{2\mu} (\mu D^n(\mu', \mu) + \mu' D^n(\mu, \mu')) Z(x_n^\alpha) \right] \underline{e}^1 + \left[\frac{1}{4} D^n(\mu', \mu) Z''(x_n^\alpha) - \right. \\ & \left. \frac{\mu}{2} \left(\frac{\mu}{2} D^n(\mu', \mu) + \frac{\mu'}{2} D^n(\mu, \mu') + \left(1 - \frac{n^2}{\mu^2}\right) S^n(\mu, \mu') - \frac{\mu'}{\mu} T^n(\mu, \mu') \right) Z(x_n^\alpha) \right] \underline{e}^2 + \\ & \left[\frac{i}{4} \text{sgn}(k_\parallel) S^n(\mu, \mu') x_n^\alpha Z''(x_n^\alpha) - \frac{i}{4} \text{sgn}(k_\parallel) (\mu D^n(\mu', \mu) + \mu' D^n(\mu, \mu')) Z'(x_n^\alpha) \right] \underline{e}^3 \end{aligned}$$

und den Gradientenlängen

$$L^{(n_\alpha)}(x) := \left(\frac{1}{n_\alpha(x)} \frac{dn_\alpha(x)}{dx} \right)^{-1} \quad (2.37)$$

bzw.

$$L^{(v_{ih}^\alpha)}(x) := \left(\frac{1}{v_{ih}^\alpha(x)} \frac{dv_{ih}^\alpha(x)}{dx} \right)^{-1}. \quad (2.38)$$

Wie aus Gl. (2.36) ersichtlich wird, geht nun zusätzlich zu $Z(x_n^\alpha)$ und $Z'(x_n^\alpha)$ auch die zweite Ableitung der Plasmadispersionsfunktion $Z''(x_n^\alpha)$ in die konstitutive Relation ein. Vergleicht man die Gleichungen (2.24) und (2.33) so fällt auf, daß im diamagnetischen Beitrag zum σ -Tensor (2.22) die Rotationssymmetrie um die \underline{b} -Achse verletzt ist, d.h. $\underline{U}_\alpha^n(k_\perp, k'_\perp; \psi; k_\parallel; x'')$ hängt nicht von ψ' ab. Dies ist auf die Existenz einer weiteren Vorzugsrichtung im diamagnetischen Term, definiert durch die Gradienten der Plasma-parameter, zurückzuführen.

Anhand der oben angegebenen Relationen ist leicht einzusehen, daß die x'' -Variation sowohl im Stix-Beitrag als auch im diamagnetischen Beitrag zu $\underline{\sigma}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; x'')$ ausschließlich durch die räumliche Variation der Plasmaparameter verursacht wird. Im homogenen Plasma reduziert sich der σ -Tensor dementsprechend auf $\underline{\sigma}^{(0)}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; -)^6$. Für den Leitfähigkeitskern im Fourier-Raum folgt also mit einer bekannten Integrardarstellung der δ -Distribution

$$\underline{\tilde{\sigma}}(k_x, k'_x; k_y, k_\parallel) = 2\pi \delta(k_x - k'_x) \underline{\sigma}^{(0)}(k_\perp, k_\perp; \psi, \psi; k_\parallel; -), \quad (2.39)$$

⁶Diese Schreibweise soll die Unabhängigkeit von der Ortsvariablen x'' andeuten.

bzw. für den Leitfähigkeitskern im Ortsraum

$$\underline{\underline{\sigma}}(x, x'; k_y, k_{||}) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{i(x-x')k_x} \underline{\underline{\sigma}}^{(0)}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{||}; -) . \quad (2.40)$$

Der Integralkern $\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}(k_x, k'_x; k_y, k_{||})$ tritt neben Gl. (2.20) auch in der konstitutiven Relation im Fourier-Raum

$$\tilde{\underline{\underline{J}}}(k_x, k_y, k_{||}) = \int_{-\infty}^{\infty} dk'_x \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}(k_x, k'_x; k_y, k_{||}) \cdot \tilde{\underline{\underline{E}}}(k'_x, k_y, k_{||}) \quad (2.41)$$

auf, die im inhomogenen Plasma die Fourier-Transformierte des elektrischen Wellenfeldes

$$\tilde{\underline{\underline{E}}}(k_x, k_y, k_{||}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ik_x x} \underline{\underline{E}}(x; k_y, k_{||}) \quad (2.42)$$

mit der Fourier-Transformierten der Stromdichte-Perturbation

$$\tilde{\underline{\underline{J}}}(k_x, k_y, k_{||}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ik_x x} \underline{\underline{J}}(x; k_y, k_{||}) \quad (2.43)$$

nichtlokal verknüpft. Im homogenen Plasma ist nun wegen Gl. (2.39) die konstitutive Relation des Fourier-Raums algebraisch, d.h. es gilt:

$$\tilde{\underline{\underline{J}}}(k_x, k_y, k_{||}) = \underline{\underline{\sigma}}^{\text{hom}}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{||}; -) \cdot \tilde{\underline{\underline{E}}}(k_x, k_y, k_{||}) , \quad (2.44)$$

mit $\underline{\underline{\sigma}}^{\text{hom}}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{||}; -) := 2\pi \underline{\underline{\sigma}}^{(0)}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{||}; -)$. Der aus der Theorie der RF-Wellen im homogenen Plasma wohlbekannte Dielektrizitätstensor $\underline{\underline{\epsilon}}(k_x, k_y, k_{||})$ ist dann durch

$$\underline{\underline{\epsilon}}(k_x, k_y, k_{||}) := \underline{\underline{1}} + \frac{4\pi i}{\omega} \underline{\underline{\sigma}}^{\text{hom}}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{||}; -) \quad (2.45)$$

gegeben, wo $\underline{\underline{1}}$ den Einheitstensor bezeichnet.

Ein anderer wichtiger Grenzfall ist der "zero gyroradius"-Limes, $\mu = k_{\perp} \rho_{\alpha}^{\text{Gyro}} \rightarrow 0$, der realisiert ist, falls die Wellenlängen der involvierten Moden in Normalrichtung sehr viel größer als die thermischen Gyroradien sind. Mit der Definition (der Limes hängt nicht von k_{\perp} und ψ , bzw. k'_{\perp} und ψ' ab)

$$\lim_{\mu, \mu' \rightarrow 0} \underline{\underline{\sigma}}^{(s)}(k_{\perp}, k'_{\perp}; \psi, \psi'; k_{||}; x'') =: \underline{\underline{\sigma}}^{\text{zgr}(s)}(k_{||}; x'') \quad (2.46)$$

für $s \in \{0, 1\}$ gilt

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{zgr}(0)}(k_{||}; x) = \sum_{\alpha} \frac{\omega_{P\alpha}^2(x)}{8\pi^2 |k_{||}| v_{th\alpha}^{\alpha}(x)} \times \quad (2.47)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{i}{2}[Z(x_1^{\alpha}(x)) + Z(x_{-1}^{\alpha}(x))] & \frac{1}{2}[Z(x_1^{\alpha}(x)) - Z(x_{-1}^{\alpha}(x))] & 0 \\ -\frac{i}{2}[Z(x_1^{\alpha}(x)) - Z(x_{-1}^{\alpha}(x))] & -\frac{i}{2}[Z(x_1^{\alpha}(x)) + Z(x_{-1}^{\alpha}(x))] & 0 \\ 0 & 0 & ix_0^{\alpha}(x)Z'(x_0^{\alpha}(x)) \end{bmatrix} ,$$

bzw.

$$\underline{\underline{\sigma}}^{zgr(1)}(k_{\parallel}; x) = \sum_{\alpha} \frac{\omega_{P\alpha}^2(x)}{16\pi^2 k_{\parallel} v_{th\alpha}^{\alpha}(x)} \times \quad (2.48)$$

$$i \left(\frac{\rho_{\alpha}^{Gyro}(x)}{L(v_{th\alpha}^{\alpha}(x))} x_0^{\alpha}(x) Z''(x_0^{\alpha}(x)) - \frac{\rho_{\alpha}^{Gyro}(x)}{L(n_{\alpha}(x))} Z'(x_0^{\alpha}(x)) \right) \underline{e}^3 \otimes \underline{e}^2,$$

wobei die x_n^{α} nun an der Stelle x auszuwerten sind, vgl. (2.30). Im betrachteten Grenzfall vereinfacht sich die konstitutive Relation entsprechend den Gleichungen (2.20), (2.21) und (2.22) wesentlich; sie wird im Ortsraum lokal,

$$\underline{\underline{\sigma}}(x, x'; k_y, k_{\parallel}) = \delta(x - x') \underline{\underline{\sigma}}^{zgr}(k_{\parallel}; x), \quad (2.49)$$

wobei $\underline{\underline{\sigma}}^{zgr}(k_{\parallel}; x) = \underline{\underline{\sigma}}^{zgr(0)}(k_{\parallel}; x) + \underline{\underline{\sigma}}^{zgr(1)}(k_{\parallel}; x)$ benutzt wurde.

Oben beschriebene, dem Grenzübergang $\mu \rightarrow 0$ zugrunde liegende Annahme vernachlässigbarer Gyroradien und darüber hinaus die Annahme $|\omega/k_{\parallel}| \gg v_{th\alpha}^{\alpha}$ charakterisieren den Limes des kalten Plasmas (formal $x_n^{\alpha} \rightarrow \infty$), wo also in Parallelrichtung die Phasengeschwindigkeiten der betrachteten Moden sehr viel größer als die thermischen Geschwindigkeiten sein sollen. Den Grenzfall des kalten Plasmas, $\underline{\underline{\sigma}}^{(s)}(k_{\perp}, k'_{\perp}; \psi, \psi'; k_{\parallel}; x'') \rightarrow \underline{\underline{\sigma}}^{cold(s)}(x'')$, erhält man durch eine kurze Rechnung aus Gl. (2.47) und (2.48), mit dem Ergebnis:

$$\underline{\underline{\sigma}}^{cold(0)}(x) = \quad (2.50)$$

$$\frac{1}{8\pi^2} \sum_{\alpha} \left(\frac{\omega_{P\alpha}(x)}{\omega} \right)^2 \begin{bmatrix} i\omega \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega_{C\alpha}^2(x)} & -i\Omega_{C\alpha}(x) \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega_{C\alpha}^2(x)} & 0 \\ i\Omega_{C\alpha}(x) \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega_{C\alpha}^2(x)} & i\omega \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega_{C\alpha}^2(x)} & 0 \\ 0 & 0 & i\omega \end{bmatrix},$$

bzw.

$$\underline{\underline{\sigma}}^{cold(1)}(x) = 0. \quad (2.51)$$

Der Leitfähigkeitskern des kalten Plasmas im Ortsraum,

$$\underline{\underline{\sigma}}(x, x'; k_y, k_{\parallel}) = \delta(x - x') \underline{\underline{\sigma}}^{cold(0)}(x), \quad (2.52)$$

führt also wieder zu einer lokalen konstitutiven Relation.

2.4 Logarithmisch divergente Terme in $\underline{\underline{\sigma}}(x, x'; k_y, k_{\parallel})$

Die Lösung der mit Hilfe der konstitutiven Relation (2.19) einer "slab"-Geometrie zu schließenden Wellengleichung erfordert im Vorfeld die Untersuchung der mathematischen Eigenschaften des Leitfähigkeitskernes (2.20). Dabei wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit festgestellt, daß $\underline{\underline{\sigma}}(x, x'; k_y, k_{\parallel})$ im allgemeinen (und damit insbesondere im Grenzfall des homogenen Plasmas) für $|x - x'| \rightarrow 0$ logarithmisch divergente Terme enthält. Dies ist insofern physikalisch akzeptabel, da diese Divergenzen integrierbar sind

und in der Folge die Stromdichte gemäß (2.19) endlich bleibt.

Am einfachsten ist das divergente Verhalten des Integralkerns $\underline{\sigma}(x, x'; k_y, k_{\parallel})$ im Grenzfall des homogenen Plasmas zu erkennen. Dann folgt nämlich mit Gl. (2.23) und Gl. (2.40)

$$\underline{\sigma}(x, x'; k_y, k_{\parallel}) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{i(x-x')k_x} \left[\sum_{\alpha} \frac{1}{8\pi^2} \frac{\omega_{P\alpha}^2}{|k_{\parallel}|v_{th\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{T}_{\alpha}^n(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; -) \right]. \quad (2.53)$$

Es genügt den Spezialfall $k_y = 0$ zu betrachten. Entsprechend den in Abschnitt 2.3 festgelegten Konventionen ist dann k_{\perp} gleich k_x , und \underline{R} bzw. \underline{R}^{-1} gleich der Einheitsmatrix $\underline{1}$, sodaß sich mit Gl. (2.53) und (2.24)

$$\underline{\sigma}(x, x'; k_y, k_{\parallel}) = \sum_{\alpha} \frac{1}{8\pi^2} \frac{\omega_{P\alpha}^2}{|k_{\parallel}|v_{th\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{i(x-x')k_x} \hat{T}_{\alpha}^n(k_x, k_x; k_{\parallel}; -) \quad (2.54)$$

ergibt.

Mit den Definitionen

$$J_{(0)}^n[x] := \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma e^{ix\gamma} e^{-\gamma^2} I_n(\gamma^2), \quad (2.55)$$

$$J_{(1)}^n[x] := \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma e^{ix\gamma} \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma^2} I_n(\gamma^2),$$

$$J_{(2)}^n[x] := \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma e^{ix\gamma} \frac{1}{\gamma^2} e^{-\gamma^2} I_n(\gamma^2),$$

$$J_{M(0)}^n[x] := \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma e^{ix\gamma} e^{-\gamma^2} (I_n'(\gamma^2) - I_n(\gamma^2)),$$

$$J_{M(1)}^n[x] := \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma e^{ix\gamma} \gamma e^{-\gamma^2} (I_n'(\gamma^2) - I_n(\gamma^2))$$

und

$$J_{M(2)}^n[x] := \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma e^{ix\gamma} \gamma^2 e^{-\gamma^2} (I_n'(\gamma^2) - I_n(\gamma^2))$$

kann man für das k_x -Integral in Gl. (2.54) gemäß den Relationen (2.26) bis (2.29)

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{i(x-x')k_x} \hat{T}_{\alpha}^n(k_x, k_x; k_{||}; -) = \quad (2.56) \\
& (\rho_{\alpha}^{Gyro})^{-1} \left\{ \underline{e}^1 \otimes \underline{e}^1 \left[-in^2 \sqrt{2} Z(x_n^{\alpha}) J_{(2)}^n[\sqrt{2}(x-x')/\rho_{\alpha}^{Gyro}] \right] + \right. \\
& \quad \underline{e}^1 \otimes \underline{e}^2 \left[n \sqrt{2} Z(x_n^{\alpha}) J_{M(0)}^n[\sqrt{2}(x-x')/\rho_{\alpha}^{Gyro}] \right] + \\
& \quad \underline{e}^1 \otimes \underline{e}^3 \left[in Z'(x_n^{\alpha}) J_{(1)}^n[\sqrt{2}(x-x')/\rho_{\alpha}^{Gyro}] \right] + \\
& \quad \underline{e}^2 \otimes \underline{e}^1 \left[-n \sqrt{2} Z(x_n^{\alpha}) J_{M(0)}^n[\sqrt{2}(x-x')/\rho_{\alpha}^{Gyro}] \right] + \\
& \quad \underline{e}^2 \otimes \underline{e}^2 \left[\sqrt{2} Z(x_n^{\alpha}) \left(2i J_{M(2)}^n[\sqrt{2}(x-x')/\rho_{\alpha}^{Gyro}] - in^2 J_{(2)}^n[\sqrt{2}(x-x')/\rho_{\alpha}^{Gyro}] \right) \right] + \\
& \quad \underline{e}^2 \otimes \underline{e}^3 \left[Z'(x_n^{\alpha}) J_{M(1)}^n[\sqrt{2}(x-x')/\rho_{\alpha}^{Gyro}] \right] + \\
& \quad \underline{e}^3 \otimes \underline{e}^1 \left[in Z'(x_n^{\alpha}) J_{(1)}^n[\sqrt{2}(x-x')/\rho_{\alpha}^{Gyro}] \right] + \\
& \quad \underline{e}^3 \otimes \underline{e}^2 \left[-Z'(x_n^{\alpha}) J_{M(1)}^n[\sqrt{2}(x-x')/\rho_{\alpha}^{Gyro}] \right] + \\
& \quad \left. \underline{e}^3 \otimes \underline{e}^3 \left[i \sqrt{2} x_n^{\alpha} Z'(x_n^{\alpha}) J_{(0)}^n[\sqrt{2}(x-x')/\rho_{\alpha}^{Gyro}] \right] \right\}
\end{aligned}$$

schreiben.

Von besonderem Interesse sind in diesem Ausdruck die beiden Integrale $J_{(0)}^0[\sqrt{2}(x-x')/\rho_{\alpha}^{Gyro}]$ und $J_{M(2)}^0[\sqrt{2}(x-x')/\rho_{\alpha}^{Gyro}]$, da sie analytisch berechnet werden können. Stellt man $J_{(0)}^n[x]$ als Cosinus-Fourier-Transformation dar, dann findet man unter Ausnutzung der Integraldarstellung der modifizierten Bessel-Funktionen erster Art,

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\theta e^{x \cos(\theta)} \cos(n\theta), \quad (2.57)$$

und nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge von θ - und γ -Integration folgenden Ausdruck

$$J_{(0)}^n[x] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} d\theta \cos(n\theta) \int_0^{\infty} d\gamma \cos(x\gamma) e^{-(1-\cos(\theta))\gamma^2}. \quad (2.58)$$

Die γ -Integration kann gemäß

$$\int_0^{\infty} d\gamma \cos(x\gamma) e^{-\beta\gamma^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \beta^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4\beta}} \quad (2.59)$$

analytisch ausgeführt werden; es verbleibt:

$$J_{(0)}^n[x] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} d\theta \left(\cos(n\theta) \frac{e^{-\frac{x^2}{4(1-\cos(\theta))}}}{\sqrt{1-\cos(\theta)}} \right). \quad (2.60)$$

Für $n=0$ führt die Substitution $t = \frac{3+\cos(\theta)}{1-\cos(\theta)}$ auf eine bekannte Integraldarstellung der modifizierten Bessel-Funktion der zweiten Art K_0 , nämlich

$$J_{(0)}^0[x] = \frac{e^{-\frac{x^2}{16}}}{\sqrt{2\pi}} \int_1^{\infty} dt \frac{e^{-\frac{x^2}{16}t}}{\sqrt{(t^2-1)}} = \frac{e^{-\frac{x^2}{16}}}{\sqrt{2\pi}} K_0\left(\frac{x^2}{16}\right). \quad (2.61)$$

Für $n \neq 0$ ergeben sich mit dieser Substitution Integrale, die offenbar nicht mehr auf Integraldarstellungen der Funktionen K_n zurückgeführt werden können. Auch in gebräuchlichen Integraltafeln ist dieser allgemeine Fall nicht enthalten.

Ausgehend von (2.61), den Definitionen (2.56) und der mathematischen Identität

$$\frac{d}{d\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma e^{ix\gamma} e^{-\epsilon\gamma^2} I_n(\epsilon\gamma^2) = \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma e^{ix\gamma} \gamma^2 e^{-\epsilon\gamma^2} (I'_n(\epsilon\gamma^2) - I_n(\epsilon\gamma^2)) \quad (2.62)$$

ist noch die Auswertung von $J_{M(2)}^0[x]$ möglich, mit dem Ergebnis

$$J_{M(2)}^0[x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{16}} \left[\left(\frac{x^2}{16} - \frac{1}{2} \right) K_0\left(\frac{x^2}{16}\right) - \frac{x^2}{16} K'_0\left(\frac{x^2}{16}\right) \right]. \quad (2.63)$$

Wegen des asymptotischen Verhaltens $K_0(x) \underset{x \rightarrow 0}{\approx} -\ln(x) + \dots$ der modifizierten Besselfunktion K_0 gilt für die Integrale (2.61) und (2.63)

$$J_{(0)}^0[x] \underset{x \rightarrow 0}{\approx} -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \ln(x) + \dots \quad (2.64)$$

bzw.

$$J_{M(2)}^0[x] \underset{x \rightarrow 0}{\approx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ln(x) + \dots, \quad (2.65)$$

sodaß für den betrachteten Spezialfall gemäß (2.54) und (2.56) logarithmisch divergente Terme im "n = 0"-Summanden der (y, y)- und (z, z)-Komponente des Leitfähigkeitskernes $\underline{\sigma}(x, x'; k_y, k_{||})$ identifiziert werden können.

Um das Verhalten der restlichen Terme zu verstehen, ist es erforderlich die Ursache dieser Divergenzen zu untersuchen. Mit der asymptotischen Entwicklung

$$I_n(\gamma^2) \underset{\gamma^2 \rightarrow \infty}{\approx} \frac{e^{\gamma^2}}{\sqrt{2\pi|\gamma|}} + \dots \quad (2.66)$$

folgt für den nicht oszillierenden Teil des Integranden von $J_{(0)}^0[x]$ offenbar

$$e^{-\gamma^2} I_0(\gamma^2) \underset{\gamma^2 \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{\sqrt{2\pi|\gamma|}} + \dots, \quad (2.67)$$

bzw. für den entsprechenden Term aus $J_{M(2)}^0[x]$

$$\gamma^2 e^{-\gamma^2} (I'_0(\gamma^2) - I_0(\gamma^2)) \underset{\gamma^2 \rightarrow \infty}{\approx} -\frac{1}{2\sqrt{2}|\gamma|} + \dots \quad (2.68)$$

Die Divergenzen von $J_{(0)}^0[0]$ und $J_{M(2)}^0[0]$ entstehen also durch einen zu langsamen Abfall der Integranden mit wachsendem γ , d.h., da γ eine dimensionslose Wellenzahl in x-Richtung ist, durch die entsprechenden Beiträge großer Wellenzahlen. Aufgrund der

Unabhängigkeit des führenden Terms der asymptotischen Entwicklung (2.66) vom Index n , sind definitionsgemäß auch die Integrale $J_{(0)}^n[x]$ und $J_{M(2)}^n[x] \forall n \in \mathbf{N}$ mit $x \rightarrow 0$ logarithmisch divergent. Vice versa zeigt diese Argumentation, daß die Integrale $J_{(1)}^n[x], J_{(2)}^n[x], J_{M(0)}^n[x]$ und $J_{M(1)}^n[x]$ für alle x konvergieren. Im untersuchten Fall enthalten also nur die (y, y) - bzw. (z, z) -Komponenten des Kernes (2.54) besagte divergente Terme. Alle übrigen Komponenten sind $\forall x, x'$ wohldefiniert; im allgemeinen Fall (d.h. $k_y \neq 0$) sind dies für das homogene Plasma gemäß Gl. (2.24), (2.25) und (2.26) nur die (x, z) -, (y, z) -, (z, x) - und (z, y) -Komponenten von $\underline{\underline{\sigma}}(x, x'; k_y, k_{\parallel})$.

Kapitel 3

Lokale Analyse der Wellengleichung

3.1 Eikonalapproximation und Leistungsbilanz

Im folgenden wird eine asymptotische WKB-Analyse¹ der Wellengleichung (2.12) formuliert, die im schwach dispersiven "slab"-Plasma mit der konstitutiven Relation (2.19) kompatibel ist. Die WKB-Approximation, die einen eindimensionalen Spezialfall der Eikonalnäherung darstellt, beruht im wesentlichen auf der Annahme, daß der von der x -Koordinate abhängige Anteil des elektrischen Wellenfeldes aus Ansatz (2.17) die Gestalt

$$\underline{E}(x; k_y, k_{\parallel}) \approx \sum_{\lambda} e^{iS_{\lambda}(x; k_y, k_{\parallel})} \underline{E}^{\lambda}(x; k_y, k_{\parallel}) \quad (3.1)$$

besitzt, bzw. der entsprechende Anteil des Stromdichteansatzes (2.18) die analoge Form

$$\underline{J}(x; k_y, k_{\parallel}) \approx \sum_{\lambda} e^{iS_{\lambda}(x; k_y, k_{\parallel})} \underline{J}^{\lambda}(x; k_y, k_{\parallel}), \quad (3.2)$$

wo die Größe $S_{\lambda}(x; k_y, k_{\parallel})$ als Eikonalfunktion bezeichnet wird und die Summation über λ die mögliche simultane Existenz mehrerer unabhängiger Eikonalmoden andeutet. In obigen Ansätzen sollen die diversen Größen auf zwei verschiedenen Längenskalen $L_{fast} \ll L_{slow}$ variieren, die der Skalierung

$$\frac{L_{fast}}{L_{slow}} = O(\kappa) \quad (3.3)$$

genügen, mit dem dimensionslosen Skalenparameter κ , der in der folgenden asymptotischen Analyse² formal als unabhängige Variable aufzufassen ist.

Wenn die Gradientenlänge $L[A(x)]$ einer beliebigen skalaren Größe $A(x)$ durch

$$L[A(x)] := \left| A^{-1}(x) \frac{d}{dx} A(x) \right|^{-1} \quad (3.4)$$

definiert wird, dann können die Annahmen über Längenskalen im Rahmen der WKB-Approximation etwas präziser gefaßt werden,

$$L_{fast} \approx L[e^{iS_{\lambda}(x; k_y, k_{\parallel})}] \ll L[K_{\lambda}(x; k_y, k_{\parallel})] \approx L[|\underline{E}^{\lambda}(x; k_y, k_{\parallel})|] \approx L_{slow}, \quad (3.5)$$

¹WKB steht für Wentzel, Kramers und Brillouin, vgl. [Cai 91].

²Der asymptotische Grenzfall $\kappa \rightarrow 0$ ist im Falle der WKB-Approximation durch eine ebene Welle im homogenen Plasma realisiert.

wo die lokale Wellenzahl in x -Richtung als Ortsableitung der Eikonalfunktion definiert ist,

$$K_\lambda(x; k_y, k_\parallel) := \frac{\partial}{\partial x} S_\lambda(x; k_y, k_\parallel) . \quad (3.6)$$

Die Ordnungsrelation (3.5) bedeutet konkret, daß L_{fast} mit der schnellen Ortsvariation der Exponentialfaktoren in den Ansätzen (3.1) und (3.2) assoziiert ist, also gemäß Definition (3.4) mit den lokalen Wellenlängen der betrachteten Moden in x -Richtung (bis auf einen unwesentlichen Faktor 2π). Die langsame Längenskala L_{slow} charakterisiert die x -Variation der lokalen Wellenzahl bzw. der Amplitude des elektrischen Wellenfeldes.

Die Ungleichung (3.5) läßt sich mit dem geforderten asymptotischen Verhalten (3.3) der Längenskalen durch die Skalierungen

$$S_\lambda(x; k_y, k_\parallel) \rightarrow \frac{1}{\kappa} S_\lambda(x_s; k_y, k_\parallel) , \quad (3.7)$$

$$\underline{E}^\lambda(x; k_y, k_\parallel) \rightarrow \underline{E}^\lambda(x_s; k_y, k_\parallel) , \quad (3.8)$$

$$\underline{J}^\lambda(x; k_y, k_\parallel) \rightarrow \underline{J}^\lambda(x_s; k_y, k_\parallel) \quad (3.9)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \kappa \frac{\partial}{\partial x_s} \quad (3.10)$$

in Einklang bringen, da damit gemäß Gl. (3.4) $L_{fast} = O(\kappa^0)$ und $L_{slow} = O(\kappa^{-1})$ folgt. Dabei ist die Variable x_s formal als eine von x unabhängige Koordinate zu betrachten, die auf der langsamen Skala L_{slow} die Variation in \underline{e}^1 -Richtung der diversen Größen beschreibt.

Mit den Relationen (2.17) und (3.1) und den Substitutionen (3.7), (3.8) bzw. (3.10) erhält man für den $\text{rot}(\text{rot}(\cdot))$ -Anteil der Wellengleichung (2.12) bis auf Terme $O(\kappa^2)$ den Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \wedge \left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \wedge \underline{E}(\underline{x}, t) \right) \rightarrow e^{-i\omega t} \sum_{k_y} e^{ik_y y} \sum_{k_\parallel} e^{ik_\parallel z} \sum_{\lambda} e^{\frac{i}{\kappa} S_\lambda(x_s; k_y, k_\parallel)} \times \quad (3.11)$$

$$\left\{ -\underline{K}^\lambda(x_s; k_y, k_\parallel) \wedge [\underline{K}^\lambda(x_s; k_y, k_\parallel) \wedge \underline{E}^\lambda(x_s; k_y, k_\parallel)] + i\kappa \left(\underline{K}^\lambda(x_s; k_y, k_\parallel) \wedge [\underline{e}^1 \frac{\partial}{\partial x_s} \wedge \underline{E}^\lambda(x_s; k_y, k_\parallel)] + \underline{e}^1 \frac{\partial}{\partial x_s} \wedge [\underline{K}^\lambda(x_s; k_y, k_\parallel) \wedge \underline{E}^\lambda(x_s; k_y, k_\parallel)] \right) \right\} ,$$

wo die Definitionen

$$\underline{K}^\lambda(x_s; k_y, k_\parallel) := K_\lambda(x_s; k_y, k_\parallel) \underline{e}^1 + k_y \underline{e}^2 + \iota k_\parallel \underline{e}^3 \quad (3.12)$$

und $K_\lambda(x_s; k_y, k_\parallel) := \frac{\partial}{\partial x_s} S_\lambda(x_s; k_y, k_\parallel)$ benutzt wurden. Damit, mit der mathematischen Identität

$$\underline{A} \wedge [\underline{A} \wedge \underline{B}] = [\underline{A} \otimes \underline{A} - (\underline{A} \cdot \underline{A}) \underline{1}] \cdot \underline{B} , \quad (3.13)$$

den Relationen (2.17), (2.18), (3.1) und (3.2), und den Skalierungen (3.7) bis (3.9), kann man unter Berücksichtigung der linearen Unabhängigkeit der verschiedenen Eikonalmoden die Wellengleichung (2.12) in die Form

$$\left(\left(\frac{c^2}{\omega^2} \underline{K}^\lambda(x_s; k_y, k_{||}) \cdot \underline{K}^\lambda(x_s; k_y, k_{||}) - 1 \right) \underline{1} - \frac{c^2}{\omega^2} \underline{K}^\lambda(x_s; k_y, k_{||}) \otimes \underline{K}^\lambda(x_s; k_y, k_{||}) \right) \cdot \quad (3.14)$$

$$\underline{E}^\lambda(x_s; k_y, k_{||}) + i\kappa \frac{c^2}{\omega^2} \left(\underline{K}^\lambda(x_s; k_y, k_{||}) \wedge \left[\underline{e}^1 \frac{\partial}{\partial x_s} \wedge \underline{E}^\lambda(x_s; k_y, k_{||}) \right] + \right. \\ \left. \underline{e}^1 \frac{\partial}{\partial x_s} \wedge \left[\underline{K}^\lambda(x_s; k_y, k_{||}) \wedge \underline{E}^\lambda(x_s; k_y, k_{||}) \right] \right) - \frac{4\pi i}{\omega} \underline{J}^\lambda(x_s; k_y, k_{||}) = O(\kappa^2)$$

bringen. In dieser skalierten Wellengleichung spielt κ gewissermaßen die Rolle eines "Buchhaltungsparameters", der kleine Größen identifiziert. Im Endergebnis ist κ gleich Eins zu setzen, bzw. die Rück-Substitution $x_s \rightarrow x$ durchzuführen.

Um obige Eikonalgleichung schließen zu können, ist im nächsten Rechenschritt ein asymptotischer Ausdruck für $\underline{J}^\lambda(x_s; k_y, k_{||})$ zu finden. Vergleicht man die Eikonalsätze (3.1) und (3.2) mit der konstitutiven Relation (2.19) im "slab", so muß für die Amplitude der Stromdichte offensichtlich

$$\underline{J}^\lambda(x; k_y, k_{||}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{i(S_\lambda(x'; k_y, k_{||}) - S_\lambda(x; k_y, k_{||}))} \underline{\sigma}(x, x'; k_y, k_{||}) \cdot \underline{E}^\lambda(x'; k_y, k_{||}) \quad (3.15)$$

gelten. Das Problem besteht nun darin, eine sinnvolle Skalierung dieser konstitutiven Relation zu finden, was die Auffindung eines entsprechenden asymptotischen Ausdrucks des Leitfähigkeitskernes $\underline{\sigma}(x, x'; k_y, k_{||})$ miteinschließt.

Offenbar besitzt dieser Integralkern die Darstellung

$$\underline{\sigma}(x, x'; k_y, k_{||}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx'' \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x(x-x'')} \int_{-\infty}^{\infty} dk'_x e^{ik'_x(x''-x')} \underline{\sigma}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_{||}; x'') , \quad (3.16)$$

vgl. (2.20) und (2.21), in die die Ortskoordinaten x und x' als Parameter, bzw. x'' als Integrationsvariable eingehen. Aufgrund der oszillierenden Exponentialfaktoren in obigem Ausdruck ist klar, daß wesentliche Beiträge zu $\underline{\sigma}(x, x'; k_y, k_{||})$ nur von Koordinatenwerten $x \approx x''$ und $x' \approx x''$ und folglich auch $x \approx x'$ kommen können. Für $|x - x''| \rightarrow \infty$ bzw. $|x' - x''| \rightarrow \infty$ geht $\underline{\sigma}(x, x'; k_y, k_{||})$ gegen Null, sodaß die durch Gleichung (3.16) definierte Nichtlokalität der konstitutiven Relation in der Praxis als eine Nichtlokalität endlicher Reichweite aufgefaßt werden kann. Diese Reichweite wird durch eine Länge $L_{nonlocal}$ derart charakterisiert, daß Beiträge zum Leitfähigkeitskern, die als wesentlich von Null verschieden angesehen werden können, die Bedingungen

$$|x - x''| \leq L_{nonlocal} , \quad (3.17)$$

$$|x' - x''| \leq L_{nonlocal}$$

und

$$|x - x'| \leq L_{nonlocal}$$

erfüllen müssen. In Abschnitt 4.2 wird in einer etwas detaillierteren Diskussion gezeigt, daß $L_{nonlocal}$ von der Größenordnung einiger thermischer Gyroradien ist. Beiträge von

x , x' und x'' -Kombinationen, die der Forderung (3.17) nicht genügen, besitzen im Integranden so schnell variierende Exponentialfaktoren, daß sie durch die k_x - und k'_x -Integrationen weggemittelt werden.

Die Tatsache, daß der σ -Tensor $\underline{\underline{\sigma}}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; x'')$ gemäß (3.17) nur in einem endlichen x'' -Intervall, nämlich $[x'' - L_{nonlocal}, x'' + L_{nonlocal}]$, signifikant zum Leitfähigkeitskern beiträgt, legt nahe, diesen Tensor unter der x'' -Integration durch eine Taylorentwicklung um $x'' = x$ zu approximieren,

$$\underline{\underline{\sigma}}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; x'') = \underline{\underline{\sigma}}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; x) + (x'' - x) \frac{\partial}{\partial x} \underline{\underline{\sigma}}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; x) + \dots \quad (3.18)$$

Da die x'' -Abhängigkeit von $\underline{\underline{\sigma}}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; x'')$ ausschließlich durch die räumliche Variation der Plasmaparameter verursacht wird, vgl. Abschnitt 2.3, kann unter der Annahme³, daß die Plasmaparameter auf der langsamen Längenskala L_{slow} variieren und für die Nichtlokalitätslänge $L_{nonlocal} \approx L_{fast}$ gelten soll, die Reihenentwicklung des σ -Tensors gemäß (3.10) und entsprechend der Vorschrift

$$\underline{\underline{\sigma}}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; x) \rightarrow \underline{\underline{\sigma}}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; x_s) \quad (3.19)$$

skaliert werden, mit dem Ergebnis:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; x'') &\rightarrow \underline{\underline{\sigma}}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; x_s) + \\ &\kappa(x'' - x) \frac{\partial}{\partial x_s} \underline{\underline{\sigma}}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; x_s) + O(\kappa^2). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Damit, mit Gl. (2.21) und den Integraldarstellungen $\delta(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\tau x}$ und $-i \frac{\partial}{\partial x} \delta(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \tau e^{i\tau x}$ der δ -Distribution und ihrer Ableitung, erhält man in der Folge eine Approximation des Leitfähigkeitskernes im Fourier-Raum durch eine Reihe von Distributionen,

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}(k_x, k'_x; k_y, k_\parallel) &\rightarrow 2\pi \delta(k_x - k'_x) [(1 - \kappa x \frac{\partial}{\partial x_s}) \underline{\underline{\sigma}}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; x_s) - \\ &2\pi i \kappa \left(\frac{\partial}{\partial k'_x} \delta(k_x - k'_x) \right) \frac{\partial}{\partial x_s} \underline{\underline{\sigma}}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; x_s) + O(\kappa^2)]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Unter Verwendung dieses Ausdrucks läßt sich die k'_x -Integration in der Integraldarstellung (2.20) analytisch ausführen. Man erhält den Leitfähigkeitskern im Ortsraum in der gesuchten asymptotischen Form

³Im Hinblick auf die Modenkonzersion der SW in eine IBW in der Nähe der kalten LH-Resonanz, ist die Annahme $L_{nonlocal} \approx L_{fast}$ für beide Wellentypen erfüllt. Wie gefordert ist die Wellenlänge der IBW, also L_{fast} , ebenso wie $L_{nonlocal}$, von der Größenordnung des thermischen Ionengyroradius. Die SW hingegen wird wesentlich von den "zero-gyroradius"-Termen des Leitfähigkeitskernes determiniert, das Problem ist also ohnedies fast lokal, d.h. $L_{nonlocal} \ll L_{fast}$, vgl. Relation (2.49). Insbesondere ist Forderung, daß die Plasmaparameter auf der Längenskala L_{slow} variieren mit der Annahme (4.11) kompatibel.

$$\underline{\sigma}(x, x'; k_y, k_{||}) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{i(x-x')k_x} \left[(1 + \kappa(x'-x) \frac{\partial}{\partial x_s}) \underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{||}; x_s) + \right. \quad (3.22)$$

$$\left. i\kappa \left[\frac{\partial}{\partial k'_x} \frac{\partial}{\partial x_s} \underline{\sigma}(k_{\perp}, k'_{\perp}; \psi, \psi'; k_{||}; x_s) \right]_{k_{x'} \rightarrow k_x} + O(\kappa^2) \right].$$

Unter Ausnutzung der Bedingungen (3.17) können, analog zu den Rechenschritten (3.18) bis (3.20), auch die Faktoren $\underline{E}^{\lambda}(x'; k_y, k_{||})$ und $e^{i(S_{\lambda}(x'; k_y, k_{||}) - S_{\lambda}(x; k_y, k_{||}))}$ in der konstitutiven Relation (3.15) unter der x' -Integration in Taylor-Reihen um $x' = x$ entwickelt werden, mit anschließender Skalierung gemäß (3.8), (3.10) und $K_{\lambda}(x; k_y, k_{||}) \rightarrow K_{\lambda}(x_s; k_y, k_{||})$. Dies führt auf das Ergebnis

$$\underline{E}^{\lambda}(x'; k_y, k_{||}) \rightarrow \underline{E}^{\lambda}(x_s; k_y, k_{||}) + \kappa(x'-x) \frac{\partial}{\partial x_s} \underline{E}^{\lambda}(x_s; k_y, k_{||}) + O(\kappa^2) \quad (3.23)$$

bzw.

$$e^{i(S_{\lambda}(x'; k_y, k_{||}) - S_{\lambda}(x; k_y, k_{||}))} \rightarrow \quad (3.24)$$

$$e^{iK_{\lambda}(x_s; k_y, k_{||})(x'-x)} \left(1 + i\frac{\kappa}{2}(x-x')^2 \frac{\partial}{\partial x_s} K_{\lambda}(x_s; k_y, k_{||}) + O(\kappa^2) \right).$$

Mit den Substitutionen (3.9), (3.22), (3.23) und (3.24) in Gleichung (3.15) lassen sich nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge und unter Verwendung der bekannten Integraldarstellungen der δ -Distribution und ihrer Ableitungen, d.h. insbesondere $-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \tau^2 e^{i\tau x}$, sowohl das k_x - als auch das x' -Integral analytisch berechnen. Man erhält bei reellem $K_{\lambda}(x_s; k_y, k_{||})$ die Identität

$$\underline{J}^{\lambda}(x_s; k_y, k_{||}) = 2\pi \left\{ \left[\underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{||}; x_s) + i\kappa \frac{\partial}{\partial x_s} \left[\frac{\partial}{\partial k'_x} \underline{\sigma}(k_{\perp}, k'_{\perp}; \psi, \psi'; k_{||}; x_s) \right]_{k_{x'} \rightarrow k_x} - \right. \right. \quad (3.25)$$

$$\left. \left. i\kappa \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial}{\partial k_x} \underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{||}; x_s) - \frac{i}{2} \kappa \frac{\partial^2}{\partial k_x^2} \underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{||}; x_s) \frac{\partial}{\partial x_s} K_{\lambda}(x_s; k_y, k_{||}) \right\} \cdot$$

$$\underline{E}^{\lambda}(x_s; k_y, k_{||}) - i\kappa \frac{\partial}{\partial k_x} \underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{||}; x_s) \cdot \frac{\partial}{\partial x_s} \underline{E}^{\lambda}(x_s; k_y, k_{||}) \Big|_{k_x \rightarrow K_{\lambda}(x_s; k_y, k_{||})} + O(\kappa^2).$$

Die so gewonnene asymptotische Form der konstitutiven Relation ist offensichtlich in x_s differentiell, sodaß alle im Rahmen der WKB-Approximation durchgeführten Analysen der Wellengleichung als lokale Analysen bezeichnet werden können.

Schließlich ist noch die Größenordnung diverser Beiträge in $\underline{\sigma}(k_{\perp}, k'_{\perp}; \psi, \psi'; k_{||}; x_s)$ festzustellen bzw. zu fixieren. Dazu wird zunächst angenommen, daß das Plasma schwach dispersiv⁴ ist, d.h. wir skalieren den σ -Tensor gemäß:

$$\underline{\sigma}(k_{\perp}, k'_{\perp}; \psi, \psi'; k_{||}; x_s) = \kappa \left[\underline{\sigma}(k_{\perp}, k'_{\perp}; \psi, \psi'; k_{||}; x_s) \right]^H + i \left[\underline{\sigma}(k_{\perp}, k'_{\perp}; \psi, \psi'; k_{||}; x_s) \right]^A, \quad (3.26)$$

⁴Aus Gl. (2.50) ergibt sich, daß mit der räumlichen Dispersion im kalten Plasma ($T_{\alpha} \rightarrow 0$) der hermitesche Anteil des lokalen Leitfähigkeitskernes im Ortsraum verschwindet. Dementsprechend beschreibt die Skalierung (3.26) das asymptotische Verhalten eines schwach dispersiven Plasmas.

wo der hermitesche und antihermitesche Anteil eines beliebigen Tensors \underline{T} durch

$$[\underline{T}]^H := \frac{1}{2}(\underline{T} + \underline{T}^+) \quad (3.27)$$

bzw.

$$[\underline{T}]^A := \frac{1}{2i}(\underline{T} - \underline{T}^+) \quad (3.28)$$

definiert sind.

Nun besteht $\underline{\sigma}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; x_s)$ entsprechend der Relation (2.22) aus dem Stix-Term und einem diamagnetischen Anteil. Der Stix-Beitrag $\underline{\sigma}^{(0)}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; x_s)$ ist durch die Gleichungen (2.23) bis (2.26) gegeben und offensichtlich als Größe der Ordnung κ^0 aufzufassen, da er im Grenzfall des homogenen Plasmas (also $\kappa \rightarrow 0$) nicht verschwindet. Hingegen ist der diamagnetische Term $\underline{\sigma}^{(1)}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; x_s)$ proportional dem Verhältnis Gyroradius zu Gradientenlänge der Plasmamaparameter, also in Übereinstimmung mit den bereits getroffenen Annahmen, proportional zu $L_{nonlocal}/L_{slow} \lesssim L_{fast}/L_{slow}$, wie aus den Relationen (2.32) bis (2.36) ersichtlich wird. Entsprechend der Ordnungsrelation (3.3) ist also folgende Skalierung zu wählen,

$$\underline{\sigma}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; x_s) = \underline{\sigma}^{(0)}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; x_s) + \kappa \underline{\sigma}^{(1)}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; x_s), \quad (3.29)$$

sodaß sich zusammen mit Gl. (3.26)

$$\underline{\sigma}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; x_s) = i [\underline{\sigma}^{(0)}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; x_s)]^A + \quad (3.30)$$

$$\kappa \left(i [\underline{\sigma}^{(1)}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; x_s)]^A + [\underline{\sigma}^{(0)}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; x_s)]^H \right) + O(\kappa^2)$$

ergibt.

Mit dem Potenzreihenansatz in κ

$$\underline{E}^\lambda(x_s; k_y, k_\parallel) = \underline{E}^{\lambda,0}(x_s; k_y, k_\parallel) + \kappa \underline{E}^{\lambda,1}(x_s; k_y, k_\parallel) + O(\kappa^2) \quad (3.31)$$

erhält man in der Folge als asymptotische konstitutive Relation der WKB-Approximation:

$$\underline{J}^\lambda(x_s; k_y, k_\parallel) = \underline{J}^{\lambda,0}(x_s; k_y, k_\parallel) + \kappa \underline{J}^{\lambda,1}(x_s; k_y, k_\parallel) + O(\kappa^2), \quad (3.32)$$

mit den expliziten Ausdrücken

$$\underline{J}^{\lambda,0}(x_s; k_y, k_\parallel) = 2\pi i \left[[\underline{\sigma}^{(0)}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; x_s)]^A \right]_{k_x \rightarrow K_\lambda(x_s; k_y, k_\parallel)} \cdot \underline{E}^{\lambda,0}(x_s; k_y, k_\parallel) \quad (3.33)$$

bzw.

$$\begin{aligned}
& \underline{J}^{\lambda,1}(x_s; k_y, k_{\parallel}) = \tag{3.34} \\
& 2\pi \left[\left[\underline{\sigma}^{(0)}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_s) \right]^H - \frac{\partial}{\partial x_s} \left[\frac{\partial}{\partial k_x'} \left[\underline{\sigma}^{(0)}(k_{\perp}, k_{\perp}'; \psi, \psi'; k_{\parallel}; x_s) \right]^A \right]_{k_x' \rightarrow k_x} + \right. \\
& \quad \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial}{\partial k_x} \left[\underline{\sigma}^{(0)}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_s) \right]^A + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial k_x^2} \left[\underline{\sigma}^{(0)}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_s) \right]^A \times \\
& \quad \left. \frac{\partial}{\partial x_s} K_{\lambda}(x_s; k_y, k_{\parallel}) + i \left[\underline{\sigma}^{(1)}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_s) \right]^A \right]_{k_x \rightarrow K_{\lambda}(x_s; k_y, k_{\parallel})} \cdot \underline{E}^{\lambda,0}(x_s; k_y, k_{\parallel}) + \\
& \quad 2\pi i \left[\left[\underline{\sigma}^{(0)}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_s) \right]^A \right]_{k_x \rightarrow K_{\lambda}(x_s; k_y, k_{\parallel})} \cdot \underline{E}^{\lambda,1}(x_s; k_y, k_{\parallel}) + \\
& \quad 2\pi \left[\frac{\partial}{\partial k_x} \left[\underline{\sigma}^{(0)}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_s) \right]^A \right]_{k_x \rightarrow K_{\lambda}(x_s; k_y, k_{\parallel})} \cdot \frac{\partial}{\partial x_s} \underline{E}^{\lambda,0}(x_s; k_y, k_{\parallel}) .
\end{aligned}$$

Damit kann nach einer einfachen Rechnung die Wellengleichung (3.14) in $O(\kappa^0)$ in der Gestalt

$$\underline{M}^{\lambda}(x_s; k_y, k_{\parallel}) \cdot \underline{E}^{\lambda,0}(x_s; k_y, k_{\parallel}) = 0 , \tag{3.35}$$

bzw. in $O(\kappa)$ in der Form

$$\begin{aligned}
& \underline{M}^{\lambda}(x_s; k_y, k_{\parallel}) \cdot \underline{E}^{\lambda,1}(x_s; k_y, k_{\parallel}) = \tag{3.36} \\
& -\frac{8\pi^2}{\omega} \left[i \left[\underline{\sigma}^{(0)}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_s) \right]^H - i \frac{\partial}{\partial x_s} \left[\frac{\partial}{\partial k_x'} \left[\underline{\sigma}^{(0)}(k_{\perp}, k_{\perp}'; \psi, \psi'; k_{\parallel}; x_s) \right]^A \right]_{k_x' \rightarrow k_x} + \right. \\
& \quad i \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial}{\partial k_x} \left[\underline{\sigma}^{(0)}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_s) \right]^A + \frac{i}{2} \frac{\partial^2}{\partial k_x^2} \left[\underline{\sigma}^{(0)}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_s) \right]^A \times \\
& \quad \left. \frac{\partial}{\partial x_s} K_{\lambda}(x_s; k_y, k_{\parallel}) - \left[\underline{\sigma}^{(1)}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_s) \right]^A \right]_{k_x \rightarrow K_{\lambda}(x_s; k_y, k_{\parallel})} \cdot \underline{E}^{\lambda,0}(x_s; k_y, k_{\parallel}) - \\
& \quad \frac{8\pi^2 i}{\omega} \left[\frac{\partial}{\partial k_x} \left[\underline{\sigma}^{(0)}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_s) \right]^A \right]_{k_x \rightarrow K_{\lambda}(x_s; k_y, k_{\parallel})} \cdot \frac{\partial}{\partial x_s} \underline{E}^{\lambda,0}(x_s; k_y, k_{\parallel}) + \\
& \quad i \frac{\omega^2}{c^2} \underline{K}^{\lambda}(x_s; k_y, k_{\parallel}) \wedge \left(\underline{e}^1 \wedge \frac{\partial}{\partial x_s} \underline{E}^{\lambda,0}(x_s; k_y, k_{\parallel}) \right) + \\
& \quad i \frac{\omega^2}{c^2} \underline{e}^1 \wedge \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\underline{K}^{\lambda}(x_s; k_y, k_{\parallel}) \wedge \underline{E}^{\lambda,0}(x_s; k_y, k_{\parallel}) \right)
\end{aligned}$$

geschrieben werden, wo die Definition

$$\underline{M}^{\lambda}(x_s; k_y, k_{\parallel}) := \left(1 - \frac{c^2}{\omega^2} \underline{K}^{\lambda}(x_s; k_y, k_{\parallel}) \cdot \underline{K}^{\lambda}(x_s; k_y, k_{\parallel}) \right) \underline{1} + \tag{3.37}$$

$$\frac{c^2}{\omega^2} \underline{K}^{\lambda}(x_s; k_y, k_{\parallel}) \otimes \underline{K}^{\lambda}(x_s; k_y, k_{\parallel}) - \frac{8\pi^2}{\omega} \left[\left[\underline{\sigma}^{(0)}(k_x, k_x; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_s) \right]^A \right]_{k_x \rightarrow K_{\lambda}(x_s; k_y, k_{\parallel})}$$

benutzt wurde.

Die Eikonalwellengleichung (3.35) stellt offenbar eine algebraische Gleichung für die Amplitude $\underline{E}^{\lambda}(x_s; k_y, k_{\parallel})$ dar, mit der Lösbarkeitsbedingung

$$\det \left(\underline{M}^{\lambda}(x_s; k_y, k_{\parallel}) \right) = 0 . \tag{3.38}$$

Letztere kann, in Analogie zur Dispersionsrelation des homogenen Plasmas, die die mathematische Bedeutung einer Lösbarkeitsbedingung der entsprechenden Wellengleichung im Fourier-Raum besitzt, mit der lokalen Dispersionsrelation der Eikonalmoden identifiziert werden. Das Konzept der Dispersionsrelation bleibt also in obigem Sinne auch für inhomogene Plasmen sinnvoll.

Aus den Maxwell-Gleichungen lässt sich allgemein eine Leistungsbilanz ableiten, das sogenannte Poynting-Theorem. Im folgenden soll gezeigt werden, daß sich auch die Eikonallwellengleichungen (3.35) und (3.36) zu einer solchen Leistungsbilanz kombinieren lassen. Dazu wird erst die Gleichung $O(\kappa^0)$ mit $\underline{E}^{\lambda,1*}(x_s; k_y, k_{||})$ skalarmultipliziert. Der Übergang zur adjungierten Gleichung führt bei reeller Wellenfrequenz ω wegen

$$\underline{M}^{\lambda+}(x_s; k_y, k_{||}) = \underline{M}^{\lambda}(x_s; k_y, k_{||}) \quad (3.39)$$

auf

$$\underline{E}^{\lambda,0*}(x_s; k_y, k_{||}) \cdot \underline{M}^{\lambda}(x_s; k_y, k_{||}) \cdot \underline{E}^{\lambda,1}(x_s; k_y, k_{||}) = 0. \quad (3.40)$$

Andererseits folgt aus (2.13) mit einem zu (2.17), (3.1) und (3.31) analogen Ansatz für das Magnetfeld:

$$\underline{K}^{\lambda}(x_s; k_y, k_{||}) \wedge \underline{E}^{\lambda,0}(x_s; k_y, k_{||}) = \frac{\omega}{c} \underline{B}^{\lambda,0}(x_s; k_y, k_{||}). \quad (3.41)$$

Verjüngt man nun (3.36) mit $-\frac{\omega}{8\pi} \underline{E}^{\lambda,0*}(x_s; k_y, k_{||})$ und nimmt den Imaginärteil der so entstandenen skalaren Gleichung, dann folgt unter Ausnutzung der Relationen (3.40) und (3.41) nach Umformung eines Terms entsprechend der Identität ($s \in \{0, 1\}$)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial}{\partial k_x} \left[\underline{\sigma}^{(s)}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{||}; x_s) \right]^A = \\ & \frac{\partial}{\partial x_s} \left[\frac{\partial}{\partial k'_x} \left[\underline{\sigma}^{(s)}(k'_{\perp}, k_{\perp}; \psi', \psi; k_{||}; x_s) \right]^A + \frac{\partial}{\partial k'_x} \left[\underline{\sigma}^{(s)}(k_{\perp}, k'_{\perp}; \psi, \psi'; k_{||}; x_s) \right]^A \right]_{k'_x \rightarrow k_x} \end{aligned} \quad (3.42)$$

die gesuchte Leistungsbilanz; sie besitzt (nach Substitution $x_s \rightarrow x$ mit $\kappa = 1$) die Form eines Poynting-Theorems, gemittelt über die durch das Inverse der Wellenfrequenz definierte Zeitskala:

$$\underline{e}^1 \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\underline{S}^{\text{field},\lambda}(x; k_y, k_{||}) + \underline{S}^{\text{kin},\lambda}(x; k_y, k_{||}) \right) = -P_{\lambda}^{\text{abs}}(x; k_y, k_{||}). \quad (3.43)$$

Dabei bezeichnet

$$\underline{S}^{\text{field},\lambda}(x; k_y, k_{||}) := \frac{c}{8\pi} \text{Re} \left[\underline{E}^{\lambda,0*}(x; k_y, k_{||}) \wedge \underline{B}^{\lambda,0}(x; k_y, k_{||}) \right] \quad (3.44)$$

den bekannten Poynting-Vektor des elektromagnetischen Feldes und

$$\begin{aligned} & \underline{S}^{\text{kin},\lambda}(x; k_y, k_{||}) := \\ & \frac{\pi}{2} \left(\underline{E}^{\lambda,0*}(x; k_y, k_{||}) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial k_x} \left[\underline{\sigma}^{(0)}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{||}; x) \right]^A \right]_{k_x \rightarrow K_{\lambda}(x_s; k_y, k_{||})} \cdot \underline{E}^{\lambda,0}(x; k_y, k_{||}) \right) \underline{e}^1 \end{aligned} \quad (3.45)$$

einen Beitrag, der als seine kinetische Korrektur zu interpretieren ist und entsprechend den Leistungsfluß der sich im Wellenfeld kohärent bewegenden Teilchen beschreibt. In der Leistungsbilanz (3.43) tritt zudem der Term

$$P_{\lambda}^{\text{abs}}(x; k_y, k_{\parallel}) := \quad (3.46)$$

$$\pi \underline{E}^{\lambda, 0*}(x; k_y, k_{\parallel}) \cdot \left[\left[\underline{\sigma}^{(0)}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x) \right]^H + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial k'_{\perp}} \left(\left[\underline{\sigma}^{(0)}(k_{\perp}, k'_{\perp}; \psi, \psi'; k_{\parallel}; x) \right]^A - \left[\underline{\sigma}^{(0)}(k'_{\perp}, k_{\perp}; \psi', \psi; k_{\parallel}; x) \right]^A \right) \right]_{k'_{\perp} \rightarrow k_x \rightarrow K_{\lambda}(x; k_y, k_{\parallel})} \cdot \underline{E}^{\lambda, 0}(x; k_y, k_{\parallel})$$

auf, der nicht die Gestalt einer Divergenz eines Vektorfeldes besitzt und folglich als ein Verlustterm (bzw. Quellterm) aufzufassen ist. Tatsächlich beschreibt $P_{\lambda}^{\text{abs}}(x; k_y, k_{\parallel})$ die von der WKB-Mode mit Index λ durch Plasmateilchen lokal dissipierte Leistung. Das letzte Ergebnis kann mit Hilfe der Definition des modifizierten hermiteschen Anteils des σ -Tensors (man beachte die Vertauschung der Argumente im adjungierten Tensor)

$$\left[\underline{\sigma}^{(s)}(k_{\perp}, k'_{\perp}; \psi, \psi'; k_{\parallel}; x) \right]^H := \frac{1}{2} \left(\underline{\sigma}^{(s)}(k_{\perp}, k'_{\perp}; \psi, \psi'; k_{\parallel}; x) + \underline{\sigma}^{(s)+}(k'_{\perp}, k_{\perp}; \psi', \psi; k_{\parallel}; x) \right) \quad (3.47)$$

auch in der folgenden Form geschrieben werden:

$$P_{\lambda}^{\text{abs}}(x; k_y, k_{\parallel}) = \quad (3.48)$$

$$\pi \underline{E}^{\lambda, 0*}(x; k_y, k_{\parallel}) \cdot \left[\left[\underline{\sigma}^{(0)}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x) \right]^H + \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial k'_{\perp}} \left(\left[\underline{\sigma}^{(0)}(k'_{\perp}, k_{\perp}; \psi', \psi; k_{\parallel}; x) \right]^H - \left[\underline{\sigma}^{(0)}(k_{\perp}, k'_{\perp}; \psi, \psi'; k_{\parallel}; x) \right]^H \right) \right]_{k'_{\perp} \rightarrow k_x \rightarrow K_{\lambda}(x; k_y, k_{\parallel})} \cdot \underline{E}^{\lambda, 0}(x; k_y, k_{\parallel}) .$$

Die Interpretation von $P_{\lambda}^{\text{abs}}(x; k_y, k_{\parallel})$ als Leistungsverlust aufgrund der irreversiblen Umwandlung von Wellenenergie in thermische Energie wird durch einen aus der Literatur bekannten Ausdruck für die lokal dissipierte Leistung im homogenen Plasma bestätigt [Sti 61], auf den sich im entsprechenden Grenzfall Gl. (3.47) reduziert.

In Kapitel 5 wird auf kinetischer Ebene der exakte Ausdruck für die in einem räumlich dispersiven Plasma-“slab” lokal dissipierte Leistung berechnet, der (3.46) als Grenzfall enthalten muß. Die Kompatibilität der hier präsentierten WKB-Analyse mit der kinetischen Rechnung und als Folge davon, die Relevanz der zuvor angegebenen physikalischen Interpretation der Größen $\underline{S}^{\text{kin}, \lambda}$ und P_{λ}^{abs} des WKB-Poynting-Theorems wird in Abschnitt 5.4 sichergestellt.

Die Bilanz (3.43) kann für den Fall einer im Plasma propagierenden IBW veranschaulicht werden. Offensichtlich können sich Moden, die wie eine IBW im wesentlichen longitudinal polarisiert sind, im Vakuum nicht ausbreiten, da dort nur transversal polarisierte Lösungen der Wellengleichung existieren. Anders ausgedrückt, benötigt eine solche Mode, damit sie sich überhaupt ausbilden kann, eine an sie gekoppelte oszillierende Bewegung der Plasmateilchen. Die mit der kohärenten Teilchenbewegung im

Wellenfeld verbundene kinetische Energie trägt also auch neben dem rein elektromagnetischen Poynting-Fluß zur Energieflußdichte der Welle bei, was im Erscheinen von $\underline{S}^{\text{kin},\lambda}$ in der Leistungsbilanz zum Ausdruck kommt. Die Mode selbst kann im Plasma nicht mehr, wie im Vakuum, als isoliertes elektromagnetisches Feldphänomen angesehen werden, sondern ist als Schwingungsform aufzufassen, die aus einer komplizierten Feld-Plasma-Wechselwirkung entsteht. Im Rahmen dieser Wechselwirkung kommt es zum Energieaustausch zwischen dem elektromagnetischen Wellenfeld und den Plasmateilchen. Dieser Energietransfer zwischen dem Wellenfeld und der daran gekoppelten kohärenten Teilchenbewegung ist notwendigerweise reversibel. Darüberhinaus kann aber auch, beispielsweise durch das Phänomen der Landau-Dämpfung, ein irreversibler Energieaustausch zwischen dem Plasma und den elektromagnetischen Wellenfeldern stattfinden, was erst die Möglichkeit der Plasmaheizung durch RF-Wellen eröffnet. Da dieser irreversible Energietransfer in die thermische Bewegung der Plasmateilchen investiert, also der kohärenten an die Welle gekoppelten Teilchenbewegung und damit der Mode insgesamt Energie entzieht, wird er in der Bilanz (3.43) durch den Verlustterm P_λ^{abs} erfaßt.

Um eine Vorstellung der Bedeutung der kinetischen Korrektur zum Poynting-Fluß zu vermitteln, sei an eine Aussage in Abschnitt 1.3 erinnert, die besagt, daß im Falle einer IBW der kinetische Beitrag zur Leistungsflußdichte wesentlich größer ist, als ihr elektromagnetischer Anteil. Für die in der Nähe der Modenkonzersionsschicht notwendigerweise annähernd longitudinal polarisierte SW (sonst wäre ihre Konversion in eine IBW unmöglich) ist der Sachverhalt aber gerade umgekehrt.

3.2 Die lokale Dispersionsrelation

Im folgenden soll das im Rahmen der vorliegenden Arbeit benutzte Verfahren zur Lösung der lokalen Dispersionsrelation skizziert werden, wie sie etwa durch Gl. (3.38) gegeben ist. Dabei handelt es sich im Falle gegebener paralleler Wellenzahl und gegebener Wellenfrequenz um eine transzendente Gleichung zur Bestimmung der Wellenzahl in Normalrichtung. Im vorangehenden Abschnitt wurde bereits erwähnt, daß das Konzept der Dispersionsrelation als Lösbarkeitsbedingung einer algebraischen Wellengleichung im strengen Sinn nur für das homogene Plasma sinnvoll ist. Lediglich asymptotisch, d.h. konkret im Rahmen der WKB-Approximation, kann es für inhomogene Plasmen übernommen werden. Um den Zusammenhang zwischen asymptotischer Rechnung und homogenem Grenzfall zu illustrieren, wird hier im Gegensatz zum vorangehenden Abschnitt ein homogenes Plasma vorausgesetzt.

Dann kann eine einzelne Fourier-Mode, spezifiziert durch

$$\underline{E}(x; k_y, k_{\parallel}) = \delta_{k_y, K_y} \delta_{k_{\parallel}, K_{\parallel}} e^{iK_x x} \underline{E}^{\text{hom}}, \quad (3.49)$$

untersucht werden. Gemeinsam mit den "slab"-Ansätzen (2.17) und (2.18), die auch im homogenen Plasma ihre Gültigkeit behalten, der konstitutiven Relation (2.19) und dem Leitfähigkeitskern (2.40) folgt für das elektrische Wellenfeld und die zugehörige

Stromdichtestörung im homogenen Grenzfall

$$\underline{E}(\underline{x}, t) = e^{-i\omega t} e^{i\underline{K}\cdot\underline{x}} \underline{E}^{hom} \quad (3.50)$$

bzw.

$$\underline{J}(\underline{x}, t) = 2\pi e^{-i\omega t} e^{i\underline{K}\cdot\underline{x}} \underline{\sigma}^{(0)}(K_{\perp}, K_{\perp}; \Psi, \Psi; K_{\parallel}; -) \cdot \underline{E}^{hom}, \quad (3.51)$$

wo die Definitionen $\underline{K} := K_x \underline{e}^1 + K_y \underline{e}^2 + \iota K_{\parallel} \underline{e}^3$ und $K_{\perp} := \text{sgn}(K_x)(K_x^2 + K_y^2)^{1/2}$ bzw. die Winkelvariable $\Psi := \arctan(K_y/K_x)$ benutzt wurden. Die Wellengleichung (2.12) läßt sich damit in Form einer algebraischen Gleichung für die Amplitude \underline{E}^{hom} schreiben,

$$\left[(1 - \underline{n} \cdot \underline{n}) \underline{\underline{1}} + \underline{n} \otimes \underline{n} + \frac{8\pi^2 i}{\omega} \underline{\sigma}^{(0)}(K_{\perp}, K_{\perp}; \Psi, \Psi; K_{\parallel}; -) \right] \cdot \underline{E}^{hom} = 0, \quad (3.52)$$

wo $\underline{n} := \frac{c}{\omega} \underline{K}$ den Brechungsindexvektor bezeichnet. Die Lösbarkeitsbedingung dieses Gleichungssystems,

$$\det \left((1 - \underline{n} \cdot \underline{n}) \underline{\underline{1}} + \underline{n} \otimes \underline{n} + \frac{8\pi^2 i}{\omega} \underline{\sigma}^{(0)}(K_{\perp}, K_{\perp}; \Psi, \Psi; K_{\parallel}; -) \right) = 0, \quad (3.53)$$

stellt die gesuchte Dispersionsrelation dar, die um die Vorzugsrichtung \underline{b} drehsymmetrisch ist.

Mit der Drehmatrix (2.25) kann durch eine einfache Rechnung die Identität

$$\underline{n} \otimes \underline{n} = \underline{R}(\Psi) \cdot \underline{N} \cdot \underline{R}^{-1}(\Psi) \quad (3.54)$$

bewiesen werden, wo der Tensor \underline{N} durch

$$\underline{N} := n_{\perp}^2 \underline{e}^1 \otimes \underline{e}^1 + \iota n_{\perp} n_{\parallel} \underline{e}^1 \otimes \underline{e}^3 + \iota n_{\perp} n_{\parallel} \underline{e}^3 \otimes \underline{e}^1 + n_{\parallel}^2 \underline{e}^3 \otimes \underline{e}^3 \quad (3.55)$$

definiert ist und die diversen Komponenten des Brechungsindexvektors durch die Gleichungen $n_{\perp} = \frac{c}{\omega} K_{\perp}$ bzw. $n_{\parallel} = \frac{c}{\omega} K_{\parallel}$ gegeben sind. In der Folge kann unter Ausnutzung der Relationen (2.23) und (2.24) die Dispersionsrelation in die Gestalt

$$\det \left(\underline{R} \cdot \left[(1 - n_{\perp}^2 - n_{\parallel}^2) \underline{\underline{1}} + \underline{N} + i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{P\alpha}^2}{|K_{\parallel}| v_{th\alpha}^{\alpha} \omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{T}_{\alpha}^n(K_{\perp}, K_{\perp}; K_{\parallel}; -) \right] \cdot \underline{R}^{-1} \right) = 0 \quad (3.56)$$

gebracht werden. Berücksichtigt man $\det(\underline{A} \cdot \underline{B}) = \det(\underline{A}) \det(\underline{B})$ und $\det(\underline{R}(\Psi)) = 1$ bzw. $\det(\underline{R}^{-1}(\Psi)) = 1$, so ergibt sich schließlich

$$H(n_{\perp}^2, |n_{\parallel}|; \omega; -) := \quad (3.57)$$

$$\det \left((1 - n_{\perp}^2 - n_{\parallel}^2) \underline{\underline{1}} + \underline{N} + i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{P\alpha}^2}{|K_{\parallel}| v_{th\alpha}^{\alpha} \omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{T}_{\alpha}^n(K_{\perp}, K_{\perp}; K_{\parallel}; -) \right) = 0.$$

Die Determinante $H(n_{\perp}^2, |n_{\parallel}|; \omega; -)$ läßt sich mit Hilfe der Gleichungen (2.26) und (3.55) explizit berechnen. Dabei wird ersichtlich, daß sie vom Brechungsindex, wie in der Notation angedeutet, nur über die Argumente n_{\perp}^2 und $|n_{\parallel}|$ abhängt. Die Dispersionsrelation stellt also bei gegebener Wellenfrequenz ω und bei gegebenem parallelen Brechungsindex

n_{\parallel} eine transzendente Gleichung zur Bestimmung des Quadrates des Brechungsindex in Normalrichtung n_{\perp}^2 dar. Der Vorgabe von ω entspricht im RF-Heizexperiment die Wahl der Frequenz des Wellengenerators. In der Vorgabe von n_{\parallel} spiegelt sich hingegen die Struktur des Kopplers wieder, dessen Gestalt der Mode das Wellenzahlspektrum in Parallelrichtung aufprägt.

Die lokale Dispersionsrelation

$$H(n_{\perp}^2, |n_{\parallel}|; \omega; x) = 0 \quad (3.58)$$

erhält man, wenn man in (3.57) den Tensor $\hat{T}_{\alpha}^n(K_{\perp}, K_{\perp}; K_{\parallel}; -)$ durch jenen des inhomogenen Plasmas $\hat{T}_{\alpha}^n(K_{\perp}, K_{\perp}; K_{\parallel}; x)$ ersetzt, der lokal mit den Werten der Plasmaparameter am Ort x berechnet wird, vgl. Abschnitt 2.3. Variieren nun die Plasmaparameter eines solchen Plasmas auf hinreichend großen Längenskalen⁵, so kann, wie bereits eingangs erwähnt, die lokale Dispersionsrelation auch für den inhomogenen Fall relevante Informationen über die mögliche Struktur der Moden liefern.

Dazu ist die numerische Lösung der Dispersionsrelation, d.h. die Auflösung der transzendenten Gleichung $H(\gamma, |n_{\parallel}|; \omega; x) = 0$ nach $\gamma := n_{\perp}^2$ erforderlich. Dabei muß allerdings berücksichtigt werden, daß $H(\gamma, |n_{\parallel}|; \omega; x)$ im allgemeinen komplexe Werte annimmt, weshalb Nullstellen grundsätzlich in der gesamten komplexen γ -Ebene zu suchen sind. Im folgenden ist es zweckmäßig sowohl γ als auch $H(\gamma, |n_{\parallel}|; \omega; x)$ in Real- und Imaginärteil aufzuspalten,

$$\gamma = \gamma_r + i\gamma_i \quad (3.59)$$

bzw.

$$H(\gamma, |n_{\parallel}|; \omega; x) = H_r(\gamma) + iH_i(\gamma) \equiv H(\gamma), \quad (3.60)$$

wo die Kurznotation $H(\gamma)$ eingeführt wurde. Aus der Analytizität der Funktion $H(\gamma)$ folgt, daß sie als Potenzreihe um $\gamma = \gamma_r$ dargestellt werden kann,

$$H(\gamma) = H(\gamma_r) + i\gamma_i \frac{d}{d\gamma_r} H(\gamma_r) + O(\gamma_i^2). \quad (3.61)$$

Mit Hilfe der Aufspaltung (3.60) können dann die entsprechenden Reihendarstellungen des Realteils,

$$H_r(\gamma) = H_r(\gamma_r) - \gamma_i \frac{d}{d\gamma_r} H_i(\gamma_r) + O(\gamma_i^2), \quad (3.62)$$

bzw. des Imaginärteils von $H(\gamma)$,

$$H_i(\gamma) = H_i(\gamma_r) + \gamma_i \frac{d}{d\gamma_r} H_r(\gamma_r) + O(\gamma_i^2), \quad (3.63)$$

⁵Eine exakte Formulierung der Ordnungsrelationen, die die diversen relevanten Längenskalen erfüllen müssen, wurde zuvor in Abschnitt 3.1 gegeben. Vergleicht man die Dispersionsrelationen (3.38) und (3.53) so folgt offenbar, daß man die Dispersionrelation der Eikonalapproximation erhält, wenn man entsprechend der Skalierung (3.26) in (3.58) den Tensor $i\hat{T}_{\alpha}^n(K_{\perp}, K_{\perp}; K_{\parallel}; x)$ durch seinen antihermiteschen Anteil ersetzt.

abgelesen werden. Unter der Annahme, daß die Imaginärteile $H_i(\gamma_r)$ und γ_i von der Ordnung eines Skalierungsparameters ϵ klein sind, lautet die lokale Dispersionsrelation in führender Ordnung ϵ^0

$$H_r(\gamma_r) = 0, \quad (3.64)$$

bzw. in $O(\epsilon)$

$$H_i(\gamma_r) = -\gamma_i \frac{d}{d\gamma_r} H_r(\gamma_r). \quad (3.65)$$

Ist eine numerische Lösung γ_r von Gl. (3.64) gefunden, so kann gemäß Relation (3.65) der zugehörige Imaginärteil γ_i berechnet und zu einem Konsistenztest benutzt werden, da voraussetzungsgemäß $\gamma_i \ll \gamma_r$ gelten muß.

Die Beantwortung diverser Fragestellungen im Zusammenhang mit dem Modenkversionsproblem der IBW-Heizung erforderte im Anschluß an notwendige analytische Vorarbeiten die Durchführung umfangreicher numerischer Rechnungen. Zu diesem Zweck wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit ein als "IBW-Code" bezeichnetes Fortran-Programm entwickelt, das unter anderem eine Subroutine zur Lösung der lokalen Dispersionsrelation (3.58) in der Form (3.64) enthält. Dabei wird mit einem Newton-Verfahren nach reellen Nullstellen $\gamma = n_{\perp}^2$ gesucht, d.h. entweder nach rein propagativen (n_{\perp} ist reell) oder rein evaneszenten (n_{\perp} ist imaginär) Moden. Dies einerseits um die Modenkversionschicht für einen konkret vorgegebenen Parametersatz lokalisieren zu können, andererseits um eine Vorstellung von der möglichen Struktur der Wellenlösungen zu bekommen. Darüberhinaus werden die Wurzeln der lokalen Dispersionsrelation benötigt, um die Randbedingungen zur Integration der nichtlokalen Wellengleichung des Modenkversionsproblems formulieren zu können, wobei eine Anpassung der FEL-Lösung an WKB-Moden erforderlich ist (vgl. mit den Abschnitten 1.4 und 4.6).

Schließlich sei erwähnt, daß die numerische Lösung der lokalen Dispersionsrelation $H(n_{\perp}^2, |n_{\parallel}|; \omega; x) = 0$ den Abbruch der Summation über die Harmonischen der Gyrofrequenzen in Gl. (3.58) notwendig macht, der allerdings in der Praxis kein Problem darstellt. So führte beispielsweise im Falle der in Kapitel 6 präsentierten numerischen Lösungen mit $n_{\parallel} = 7$ ein Abbruch bei der 10. Harmonischen, d.h. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \rightarrow \sum_{n=-10}^{10}$, bereits zu einer ausgezeichneten Konvergenz.

Kapitel 4

Die Lösung der nichtlokalen Wellengleichung

4.1 Eine Galerkin-Finite-Elemente-Methode zur numerischen Integration der nichtlokalen Wellengleichung

In der Wellengleichung (2.12) des "slab"-Plasmas ist die Störung der Stromdichte selbstkonsistent durch die konstitutive Relation (2.19), gemeinsam mit den Gleichungen (2.17) und (2.18), als Funktional des elektrischen Wellenfeldes gegeben. Falls die betrachteten Moden Wellenlängen in Normalrichtung λ_{\perp} besitzen, die viel größer als der thermische Gyroradius ρ_{α}^{Gyro} sind, dann kann die konstitutive Relation durch eine lokale Beziehung approximiert werden, d.h. entweder durch eine "finite gyroradius" oder "zero gyroradius"-Approximation, vgl. mit (2.49). Für IBW jedoch, ist λ_{\perp} von derselben Größenordnung wie der Ionen-Gyroradius, die konstitutive Relation also zwingend nicht-lokal. Die zur Beschreibung solcher Wellen adäquate Gleichung ist daher notwendigerweise eine Integro-Differentialgleichung; konkret enthält die konstitutive Relation des "slab" ein Vierfachintegral, vgl. Abschnitt 2.3. Auf das IBW-Heizschema bezogen heißt das, die Untersuchung der Modenkonversion der SW in eine IBW im Bereich der Abschältschicht eines Tokamaks erfordert die Integration der voll nichtlokalen Wellengleichung.

Zur Lösung des damit verbundenen mathematischen Problems scheint besonders eine Galerkin-FEL-Methode geeignet [Fle 84]-[Bec 81]-[Str 71]. Diese Methode basiert auf der schwachen Form der Wellengleichung,

$$\frac{c^2}{\omega^2} \int_V d^3x [\underline{F}]^* \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \wedge \left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \wedge \underline{E} \right) = \int_V d^3x [\underline{F}]^* \cdot \underline{E} + \frac{4\pi i}{\omega} \int_V d^3x [\underline{F}]^* \cdot \underline{J}, \quad (4.1)$$

die man durch Skalarmultiplikation derselben mit den komplex Konjugierten der vektorwertigen Testfunktionen \underline{F} und anschließender Integration über das betrachtete Volumen V erhält. Die Testfunktionen sind zunächst beliebige Funktionen aus einem geeignet gewählten Funktionenraum, mit der Einschränkung jedoch, da es sich eben um eine FEL-Methode handelt, daß diese nur auf endlichen Gebieten eines Gitters, den finiten Elementen, von Null verschieden sind.

In der schwachen Form der Wellengleichung (4.1) erscheint es zweckmäßig die Ordnung des Differentialoperators zu reduzieren. Dies geschieht durch die mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes $\int_V d^3x \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{\zeta}(\underline{x}) = \int_{\partial V} d\underline{S} \cdot \underline{\zeta}(\underline{x})$ leicht zu beweisende mathematische Identität

$$\int_V d^3x \underline{\phi}(\underline{x}) \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \wedge \left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \wedge \underline{\zeta}(\underline{x}) \right) = \quad (4.2)$$

$$\int_V d^3x \left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \wedge \underline{\phi}(\underline{x}) \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \wedge \underline{\zeta}(\underline{x}) \right) - \int_{\partial V} d\underline{S} \cdot \underline{\phi}(\underline{x}) \wedge \left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \wedge \underline{\zeta}(\underline{x}) \right) ,$$

wo ∂V den Rand des Integrationsvolumens V und $d\underline{S}$ das nach außen gerichtete Flächenelement bezeichnen. Man erhält als Ergebnis die schwache Form der Wellengleichung (4.1) in der Gestalt

$$\frac{c^2}{\omega^2} \int_V d^3x \left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \wedge [\underline{F}]^* \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \wedge \underline{E} \right) = \quad (4.3)$$

$$\frac{c^2}{\omega^2} \int_{\partial V} d\underline{S} \cdot [\underline{F}]^* \wedge \left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \wedge \underline{E} \right) + \int_V d^3x [\underline{F}]^* \cdot \left(\underline{E} + \frac{4\pi i}{\omega} \underline{J} \right) .$$

Abgesehen vom Vorteil eines vereinfachten Differentialoperators, bietet Gl. (4.3) die Möglichkeit dem System über die sogenannten Randterme $\frac{c^2}{\omega^2} \int_{\partial V} d\underline{S} \cdot [\underline{F}]^* \wedge \left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \wedge \underline{E} \right)$ in natürlicher Weise Randbedingungen aufzuprägen. Der Lösungsweg, den die Galerkin-FEL-Methode vorzeichnet, besteht nun im wesentlichen darin, das gesuchte elektrische Wellenfeld \underline{E} als Linearkombination der Testfunktionen \underline{F} anzusetzen. Nach Ausführung der diversen Integrationen in Gl. (4.3), insbesondere der Mehrfachintegrale der konstitutiven Relation, erhält man ein algebraisches Gleichungssystem in den unbekanntem Koeffizienten dieses Ansatzes, symbolisch $\underline{S} \cdot \underline{\epsilon} = \underline{b}$. Dabei bezeichnet \underline{S} die "stiffness"-Matrix¹, deren Bandbreite durch die nichtlokale Struktur der Wellengleichung bestimmt wird, $\underline{\epsilon}$ den Vektor der unbekanntem Koeffizienten des elektrischen Wellenfeldes und \underline{b} die als Randbedingung vorzugebenden Anteile der Randterme, vgl. Abschnitt 1.4. Die Lösung des Gleichungssystems erfolgt durch Inversion der "stiffness"-Matrix und Verjüngung mit dem vorgegebenen Vektor \underline{b} , formal $\underline{\epsilon} = \underline{S}^{-1} \cdot \underline{b}$.

Die schwache Wellengleichung (4.3) die den Ausgangspunkt der hier benutzten Galerkin-FEL-Methode bildet, ist nun auf die in Abschnitt 2.3 beschriebene "slab"-Konfiguration zu spezialisieren. Für die Testfunktionen setzt man dann allgemein

$$\underline{F} = e^{-i\omega t} e^{ik'_y y} e^{ik'_\parallel z} \underline{f}(x) \quad (4.4)$$

an, wo k'_y und k'_\parallel feste Wellenzahlen aus den diskreten k_y - bzw. k_\parallel -Spektren bezeichnen, und $\underline{f}(x)$ komplexwertige Vektorfunktionen, die nur mit x variieren. Damit und mit den Gleichungen (2.17) und (2.18) können, wenn das Integrationsvolumen, also der Bereich in dem nach einer Lösung gesucht wird, durch $V = [x_a, x_b] \times [0, L_y] \times [0, L_z]$ gegeben ist, und wenn man berücksichtigt, daß wegen der in Abschnitt 2.3 angenommenen Periodizität die Relationen $\int_0^{L_y} dy e^{i(k_y - k'_y)y} = L_y \delta_{k_y, k'_y}$ und $\int_0^{L_z} dz e^{i(k_\parallel - k'_\parallel)z} = L_z \delta_{k_\parallel, k'_\parallel}$ gelten, die diversen Terme aus Gl. (4.3) spezifiziert werden. Es gilt

$$\int_V d^3x [\underline{F}]^* \cdot \underline{E} = L_y L_z e^{2\omega i t} \int_{x_a}^{x_b} dx [\underline{f}(x)]^* \cdot \underline{E}(x; k'_y, k'_\parallel) , \quad (4.5)$$

¹Diese Bezeichnung hat historische Gründe und wurzelt in der weitverbreiteten Anwendung von FEL-Methoden in Strukturproblemen der Ingenieurwissenschaften.

$$\frac{4\pi i}{\omega} \int_V d^3x [F]^* \cdot \underline{J} = L_y L_z e^{2\omega i t} \frac{4\pi i}{\omega} \int_{x_a}^{x_b} dx [f(x)]^* \cdot \underline{J}(x; k'_y, k'_\parallel), \quad (4.6)$$

$$\frac{c^2}{\omega^2} \int_V d^3x \left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \wedge [F]^* \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \wedge \underline{E} \right) = \quad (4.7)$$

$$L_y L_z e^{2\omega i t} \int_{x_a}^{x_b} dx \left([\hat{n}]^* \wedge [f(x)]^* \right) \cdot (\hat{n}' \wedge \underline{J}(x; k'_y, k'_\parallel))$$

bzw. für die Randterme

$$\frac{c^2}{\omega^2} \int_{\partial V} d\underline{S} \cdot [F]^* \wedge \left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \wedge \underline{E} \right) = \quad (4.8)$$

$$L_y L_z e^{2\omega i t} \frac{c}{\omega} \underline{\epsilon}^1 \cdot \left[[f(x)]^* \wedge (i\hat{n}' \wedge \underline{E}(x; k'_y, k'_\parallel)) \right]_{x=x_a}^{x_b},$$

wo $\hat{n}' := -i\frac{c}{\omega} \underline{\epsilon}^1 \frac{\partial}{\partial x} + n'_y \underline{\epsilon}^2 + n'_\parallel \underline{\epsilon}^3$ den Brechungsindexoperator bezeichnet, mit $n'_y := \frac{c}{\omega} k'_y$ und $n'_\parallel := \frac{c}{\omega} k'_\parallel$, den Brechungsindizes in y - bzw. Parallelrichtung. Mit Gl. (4.3), den Relationen (4.5) bis (4.8) und der Substitution $(n'_y, n'_\parallel) \rightarrow (n_y, n_\parallel)$, bzw. in der Folge $\hat{n}' \rightarrow \hat{n}$, kann man die schwache Form der Wellengleichung im "slab" angeben,

$$\int_{x_a}^{x_b} dx \left[([\hat{n}]^* \wedge [f(x)]^*) \cdot (\hat{n} \wedge \underline{E}(x; k_y, k_\parallel)) \right] - \quad (4.9)$$

$$[f(x)]^* \cdot \left(\underline{E}(x; k_y, k_\parallel) + \frac{4\pi i}{\omega} \underline{J}(x; k_y, k_\parallel) \right) = \frac{c}{\omega} \underline{\epsilon}^1 \cdot \left[[f(x)]^* \wedge (i\hat{n} \wedge \underline{E}(x; k_y, k_\parallel)) \right]_{x=x_a}^{x_b}.$$

4.2 Approximation der konstitutiven Relation

Die mathematisch komplizierteste Struktur aller Terme der Wellengleichung in der Gestalt (4.9) besitzt der "Stromdichteterm", in den die konstitutive Relation eingeht. Dieser Term kann mit Hilfe der Gleichungen (2.19), (2.20) und (2.21) in der Form

$$\frac{4\pi i}{\omega} \int_{x_a}^{x_b} dx [f(x)]^* \cdot \underline{J}(x; k_y, k_\parallel) = \frac{2i}{\omega} \int_{x_a}^{x_b} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' [f(x)]^* \cdot \quad (4.10)$$

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x x} \int_{-\infty}^{\infty} dk'_x e^{-ik'_x x'} \int_{-\infty}^{\infty} dx'' e^{i(k'_x - k_x)x''} \underline{\sigma}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; x'') \right] \cdot \underline{E}(x'; k_y, k_\parallel)$$

angeschrieben werden. Die explizite Berechnung der Elemente der "stiffness"-Matrix erfordert dessen Auswertung, also die Durchführung der fünffachen Integration in obiger Relation. Dies erscheint ohne weitere Vereinfachung sowohl in analytischer als auch numerischer Rechnung undurchführbar. Im folgenden werden einige fundamentale Eigenschaften des Leitfähigkeitskerns (2.20) qualitativ diskutiert, mit dem Ziel, die konstitutive Relation physikalisch sinnvoll durch einen Ausdruck zu approximieren, der mathematisch gehandhabt werden kann.

In Abschnitt 3.1 wurde bereits darauf hingewiesen, daß die Reichweite der Nichtlokalität der konstitutiven Relation (2.19) zwar formal unendlich groß ist, jedoch in guter

Näherung durch eine endliche Nichtlokalitätslänge $L_{nonlocal}$ charakterisiert werden kann. Diese definiert die Untergrenze jener Werte von $|x - x'|$ ab der die Komponenten des Integralkerns $\underline{\sigma}(x, x'; k_y, k_{||})$ als vernachlässigbar klein angesehen werden können. Betrachtet man der Einfachheit halber den Leitfähigkeitskern im Grenzfall des homogenen Plasmas, wie er in Gl. (2.54) gegeben ist, dann wird mit Relation (2.56) ersichtlich, daß $\underline{\sigma}(x, x'; k_y, k_{||})$ in diesem Fall nur über $(x - x')/\rho_\alpha^{Gyro}$ von x und x' abhängt, die thermischen Gyroradien also als natürliche Längenskalen der Nichtlokalität eingehen. Aus der Gestalt der Integranden der Parameterintegrale (2.55), die im Leitfähigkeitskern auftreten und oszillierende Faktoren $e^{ix\gamma}$ enthalten, folgt offensichtlich, daß mit wachsendem $|(x - x')/\rho_\alpha^{Gyro}|$ der Kern $\underline{\sigma}(x, x'; k_y, k_{||})$ gegen Null geht, wie es zu erwarten ist. Hingegen zeigen für $(x - x')/\rho_\alpha^{Gyro} \rightarrow 0$ einige dieser Parameterintegrale sogar logarithmisch divergentes Verhalten, vgl. die Diskussion in Abschnitt 2.4. Die Nichtlokalitätslänge $L_{nonlocal}$ scheint also auf einige thermische Gyroradien beschränkt zu sein; die Hauptbeiträge zur Stromdichte kommen jedenfalls von $x \approx x'$.

Dieses Verhalten des Leitfähigkeitskernes $\underline{\sigma}(x, x'; k_y, k_{||})$ stimmt insbesondere mit dem physikalischen Grundgedanken einer Herleitung der konstitutiven Relation durch Trajektorienintegration überein, vgl. Relation (2.15). Die nichtlokale Verknüpfung der Stromdichtestörung mit den elektrischen Wellenfeldern ist als Folge der thermischen Streuung der Geschwindigkeiten der Plasmateilchen zu verstehen. Durch diese Streuung konnten Teilchen, die am Ort \underline{x} die Stromdichte \underline{J} erzeugen, in der Vergangenheit alle möglichen Trajektorien durchlaufen, sodaß die Wellenfelder entlang dieser Bahnen nichtlokal auf sie einwirken konnten, vgl. Abschnitt 2.2. In der hier vorausgesetzten "slab"-Geometrie ist aber die mittlere Ausdehnung der Orbits der Plasmateilchen in x -Richtung und in der Folge die Nichtlokalitätslänge durch die thermischen Gyroradien beschränkt. Ein genauer Wert von $L_{nonlocal}$ ist durch solche qualitative Überlegungen natürlich nicht zu ermitteln, sodaß im Zuge der numerischen Integration der Wellengleichung die Nichtlokalitätslänge als freier Parameter zu betrachten ist, und die Konvergenz des Verfahrens mit wachsendem $L_{nonlocal}$ im Einzelfall zu prüfen ist.

Nun gehen die Plasmaparameter bzw. ihre Gradienten in den Stromdichteterm über den σ -Tensor $\underline{\sigma}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_{||}; x'')$ ein, wo sie durch ihre räumliche Variation die x'' -Abhängigkeit desselben verursachen, siehe Abschnitt 2.3. Vertauscht man in Gl. (4.10) die k_x - und k'_x -Integrationen mit der x'' -Integration, so enthalten die Integranden der k_x - bzw. k'_x -Integrale die oszillierenden Faktoren $e^{i(x-x'')k_x}$ und $e^{i(x''-x')k'_x}$. Der Hauptbeitrag dieser Parameterintegrale wird von $x'' \approx x$ und $x'' \approx x'$ kommen; für $|x'' - x| \rightarrow \infty$ bzw. $|x'' - x'| \rightarrow \infty$ gehen sie gegen Null. Wenn man sich Gl. (2.15) in Erinnerung ruft so wird klar, daß die Plasmaparameter, die dort im " $\frac{\partial}{\partial v} F_\alpha$ "-Term auftreten, ebenso wie das elektrische Wellenfeld \underline{E} nur entlang der ungestörten Trajektorien in die konstitutive Relation eingehen; diese Orbits sind aber in ihrer Ausdehnung in x -Richtung, wie schon erwähnt, durch die Gyroradien beschränkt, die auch $L_{nonlocal}$ determinieren. Demgemäß werden in die wesentlich von Null verschiedenen Beiträge des Leitfähigkeitskernes $\underline{\sigma}(x, x'; k_y, k_{||})$, die durch Argumente $|x - x'| \leq L_{nonlocal}$ charakterisiert sind, die Plasmaparameter nur an Orten mit x'' -Werten eingehen, die den analogen Relationen

$|x'' - x| \leq L_{nonlocal}$ und $|x'' - x'| \leq L_{nonlocal}$ genügen.

Unter der für Tokamak-Plasmen kaum restriktiven Annahme, daß die Plasmaparameter auf Längenskalen variieren, die sehr viel größer als $L_{nonlocal}$ und damit die thermischen Gyroradien sind, daß also

$$|L^{(n_\alpha)}(x)|, |L^{(v_{ih}^\alpha)}(x)| \text{ und } |L^{(|\underline{B}^{stat}|)}(x)| \gg L_{nonlocal} \approx \max\{|\varrho_\alpha^{Gyro}(x)|\} \quad (4.11)$$

gilt, wo die Gradientenlängen durch die Definitionen (2.37), (2.38) bzw.

$$L^{(|\underline{B}^{stat}|)}(x) := \left(\frac{1}{|\underline{B}^{stat}(x)|} \frac{d|\underline{B}^{stat}(x)|}{dx} \right) \quad (4.12)$$

gegeben sind, kann nun $\underline{\sigma}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; x'')$ unter der x'' -Integration in Gl. (2.21) bzw. (4.10) durch

$$\underline{\sigma}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; x'') \approx \underline{\sigma}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; X(x, x')) \quad (4.13)$$

approximiert werden. Dabei wird vorausgesetzt, daß der Ort $X(x, x')$ an dem der σ -Tensor ausgewertet wird, als Funktion von Argumenten x und x' die der Ordnungsrelation $|x - x'| \leq L_{nonlocal}$ genügen, die Bedingungen

$$|X(x, x') - x| \leq L_{nonlocal} \quad (4.14)$$

bzw.

$$|X(x, x') - x'| \leq L_{nonlocal}$$

erfüllt; eine geeignete, nähere Spezifikation der Funktion $X(x, x')$ ist später anhand konkreter Rechnungen durchzuführen. Mit Gl. (2.20), (2.21) und (4.13) lassen sich die k'_x - und x'' -Integration analytisch ausführen; man erhält

$$\underline{\sigma}(x, x'; k_y, k_\parallel) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x(x-x')} \underline{\sigma}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; X(x, x')) , \quad (4.15)$$

bzw. aufgespalten in Stix-Term und diamagnetischen Beitrag,

$$\underline{\sigma}^{(s)}(x, x'; k_y, k_\parallel) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x(x-x')} \underline{\sigma}^{(s)}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; X(x, x')) , \quad (4.16)$$

vgl. (2.23) und (2.32). Mit Gl. (4.15) lautet der Stromdichteterm (4.10) schließlich

$$\begin{aligned} & \frac{4\pi i}{\omega} \int_{x_a}^{x_b} dx \left[\underline{f}(x) \right]^* \cdot \underline{J}(x; k_y, k_\parallel) = \\ & \frac{4\pi i}{\omega} \int_{x_a}^{x_b} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left[\underline{f}(x) \right]^* \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x(x-x')} \underline{\sigma}(k_\perp, k'_\perp; \psi, \psi'; k_\parallel; X(x, x')) \right] \cdot \underline{E}(x'; k_y, k_\parallel) . \end{aligned} \quad (4.17)$$

Alternativ zu dieser Form der Näherung des Leitfähigkeitskernes wird im folgenden noch eine andere Approximation benutzt, die den Vorteil bietet, als Fortran-Code implementiert, weniger Rechenzeit-intensiv zu sein; dies allerdings um den Preis restriktiverer

physikalischer Annahmen und als Folge, je nach Parameterwahl, weniger genauer numerischer Ergebnisse. Im Zuge dieser Näherung wird zunächst mit Hilfe der Definition

$$\underline{\underline{\sigma}}^{fgr}(k_{\perp}, k'_{\perp}; \psi, \psi'; k_{\parallel}; x'') := \underline{\underline{\sigma}}(k_{\perp}, k'_{\perp}; \psi, \psi'; k_{\parallel}; x'') - \underline{\underline{\sigma}}^{zgr}(k_{\parallel}; x''), \quad (4.18)$$

der Integrand des Leitfähigkeitskernes in einen "finite gyroradius" und einen "zero gyroradius"-Beitrag aufgespalten, formal

$$\underline{\underline{\sigma}}(k_{\perp}, k'_{\perp}; \psi, \psi'; k_{\parallel}; x'') = \underline{\underline{\sigma}}^{zgr}(k_{\parallel}; x'') + \underline{\underline{\sigma}}^{fgr}(k_{\perp}, k'_{\perp}; \psi, \psi'; k_{\parallel}; x''). \quad (4.19)$$

Hier ist im Hinblick auf das IBW-Heizschema erwähnenswert, daß die IBW wesentlich durch den "finite gyroradius"-Anteil² bestimmt wird, während dieser Beitrag für die SW gegenüber dem "zero gyroradius"-Term vernachlässigbar ist. Setzt man auch hier wieder die Ordnungsrelationen (4.11), d.h. langsam variierende Plasmaparameter voraus, so kann unter der x'' -Integration in Gl. (2.21) bzw. (4.10) $\underline{\underline{\sigma}}^{fgr}(k_{\perp}, k'_{\perp}; \psi, \psi'; k_{\parallel}; x'')$ durch $\underline{\underline{\sigma}}^{fgr}(k_{\perp}, k'_{\perp}; \psi, \psi'; k_{\parallel}; x_{exp})$ approximiert werden, wo $x_{exp} \in [x_a, x_b]$ einen festen Entwicklungspunkt bezeichnet,

$$\underline{\underline{\sigma}}(k_{\perp}, k'_{\perp}; \psi, \psi'; k_{\parallel}; x'') \approx \underline{\underline{\sigma}}^{zgr}(k_{\parallel}; x'') + \underline{\underline{\sigma}}^{fgr}(k_{\perp}, k'_{\perp}; \psi, \psi'; k_{\parallel}; x_{exp}). \quad (4.20)$$

Damit lassen sich unter Ausnutzung der Integraldarstellung der δ -Distribution wieder einige Integrale der konstitutiven Relation analytisch berechnen; mit Gl. (2.20), (2.21), (4.13) und (4.18) folgt für den Leitfähigkeitskern im Ortsraum

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}(x, x'; k_y, k_{\parallel}) &= 2\pi\delta(x - x') \left(\underline{\underline{\sigma}}^{zgr}(k_{\parallel}; x) - \underline{\underline{\sigma}}^{zgr}(k_{\parallel}; x_{exp}) \right) + \\ &\int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x(x-x')} \underline{\underline{\sigma}}(k_{\perp}, k'_{\perp}; \psi, \psi'; k_{\parallel}; x_{exp}), \end{aligned} \quad (4.21)$$

bzw. für den Stromdichteterm (4.10)

$$\begin{aligned} \frac{4\pi i}{\omega} \int_{x_a}^{x_b} dx \left[\underline{\underline{f}}(x) \right]^* \cdot \underline{\underline{J}}(x; k_y, k_{\parallel}) &= \\ \frac{8\pi^2 i}{\omega} \int_{x_a}^{x_b} dx \left[\underline{\underline{f}}(x) \right]^* \cdot \left(\underline{\underline{\sigma}}^{zgr}(k_{\parallel}; x) - \underline{\underline{\sigma}}^{zgr}(k_{\parallel}; x_{exp}) \right) \cdot \underline{\underline{E}}(x; k_y, k_{\parallel}) + \\ \frac{4\pi i}{\omega} \int_{x_a}^{x_b} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left[\underline{\underline{f}}(x) \right]^* \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x(x-x')} \underline{\underline{\sigma}}(k_{\perp}, k'_{\perp}; \psi, \psi'; k_{\parallel}; x_{exp}) \right] \cdot \underline{\underline{E}}(x'; k_y, k_{\parallel}). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Um ein Kriterium für die Anwendbarkeit der Approximation (4.20) zu finden, sei daran erinnert, daß die Plasmaparameter nur an Orten mit x'' -Werten, die die Relationen $|x'' - x| \leq L_{nonlocal}$ und $|x'' - x'| \leq L_{nonlocal}$ erfüllen, in die signifikanten Beiträge des Leitfähigkeitskernes zur konstitutiven Relation (charakterisiert durch $|x - x'| \leq L_{nonlocal}$)

²Tatsächlich wird erst durch Berücksichtigung von "finite gyroradius"-Effekten die LH-Resonanz durch eine Modenkonzersion ersetzt; im Gegensatz zur SW verschwindet im "zero gyroradius"-Limes der IBW-Zweig vollständig aus der lokalen Dispersionsrelation.

eingehen. Das gesuchte Kriterium ergibt sich also, wenn man in diesen Beziehungen x'' durch x_{exp} ersetzt und berücksichtigt, daß dieses nur für Moden die wesentlich von "finite gyroradius"-Beiträgen bestimmt werden, relevant ist. Gemäß (4.11) ist dann zu erwarten, daß die im Rahmen der Näherung (4.20) bestimmte Stromdichteperturbation $\underline{J}(x; k_y, k_{||})$ einer solchen "finite gyroradius"-Welle in einem x -Intervall um x_{exp} von der Breite einiger Gyroradien gut mit dem exakten Ausdruck übereinstimmen wird. Für die Modenkonversion in der Nähe der LH-Resonanz, bedeutet das, da die Wellenlänge der IBW von derselben Größenordnung wie der thermische Ionen-Gyroradius ist, daß man bei geeigneter Wahl von x_{exp} nach der Modenkonversionsschicht noch einige Wellenlängen der Mode des IBW-Zweiges berechnen können wird. Die langsame Welle, wesentlich durch "zero gyroradius"-Terme determiniert, sollte von dieser Approximation kaum beeinflusst werden.

4.3 Testfunktionen

Die Testfunktionen $f(x)$ aus Gl. (4.4) bzw. (4.9) sind (entsprechend den allgemeinen Bemerkungen zur Galerkin-FEL-Methode in Abschnitt 4.1) nur auf jeweils einem der durch ein eindimensionales Gitter definierten finiten Elemente, Teilintervallen von $[x_a, x_b]$, von Null verschieden. In vorliegender Arbeit wird den Rechnungen ein gleichförmiges Gitter $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ bestehend aus $N + 1$ Stützstellen mit einer Gitterkonstanten $h := (x_N - x_0)/N$ zugrunde gelegt, sodaß $x_n = x_0 + nh$ gilt. Die Endpunkte des Gitters sollen die Bedingungen $x_0 = x_a$ bzw. $x_N = x_b$ erfüllen. Mit jedem der $N + 1$ Gitterpunkte ist jeweils eine lokale Koordinate

$$\xi_n(x) := \frac{x - x_n}{h} = \frac{x - x_0}{h} - n \quad (4.23)$$

verknüpft.

Als kubische Hermite-Polynome werden die "stückweisen" Polynome

$$H_0(\xi) := \begin{cases} (|\xi| - 1)^2(2|\xi| + 1) & \dots \text{ falls } \xi \in [-1, +1] \\ 0 & \dots \text{ falls } \xi \notin [-1, +1] \end{cases} \quad (4.24)$$

bzw.

$$H_1(\xi) := \begin{cases} (|\xi| - 1)^2\xi & \dots \text{ falls } \xi \in [-1, +1] \\ 0 & \dots \text{ falls } \xi \notin [-1, +1] \end{cases} \quad (4.25)$$

bezeichnet, die ebenso wie ihre ersten Ableitungen

$$\frac{dH_0(\xi)}{d\xi} := \begin{cases} 6\xi(|\xi| - 1) & \dots \text{ falls } \xi \in [-1, +1] \\ 0 & \dots \text{ falls } \xi \notin [-1, +1] \end{cases} \quad (4.26)$$

und

$$\frac{dH_1(\xi)}{d\xi} := \begin{cases} |\xi|(3|\xi| - 4) + 1 & \dots \text{ falls } \xi \in [-1, +1] \\ 0 & \dots \text{ falls } \xi \notin [-1, +1] \end{cases} \quad (4.27)$$

für alle $\xi \in \mathbf{R}$ stetig sind.

Mit obigen Definitionen können als Testfunktionen der Wellengleichung (4.9) die dreifach indizierte Klasse reellwertiger Vektoren

$$\underline{f}(x) = \underline{e}^j h^\nu H_\nu(\xi_m(x)) \quad (4.28)$$

gewählt werden, wo $m \in \{0, 1, \dots, N\}$, $j \in \{1, 2, 3\}$ und $\nu \in \{0, 1\}$ gilt. Dabei ist der Index m mit den Gitterpunkten, j mit den drei Vektorkomponenten der gesuchten Lösung $\underline{E}(x; k_y, k_{||})$, und schließlich ν mit dem Index der kubischen Hermite-Polynome H_0 und H_1 assoziiert. Die letztgenannte Indizierung ist notwendig, da Gl. (4.9) neben dem Wellenfeld $\underline{E}(x; k_y, k_{||})$ auch dessen Ableitung als Unbekannte umfaßt. Geht man in die Wellengleichung mit dem Galerkin-Lösungsansatz

$$\underline{E}(x; k_y, k_{||}) = \sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^3 \sum_{\beta=0}^1 \epsilon_{n,k}^{[\beta]} h^\beta H_\beta(\xi_n(x)) \underline{e}^k \quad (4.29)$$

ein, wo $x \in [x_0, x_N]$ gilt und $\epsilon_{n,k}^{[\beta]} \in \mathbf{C}$ die unbekanntenen Galerkin-Koeffizienten bezeichnet, so führen die Testfunktionen (4.28) auf ebensoviele algebraische Gleichungen in diesen Koeffizienten, wie solche im Wellenfeld (4.29) auftreten. Insbesondere sichert die Wahl (4.28) der Testfunktionen gemäß (4.29) die Stetigkeit des elektrischen und magnetischen Feldes an den Grenzen zwischen den finiten Elementen und garantiert so gute Konvergenzeigenschaften des numerischen Verfahrens.

Aus den Gleichungen (4.23) bis (4.27) folgt für die Werte der Testfunktionen und ihrer ersten Ableitungen an den Gitterpunkten

$$\left[\frac{d^\mu}{dx^\mu} \left(\underline{e}^j h^\nu H_\nu(\xi_m(x)) \right) \right]_{x=x_n} = \delta_{m,n} \delta_{\nu,\mu} \underline{e}^j, \quad (4.30)$$

mit $m, n \in \{0, 1, \dots, N\}$, $j \in \{1, 2, 3\}$ und $\nu, \mu \in \{0, 1\}$, sodaß man die physikalische Bedeutung der $6(N+1)$ Unbekannten $\epsilon_{n,k}^{[\beta]}$ unmittelbar aus Gl. (4.29) ablesen kann:

$$\underline{E}(x_n; k_y, k_{||}) = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{n,k}^{[0]} \underline{e}^k \quad (4.31)$$

bzw.

$$\left[\frac{d}{dx} \underline{E}(x; k_y, k_{||}) \right]_{x=x_n} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{n,k}^{[1]} \underline{e}^k. \quad (4.32)$$

4.4 Auswertung der lokalen Terme der Wellengleichung

Terme der Wellengleichung (4.9), die neben dem x -Integral der schwachen Form keine andere Integration enthalten, werden im gegenständlichen Zusammenhang als lokale Terme³ bezeichnet. Konkret sind dies

$$\int_{x_a}^{x_b} dx \left([\hat{n}]^* \wedge [f(x)]^* \right) \cdot \left(\hat{n} \wedge \underline{E}(x; k_y, k_{\parallel}) \right) = \quad (4.33)$$

$$\sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^3 \sum_{\beta=0}^1 h^{\nu+\beta} \epsilon_{n,k}^{[\beta]} \int_{x_a}^{x_b} dx \left([\hat{n}]^* \wedge \underline{e}^j H_{\nu}(\xi_m(x)) \right) \cdot \left(\hat{n} \wedge \underline{e}^k H_{\beta}(\xi_n(x)) \right)$$

und

$$\int_{x_a}^{x_b} dx [f(x)]^* \cdot \underline{E}(x; k_y, k_{\parallel}) = \quad (4.34)$$

$$\sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^3 \sum_{\beta=0}^1 \delta_{j,k} h^{\nu+\beta} \epsilon_{n,k}^{[\beta]} \int_{x_a}^{x_b} dx H_{\nu}(\xi_m(x)) H_{\beta}(\xi_n(x)),$$

die hier mit Hilfe der Relationen (4.28) und (4.29) in einer Form angeschrieben werden, die die Integration über die kubischen Hermite-Polynome explizite enthält. Darüber hinaus treten auch in der Approximation (4.21) des Stromdichteterms lokale Anteile auf; diese sollen aber zusammen mit seinen nichtlokalen Beiträgen ausgewertet werden. In der folgenden Rechnung werden die von den Gitterpunktindizes m und n abhängigen Integrale der Gleichungen (4.33) und (4.34) auf einige wenige, von den Gitterpunkten unabhängige Integrationen reduziert, wie sie im Hinblick auf die hier benutzte FEL-Methode von Vorteil sind.

Mit Hilfe des Brechungsindexoperators $\hat{n} := -i \frac{c}{\omega} \underline{e}^1 \frac{\partial}{\partial x} + n_y \underline{e}^2 + \iota n_{\parallel} \underline{e}^3$ aus Abschnitt 3.1 und den Definitionen

$$\underline{\Gamma}(0, 0) := \begin{bmatrix} n_y^2 + n_{\parallel}^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_{\parallel}^2 & -\iota n_y n_{\parallel} \\ 0 & -\iota n_y n_{\parallel} & n_y^2 \end{bmatrix}, \quad (4.35)$$

$$\underline{\Gamma}(1, 0) := \begin{bmatrix} -i \frac{c}{\omega} n_y & 0 & 0 \\ -i \frac{c}{\omega} \iota n_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

$$\underline{\Gamma}(0, 1) := \begin{bmatrix} 0 & i \frac{c}{\omega} n_y & i \frac{c}{\omega} \iota n_{\parallel} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

und

$$\underline{\Gamma}(1, 1) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c^2}{\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c^2}{\omega^2} \end{bmatrix}, \quad (4.38)$$

³Die Randterme der Wellengleichung sind in diesem Sinne natürlich weder lokal noch nichtlokal; sie sind gesondert auszuwerten.

kann leicht gezeigt werden, daß die Relation

$$\left([\hat{n}]^* \wedge \underline{e}^j H_\nu(\xi_m(x))\right) \cdot \left(\hat{n} \wedge \underline{e}^k H_\beta(\xi_n(x))\right) = \quad (4.39)$$

$$\sum_{\delta=0}^1 \sum_{\gamma=0}^1 \Gamma_{jk}(\delta, \gamma) \left(\frac{d^\delta}{dx^\delta} H_\nu(\xi_m(x))\right) \left(\frac{d^\gamma}{dx^\gamma} H_\beta(\xi_n(x))\right)$$

gilt, wo die Konvention $\Gamma_{jk}(\delta, \gamma) := \underline{e}^j \cdot \underline{\Gamma}(\delta, \gamma) \cdot \underline{e}^k$ benutzt wird. Mit den Bezeichnungen

$$\mathcal{H}^{ML}(\delta, \gamma; \nu, \beta) := h^{1+\nu+\beta-\delta-\gamma} \int_{-1}^0 d\xi \frac{d^\delta H_\nu(\xi)}{d\xi^\delta} \left[\frac{d^\gamma H_\beta(\zeta)}{d\zeta^\gamma} \right]_{\zeta=\xi+1}, \quad (4.40)$$

$$\mathcal{H}^{MR}(\delta, \gamma; \nu, \beta) := h^{1+\nu+\beta-\delta-\gamma} \int_0^1 d\xi \frac{d^\delta H_\nu(\xi)}{d\xi^\delta} \left[\frac{d^\gamma H_\beta(\zeta)}{d\zeta^\gamma} \right]_{\zeta=\xi-1}, \quad (4.41)$$

$$\mathcal{H}^L(\delta, \gamma; \nu, \beta) := h^{1+\nu+\beta-\delta-\gamma} \int_{-1}^0 d\xi \frac{d^\delta H_\nu(\xi)}{d\xi^\delta} \frac{d^\gamma H_\beta(\xi)}{d\xi^\gamma} \quad (4.42)$$

und

$$\mathcal{H}^R(\delta, \gamma; \nu, \beta) := h^{1+\nu+\beta-\delta-\gamma} \int_0^1 d\xi \frac{d^\delta H_\nu(\xi)}{d\xi^\delta} \frac{d^\gamma H_\beta(\xi)}{d\xi^\gamma} \quad (4.43)$$

und der Eigenschaft, daß die kubischen Hermite-Polynome $H_\nu(\xi_m(x))$ und ihre ersten Ableitungen gemäß Gl. (4.23) bis (4.27) nur im Intervall $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ von Null verschieden sind, bzw. $\frac{d^\gamma}{dx^\gamma} H_\beta(\xi_n(x))$ nur in $[x_{n-1}, x_{n+1}]$, folgt durch Substitution $dx \rightarrow h d\xi_m$ gemäß Gl. (4.23) in den einzigen nichtverschwindenden Beiträgen, charakterisiert durch die Beziehungen $n = m - 1$, $n = m$ und $n = m + 1$, die Identität

$$h^{\nu+\beta} \int_{x_a}^{x_b} dx \left(\frac{d^\delta}{dx^\delta} H_\nu(\xi_m(x))\right) \left(\frac{d^\gamma}{dx^\gamma} H_\beta(\xi_n(x))\right) = \delta_{n,m-1} \mathcal{H}^{ML}(\delta, \gamma; \nu, \beta) + \quad (4.44)$$

$$\delta_{n,m}(1 - \delta_{m,0}) \mathcal{H}^L(\delta, \gamma; \nu, \beta) + \delta_{n,m}(1 - \delta_{m,N}) \mathcal{H}^R(\delta, \gamma; \nu, \beta) + \delta_{n,m+1} \mathcal{H}^{MR}(\delta, \gamma; \nu, \beta).$$

Relation (4.44) ist in dieser Form für Indizes $m, n \in \{0, 1, \dots, N\}$ und $\delta, \gamma, \nu, \beta \in \{0, 1\}$ gültig; die Unabhängigkeit der diversen Integrale $\mathcal{H}^{\dots}(\delta, \gamma; \nu, \beta)$ von den Gitterindizes m und n ist auf die Gleichförmigkeit des benutzten Gitters zurückzuführen, wo je zwei benachbarte Gitterpunkte den festen Abstand h besitzen.

Mit den Beziehungen (4.39) und (4.44) kann der lokale Term (4.33) in der Form

$$\int_{x_a}^{x_b} dx \left([\hat{n}]^* \wedge [f(x)]^*\right) \cdot \left(\hat{n} \wedge \underline{E}(x; k_y, k_{||})\right) = \quad (4.45)$$

$$\sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^3 \sum_{\beta=0}^1 \left\{ \sum_{\delta=0}^1 \sum_{\gamma=0}^1 \Gamma_{jk}(\delta, \gamma) \left[\delta_{n,m-1} \mathcal{H}^{ML}(\delta, \gamma; \nu, \beta) + \delta_{n,m}(1 - \delta_{m,0}) \mathcal{H}^L(\delta, \gamma; \nu, \beta) + \right. \right. \\ \left. \left. \delta_{n,m}(1 - \delta_{m,N}) \mathcal{H}^R(\delta, \gamma; \nu, \beta) + \delta_{n,m+1} \mathcal{H}^{MR}(\delta, \gamma; \nu, \beta) \right] \right\} \epsilon_{n,k}^{[\beta]}$$

geschrieben werden, wo auf die Auswertung der Summation über n , die durch das Auftreten der Kronecker-Symbole im Summanden trivial ist, verzichtet wird. Aus Gl. (4.45) können später direkt die entsprechenden Beiträge zur "stiffness"-Matrix, hier in geschwungenen Klammern, abgelesen werden. Die analoge Gestalt des Terms (4.34) ergibt sich wieder mit der Identität (4.44). Es gilt

$$\int_{x_a}^{x_b} dx \left[\underline{f}(x) \right]^* \cdot \underline{E}(x; k_y, k_{||}) = \quad (4.46)$$

$$\sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^3 \sum_{\beta=0}^1 \left\{ \delta_{j,k} \left[\delta_{n,m-1} \mathcal{H}^{ML}(0,0;\nu,\beta) + \delta_{n,m}(1 - \delta_{m,0}) \mathcal{H}^L(0,0;\nu,\beta) + \right. \right. \\ \left. \left. \delta_{n,m}(1 - \delta_{m,N}) \mathcal{H}^R(0,0;\nu,\beta) + \delta_{n,m+1} \mathcal{H}^{MR}(0,0;\nu,\beta) \right] \right\} \epsilon_{n,k}^{[\beta]},$$

mit $m \in \{0, 1, \dots, N\}$, $k \in \{1, 2, 3\}$ und $\nu \in \{0, 1\}$.

Die Integrale (4.40) bis (4.43) können schließlich mit den Relationen (4.24) bis (4.27) analytisch berechnet werden. Obwohl lediglich elementare Integrale auftreten, sind die Rechnungen etwas länglich, sodaß sie am besten mit Hilfe geeigneter Software⁴ durchgeführt werden. Der Vollständigkeit halber sind die resultierenden Ergebnisse aufgelistet; zunächst die als "left"- und "right"-Terme bezeichneten Beiträge:

$$\mathcal{H}^L(0,0;0,0) = \frac{13}{35}h = \mathcal{H}^R(0,0;0,0), \quad (4.47)$$

$$\mathcal{H}^L(0,0;0,1) = \mathcal{H}^L(0,0;1,0) = -\frac{11}{210}h^2 = -\mathcal{H}^R(0,0;0,1) = -\mathcal{H}^R(0,0;1,0),$$

$$\mathcal{H}^L(0,0;1,1) = \frac{1}{105}h^3 = \mathcal{H}^R(0,0;1,1),$$

$$\mathcal{H}^L(0,1;0,0) = \mathcal{H}^L(1,0;0,0) = \frac{1}{2} = -\mathcal{H}^R(0,1;0,0) = -\mathcal{H}^R(1,0;0,0),$$

$$\mathcal{H}^L(0,1;1,0) = \mathcal{H}^L(1,0;0,1) = -\frac{1}{10}h = \mathcal{H}^R(0,1;1,0) = \mathcal{H}^R(1,0;0,1),$$

$$\mathcal{H}^L(0,1;0,1) = \mathcal{H}^L(1,0;1,0) = \frac{1}{10}h = \mathcal{H}^R(0,1;0,1) = \mathcal{H}^R(1,0;1,0),$$

$$\mathcal{H}^L(0,1;1,1) = \mathcal{H}^L(1,0;1,1) = 0 = \mathcal{H}^R(0,1;1,1) = \mathcal{H}^R(1,0;1,1),$$

$$\mathcal{H}^L(1,1;0,0) = \frac{6}{5}h^{-1} = \mathcal{H}^R(1,1;0,0),$$

$$\mathcal{H}^L(1,1;0,1) = \mathcal{H}^L(1,1;1,0) = -\frac{1}{10} = -\mathcal{H}^R(1,1;0,1) = -\mathcal{H}^R(1,1;1,0)$$

bzw.

$$\mathcal{H}^L(1,1;1,1) = \frac{2}{15}h = \mathcal{H}^R(1,1;1,1),$$

dann die "mixed left"- und die "mixed right"-Terme:

$$\mathcal{H}^{ML}(0,0;0,0) = \frac{9}{70}h = \mathcal{H}^{MR}(0,0;0,0), \quad (4.48)$$

$$\mathcal{H}^{ML}(0,0;0,1) = \frac{13}{420}h^2 = -\mathcal{H}^{MR}(0,0;0,1),$$

$$\mathcal{H}^{ML}(0,0;1,0) = -\frac{13}{420}h^2 = -\mathcal{H}^{MR}(0,0;1,0),$$

⁴MATHEMATICA, Wolfram Research (UK) Ltd.

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{ML}(0, 0; 1, 1) &= -\frac{1}{140}h^3 = \mathcal{H}^{MR}(0, 0; 1, 1) , \\
\mathcal{H}^{ML}(0, 1; 0, 0) &= -\frac{1}{2} = -\mathcal{H}^{MR}(0, 1; 0, 0) , \\
\mathcal{H}^{ML}(0, 1; 0, 1) &= -\frac{1}{10}h = \mathcal{H}^{MR}(0, 1; 0, 1) , \\
\mathcal{H}^{ML}(0, 1; 1, 0) &= \frac{1}{10}h = \mathcal{H}^{MR}(0, 1; 1, 0) , \\
\mathcal{H}^{ML}(0, 1; 1, 1) &= \frac{1}{60}h^2 = -\mathcal{H}^{MR}(0, 1; 1, 1) , \\
\mathcal{H}^{ML}(1, 0; 0, 0) &= \frac{1}{2} = -\mathcal{H}^{MR}(1, 0; 0, 0) , \\
\mathcal{H}^{ML}(1, 0; 0, 1) &= \frac{1}{10}h = \mathcal{H}^{MR}(1, 0; 0, 1) , \\
\mathcal{H}^{ML}(1, 0; 1, 0) &= -\frac{1}{10}h = \mathcal{H}^{MR}(1, 0; 1, 0) , \\
\mathcal{H}^{ML}(1, 0; 1, 1) &= -\frac{1}{60}h^2 = -\mathcal{H}^{MR}(1, 0; 1, 1) , \\
\mathcal{H}^{ML}(1, 1; 0, 0) &= -\frac{6}{5}h^{-1} = \mathcal{H}^{MR}(1, 1; 0, 0) , \\
\mathcal{H}^{ML}(1, 1; 0, 1) &= -\frac{1}{10} = -\mathcal{H}^{MR}(1, 1; 0, 1) , \\
\mathcal{H}^{ML}(1, 1; 1, 0) &= \frac{1}{10} = -\mathcal{H}^{MR}(1, 1; 1, 0)
\end{aligned}$$

bzw.

$$\mathcal{H}^{ML}(1, 1; 1, 1) = -\frac{1}{30}h = \mathcal{H}^{MR}(1, 1; 1, 1) .$$

Alternativ zur analytischen Auswertung (4.47) und (4.48) können die Integrale (4.40) bis (4.43) auch durch eine Gauß-Quadratur numerisch berechnet werden, mit praktisch identischem Aufwand.

4.5 Auswertung der nichtlokalen Terme der Wellengleichung

Die Auswertung der nichtlokalen Beiträge zur Wellengleichung basiert auf den mathematischen Vereinfachungen des Stromdichteterms, wie sie in Abschnitt 4.2 diskutiert wurden. Wird Approximation (4.13) angewandt, stellt der gesamte Stromdichteterm (4.17) einen nichtlokalen Beitrag zur Wellengleichung dar; hingegen treten im Falle der Näherung (4.21) im Stromdichteterm (4.22) zusätzlich lokale Anteile auf die den "zero gyroradius"-Limes des Leitfähigkeitskernes enthalten. Hier sollen zunächst speziell für die gewählten Testfunktionen, also die kubischen Hermite-Polynome (4.24) und (4.25), die Integrationen im Beitrag (4.17) so weit wie möglich analytisch ausgewertet und in eine für die anschließende numerische Integration der Wellengleichung geeignete Form gebracht werden.

Der wesentliche Unterschied zur Berechnung der lokalen Terme besteht darin, daß der Galerkin-Ansatz (4.29) für das gesuchte elektrische Wellenfeld zur Auswertung der nichtlokalen Terme unzureichend ist, da in Gl. (4.18) das elektrische Feld unter der x' -Integration der konstitutiven Relation eingeht, die sich formal von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt. Der Galerkin-Ansatz bezieht sich jedoch nur auf das x' -Intervall $[x_a, x_b]$, das im folgenden als FEL-Rechenbereich bezeichnet wird. Wie bereits in Abschnitt 1.4 erläutert wurde,

wird aus diesem Grund in vorliegender Arbeit vorausgesetzt, daß außerhalb des FEL-Rechenbereiches, der die Modenkonversionsschicht des IBW-Heizszenarios umfassen soll, die Lösung der Wellengleichung in Form von WKB-Moden vorliegt.

Das WKB-Näherungsverfahren wurde bereits im Zusammenhang mit der Erstellung einer Leistungsbilanz in Abschnitt 3.1 im Detail präsentiert. An dieser Stelle sei daran erinnert, daß eine WKB-Näherungslösung im allgemeinen die Gestalt

$$\underline{E}(x; k_y, k_{\parallel}) = \sum_{\lambda} e^{iS_{\lambda}(x; k_y, k_{\parallel})} \underline{E}^{\lambda}(x; k_y, k_{\parallel}) \quad (4.49)$$

besitzt, wo die Summation über λ die mögliche Existenz mehrerer voneinander unabhängiger Moden andeutet, vgl. Ref. [Bra 82] und Relation (3.1). Dabei wird im Rahmen der WKB-Approximation vorausgesetzt, daß die elektrische Feldamplitude $\underline{E}^{\lambda}(x; k_y, k_{\parallel})$ auf einer Längenskala L_{slow} variiert, die viel größer ist als die mit der Gradientenlänge des Exponentialfaktors⁵ $\exp(iS_{\lambda}(x; k_y, k_{\parallel}))$ assoziierte Skala L_{fast} .

In Abschnitt 4.2 wurde festgestellt, daß der Leitfähigkeitskern (4.15) nur für Parameterwerte $|x - x'| \leq L_{nonlocal}$ wesentlich von Null verschieden ist, wobei die Nichtlokalitätslänge $L_{nonlocal}$ erwartungsgemäß von der Größenordnung einiger thermischer Gyroradien sein wird. Dies kann benutzt werden, um den nichtlokalen Beitrag (4.17) zur Wellengleichung weiter zu vereinfachen. Mit den Hilfsängen δ und Δ , die zunächst beliebige Werte $\delta, \Delta \geq L_{nonlocal} > 0$ annehmen können, die also insbesondere von derselben Größenordnung wie die Nichtlokalitätslänge jedoch nicht kleiner als letztere sein sollen, muß offenbar näherungsweise

$$\frac{4\pi i}{\omega} \int_{x_a}^{x_b} dx \left[\underline{f}(x) \right]^* \cdot \underline{J}(x; k_y, k_{\parallel}) = \quad (4.50)$$

$$\frac{4\pi i}{\omega} \int_{x_a}^{x_b} dx \int_{x-\delta}^{x+\Delta} dx' \left[\underline{f}(x) \right]^* \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x(x-x')} \underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; X(x, x')) \right] \cdot \underline{E}(x'; k_y, k_{\parallel})$$

gelten, wodurch ersichtlich wird, daß das elektrische Wellenfeld in den Stromdichteterm nur im Intervall $[x_a - \delta, x_b + \Delta]$ eingeht. Hinsichtlich der WKB-Ordnungsrelation (3.5), die die Längenskalen $L_{fast} \ll L_{slow}$ mit $L_{nonlocal} \leq L_{fast}$ umfaßt, vgl. Abschnitt 3.1, soll die Wahl von δ und Δ der Ungleichung $L_{fast} \approx \delta, \Delta \ll L_{slow}$ genügen, wobei die Größenordnung von L_{slow} in etwa mit jener der Gradientenlängen der Gleichgewichtsplasmamaparameter übereinstimmt. Berücksichtigt man, daß dann in Übereinstimmung mit der Ordnungsrelation (4.11) im Intervall $[x_a - \delta, x_a]$ die Eikonalfunktion durch

$$S_{\lambda}(x; k_y, k_{\parallel}) \approx K^0(\lambda) x \quad (4.51)$$

und die Feldamplitude durch

$$\underline{E}^{\lambda}(x; k_y, k_{\parallel}) \approx C^0(\lambda) e^{-iK^0(\lambda)x_0} \underline{e}^0(\lambda) \quad (4.52)$$

⁵Diese charakterisiert bis auf einen Faktor 2π die lokalen Wellenlängen in x -Richtung der betrachteten Moden.

genähert werden können, wo $C^0(\lambda)$ die komplexe Amplitude, $K^0(\lambda)$ die lokale Wellenzahl in x -Richtung und $\underline{\epsilon}^0(\lambda)$ den Polarisationsvektor der WKB-Mode mit Index λ am Punkt $x = x_0$ bezeichnet, bzw. im Intervall $[x_b, x_b + \Delta]$ die entsprechenden Approximationen

$$S_\lambda(x; k_y, k_\parallel) \approx K^N(\lambda) x \quad (4.53)$$

und

$$\underline{E}^\lambda(x; k_y, k_\parallel) \approx C^N(\lambda) e^{-iK^N(\lambda)x_N} \underline{\epsilon}^N(\lambda) \quad (4.54)$$

mit den analogen Größen $C^N(\lambda)$, $K^N(\lambda)$ und $\underline{\epsilon}^N(\lambda)$ am Punkt $x = x_N$ benutzt werden können, dann ist es gemäß Gl. (4.49) möglich, den Galerkin-Ansatz (4.29) auf

$$\underline{E}(x; k_y, k_\parallel) = \begin{cases} \sum_{\lambda=1}^{\lambda_0} C^0(\lambda) e^{i(x-x_0)K^0(\lambda)} \underline{\epsilon}^0(\lambda) & \dots \text{ falls } x \in [x_0 - \delta, x_0] \\ \sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^3 \sum_{\beta=0}^1 \epsilon_{n,k}^{[\beta]} h^\beta H_\beta(\xi_n(x)) \underline{\epsilon}^k & \dots \text{ falls } x \in [x_0, x_N] \\ \sum_{\lambda=1}^{\lambda_N} C^N(\lambda) e^{i(x-x_N)K^N(\lambda)} \underline{\epsilon}^N(\lambda) & \dots \text{ falls } x \in [x_N, x_N + \Delta] \end{cases} \quad (4.55)$$

zu erweitern. Dabei bezeichnet λ_0 die Anzahl der unabhängigen Moden bei x_0 und λ_N jene bei x_N . In diesem Zusammenhang sind sowohl die Wellenzahlen⁶ $K^0(\lambda)$ und $K^N(\lambda)$, die sich aus der lokalen Dispersionsrelation (3.38) ergeben, als auch die Polarisationsvektoren, die mit

$$[\underline{\epsilon}^0(\lambda)]^* \cdot \underline{\epsilon}^0(\lambda) = 1 = [\underline{\epsilon}^N(\lambda)]^* \cdot \underline{\epsilon}^N(\lambda) \quad (4.56)$$

die normierten Lösungen der WKB-Wellengleichung (3.35) darstellen, als bekannte Größen anzusehen. Schließlich sind $C^0(\lambda)$ und $C^N(\lambda)$ analog einem Streuproblem teilweise vorzugeben, teilweise unbekannt und werden als Amplituden von in den FEL-Rechenbereich einlaufenden und auslaufenden Wellen betrachtet.

Im Zuge der analytischen Auswertung der nichtlokalen Terme wäre eine Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen der rechten Seite von Gl. (4.50) gemäß $\int_{x_a}^{x_b} dx \int_{x-\delta}^{x+\Delta} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dk_x(\cdot) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{x_a}^{x_b} dx \int_{x-\delta}^{x+\Delta} dx'(\cdot)$ wünschenswert. Diese Vertauschung birgt ein mathematisches Problem in sich, dessen Untersuchung notwendig ist, um die Glaubhaftigkeit der folgenden Algebra zu gewährleisten. So ist offenbar der Stix-Term, d.h. der "s=0"-Beitrag (4.16) zum Leitfähigkeitskern im Ortsraum, nichts anderes als der Leitfähigkeitskern (2.40) des homogenen Plasmas, berechnet mit den Werten der Plasmamparameter an Orten $X(x, x')$. Letzterer enthält aber gemäß den Untersuchungen in Abschnitt 2.4 für $x \rightarrow x'$ logarithmisch divergente Terme. Es erhebt sich also die Frage, ob die Integrationen trotz dieser Divergenzen vertauscht werden dürfen. Zur

⁶Diese sind entsprechend den Voraussetzungen in Abschnitt 3.1 reellwertig, d.h. als Realteil $\text{Re}(K_x)$ der Wellenzahl in x -Richtung zu interpretieren (die lokale Dispersionsrelation besitzt im allgemeinen komplexe Lösungen K_\perp und damit, bei gegebenem K_y , auch komplexwertige Lösungen K_x , vgl. Abschnitt 3.2). Für rein evaneszente Wellen, die durch einen, im Gegensatz zum Imaginärteil, verschwindenden Realteil von K_x charakterisiert sind, würde dann beispielsweise an der Stelle $x = x_0$ die Identität $K^0(\lambda) = 0$ gelten. Der mit dem Imaginärteil der Wellenzahl verknüpfte exponentielle Abfall der Mode, der den WKB-Ordnungsrelationen entsprechend durch die Ortsabhängigkeit von $\underline{E}^\lambda(x; k_y, k_\parallel)$ beschrieben werden sollte, findet auf einer Längenskala sehr viel größer als $L_{nonlocal}$ statt, sodaß er in den Ausdrücken (4.52) und (4.54) nicht explizit berücksichtigt werden muß.

Illustration der Problemstellung wird im folgenden ein vereinfachtes Beispiel eines logarithmisch divergenten Parameterintegrals betrachtet.

Das Parameterintegral $I(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x, y)$ besitze einen in beiden Veränderlichen stetigen Integranden $f(x, y)$ und sei $\forall y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ gleichmäßig konvergent⁷; es besitze überdies in einer Umgebung von $y = 0$ die asymptotische Entwicklung $I(y) = \ln |y|(I_0 + yI_1 + y^2I_2 + \dots)$, d.h. $I(y)$ ist für $y \rightarrow 0$ logarithmisch divergent. Da solche Divergenzen integrierbar sind, existiert das Integral $\int_{-a}^b dy I(y)$, mit $a, b > 0$; offenbar ist immer seine Zerlegung

$$\int_{-a}^b dy I(y) = \int_{-a}^{-\epsilon} dy I(y) + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dy I(y) + \int_{\epsilon}^b dy I(y) \quad (4.57)$$

in Teilintegrationen möglich. Mit Hilfe der asymptotischen Darstellung von $I(y)$, kann man leicht zeigen, daß

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dy I(y) = 0 \quad (4.58)$$

gilt, sodaß im Grenzfall in Gl. (4.57) lediglich zwei Integrationen verbleiben,

$$\int_{-a}^b dy I(y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-a}^{-\epsilon} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x, y) + \int_{\epsilon}^b dy \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x, y) \right\}. \quad (4.59)$$

Gemäß der Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz von $I(y) \forall y \neq 0$ und der Stetigkeit des Integranden $f(x, y)$ in beiden Variablen kann man auf der rechten Seite von Gl. (4.59) die Integrationsreihenfolgen verändern,

$$\int_{-a}^b dy I(y) = \int_{-a}^b dy \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x, y) = \quad (4.60)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-a}^{-\epsilon} dy f(x, y) + \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{\epsilon}^b dy f(x, y) \right\},$$

vgl. [Fic 79], Abschnitt 521. Aus obiger Identität wird offensichtlich, daß y - und x -Integration genau dann vertauschbar sind, wenn auf der rechten Seite der Gleichung der Limes $\epsilon \rightarrow 0$ unter die x -Integrationen gezogen werden kann. Nun kann allerdings mit den eingangs getroffenen Annahmen allein eine hinreichende Bedingung für die Vertauschung von Limes und Integral, wie sie in [Fic 79], Abschnitt 518 angegeben wird, nicht erfüllt werden. Um die Frage nach der Vertauschbarkeit der Integrationen in diesem einfachen Beispiel beantworten zu können, müssen weitere Eigenschaften des Integranden $f(x, y)$ bzw. der Teilintegrationen $\int_{-a}^{-\epsilon} dy f(x, y)$ und $\int_{\epsilon}^b dy f(x, y)$ bekannt sein.

Sinngemäß kann diese Aussage auch auf den komplizierteren Fall des von zwei Parametern x und x' abhängigen Integrals $\underline{\sigma}(x, x'; k_y, k_{\parallel})$ im Stromdichteterm übertragen werden. Entsprechend dem Faktum, daß im zuvor diskutierten Beispiel, ohne weitere Eigenschaften des Integranden des Parameterintegrals zu kennen, die Vertauschbarkeit der

⁷Die mathematische Definition gleichmäßiger Konvergenz eines Parameterintegrals findet sich beispielsweise in [Fic 79], Abschnitt 513.

Integrationsreihenfolge nicht sichergestellt werden kann, ist nun lediglich aufgrund der Kenntnis der Art der Divergenz einiger Beiträge zu $\underline{\sigma}(x, x'; k_y, k_{\parallel})$, eben jener logarithmischen Divergenz für $x \rightarrow x'$, noch nicht zu entscheiden ob in Gl. (4.50) die k_x -Integration mit der x - und x' -Integration vertauscht werden darf. Zwar sind $\underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x)$ und die Testfunktionen bzw. das elektrische Wellenfeld gemäß Ansatz (4.55) explizit gegeben, sodaß im Prinzip sämtliche zur Beantwortung dieser Frage notwendigen Informationen gewonnen werden können, doch leider verkompliziert die mathematische Struktur dieses Tensors und nicht zuletzt der kubischen Hermite-Polynome eine Formulierung allgemeiner Aussagen über die Vertauschbarkeit erheblich. Lediglich für einen speziellen Term aus $\underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x)$ konnte unter der Annahme von simplifizierten Testfunktionen für den Spezialfall $k_y = 0$ eine solche Aussage gefolgert werden, wobei eine Vertauschung der Integrationen möglich war. Für die Praxis eher relevant, obwohl kein mathematischer Beweis im strengen Sinn, ist eine numerische Überprüfung. Diese wurde für die tatsächlich benutzten Testfunktionen für den allgemeinen Fall $k_y \neq 0$ durchgeführt, und führte in allen untersuchten Fällen zu dem Schluß, daß die Integrationen vertauschbar sind.

Gestützt auf diese Aussagen, wird der Stromdichteterm (4.50) in der Form

$$\frac{4\pi i}{\omega} \int_{x_a}^{x_b} dx \left[\underline{f}(x) \right]^* \cdot \underline{J}(x; k_y, k_{\parallel}) = \quad (4.61)$$

$$\frac{4\pi i}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{x_0}^{x_N} dx e^{ik_x x} \left[\underline{f}(x) \right]^* \cdot \left[\int_{x-\delta}^{x+\Delta} dx' e^{-ik_x x'} \underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; X(x, x')) \cdot \underline{E}(x'; k_y, k_{\parallel}) \right]$$

angeschrieben. Die einfachste Wahl der noch freien Ortsfunktion $X(x, x')$ aus Gl. (4.13) ist nun in Übereinstimmung mit den Bedingungen (4.14) durch die Identität $X(x, x') = x$ gegeben, sodaß also $\underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; X(x, x'))$ im x' -Intervall $[x - \delta, x + \Delta]$ durch $\underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x)$ approximiert wird. Damit können die nichtlokalen Beiträge in die Gestalt

$$\frac{4\pi i}{\omega} \int_{x_a}^{x_b} dx \left[\underline{f}(x) \right]^* \cdot \underline{J}(x; k_y, k_{\parallel}) = \quad (4.62)$$

$$\frac{4\pi i}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{x_0}^{x_N} dx e^{ik_x x} \left[\underline{f}(x) \right]^* \cdot \underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x) \cdot \left[\int_{x-\delta}^{x+\Delta} dx' e^{-ik_x x'} \underline{E}(x'; k_y, k_{\parallel}) \right]$$

gebracht werden.

In den folgenden Rechnungen ist es zweckmäßig, die dem Problem durch die angewandte FEL-Methode aufgeprägte diskrete Struktur weitgehendst auszunutzen. So soll zum einen die Nichtlokalitätslänge als Vielfaches der Gitterkonstante h ausgedrückt werden,

$$L_{nonlocal} = sh, \quad (4.63)$$

mit dem noch freien, diskreten Parameter $s \in \mathbf{N}_+$. In der Folge kann mit der Definition

$$\eta_{m,n}(x) := \begin{cases} 1 & \dots \text{ falls } x \in [x_m, x_n[\\ 0 & \dots \text{ sonst} \end{cases}, \quad (4.64)$$

wo die ganzzahligen Indizes die Ungleichung $m < n$ erfüllen, und der konkreten Wahl⁸ der Hilfsängen als $\delta := x - x_p + sh \geq L_{nonlocal}$ bzw. $\Delta := x_{p+1} - x + sh > L_{nonlocal}$ falls $x \in [x_p, x_{p+1}[$ gilt, die x' -Integration aus Gl. (4.62) in die Form

$$\int_{x-\delta}^{x+\Delta} dx' e^{-ik_x x'} \underline{E}(x'; k_y, k_{||}) = \sum_{p=0}^{N-1} \eta_{p,p+1}(x) \int_{x_{p-s}}^{x_{p+s+1}} dx' e^{-ik_x x'} \underline{E}(x'; k_y, k_{||}) \quad (4.65)$$

gebracht werden. Zum anderen soll das in Abschnitt 3.3 gewählte Gitter formal auf Gitterpunkte $x_n = x_0 + nh$ erweitert werden, deren Indizes Elemente der Menge $\{-s, -s+1, \dots, N+s\}$ sind, sodaß die diversen Beiträge des elektrischen Wellenfeldes zu (4.65) im gesamten Intervall $[x_0 - \delta, x_N + \Delta[= [x_{-s}, x_{N+s}[$ einheitlich behandelt werden können.

Mit dem Lösungsansatz (4.55) und (4.64) kann nun Gl. (4.65) in der Gestalt

$$\begin{aligned} \int_{x-\delta}^{x+\Delta} dx' e^{-ik_x x'} \underline{E}(x'; k_y, k_{||}) = & \quad (4.66) \\ & \sum_{p=0}^{N-1} \eta_{p,p+1}(x) \sum_{\lambda=1}^{\lambda_0} C^0(\lambda) \underline{\epsilon}^0(\lambda) e^{-iK^0(\lambda)x_0} \int_{x_{p-s}}^{x_0} dx' \eta_{-s,0}(x') e^{i(K^0(\lambda)-k_x)x'} + \\ & \sum_{p=0}^{N-1} \eta_{p,p+1}(x) \sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^3 \sum_{\beta=0}^1 h^\beta \epsilon_{n,k}^{[\beta]} \underline{\epsilon}^k \sum_{\tau=-s}^s \int_{x_{p+\tau}}^{x_{p+\tau+1}} dx' \eta_{0,N}(x') e^{-ik_x x'} H_\beta(\xi_n(x')) + \\ & \sum_{p=0}^{N-1} \eta_{p,p+1}(x) \sum_{\lambda=1}^{\lambda_N} C^N(\lambda) \underline{\epsilon}^N(\lambda) e^{-iK^N(\lambda)x_N} \int_{x_N}^{x_{p+s+1}} dx' \eta_{N,N+s}(x') e^{i(K^N(\lambda)-k_x)x'} \end{aligned}$$

geschrieben werden, wo das x' -Integral mit den kubischen Hermite-Polynomen im Integranden in eine Summe von Teilintegralen über einzelne Gitterelemente zerlegt wurde.

Die Integration $\int_{x_{p+\tau}}^{x_{p+\tau+1}} dx' \eta_{0,N}(x') e^{-ik_x x'} H_\beta(\xi_n(x'))$ aus Gl. (4.66) läßt sich vereinfachen falls man berücksichtigt, daß $H_\beta(\xi_n(x'))$ entsprechend den Gl. (4.23) bis (4.25) nur im Intervall $[x_{n-1}, x_{n+1}]$ von Null verschieden ist. Damit, mit der Substitution $dx' \rightarrow d\xi_n = h^{-1} dx'$ gemäß Gl. (4.23), dem Symbol

$$\Delta_{i,j}[k] := \begin{cases} 1 & \dots \text{ falls } k \in \{i, i+1, \dots, j\} \\ 0 & \dots \text{ sonst} \end{cases}, \quad (4.67)$$

⁸Diese Wahl bedeutet zum einen, daß die WKB-Moden, an die die gesuchte FEL-Lösung anzupassen ist, nur in relativ schmalen, an den FEL-Rechenbereich angrenzenden Schichten von der Breite einiger Ionen-Gyroradien ($\approx L_{nonlocal}$) bekannt sein müssen. Andererseits ergibt sich aus ihr, daß entsprechend den Bemerkungen in Abschnitt 4.2, die Variation der Gleichgewichtsplasmamaparameter über die Distanz $\delta + \Delta = 2L_{nonlocal} + h$ in x -Richtung vernachlässigbar sein muß. In der konkreten numerischen Rechnung ist jedoch $L_{nonlocal}$ als freier Parameter zu handhaben und deren Konvergenz mit wachsender Nicht-lokalitätätslänge zu prüfen. Da wenigstens im Falle streng monotoner Profile der Gleichgewichtsgrößen $L_{nonlocal}$ immer so groß gewählt werden kann, daß die Variation der Plasmamaparameter signifikant wird, kann das numerische Verfahren semikonvergenten Charakter besitzen.

wo $i < j$ und k ganze Zahlen bezeichnen, und der Definition

$$\chi_\beta(t) := \int_0^1 d\xi e^{i\xi t} H_\beta(\xi) = (-1)^\beta \int_{-1}^0 d\xi e^{-i\xi t} H_\beta(\xi) , \quad (4.68)$$

mit $\beta \in \{1, 2\}$ und $t \in \mathbf{R}$, erhält man den Ausdruck

$$\int_{x_{p+\tau}}^{x_{p+\tau+1}} dx' \eta_{0,N}(x') e^{-ik_x x'} H_\beta(\xi_n(x')) = \quad (4.69)$$

$$h e^{-ik_x x_n} \left\{ \delta_{n,p+\tau} \Delta_{0,N-1}[n] \chi_\beta(-hk_x) + \delta_{n,p+\tau+1} \Delta_{1,N}[n] (-1)^\beta \chi_\beta(hk_x) \right\} ,$$

wo die Integrale (4.68) von sämtlichen Gitterpunktindizes unabhängig sind. Auch das Integral $\int_{x_{p-s}}^{x_0} dx' \eta_{-s,0}(x') e^{i(K^0(\lambda)-k_x)x'}$ aus Gl. (4.66) läßt sich in ähnlicher Weise vereinfachen. So kann die durch $\eta_{-s,0}(x')$ ausgedrückte Bedingung für mögliche x' -Werte mit Hilfe von (4.67) als Forderung an die diskreten Indizes s und p formuliert werden. Damit, mit der Substitution $x' = x_0 - h\xi$ bzw. $d\xi = -h^{-1}dx'$ und der Definition

$$\Phi(z; m) := \int_0^m d\xi e^{i\xi z} , \quad (4.70)$$

wo $m \in \mathbf{Z}$ und $z \in \mathbf{C}$ gilt, folgt

$$\int_{x_{p-s}}^{x_0} dx' \eta_{-s,0}(x') e^{i(K^0(\lambda)-k_x)x'} = h e^{i(K^0(\lambda)-k_x)x_0} \Delta_{0,s-1}[p] \Phi(h(k_x - K^0(\lambda)); s-p) . \quad (4.71)$$

Analog ergibt sich die Identität

$$\int_{x_N}^{x_{p+s+1}} dx' \eta_{N,N+s}(x') e^{i(K^N(\lambda)-k_x)x'} = \quad (4.72)$$

$$h e^{i(K^N(\lambda)-k_x)x_N} \Delta_{N-s,N-1}[p] \Phi(h(K^N(\lambda) - k_x); p+s+1-N) ,$$

wo nun die Integrale (4.70), ebenso wie in Gl. (4.71), vom Gitterpunktindex p abhängen. Schließlich kann mit den Relationen (4.69), (4.71) und (4.72) das Integral (4.66) in die Gestalt

$$\int_{x-\delta}^{x+\Delta} dx' e^{-ik_x x'} \underline{E}(x'; k_y, k_{\parallel}) = h \sum_{p=0}^{N-1} \eta_{p,p+1}(x) \times \quad (4.73)$$

$$\left\{ \sum_{\lambda=1}^{\lambda_0} C^0(\lambda) \underline{\epsilon}^0(\lambda) e^{-ik_x x_0} \Delta_{0,s-1}[p] \Phi(h(k_x - K^0(\lambda)); s-p) + \sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^3 \sum_{\beta=0}^1 h^\beta \epsilon_{n,k}^{[\beta]} \underline{\epsilon}^k \times \right. \\ \left. e^{-ik_x x_n} \sum_{\tau=-s}^s \left\{ \delta_{n,p+\tau} \Delta_{0,N-1}[n] \chi_\beta(-hk_x) + \delta_{n,p+\tau+1} \Delta_{1,N}[n] (-1)^\beta \chi_\beta(hk_x) \right\} + \right. \\ \left. \sum_{\lambda=1}^{\lambda_N} C^N(\lambda) \underline{\epsilon}^N(\lambda) e^{-ik_x x_N} \Delta_{N-s,N-1}[p] \Phi(h(K^N(\lambda) - k_x); p+s+1-N) \right\} =: \\ h \sum_{p=0}^{N-1} \eta_{p,p+1}(x) \underline{A}(k_x; p, s)$$

gebracht werden, mit der im folgenden nützlichen Kurznotation $\underline{A}(k_x; p, s)$. Die Integrale (4.68) und (4.70) können analytisch berechnet werden; einerseits folgt mit den Definitionen (4.24) und (4.25)

$$\chi_0(t) = \frac{12(1 - e^{it}) + 6i(1 + e^{it})t + it^3}{t^4} \quad (4.74)$$

bzw.

$$\chi_1(t) = \frac{6(1 - e^{it}) + 2i(2 + e^{it})t - t^2}{t^4}, \quad (4.75)$$

andererseits ergibt sich nach elementarer Integration

$$\Phi(z; m) = i \frac{1 - e^{imz}}{z}. \quad (4.76)$$

Die Ergebnisse (4.74) bis (4.76) sind formal für $t \rightarrow 0$ bzw. $z \rightarrow 0$ Ausdrücke der Form "0/0". Aus den Definitionen (4.68) und (4.70) dieser Parameterintegrale ist jedoch ersichtlich, daß $\chi_0(t)$ und $\chi_1(t)$ an der Stelle $t = 0$ und entsprechend $\Phi(z; m)$ an der Stelle $z = 0$ analytisch sind, mit den Reihenentwicklungen

$$\chi_0(t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{20}it - \frac{1}{30}t^2 + O(t^3), \quad (4.77)$$

$$\chi_1(t) = \frac{1}{12} + \frac{1}{30}it - \frac{1}{120}t^2 + O(t^3), \quad (4.78)$$

bzw.

$$\Phi(z; m) = m \left(1 + \frac{i}{2}mz - \frac{1}{6}m^2z^2 + O(z^3) \right). \quad (4.79)$$

Für die weitere Rechnung ist bedeutsam, daß das innerste Integral der rechten Seite der Gl. (4.62), also $\int_{x-\delta}^{x+\Delta} dx' e^{-ik_x x'} \underline{E}(x'; k_y, k_{\parallel})$, welches mit den Relationen (4.74) bis (4.76) gemäß (4.73) analytisch gegeben ist, offenbar nur über $\eta_{p,p+1}(x)$ in sehr einfacher Weise von x abhängt.

Mit der konkreten Wahl (4.28) der Testfunktionen im "slab" und mit Gl. (4.73) gilt für die x -Integration der rechten Seite des Stromdichteterms (4.62), wenn man wieder berücksichtigt, daß $H_\nu(\xi_m(x))$ nur im Intervall $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ ungleich Null ist,

$$\int_{x_0}^{x_N} dx e^{ik_x x} [f(x)]^* \cdot \underline{\sigma}(k_\perp, k_\perp; \psi, \psi; k_\parallel; x) \cdot \left[\int_{x-\delta}^{x+\Delta} dx' e^{-ik_x x'} \underline{E}(x'; k_y, k_\parallel) \right] = \quad (4.80)$$

$$(1 - \delta_{m,N}) h^{1+\nu} \int_{x_m}^{x_{m+1}} dx e^{ik_x x} H_\nu(\xi_m(x)) \underline{e}^j \cdot \underline{\sigma}(k_\perp, k_\perp; \psi, \psi; k_\parallel; x) \cdot \sum_{p=0}^{N-1} \eta_{p,p+1}(x) \underline{A}(k_x; p, s) +$$

$$(1 - \delta_{m,0}) h^{1+\nu} \int_{x_{m-1}}^{x_m} dx e^{ik_x x} H_\nu(\xi_m(x)) \underline{e}^j \cdot \underline{\sigma}(k_\perp, k_\perp; \psi, \psi; k_\parallel; x) \cdot \sum_{p=0}^{N-1} \eta_{p,p+1}(x) \underline{A}(k_x; p, s) .$$

Unter der Annahme, daß die Gradientenlängen der Plasmaparameter sehr viel größer als die Gitterkonstante h sind⁹, kann man in obiger Gleichung den Tensor $\underline{\sigma}(k_\perp, k_\perp; \psi, \psi; k_\parallel; x)$ für $x \in [x_{m-1}, x_{m+1}]$ gemäß

$$\underline{\sigma}(k_\perp, k_\perp; \psi, \psi; k_\parallel; x) \approx \underline{\sigma}(k_\perp, k_\perp; \psi, \psi; k_\parallel; x_m) \quad (4.81)$$

approximieren.

Werden zudem die Identitäten $\sum_{p=0}^{N-1} \int_{x_m}^{x_{m+1}} dx \eta_{p,p+1}(x) (\cdot) = \sum_{p=0}^{N-1} \delta_{p,m} \int_{x_m}^{x_{m+1}} dx (\cdot)$ und $\sum_{p=0}^{N-1} \int_{x_{m-1}}^{x_m} dx \eta_{p,p+1}(x) (\cdot) = \sum_{p=0}^{N-1} \delta_{p,m-1} \int_{x_{m-1}}^{x_m} dx (\cdot)$ berücksichtigt, und weiters die Relationen $\int_{x_m}^{x_{m+1}} dx e^{ik_x x} H_\nu(\xi_m(x)) = h e^{ik_x x_m} \chi_\nu(hk_x)$ bzw. $\int_{x_{m-1}}^{x_m} dx e^{ik_x x} H_\nu(\xi_m(x)) = (-1)^\nu h e^{ik_x x_m} \chi_\nu(-hk_x)$, so folgt mit Gl. (4.80)

$$\int_{x_0}^{x_N} dx e^{ik_x x} [f(x)]^* \cdot \underline{\sigma}(k_\perp, k_\perp; \psi, \psi; k_\parallel; x) \cdot \left[\int_{x-\delta}^{x+\Delta} dx' e^{-ik_x x'} \underline{E}(x'; k_y, k_\parallel) \right] = \quad (4.82)$$

$$(1 - \delta_{m,N}) h^{2+\nu} e^{ik_x x_m} \chi_\nu(hk_x) \underline{e}^j \cdot \underline{\sigma}(k_\perp, k_\perp; \psi, \psi; k_\parallel; x_m) \cdot \underline{A}(k_x; m, s) +$$

$$(1 - \delta_{m,0}) (-1)^\nu h^{2+\nu} e^{ik_x x_m} \chi_\nu(-hk_x) \underline{e}^j \cdot \underline{\sigma}(k_\perp, k_\perp; \psi, \psi; k_\parallel; x_m) \cdot \underline{A}(k_x; m-1, s) .$$

Damit konnte also auch das x -Integral der rechten Seite von Gl. (4.62) analytisch ausgewertet werden. Mit den Definitionen

$$\mathcal{I}_{j,k}^{L,m}(\nu, \beta; \tau) := \frac{4\pi i}{\omega} h^{2+\nu+\beta} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{-i\tau h k_x} \sigma_{jk}(k_\perp, k_\perp; \psi, \psi; k_\parallel; x_m) \chi_\nu(-hk_x) \chi_\beta(hk_x) , \quad (4.83)$$

$$\mathcal{I}_{j,k}^{R,m}(\nu, \beta; \tau) := \frac{4\pi i}{\omega} h^{2+\nu+\beta} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{-i\tau h k_x} \sigma_{jk}(k_\perp, k_\perp; \psi, \psi; k_\parallel; x_m) \chi_\nu(hk_x) \chi_\beta(-hk_x) ,$$

$$\mathcal{I}_{j,k}^{ML,m}(\nu, \beta; \tau) := \frac{4\pi i}{\omega} h^{2+\nu+\beta} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{-i\tau h k_x} \sigma_{jk}(k_\perp, k_\perp; \psi, \psi; k_\parallel; x_m) \chi_\nu(-hk_x) \chi_\beta(-hk_x)$$

⁹Für die numerischen Rechnungen, auf die in Abschnitt 4.7 eingegangen wird, bedeutet ein kleineres h längere Rechenzeiten. Will man jedoch IBW auflösen, so ist obenstehende Forderung mit der Ordnungsrelation (4.11) automatisch erfüllt, da dann die Gitterkonstante ohnehin sehr klein, d.h. kleiner als der Ionen-Gyroradius gewählt werden muß.

und

$$\mathcal{I}_{j,k}^{MR,m}(\nu, \beta; \tau) := \frac{4\pi i}{\omega} h^{2+\nu+\beta} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{-i\tau h k_x} \sigma_{jk}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_m) \chi_{\nu}(h k_x) \chi_{\beta}(h k_x),$$

bzw.

$$\mathcal{J}_j^{L,m}(\nu, \lambda; 0) := \frac{4\pi i}{\omega} h^{2+\nu} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{-im h k_x} \times \quad (4.84)$$

$$\left[\underline{e}^j \cdot \underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_m) \cdot \underline{\epsilon}^0(\lambda) \right] \chi_{\nu}(-h k_x) \Phi(h(k_x - K^0(\lambda)); s - m + 1),$$

$$\mathcal{J}_j^{R,m}(\nu, \lambda; 0) := \frac{4\pi i}{\omega} h^{2+\nu} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{-im h k_x} \times$$

$$\left[\underline{e}^j \cdot \underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_m) \cdot \underline{\epsilon}^0(\lambda) \right] \chi_{\nu}(h k_x) \Phi(h(k_x - K^0(\lambda)); s - m),$$

$$\mathcal{J}_j^{L,m}(\nu, \lambda; N) := \frac{4\pi i}{\omega} h^{2+\nu} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{-i(m-N) h k_x} \times$$

$$\left[\underline{e}^j \cdot \underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_m) \cdot \underline{\epsilon}^N(\lambda) \right] \chi_{\nu}(-h k_x) \Phi(h(k_x - K^N(\lambda)); s + m - N)$$

und

$$\mathcal{J}_j^{R,m}(\nu, \lambda; N) := \frac{4\pi i}{\omega} h^{2+\nu} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{-i(m-N) h k_x} \times$$

$$\left[\underline{e}^j \cdot \underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_m) \cdot \underline{\epsilon}^N(\lambda) \right] \chi_{\nu}(h k_x) \Phi(h(k_x - K^N(\lambda)); s + m + 1 - N),$$

wo die Notation $\sigma_{jk}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_m) := \underline{e}^j \cdot \underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_m) \cdot \underline{e}^k$ benutzt wird, und mit den Gleichungen (4.73) und (4.82) kann schließlich der gesamte nichtlokale Beitrag (4.62) zur Wellengleichung in der Form

$$\frac{4\pi i}{\omega} \int_{x_a}^{x_b} dx \left[\underline{f}(x) \right]^* \cdot \underline{J}(x; k_y, k_{\parallel}) = \quad (4.85)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda_0} \left\{ (1 - \delta_{m,N}) \Delta_{0,s-1}[m] \mathcal{J}_j^{R,m}(\nu, \lambda; 0) + (-1)^{\nu} \Delta_{1,s}[m] \mathcal{J}_j^{L,m}(\nu, \lambda; 0) \right\} C^0(\lambda) +$$

$$\sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^3 \sum_{\beta=0}^1 \sum_{\tau=-s}^s \left\{ (1 - \delta_{m,N}) \left[\delta_{n,m+\tau} \Delta_{0,N-1}[n] \mathcal{I}_{j,k}^{R,m}(\nu, \beta; \tau) + \right. \right.$$

$$\left. (-1)^{\beta} \delta_{n,m+\tau+1} \Delta_{1,N}[n] \mathcal{I}_{j,k}^{MR,m}(\nu, \beta; \tau+1) \right] +$$

$$(1 - \delta_{m,0}) \left[(-1)^{\nu} \delta_{n,m+\tau-1} \Delta_{0,N-1}[n] \mathcal{I}_{j,k}^{ML,m}(\nu, \beta; \tau-1) + \right.$$

$$\left. (-1)^{\nu+\beta} \delta_{n,m+\tau} \Delta_{1,N}[n] \mathcal{I}_{j,k}^{L,m}(\nu, \beta; \tau) \right] \epsilon_{n,k}^{[\beta]} +$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda_N} \left\{ \Delta_{N-s,N-1}[m] \mathcal{J}_j^{R,m}(\nu, \lambda; N) + (-1)^{\nu} (1 - \delta_{m,0}) \Delta_{N-s+1,N}[m] \mathcal{J}_j^{L,m}(\nu, \lambda; N) \right\} C^N(\lambda)$$

angeschrieben werden, mit Indexwerten $m \in \{0, 1, \dots, N\}$, $j \in \{1, 2, 3\}$, bzw. $\nu \in \{0, 1\}$, vgl. (4.28). Die diversen k_x -Integrale (4.83) und (4.84), die in den obenstehenden Ausdruck für den Stromdichteterm eingehen, sind aufgrund der komplizierten mathematischen Struktur von $\underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_m)$, vgl. Kapitel 2, nicht analytisch berechenbar.

Sie besitzen, wie man den Gl. (4.83) bis (4.85) entnimmt, Integranden die mit k_x oszillieren, jedoch nicht beliebig schnell, sondern im schlimmsten Fall nur wie $e^{i(s+1)hk_x}$. Aus diesem Grund wird ihre numerische Berechnung keine ernsthaften Schwierigkeiten bereiten und der Stromdichteterm (4.85) kann als Ausgangspunkt der auf der Näherung (4.13) basierenden numerischen Lösung der nichtlokalen Wellengleichung angesehen werden.

Betrachten wir nun den Stromdichteterm (4.22) für die in Abschnitt 3.2 beschriebene Näherung (4.20) der konstitutiven Relation. Seine nichtlokalen Terme können in vollständiger Analogie zu der zuvor präsentierten Rechnung ausgewertet werden, wo nun allerdings der Rechenschritt (4.81) entfällt, mit dem Ergebnis:

$$\begin{aligned}
& \frac{4\pi i}{\omega} \int_{x_a}^{x_b} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' [\underline{f}(x)]^* \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x(x-x')} \underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_{exp}) \right] \cdot \underline{E}(x'; k_y, k_{\parallel}) = \\
& \hspace{15em} (4.86) \\
& \sum_{\lambda=1}^{\lambda_0} \left\{ (1 - \delta_{m,N}) \Delta_{0,s-1}[m] \mathcal{L}_j^{R,m}(\nu, \lambda; 0) + (-1)^{\nu} \Delta_{1,s}[m] \mathcal{L}_j^{L,m}(\nu, \lambda; 0) \right\} C^0(\lambda) + \\
& \sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^3 \sum_{\beta=0}^1 \sum_{\tau=-s}^s \left\{ (1 - \delta_{m,N}) \left[\delta_{n,m+\tau} \Delta_{0,N-1}[n] \mathcal{K}_{j,k}^R(\nu, \beta; \tau) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (-1)^{\beta} \delta_{n,m+\tau+1} \Delta_{1,N}[n] \mathcal{K}_{j,k}^{MR}(\nu, \beta; \tau+1) \right] + \right. \\
& \quad \left. (1 - \delta_{m,0}) \left[(-1)^{\nu} \delta_{n,m+\tau-1} \Delta_{0,N-1}[n] \mathcal{K}_{j,k}^{ML}(\nu, \beta; \tau-1) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (-1)^{\nu+\beta} \delta_{n,m+\tau} \Delta_{1,N}[n] \mathcal{K}_{j,k}^L(\nu, \beta; \tau) \right] \right\} \epsilon_{n,k}^{[\beta]} + \\
& \sum_{\lambda=1}^{\lambda_N} \left\{ \Delta_{N-s,N-1}[m] \mathcal{L}_j^{R,m}(\nu, \lambda; N) + (-1)^{\nu} (1 - \delta_{m,0}) \Delta_{N-s+1,N}[m] \mathcal{L}_j^{L,m}(\nu, \lambda; N) \right\} C^N(\lambda) .
\end{aligned}$$

Dabei wurden die Notationen

$$\mathcal{K}_{j,k}^L(\nu, \beta; \tau) := \frac{4\pi i}{\omega} h^{2+\nu+\beta} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{-i\tau hk_x} \sigma_{jk}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_{exp}) \chi_{\nu}(-hk_x) \chi_{\beta}(hk_x) , \quad (4.87)$$

$$\mathcal{K}_{j,k}^R(\nu, \beta; \tau) := \frac{4\pi i}{\omega} h^{2+\nu+\beta} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{-i\tau hk_x} \sigma_{jk}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_{exp}) \chi_{\nu}(hk_x) \chi_{\beta}(-hk_x) ,$$

$$\mathcal{K}_{j,k}^{ML}(\nu, \beta; \tau) := \frac{4\pi i}{\omega} h^{2+\nu+\beta} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{-i\tau hk_x} \sigma_{jk}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_{exp}) \chi_{\nu}(-hk_x) \chi_{\beta}(-hk_x)$$

und

$$\mathcal{K}_{j,k}^{MR}(\nu, \beta; \tau) := \frac{4\pi i}{\omega} h^{2+\nu+\beta} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{-i\tau hk_x} \sigma_{jk}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_{exp}) \chi_{\nu}(hk_x) \chi_{\beta}(hk_x)$$

bzw.

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_j^{L,m}(\nu, \lambda; 0) := \frac{4\pi i}{\omega} h^{2+\nu} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{-imhk_x} \times \\
& \left[\underline{e}^j \cdot \underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_{exp}) \cdot \underline{\epsilon}^0(\lambda) \right] \chi_{\nu}(-hk_x) \Phi(h(k_x - K^0(\lambda)); s-m+1) , \quad (4.88)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_j^{R,m}(\nu, \lambda; 0) := \frac{4\pi i}{\omega} h^{2+\nu} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{-imhk_x} \times \\ \left[\underline{\epsilon}^j \cdot \underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_{exp}) \cdot \underline{\epsilon}^0(\lambda) \right] \chi_{\nu}(hk_x) \Phi(h(k_x - K^0(\lambda))); s-m),$$

$$\mathcal{L}_j^{L,m}(\nu, \lambda; N) := \frac{4\pi i}{\omega} h^{2+\nu} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{-i(m-N)hk_x} \times \\ \left[\underline{\epsilon}^j \cdot \underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_{exp}) \cdot \underline{\epsilon}^N(\lambda) \right] \chi_{\nu}(-hk_x) \Phi(h(k_x - K^N(\lambda))); s+m-N$$

und

$$\mathcal{L}_j^{R,m}(\nu, \lambda; N) := \frac{4\pi i}{\omega} h^{2+\nu} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{-i(m-N)hk_x} \times \\ \left[\underline{\epsilon}^j \cdot \underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_{exp}) \cdot \underline{\epsilon}^N(\lambda) \right] \chi_{\nu}(hk_x) \Phi(h(k_x - K^N(\lambda))); s+m+1-N),$$

benutzt. Die im Stromdichteterm (4.22) auftretenden lokalen Beiträge können mit den Testfunktionen (4.28), dem Lösungsansatz (4.55) und der leicht zu beweisenden Relation

$$\int_{x_0}^{x_N} dx f(x) H_{\nu}(\xi_m(x)) H_{\beta}(\xi_n(x)) = \delta_{n,m-1} h \int_{-1}^0 d\xi f(x_m + h\xi) H_{\nu}(\xi) H_{\beta}(\xi + 1) + \quad (4.89)$$

$$\delta_{n,m}(1 - \delta_{m,0}) h \int_{-1}^0 d\xi f(x_m + h\xi) H_{\nu}(\xi) H_{\beta}(\xi) +$$

$$\delta_{n,m}(1 - \delta_{m,N}) h \int_0^1 d\xi f(x_m + h\xi) H_{\nu}(\xi) H_{\beta}(\xi) +$$

$$\delta_{n,m+1} h \int_0^1 d\xi f(x_m + h\xi) H_{\nu}(\xi) H_{\beta}(\xi - 1)$$

in die Gestalt

$$\frac{8\pi^2 i}{\omega} \int_{x_a}^{x_b} dx \left[\underline{f}(x) \right]^* \cdot \left(\underline{\sigma}^{zgr}(k_{\parallel}; x) - \underline{\sigma}^{zgr}(k_{\parallel}; x_{exp}) \right) \cdot \underline{E}(x; k_y, k_{\parallel}) = \quad (4.90)$$

$$\sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^3 \sum_{\beta=0}^1 \left\{ \delta_{n,m-1} \mathcal{M}_{j,k}^{ML,m}(\nu, \beta) + \delta_{n,m}(1 - \delta_{m,0}) \mathcal{M}_{j,k}^{L,m}(\nu, \beta) + \right. \\ \left. \delta_{n,m}(1 - \delta_{m,N}) \mathcal{M}_{j,k}^{R,m}(\nu, \beta) + \delta_{n,m+1} \mathcal{M}_{j,k}^{MR,m}(\nu, \beta) \right\} \epsilon_{n,k}^{[\beta]}$$

gebracht werden, wo die Definitionen

$$\mathcal{M}_{j,k}^{L,m}(\nu, \beta) := \frac{8\pi^2 i}{\omega} h^{1+\nu+\beta} \int_{-1}^0 d\xi \left(\sigma_{jk}^{zgr}(k_{\parallel}; x_m + h\xi) - \sigma_{jk}^{zgr}(k_{\parallel}; x_{exp}) \right) H_{\nu}(\xi) H_{\beta}(\xi), \quad (4.91)$$

$$\mathcal{M}_{j,k}^{R,m}(\nu, \beta) := \frac{8\pi^2 i}{\omega} h^{1+\nu+\beta} \int_0^1 d\xi \left(\sigma_{jk}^{zgr}(k_{\parallel}; x_m + h\xi) - \sigma_{jk}^{zgr}(k_{\parallel}; x_{exp}) \right) H_{\nu}(\xi) H_{\beta}(\xi),$$

$$\mathcal{M}_{j,k}^{ML,m}(\nu, \beta) := \frac{8\pi^2 i}{\omega} h^{1+\nu+\beta} \int_{-1}^0 d\xi \left(\sigma_{jk}^{zgr}(k_{\parallel}; x_m + h\xi) - \sigma_{jk}^{zgr}(k_{\parallel}; x_{exp}) \right) H_{\nu}(\xi) H_{\beta}(\xi + 1)$$

und

$$\mathcal{M}_{j,k}^{MR,m}(\nu, \beta) := \frac{8\pi^2 i}{\omega} h^{1+\nu+\beta} \int_0^1 d\xi \left(\sigma_{jk}^{zgr}(k_{\parallel}; x_m + h\xi) - \sigma_{jk}^{zgr}(k_{\parallel}; x_{exp}) \right) H_{\nu}(\xi) H_{\beta}(\xi - 1)$$

eingehen. Diese Integrale können entweder mit einer 3-Punkt oder 5-Punkt Gauß-Quadratur numerisch berechnet werden oder unter der Annahme, daß die Gitterkonstante h sehr viel kleiner als die Gradientenlängen der Plasmaparameter ist, mit Hilfe der Approximation $\sigma_{jk}^{zgr}(k_{\parallel}; x) \approx \sigma_{jk}^{zgr}(k_{\parallel}; x_m)$ für $x \in [x_{m-1}, x_{m+1}]$, auf die analytisch berechneten Integrale (4.40) bis (4.43) reduziert werden,

$$\mathcal{M}_{j,k}^{L,m}(\nu, \beta) := \frac{8\pi^2 i}{\omega} \left(\sigma_{jk}^{zgr}(k_{\parallel}; x_m) - \sigma_{jk}^{zgr}(k_{\parallel}; x_{exp}) \right) \mathcal{H}^L(0, 0; \nu, \beta), \quad (4.92)$$

$$\mathcal{M}_{j,k}^{R,m}(\nu, \beta) := \frac{8\pi^2 i}{\omega} \left(\sigma_{jk}^{zgr}(k_{\parallel}; x_m) - \sigma_{jk}^{zgr}(k_{\parallel}; x_{exp}) \right) \mathcal{H}^R(0, 0; \nu, \beta),$$

$$\mathcal{M}_{j,k}^{ML,m}(\nu, \beta) := \frac{8\pi^2 i}{\omega} \left(\sigma_{jk}^{zgr}(k_{\parallel}; x_m) - \sigma_{jk}^{zgr}(k_{\parallel}; x_{exp}) \right) \mathcal{H}^{ML}(0, 0; \nu, \beta)$$

bzw.

$$\mathcal{M}_{j,k}^{MR,m}(\nu, \beta) := \frac{8\pi^2 i}{\omega} \left(\sigma_{jk}^{zgr}(k_{\parallel}; x_m) - \sigma_{jk}^{zgr}(k_{\parallel}; x_{exp}) \right) \mathcal{H}^{MR}(0, 0; \nu, \beta).$$

Mit den Relationen (4.86) und (4.90) besitzt schließlich der Stromdichteterm in der Näherung (4.21) gemäß Gl. (4.22) die Gestalt

$$\frac{4\pi i}{\omega} \int_{x_a}^{x_b} dx \left[\underline{f}(x) \right]^* \cdot \underline{J}(x; k_y, k_{\parallel}) = \quad (4.93)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda_0} \left\{ (1 - \delta_{m,N}) \Delta_{0,s-1}[m] \mathcal{L}_j^{R,m}(\nu, \lambda; 0) + (-1)^\nu \Delta_{1,s}[m] \mathcal{L}_j^{L,m}(\nu, \lambda; 0) \right\} C^0(\lambda) +$$

$$\sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^3 \sum_{\beta=0}^1 \left\{ \sum_{\tau=-s}^s \left\{ (1 - \delta_{m,N}) \left[\delta_{n,m+\tau} \Delta_{0,N-1}[n] \mathcal{K}_{j,k}^R(\nu, \beta; \tau) + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. (-1)^\beta \delta_{n,m+\tau+1} \Delta_{1,N}[n] \mathcal{K}_{j,k}^{MR}(\nu, \beta; \tau+1) \right] + \right.$$

$$\left. (1 - \delta_{m,0}) \left[(-1)^\nu \delta_{n,m+\tau-1} \Delta_{0,N-1}[n] \mathcal{K}_{j,k}^{ML}(\nu, \beta; \tau-1) + \right. \right.$$

$$\left. \left. (-1)^{\nu+\beta} \delta_{n,m+\tau} \Delta_{1,N}[n] \mathcal{K}_{j,k}^L(\nu, \beta; \tau) \right] \right\} +$$

$$\left\{ \delta_{n,m-1} \mathcal{M}_{j,k}^{ML,m}(\nu, \beta) + \delta_{n,m} (1 - \delta_{m,0}) \mathcal{M}_{j,k}^{L,m}(\nu, \beta) + \right.$$

$$\left. \delta_{n,m} (1 - \delta_{m,N}) \mathcal{M}_{j,k}^{R,m}(\nu, \beta) + \delta_{n,m+1} \mathcal{M}_{j,k}^{MR,m}(\nu, \beta) \right\} \epsilon_{n,k}^{[\beta]} +$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda_N} \left\{ \Delta_{N-s,N-1}[m] \mathcal{L}_j^{R,m}(\nu, \lambda; N) + (-1)^\nu (1 - \delta_{m,0}) \Delta_{N-s+1,N}[m] \mathcal{L}_j^{L,m}(\nu, \lambda; N) \right\} C^N(\lambda)$$

in der er einen zu Gl. (4.85) alternativen Ausgangspunkt zur numerischen Lösung der Wellengleichung bildet. Um den Preis eines eingeschränkten Gültigkeitsbereiches, vgl. Abschnitt 4.2, hat diese Form des Stromdichteterms gegenüber (4.85) den Vorteil, daß die Integrale (4.87) vom Gitterpunktindex m unabhängig sind, d.h. für das gesamte Gitter nur einmal berechnet werden müssen. Dies reduziert die erforderliche CPU-Zeit zur Berechnung einer numerischen Lösung der Wellengleichung erheblich. Die Integrale

(4.88) hängen zwar wie jene aus den Gleichungen (4.84) noch vom Gitterpunktindex m ab, jedoch nur über die Exponentialfaktoren, sodaß auch hier $\underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x)$ für das gesamte Gitter nur einmal an der Stelle $x = x_{exp}$ ausgewertet werden muß; die numerische Integration gestaltet sich also einfacher als in Gl. (4.85). Die zusätzlich erforderliche Auswertung der Terme (4.91) bzw. (4.92) fällt nicht ins Gewicht, da sie mit geringem numerischen Aufwand durchgeführt werden kann.

Schließlich sei noch erwähnt, daß man in Gl. (4.93) wegen der speziellen Bedeutung der Approximation (4.20) sofort den Grenzfall des Stromdichteterms für vernachlässigbaren Gyroradius ablesen kann, indem man formal alle Beiträge streicht die entweder $\underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_{exp})$ oder $\underline{\sigma}^{zgr}(k_{\parallel}; x_{exp})$ enthalten.

4.6 Die Anpassung der Finite-Elemente-Lösung an WKB-Moden als Randbedingung

In den Abschnitten 4.4 bzw. 4.5 wurden lokale und nichtlokale Beiträge zur Wellengleichung (4.9) in eine Gestalt gebracht, die als Ausgangspunkt für die numerische Lösung der Wellengleichung durch eine FEL-Methode geeignet ist. Nun soll als letzter Schritt der analytischen Vorarbeiten zur Numerik eine entsprechende Umformung bzw. Auswertung der Randterme aus Gl. (4.9) durchgeführt werden, was die Wahl geeigneter Randbedingungen einschließt. In Abschnitt 4.5 wurde durch den erweiterten Galerkin-Ansatz (4.29) bereits vorweggenommen, daß die FEL-Lösung der Wellengleichung, also die Lösung innerhalb des FEL-Rechenbereiches $[x_0, x_N]$ an dessen Randpunkten $x = x_0$ bzw. $x = x_N$ WKB-Moden anzupassen ist, die in den angrenzenden Schichten von der Breite einiger Ionen-Gyroradien zu bestimmen sind. Die weitere Ausbreitung der WKB-Moden außerhalb des FEL-Rechenbereichs kann im Prinzip im Rahmen der WKB-Approximation mit Hilfe eines als "ray tracing" bezeichneten Verfahrens für realistische Tokamak-Konfigurationen beschrieben werden, was aber nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit sein soll. Von Interesse ist hier lediglich die FEL-Lösung im Intervall $[x_0, x_N]$, das die Modenkonversionsschicht des IBW-Heizszenarios umfassen soll, nicht jedoch die Ankopplung der Vakuumwelle an die SW im Randbereich des Tokamaks oder die Propagation der angeregten IBW in zentrale Plasmaregionen.

Nur um ein bestimmtes physikalisches Szenario vor Augen zu haben und um die folgende Argumentation anschaulicher zu gestalten, wird angenommen, daß sich diese WKB-Moden in den Bereichen $[0, x_0]$ und $[x_N, x_{Koppler}]$ des "slab" ausbreiten können. Dabei soll, da die "slab"-Koordinate x der radialen Koordinate im Tokamak entspricht, $x = 0$ das Plasmazentrum (äquivalent der magnetischen Achse) und $x = x_{Koppler}$ beispielsweise die radiale Position der Mündung eines Grills definieren. Die Analogie zu Streuproblemen ist offensichtlich. Bei $x = x_{Koppler}$ angeregte WKB-Moden laufen in den FEL-Rechenbereich ein, wo im konkreten Fall der IBW-Heizung die SW ihre Konfluenz mit der IBW besitzt, werden dort im Zuge der Modenkonversion gegebenenfalls transmittiert, reflektiert oder absorbiert und verlassen als entsprechende auslaufende WKB-Moden

diesen Bereich wieder. Die FEL-Lösung der nichtlokalen Wellengleichung dient also zur rechnerischen Überbrückung des Gebietes um die Modenkonzersionschicht, in der die WKB-Approximation aufgrund der schnellen Variation der lokalen Wellenlängen der involvierten Moden (diese steht im Widerspruch zu den Ordnungsrelationen (3.5)) nicht zur Anwendung kommen kann.

Zur Umformung der Randterme werden nun die Relationen

$$\underline{E}(x_0; k_y, k_{\parallel}) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda_0} C^0(\lambda) \underline{\epsilon}^0(\lambda), \quad (4.94)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \underline{E}(x; k_y, k_{\parallel}) \right]_{x=x_0} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda_0} iK^0(\lambda) C^0(\lambda) \underline{\epsilon}^0(\lambda),$$

$$\underline{E}(x_N; k_y, k_{\parallel}) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda_N} C^N(\lambda) \underline{\epsilon}^N(\lambda)$$

und

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \underline{E}(x; k_y, k_{\parallel}) \right]_{x=x_N} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda_N} iK^N(\lambda) C^N(\lambda) \underline{\epsilon}^N(\lambda)$$

benutzt, die man im Limes $(x - x_0) \rightarrow 0_-$ bzw. $(x - x_N) \rightarrow 0_+$ aus dem erweiterten Galerkin-Lösungsansatz (4.55) erhält. Mit ihrer Hilfe und mit der konkreten Wahl (4.28) der Testfunktionen können die Randterme durch eine kurze Rechnung in die gewünschte Gestalt gebracht werden. Man erhält als Ergebnis

$$\begin{aligned} & \frac{c}{\omega} \underline{e}^1 \cdot \left[\underline{f}(x) \right]^* \wedge \left(i \hat{n} \wedge \underline{E}(x; k_y, k_{\parallel}) \right) \Big|_{x=x_a}^{x_b} = \\ & i \frac{c}{\omega} \delta_{\nu,0} \left[\delta_{m,N} \sum_{\lambda=1}^{\lambda_N} \alpha_j^N(\lambda) C^N(\lambda) - \delta_{m,0} \sum_{\lambda=1}^{\lambda_0} \alpha_j^0(\lambda) C^0(\lambda) \right], \end{aligned} \quad (4.95)$$

wo die Definitionen

$$\alpha_j^0(\lambda) := \frac{c}{\omega} K^0(\lambda) \epsilon_j^0(\lambda) - \left(\delta_{j,1} \frac{c}{\omega} K^0(\lambda) + \delta_{j,2} n_y + \delta_{j,3} \iota n_{\parallel} \right) \epsilon_1^0(\lambda) \quad (4.96)$$

und

$$\alpha_j^N(\lambda) := \frac{c}{\omega} K^N(\lambda) \epsilon_j^N(\lambda) - \left(\delta_{j,1} \frac{c}{\omega} K^N(\lambda) + \delta_{j,2} n_y + \delta_{j,3} \iota n_{\parallel} \right) \epsilon_1^N(\lambda),$$

die eine einheitliche Schreibweise erlauben, benutzt werden, mit $\epsilon_j^0(\lambda) := \underline{\epsilon}^0(\lambda) \cdot \underline{e}^j$ und $\epsilon_j^N(\lambda) := \underline{\epsilon}^N(\lambda) \cdot \underline{e}^j$. Definitionsgemäß verschwinden die Beiträge $\alpha_1^0(\lambda)$ und $\alpha_1^N(\lambda)$ in Gl. (4.95) identisch.

Die Größen $\alpha_j^0(\lambda)$ und $\alpha_j^N(\lambda)$ gehen außer in die Randterme noch in die Projektion des Poynting-Vektors (3.44) auf \underline{e}^1 ein; mit den Relationen (4.55) und (3.41) erhält man

$$S^{\text{field},0}(\lambda) := \underline{e}^1 \cdot \underline{S}^{\text{field},\lambda}(x_0; k_y, k_{\parallel}) = \frac{c}{8\pi} \left| C^0(\lambda) \right|^2 \text{Re} \left[\underline{\epsilon}^{0*}(\lambda) \cdot \underline{\alpha}^0(\lambda) \right] \quad (4.97)$$

bzw.

$$S^{\text{field},N}(\lambda) := \underline{\epsilon}^1 \cdot \underline{S}^{\text{field},\lambda}(x_N; k_y, k_{\parallel}) = \frac{c}{8\pi} |C^N(\lambda)|^2 \text{Re} [\underline{\epsilon}^{N*}(\lambda) \cdot \underline{\alpha}^N(\lambda)] , \quad (4.98)$$

wo $\underline{\alpha}^0(\lambda) := \sum_{j=1}^3 \alpha_j^0(\lambda) \underline{e}^j$ und $\underline{\alpha}^N(\lambda) := \sum_{j=1}^3 \alpha_j^N(\lambda) \underline{e}^j$ gilt. Der Vollständigkeit halber werden an dieser Stelle die entsprechenden Ausdrücke der kinetischen Korrektur des Poynting-Flusses angegeben, die sich aus Gl. (3.44) in analoger Weise ergeben:

$$S^{\text{kin},0}(\lambda) := \underline{\epsilon}^1 \cdot \underline{S}^{\text{kin},\lambda}(x_0; k_y, k_{\parallel}) = \quad (4.99)$$

$$\frac{\pi}{2} |C^0(\lambda)|^2 \underline{\epsilon}^{0*}(\lambda) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial k_x} \left[\underline{\sigma}^{(0)}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_0) \right]^A \right]_{k_x \rightarrow K^0(\lambda)} \cdot \underline{\epsilon}^0(\lambda)$$

und

$$S^{\text{kin},N}(\lambda) := \underline{\epsilon}^1 \cdot \underline{S}^{\text{kin},\lambda}(x_N; k_y, k_{\parallel}) = \quad (4.100)$$

$$\frac{\pi}{2} |C^N(\lambda)|^2 \underline{\epsilon}^{N*}(\lambda) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial k_x} \left[\underline{\sigma}^{(0)}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_N) \right]^A \right]_{k_x \rightarrow K^N(\lambda)} \cdot \underline{\epsilon}^N(\lambda) .$$

Mit Relation (4.95) sind nun alle Terme der Wellengleichung des "slab" (4.9) in einer für die numerische Lösung geeigneten Form gegeben. Neben dem Randterm sind das insbesondere die Terme (4.45), (4.46) und, je nach gewählter Approximation des Leitfähigkeitskernes, (4.85) oder (4.93). Man erhält also durch den modifizierten Galerkin-Ansatz (4.29), der der nichtlokalen Struktur des IBW-Modenkversionsproblems angepaßt ist, ein System von $6(N+1)$ algebraischen Gleichungen.

An dieser Stelle ist anzumerken, daß dieses System einer Ergänzung durch zusätzliche Gleichungen bedarf, da es alleine zur eindeutigen Bestimmung einer Lösung der integralen Wellengleichung nicht ausreicht. Dies läßt sich am einfachsten durch die Analogie des Modenkversionsproblems zu Streuproblemen verdeutlichen; den auslaufenden asymptotischen Zuständen eines Streuvorgangs entsprechen jene WKB-Moden, die Leistungsflüsse besitzen, die Energie aus dem FEL-Rechenbereich abführen. Bei Streuproblemen sind nun typisch Übergangswahrscheinlichkeiten der Ausgangszustände in auslaufende asymptotische Zustände zu berechnen. Den Übergangswahrscheinlichkeiten entsprechen in dieser Analogie die Amplituden auslaufender WKB-Moden, die sich als Resultat der Modenkversion ergeben, also gewissermaßen einer Streuung extern angeregter einlaufender WKB-Moden, die dem FEL-Rechenbereich Energie zuführen. Ihre Amplituden müssen daher ebenso wie die Übergangswahrscheinlichkeiten im Streuproblem als unbekannte Größen aufgefaßt werden, sodaß es im System tatsächlich mehr Unbekannte als Gleichungen gibt.

In Abschnitt 1.4 und 4.1 wurde ein vollständiges FEL-Gleichungssystem, das zu einer eindeutigen Wellenlösung führt, formal in der Gestalt $\underline{S} \cdot \underline{\epsilon} = \underline{b}$ geschrieben. Der Vektor $\underline{\epsilon}$ der unbekanntenen Koeffizienten des modifizierten Galerkin-Ansatzes (4.29) muß dann neben den $6(N+1)$ Gitterpunktwerten $\epsilon_{n,k}^{[\beta]}$ des elektrischen Wellenfeldes und seiner ersten Ableitung auch die Amplituden $C^0(\lambda_{\text{out}})$ bzw. $C^N(\lambda_{\text{out}})$ der auslaufenden WKB-Moden enthalten. Die Amplituden der einlaufenden Moden, $C^0(\lambda_{\text{in}})$ und $C^N(\lambda_{\text{in}})$, die als Randbedingung vorzugeben sind, gehen dagegen in den Vektor \underline{b} ein.

Die das System $\underline{S} \cdot \underline{\epsilon} = \underline{b}$ vervollständigenden, zusätzlichen Gleichungen, die schließlich auf eine eindeutige Wellenlösung führen, können gefunden werden, wenn man berücksichtigt, daß das elektrische Feld an den Punkten $x = x_0$ und $x = x_N$ entsprechend den Relationen (4.31), (4.32) und (4.94) Stetigkeitsbedingungen erfüllen muß. Deren Projektion auf die Basisvektoren \underline{e}^j liefert die gewünschten Bedingungen, nämlich

$$\epsilon_{0,k}^{[0]} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda_0} \epsilon_k^0(\lambda) C^0(\lambda), \quad (4.101)$$

$$\epsilon_{0,k}^{[1]} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda_0} iK^0(\lambda) \epsilon_k^0(\lambda) C^0(\lambda), \quad (4.102)$$

$$\epsilon_{N,k}^{[0]} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda_N} \epsilon_k^N(\lambda) C^N(\lambda) \quad (4.103)$$

und

$$\epsilon_{N,k}^{[1]} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda_N} iK^N(\lambda) \epsilon_k^N(\lambda) C^N(\lambda). \quad (4.104)$$

Dabei muß das algebraische FEL-Gleichungssystem $\underline{S} \cdot \underline{\epsilon} = \underline{b}$ genau so viele Bedingungen aus (4.101) bis (4.104) umfassen, wie im Problem unbekannte WKB-Amplituden auftreten. Die restlichen Projektionen der Stetigkeitsbedingungen enthalten keine wesentlich neue Information, sind also durch die FEL-Lösung der Wellengleichung automatisch erfüllt. Dies ist insofern zu verstehen, als voraussetzungsgemäß an den Punkten $x = x_0$ und $x = x_N$ die FEL-Lösung ebenso wie die WKB-Lösung gültig ist, d.h. beide Lösungen dort dieselbe physikalische Realität beschreiben. Die Form der WKB-Lösung sagt aber, daß Polarisation und Wellenzahl einer RF-Welle im Plasma durch dessen Zustand determiniert sind und nur die Amplitude der Welle frei bleibt. Dieses physikalische Faktum kann nicht von der benutzten Approximation abhängen. Anders formuliert, die Information über eben jene Polarisation und Wellenzahl einer Mode muß auch im algebraischen System der FEL-Wellengleichung und damit in der Lösung $\epsilon_{n,k}^{[\beta]}$ enthalten sein. Setzt man also den Wert irgendeiner der jeweils sechs Größen $\epsilon_{0,k}^{[\beta]}$ oder $\epsilon_{N,k}^{[\beta]}$ durch eine Stetigkeitsbedingung in Relation zu den betreffenden WKB-Amplituden, so müssen dadurch in entsprechender Weise die Werte aller anderen fünf Größen determiniert sein, weil Polarisation und Wellenzahl eben nicht frei wählbar sein können.

Die Schwierigkeit bei der Formulierung einer allgemeinen Aussage über die genaue Zahl der unbekanntenen WKB-Amplituden und damit der erforderlichen Stetigkeitsbedingungen, liegt in der Tatsache begründet, daß die Anzahl λ_0 und λ_N der unabhängigen WKB-Moden bei $x = x_0$ bzw. $x = x_N$ durch die Zahl der entsprechenden Lösungen der lokalen Dispersionsrelation (3.38) gegeben und folglich von den konkreten Werten der Plasmaparameter abhängig ist. Man erhält also von Fall zu Fall unterschiedlich viele Gleichungen im Gleichungssystem.

Die eigentlichen Randbedingungen werden nun durch die Forderung spezifiziert, daß alle in den FEL-Rechenbereich einlaufenden Wellen formal bei $x = x_{\text{Koppler}}$ abgestrahlt

werden, d.h. insbesondere, daß im Plasmazentrum, also bei $x = 0$, keine Anregung stattfindet. Dadurch ist eindeutig festgelegt, welche WKB-Amplituden vorzugeben bzw. als Unbekannte zu betrachten sind, denn mit den expliziten Ausdrücken (4.97) bis (4.100) für die diversen Beiträge $S^{\text{field},0}(\lambda)$, $S^{\text{field},N}(\lambda)$, $S^{\text{kin},0}(\lambda)$ und $S^{\text{kin},N}(\lambda)$ zum totalen Leistungsfluß in \underline{e}^1 -Richtung, kann für jede einzelne WKB-Mode festgestellt werden, ob sie Energie in den FEL-Rechenbereich hinein- oder hinaus transportiert. Jene WKB-Moden, die dem FEL-Rechenbereich Energie zuführen, können offenbar nur bei $x = x_{\text{Koppler}}$ angeregt werden, sodaß die Amplituden der einlaufenden Wellen bei $x = x_0$ gleich Null zu setzen sind, bzw. bei $x = x_N$ mit einem beliebigen, aber festen Wert identifiziert werden müssen. Die WKB-Moden die Energie aus dem FEL-Rechenbereich abführen, sind dann die transmittierten bzw. reflektierten Wellen.

Zur Veranschaulichung obiger Formulierung der Randbedingungen wird hier der einfachste nichttriviale Fall betrachtet, wo die lokale Dispersionsrelation $H(n_{\perp}^2, |n_{\parallel}|; \omega; x) = 0$ an den Orten $x = x_0$ und $x = x_N$ nur jeweils eine reelle Lösung n_{\perp}^2 besitzt, sodaß bei gegebenem n_y entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 3.2 je zwei WKB-Moden mit den reellen Wellenzahlen $+\frac{\varepsilon}{\omega}(n_{\perp}^2 - n_y^2)^{1/2}$ und $-\frac{\varepsilon}{\omega}(n_{\perp}^2 - n_y^2)^{1/2}$ existieren, die als $K^0(1)$ und $K^0(2)$ bzw. $K^N(1)$ und $K^N(2)$ bezeichnet werden. Aufgrund der unterschiedlichen Vorzeichen der Wellenzahlen werden sowohl bei $x = x_0$ als auch bei $x = x_N$ die Projektionen auf \underline{e}^1 des totalen Poynting-Flusses beider WKB-Moden entgegengesetzt orientiert sein. Es soll die Konvention benutzt werden, daß Moden mit Index $\lambda = 1$ in den FEL-Rechenbereich $[x_0, x_N]$ einlaufen, bzw. solche mit $\lambda = 2$ auslaufen. Dann sind die Amplituden $C^0(1)$ und $C^N(1)$ durch $C^0(1) = 0$ bzw. $C^N(1) = C$ vorzugeben, mit $C \in \mathbb{C}$. $C^0(2)$ ist offenbar als Amplitude der transmittierten Welle zu interpretieren und $C^N(2)$ als Amplitude der reflektierten Welle. Entsprechend den oben angeführten Bemerkungen zur Forderung der Stetigkeit des elektrischen (und magnetischen) Wellenfeldes an den beiden Schnittstellen zwischen WKB- und FEL-Approximation, sind dann dem algebraischen FEL-Gleichungssystem zwei der Stetigkeitsbedingungen (4.101) bis (4.104) hinzuzufügen.

Um die Effizienz einer Modenkonversion beurteilen zu können, ist es notwendig, für die WKB-Moden Transmissions- und Reflexionskoeffizienten zu definieren. Diese Größen sind eng mit der globalen Leistungsbilanz verknüpft, die besagt, daß die dem FEL-Rechenbereich, also im wesentlichen der Modenkonversionsschicht zugeführte Leistung entweder an ihr reflektiert, in ihr absorbiert oder durch sie transmittiert werden muß, und die eine Quantifizierung der diversen Anteile erlaubt.

Die globale Leistungsbilanz im Rahmen der WKB-Approximation erhält man durch Integration von Gl. (3.43) über ein Intervall $[a, b]$ und anschließender Summation über den Modenindex,

$$\sum_{\lambda} \underline{e}^1 \cdot \left(\underline{S}^{\text{field},\lambda}(b; k_y, k_{\parallel}) + \underline{S}^{\text{kin},\lambda}(b; k_y, k_{\parallel}) - \underline{S}^{\text{field},\lambda}(a; k_y, k_{\parallel}) + \underline{S}^{\text{kin},\lambda}(a; k_y, k_{\parallel}) \right) = \quad (4.105)$$

$$- \sum_{\lambda} \int_a^b dx P_{\lambda}^{\text{abs}}(x; k_y, k_{\parallel}) = -P_{\text{tot}}(a, b),$$

wo $P_{\text{tot}}(a, b)$ die in $[a, b]$ deponierte Gesamtleistung bezeichnet. Natürlich ist eine solche Leistungsbilanz auch für jede WKB-Mode separat erfüllt; den Ausgangspunkt einer notwendigen Verallgemeinerung für das IBW-Modenkversionsproblem kann aber nur die Bilanz (4.105) der Summe aller WKB-Moden bilden, da im Bereich der Modenkversion, also innerhalb des x -Intervalls $[x_0, x_N]$, wo die WKB-Näherung zusammenbricht, der Ansatz unabhängiger WKB-Moden sinnlos ist. Entsprechend ist auch eine Berechnung der in $[x_0, x_N]$ dissipierten Gesamtleistung $P_{\text{tot}}(x_0, x_N)$ nicht durch den Ausdruck $\sum_{\lambda} \int_{x_0}^{x_N} dx P_{\lambda}^{\text{abs}}(x; k_y, k_{\parallel})$ möglich. Im Gegensatz dazu sind jene Terme aus Gl. (4.105), die die diversen Beiträge zum Poynting-Fluß enthalten, unverändert in die verallgemeinerte Leistungsbilanz zu übernehmen, da an den Randpunkten des FEL-Bechenbereichs $[x_0, x_N]$ voraussetzungsgemäß die asymptotische WKB-Analyse anwendbar ist. Dabei kann allerdings, da nun keine globalen WKB-Lösungen $\forall x \in [0, x_{\text{Koppler}}]$ existieren, die Anzahl der WKB-Moden bei $x = x_0$ und $x = x_N$ unterschiedlich sein, d.h. im allgemeinen gilt $\lambda_0 \neq \lambda_N$. Folglich muß mit den Relationen (4.97) bis (4.100) die für die Modenkversion relevante globale Leistungsbilanz, die der Forderung nach Energieerhaltung Ausdruck verleiht, die Gestalt

$$P_{\text{tot}}(x_0, x_N) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda_0} \left(S^{\text{field},0}(\lambda) + S^{\text{kin},0}(\lambda) \right) - \sum_{\lambda=1}^{\lambda_N} \left(S^{\text{field},N}(\lambda) + S^{\text{kin},N}(\lambda) \right) \quad (4.106)$$

besitzen. Die Relationen (4.97) bis (4.100) erlauben für eine konkrete numerische Lösung der Wellengleichung die Berechnung der rechten Seite obiger Gleichung, während $P_{\text{tot}}(x_0, x_N)$ entsprechend Gl. (4.106) vorerst nur indirekt als Fehlbetrag in den diversen Beiträgen zum Leistungsfluß ermittelt werden kann. Ein zur direkten numerischen Berechnung von $P_{\text{tot}}(x_0, x_N)$ und damit zur Überprüfung der Energieerhaltung einer bestimmten numerischen Wellenlösung geeigneter, expliziter Ausdruck für die innerhalb der Modenkversionsschicht lokal dissipierte Leistung wird in Abschnitt 5.2 präsentiert.

Für den oben diskutierten Spezialfall von jeweils nur einer Lösung $n_1^2 \in \mathbf{R}$ der lokalen Dispersionsrelationen bei $x = x_0$ und $x = x_N$ gilt wegen $C^0(1) = 0$ mit Gl. (4.97) und (4.99) offenbar $S^{\text{field},0}(1) = S^{\text{kin},0}(1) = 0$. Damit und mit den Definitionen

$$R := - \frac{S^{\text{field},N}(2) + S^{\text{kin},N}(2)}{S^{\text{field},N}(1) + S^{\text{kin},N}(1)}, \quad (4.107)$$

$$T := \frac{S^{\text{field},0}(2) + S^{\text{kin},0}(2)}{S^{\text{field},N}(1) + S^{\text{kin},N}(1)} \quad (4.108)$$

und

$$A := - \frac{P_{tot}(x_0, x_N)}{S^{field,N}(1) + S^{kin,N}(1)}, \quad (4.109)$$

kann die globale Leistungsbilanz in der Form

$$R + T + A = 1 \quad (4.110)$$

geschrieben werden. Die Größen R , T und A besitzen offenbar die Bedeutung eines Reflexions-, Transmissions- bzw. Absorptionskoeffizienten für den totalen Leistungsfluß der bei $x = x_N$ einlaufenden WKB-Mode. Die Verallgemeinerung der Definitionen dieser Koeffizienten auf den Fall von 4 oder 6 WKB-Moden an den Grenzen des FEL-Rechenbereiches ist trivial.

Abschließend ist eine Bemerkung zur Kompatibilität des bei der FEL-Lösung der Wellengleichung benutzten Leitfähigkeitskernes (4.13) oder (4.20) mit dem asymptotischen Integralkern (3.20) der WKB-Approximation erforderlich, da letzterer über die kinetischen Korrekturen (4.99) bzw. (4.100) zum Poynting-Fluß in die globale Leistungsbilanz der FEL-Wellenlösung eingeht. Dazu sind jeweils die entsprechenden Leitfähigkeitskerne des Ortsraumes (4.15) und (4.21) mit dem führenden Term $O(\kappa^0)$ aus Relation (3.22) zu vergleichen.

Die Näherung (4.13) führt im Ortsraum auf den Leitfähigkeitskern (4.15), der mit dem Integralkern (3.22) offenbar dann kompatibel ist, wenn die Identifikation $x_s = X(x, x')$ durchgeführt werden kann. Dies ist der Fall, da nach Durchführung der WKB-Analyse der Wellengleichung x_s durch x zu substituieren ist, vgl. Abschnitt 3.1, bzw. im Verlauf der Auswertung der nichtlokalen Terme der FEL-Wellengleichung in Abschnitt 4.5 $X(x, x')$ mit x gleichgesetzt wird.

Komplizierter ist die Situation im Falle der Approximation (4.20). Diese führt im Ortsraum auf den Integralkern (4.21), der in dieser Form mit dem asymptotischen Kern (3.22) nicht kompatibel ist, da die Ortsvariable x_s nicht mit dem festen Parameter x_{exp} identifiziert werden kann, und auch die "zgr"-Beiträge in (3.22) nicht auftreten. Die gesamte im Rahmen der WKB-Approximation durchgeführte Algebra kann jedoch für die globale Leistungsbilanz der FEL-Lösungen übernommen werden, falls entsprechend der Näherung (4.20) in den WKB-Ausdrücken formal die Substitution $\underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x'') \rightarrow \underline{\sigma}^{zgr}(k_{\parallel}; x'') - \underline{\sigma}^{zgr}(k_{\parallel}; x_{exp}) + \underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_{exp})$ durchgeführt wird. Für die kinetischen Anteile des Poynting-Flusses (4.99) und (4.100) bedeutet das wegen der Unabhängigkeit der "zgr"-Beiträge von k_x , daß in den Koeffizienten R , T und A sowohl $\frac{\partial}{\partial k_x} [\underline{\sigma}^{(0)}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_0)]^A$ als auch $\frac{\partial}{\partial k_x} [\underline{\sigma}^{(0)}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_N)]^A$ durch $\frac{\partial}{\partial k_x} [\underline{\sigma}^{(0)}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_{exp})]^A$ zu ersetzen sind.

4.7 Der IBW-Code

Offenbar bildet die schwache Form (4.9) der Wellengleichung im "slab" gemeinsam mit den Relationen (4.45), (4.46), (4.95) und, je nach benutzter Näherung des Leitfähigkeitskernes (4.85) oder (4.93), ein algebraisches Gleichungssystem in den Galerkin-Koeffizienten $\epsilon_{n,k}^{[\beta]}$ und jenen WKB-Amplituden $C^0(\lambda_{\text{out}})$ bzw. $C^N(\lambda_{\text{out}})$, die entsprechend der Diskussion im vorangehenden Abschnitt als Unbekannte anzusehen sind. Diesem Gleichungssystem sind in bestimmter Weise, wie ebenfalls in Abschnitt 4.6 erörtert, Stetigkeitsbedingungen an den Schnittstellen zwischen FEL- und WKB-Lösung hinzuzufügen, und zwar derart, daß genau so viele Gleichungen wie Unbekannte existieren und die resultierende "stiffness"-Matrix des Systems invertierbar ist. Die Galerkin-Koeffizienten und die entsprechenden WKB-Amplituden können dann formal in einem "Vektor der Unbekannten" $\underline{\epsilon}$ zusammengefaßt werden, wobei hier auf die symbolische Schreibweise aus Abschnitt 4.1 zurückgegriffen wird. Dabei werden die Indizes n, k, β bzw. λ in bestimmter Weise auf die einfach indizierte Größe $\underline{\epsilon}$ abgebildet. Dies kann in einer Form geschehen, daß die "stiffness"-Matrix, d.h. also die Koeffizienten-Matrix \underline{S} dieses algebraischen Gleichungssystems eine blockdiagonale Form besitzt, wobei jeder Block eine 6×6 Untermatrix von \underline{S} darstellt. Die explizite Gestalt der "stiffness"-Matrix kann direkt aus den Gleichungen (4.45), (4.46), (4.95) und (4.85) oder (4.93), bzw. (4.101) bis (4.104) abgelesen werden¹⁰, wobei ersichtlich wird, daß die Blockdiagonale von \underline{S} für $s \geq 1$ eine Breite von $2s + 1$ Blöcken hat. Es bleibt anzumerken, daß eine rein differentielle Wellengleichung auf eine blocktridiagonale "stiffness"-Matrix führen würde; die größere Bandbreite im Falle der integralen Wellengleichung ist auf ihre nichtlokalen Beiträge zurückzuführen.

Zur Durchführung der diversen Aufgaben, die mit der numerischen Integration der für das Modenkversionsproblem der IBW-Heizung relevanten Wellengleichung verbunden sind, wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit ein Fortran-Programm entwickelt, das hier als "IBW-Code" bezeichnet wird, vgl. Abschnitt 3.2. Die erste Aufgabe des IBW-Codes besteht nun darin, die einzelnen Elemente der "stiffness"-Matrix numerisch zu berechnen, was zum einen die Auswertung diverser k_x -Integrale wie beispielsweise (4.83) oder (4.84) erfordert, zum anderen Integrationen über die dimensionslose Ortskoordinate ξ , vgl. z.B. (4.91). Zudem sind die lokalen Wellenzahlen der diversen WKB-Moden aus der lokalen Dispersionsrelation bzw. ihre Polarisationsvektoren durch numerische Lösung des entsprechenden algebraischen WKB-Gleichungssystems zu bestimmen, da diese über die Randterme (4.95) in \underline{S} eingehen, siehe Kapitel 3. Diese Ergebnisse können weiters benutzt werden, um den Vektor \underline{b} auszuwerten, der von jenen Anteilen sowohl der

¹⁰Die Indizes m, j, ν werden dabei auf den Zeilenindex p der Matrix \underline{S} gemäß $p = 2j + \nu + 6m + 5$ abgebildet, bzw. analog n, k und β auf den Spaltenindex q durch $q = 2k + \beta + 6n + 5$, sodaß $p, q \in \{7, \dots, 6N + 12\}$ gilt. Die ersten und die letzten sechs Zeilen und Spalten der "stiffness"-Matrix (mit Indexwerten von 1 bis 6 bzw. $6N + 13$ bis $6N + 18$) bleiben dabei für die Koeffizienten des Systems $\underline{S} \cdot \underline{\epsilon} = \underline{b}$ aus jenen Beiträgen reserviert, die die unbekanntenen WKB-Amplituden enthalten. Solche Beiträge sind einerseits die erforderlichen Stetigkeitsbedingungen bei $x = x_0$ bzw. $x = x_N$, andererseits die entsprechenden Anteile des Randterms bzw. der nichtlokalen Terme der Wellengleichung.

Randterme als auch der nichtlokalen Terme gebildet wird, die die vorzugebenden WKB-Amplituden $C^0(\lambda_{in})$ bzw. $C^N(\lambda_{in})$ enthalten, vgl. Abschnitt 4.1.

Im nächsten Rechenschritt invertiert der IBW-Code die zuvor zusammengesetzte "stiffness"-Matrix numerisch, wobei deren blockdiagonale Struktur die Anwendung effizienter Algorithmen erlaubt. Im Anschluß daran wird durch Matrixmultiplikation der invertierten "stiffness"-Matrix mit \underline{b} gemäß $\underline{\epsilon} = \underline{S}^{-1} \cdot \underline{b}$ der Vektor der Galerkin-Koeffizienten bzw. der unbekanntenen WKB-Amplituden bestimmt und damit eine numerische Lösung der nichtlokalen Wellengleichung. Konkret werden die beiden letzten Rechenschritte mit Hilfe von Fortran-Routinen der LINPACK-Bibliothek durchgeführt. Schließlich berechnet der IBW-Code, wie in Abschnitt 4.6 dargestellt, den zu einer solchen Lösung gehörigen Transmissions-, Reflexions- und, aus der globalen Leistungsbilanz, Absorptionskoeffizienten. Beispiele für solche mit Hilfe des IBW-Codes errechneten Modenkonzersionslösungen werden in Kapitel 6 präsentiert.

Die hinsichtlich der benötigten Rechenzeit aufwendigste Prozedur des gesamten Lösungsverfahrens ist die Auswertung der diversen k_x -Integrale in den Elementen der "stiffness"-Matrix, da diese oszillierende Integranden enthalten. Die Auflösung dieser Oszillationen erfordert bei ihrer numerischen Integration verhältnismäßig viele Stützstellen, zumal sich diese Integrale formal von $-\infty$ nach $+\infty$ erstrecken, d.h. erst bei relativ großen Werten von $|k_x|$ abgebrochen werden können, bedingt durch den langsamen Abfall des Betrages der Integranden mit wachsendem $|k_x|$. Dabei wird die Schnelligkeit der Oszillationen der Integranden sowohl durch den Parameter s als auch durch die Gitterkonstante h bestimmt, vgl. Abschnitt 4.5.

Im Rahmen des IBW-Codes wird die diskrete Größe s , die gemäß (4.63) die Nichtlokalitätslänge $L_{nonlocal}$ und die Breite des Bandes der "stiffness"-Matrix bestimmt, als freier Parameter gehandhabt, sodaß die Konvergenz einer Lösung mit wachsendem s im Einzelfall sicherzustellen ist. Über den unter Umständen semikonvergenten Charakter des Verfahrens wurde bereits in Abschnitt 4.5, Fußnote 8 berichtet. Im Grenzfall des homogenen Plasmas besitzt das hier benutzte FEL-Verfahren in s jedoch immer konvergenten Charakter und entsprechende Tests der Numerik, die auf einem Vergleich der Lösung der Dispersionsrelation mit den errechneten Lösungen der nichtlokalen Wellengleichung beruhen, führten in allen untersuchten Fällen zu ausgezeichneter Übereinstimmung. Einen Konvergenztest für numerische Lösungen des inhomogenen Plasmas liefert der Vergleich eines aus einer lokalen Leistungsbilanz direkt berechneten Absorptionskoeffizienten mit dem entsprechenden Ergebnis der globalen Leistungsbilanz (4.110), wie er durch die in Kapitel 5 entwickelte Analysis ermöglicht wird. Die Resultate des Vergleichs, die für die untersuchten Szenarien ein befriedigendes Konvergenzverhalten der FEL-Lösung sicherstellen, werden in Kapitel 6 präsentiert.

Kapitel 5

Die Leistungsbilanz

5.1 Allgemeine Bemerkung zur Leistungsbilanz

In Ref. [Bra 88] wird im Rahmen der Gültigkeit der linearen Vlasov-Gleichung ein Ausdruck für die über die schnelle Zeitskala¹ $2\pi/\omega_r$ gemittelte Rate der Änderung der totalen kinetischen Energiedichte $P_{\text{kin}}^\alpha(\underline{x}, t)$ der Teilchen der Spezies α am Ort \underline{x} zur Zeit t unter dem Einfluß eines elektrischen Wellenfeldes angegeben. Dieser Ausdruck beruht auf den Annahmen der

- Anwendbarkeit der Driftapproximation

und eines Plasmas, das sich in einem Gleichgewichtszustand befindet, der durch eine

- stationäre Verteilungsfunktion ohne parallele Gradienten

determiniert ist, gilt ansonsten aber für beliebige Geometrien. Konkret wird als ungestörte Verteilungsfunktion, wie auch schon bei der Herleitung der integralen konstitutiven Relation, vgl. Abschnitt 2.2, eine nicht gedriftete Maxwell-Verteilung $F_{\alpha, M}(Y_\perp, v)$ der Führungszentren der Teilchen der Sorte α gewählt, die bis auf Terme zweiter Ordnung der Driftapproximation eine spezielle Lösung von Gl. (2.1) ist.

Den Ausgangspunkt der Herleitung von $P_{\text{kin}}^\alpha(\underline{x}, t)$ bildet der Ausdruck $Z_\alpha e \underline{E}(\underline{q}', t') \cdot \underline{v}'$ für die Leistung, die vom Wellenfeld $\underline{E}(\underline{x}, t)$ auf ein Einzelteilchen während der Bewegung entlang seines Orbits $(\underline{q}', \underline{v}')$ übertragen wird. Mit der Konvention, daß die durch t' parametrisierten Trajektorien zur Zeit $t' = t$ die Endwerte $\underline{q}' = \underline{x}$ und $\underline{v}' = \underline{v}$ besitzen, ergibt sich in der Folge für $P_{\text{kin}}^\alpha(\underline{x}, t)$

$$P_{\text{kin}}^\alpha(\underline{x}, t) = Z_\alpha e \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \int_{\mathbb{R}^3} d^3v \int_{-\infty}^t dt' \underline{E}(\underline{q}', t') \cdot \underline{v}' \tilde{f}_\alpha(t') \right\rangle, \quad (5.1)$$

wo $\langle \cdot \rangle$ die Mittelung auf der schnellen Zeitskala bezeichnet. Dementsprechend ist $\partial/\partial t$ als Ableitung auf der langsamen Zeitskala $2\pi/\omega_i$ aufzufassen. Die Störung \tilde{f}_α der Verteilungsfunktion ist dabei formal als Charakteristikenlösung (2.9) der linearen Vlasov-Gleichung gegeben, sodaß man unter Vernachlässigung des Terms $\frac{1}{c} \underline{v}' \wedge \underline{B}(\underline{q}', t')$ in Gl. (2.9) mit den Definitionen

$$P_{\text{kin}}^{(0)\alpha}(\underline{x}, t) := \frac{e^2 Z_\alpha^2}{m_\alpha} \omega_i e^{2\omega_i t} \int_{\mathbb{R}^3} d^3v \frac{F_{\alpha, M}(Y_\perp, v)}{(v_{th}^\alpha(Y_\perp))^2} |H|^2 \quad (5.2)$$

¹Hier bezeichnet $\omega_r = \text{Re}[\omega]$ den Realteil und $\omega_i = \text{Im}[\omega]$ den Imaginärteil der im allgemeinen komplexen Wellenfrequenz $\omega = \omega_r + i\omega_i$.

und

$$P_{\text{kin}}^{(1)\alpha}(\underline{x}, t) := -\frac{e^2 Z_\alpha^2}{m_\alpha} \omega_i e^{2\omega_i t} \int_{\mathbb{R}^3} d^3v F_{\alpha, M}(Y_\perp, v) \times \quad (5.3)$$

$$\text{Re} \left[\int_{-\infty}^t dt' e^{i\omega t} \underline{E}(\underline{q}', t') \cdot \underline{v}' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \frac{1}{\Omega_{C\alpha}(\underline{q}'')} e^{-i\omega'' t} \underline{E}^*(\underline{q}'', t'') \cdot \left\{ \underline{b}(\underline{q}'') \wedge \left(\frac{1}{n_\alpha(Y_\perp)} \frac{\partial}{\partial \underline{Y}} n_\alpha(Y_\perp) + \left(\frac{2|\underline{v}''|^2}{(v_{th}^\alpha(Y_\perp))^2} - 3 \right) \frac{1}{v_{th}^\alpha(Y_\perp)} \frac{\partial}{\partial \underline{Y}} v_{th}^\alpha(Y_\perp) \right) \right\} \right],$$

wo

$$H := e^{i\omega t} \int_{-\infty}^t dt' \underline{E}(\underline{q}', t') \cdot \underline{v}' \quad (5.4)$$

gilt, bis auf Terme zweiter Ordnung der Driftapproximation für die über die schnelle Zeitskala gemittelte Rate der kinetischen Energiedichteänderung

$$P_{\text{kin}}^\alpha(\underline{x}, t) = P_{\text{kin}}^{(0)\alpha}(\underline{x}, t) + P_{\text{kin}}^{(1)\alpha}(\underline{x}, t) \quad (5.5)$$

schreiben kann, vgl. [Bra 88]. In Gleichung (5.3) bezeichnet $\partial/\partial \underline{Y}$ den Nabla-Operator im Konfigurationsraum der Führungszentren und $\underline{b}(\underline{x})$ den Einheitsvektor in Richtung des statischen Magnetfeldes. Aus Gründen der Konsistenz mit der linearen Vlasov-Gleichung sind die Trajektorien $(\underline{q}', \underline{v}')$, wie jene durch t'' parametrisierten Orbits $(\underline{q}'', \underline{v}'')$ der Charakteristikenlösung, als die ungestörten Teilchentrajektorien der statischen Magnetfeldkonfiguration zu interpretieren.

Berücksichtigt man, daß im Rahmen der linearen Maxwell-Vlasov-Wellenphysik reversible Prozesse mit der schnellen Zeitskala assoziiert, bzw. irreversible Prozesse mit der durch ω_i induzierten langsamen Zeitskala verknüpft sind, dann bedeutet die Mittelung über die schnelle Zeitskala in Gl. (5.1) offenbar die Streichung reversibler Beiträge im Energieaustausch zwischen elektromagnetischem Wellenfeld und den Plasmateilchen. $P_{\text{kin}}^\alpha(\underline{x}, t)$ kann daher auch als die Rate der irreversiblen Änderung der totalen kinetischen Energiedichte der Teilchen der Sorte α interpretiert werden. Wie nun aus Gl. (5.5) ersichtlich wird, zerfällt diese Größe in zwei verschiedene Anteile, wobei der in Klammern geschriebene hochgestellte Index die Ordnung der beiden Terme bezüglich der Driftapproximation angibt. Diese Aufspaltung wird durch die \underline{Y} -Abhängigkeit der ungestörten Verteilungsfunktion $F_{\alpha, M}(Y_\perp, v)$ verursacht, die in der Charakteristikenlösung (2.9) den Übergang vom $(\underline{x}, \underline{v})$ -Phasenraum zum $(\underline{Y}, \underline{v})$ -Phasenraum notwendig macht, wobei der Nabla-Operator im Geschwindigkeitsraum $\frac{\partial}{\partial \underline{v}}$ durch $\frac{\partial}{\partial \underline{v}} + (\Omega_{C\alpha})^{-1} \underline{b} \wedge \frac{\partial}{\partial \underline{Y}}$ zu ersetzen ist.

Im Grenzfall $\omega_i \rightarrow 0_+$ erfordert die Energieerhaltung der Plasma-Welle-Wechselwirkung die Identität

$$\lim_{\omega_i \rightarrow 0_+} P_{\text{kin}}^\alpha(\underline{x}, t) = P_{\text{abs}}^\alpha(\underline{x}), \quad (5.6)$$

wo $P_{\text{abs}}^\alpha(\underline{x})$ die von der Welle durch Teilchen der Sorte α dissipierte Leistung pro Volumen bezeichnet. Mit den Relationen (5.2), (5.3) und (5.5) kann dann die lokal dissipierte Leistung in der Form

$$P_{\text{abs}}^\alpha(\underline{x}) = P_{\text{abs}}^{(0)\alpha}(\underline{x}) + P_{\text{abs}}^{(1)\alpha}(\underline{x}) \quad (5.7)$$

geschrieben werden, vgl. [Bra 88]. Dabei ist der als Stix-Term bezeichnete Beitrag nullter Ordnung der Driftapproximation $P_{\text{abs}}^{(0)\alpha}(\underline{x})$ durch

$$P_{\text{abs}}^{(0)\alpha}(\underline{x}) := \frac{e^2 Z_\alpha^2}{m_\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} d^3v \frac{F_{\alpha,M}(\underline{Y}_\perp, v)}{(v_{th}^\alpha(\underline{Y}_\perp))^2} \lim_{\omega_i \rightarrow 0_+} \omega_i |H|^2 \quad (5.8)$$

gegeben, bzw. der Beitrag erster Ordnung $P_{\text{abs}}^{(1)\alpha}(\underline{x})$, im folgenden diamagnetischer Term genannt, durch

$$P_{\text{abs}}^{(1)\alpha}(\underline{x}) := -\frac{e^2 Z_\alpha^2}{m_\alpha} \lim_{\omega_i \rightarrow 0_+} \omega_i \int_{\mathbb{R}^3} d^3v F_{\alpha,M}(\underline{Y}_\perp, v) \times \quad (5.9)$$

$$\text{Re} \left[\int_{-\infty}^t dt' e^{i\omega t} \underline{E}(\underline{q}', t') \cdot \underline{v}' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \frac{1}{\Omega_{C\alpha}(\underline{q}'')} e^{-i\omega'' t} \underline{E}^*(\underline{q}'', t'') \cdot \right.$$

$$\left. \left\{ \underline{b}(\underline{q}'') \wedge \left(\frac{1}{n_\alpha(\underline{Y}_\perp)} \frac{\partial}{\partial \underline{Y}} n_\alpha(\underline{Y}_\perp) + \left(\frac{2|\underline{v}''|^2}{(v_{th}^\alpha(\underline{Y}_\perp))^2} - 3 \right) \frac{1}{v_{th}^\alpha(\underline{Y}_\perp)} \frac{\partial}{\partial \underline{Y}} v_{th}^\alpha(\underline{Y}_\perp) \right) \right\} \right].$$

Die Gründe für diese Namensgebung werden im folgenden Abschnitt erläutert.

Aus Gl. (5.8) ist sofort abzulesen, daß der Stix-Term positiv definit ist. Falls dieser also über die diamagnetische Kontribution dominiert, wird irreversibel Energie vom elektromagnetischen Wellenfeld auf die Plasmateilchen übertragen. Grundsätzlich ist auch der inverse Energietransfer, also ein irreversibler Energieübertrag vom Plasma auf die Welle möglich. Eine solche Instabilität kann offenbar unter den gegebenen Voraussetzungen nur durch einen dominanten, negativen diamagnetischen Term verursacht werden.

In [Bra 88] wird überdies gezeigt, daß $P_{\text{abs}}^\alpha(\underline{x})$ mit dem über die schnelle Zeitskala gemittelten Poynting-Theorem im Limes $\omega_i \rightarrow 0_+$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{S}(\underline{x}) = -\frac{1}{2} \text{Re}[\underline{E}^*(\underline{x}, t) \cdot \underline{J}(\underline{x}, t)] \quad (5.10)$$

verträglich ist, denn die Differenz

$$\frac{1}{2} \text{Re}[\underline{E}^*(\underline{x}, t) \cdot \underline{J}(\underline{x}, t)] - \sum_\alpha P_{\text{abs}}^\alpha(\underline{x}) = \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{S}^{\text{kin}}(\underline{x}) \quad (5.11)$$

läßt sich als Divergenz eines Vektorfeldes $\underline{S}^{\text{kin}}(\underline{x})$ schreiben, das als kinetische Korrektur zum Poynting-Vektor zu interpretieren ist. Diese Korrektur wird durch die mit der kohärenten Wellenbewegung assoziierte kinetische Energie der Teilchen hervorgerufen. Dementsprechend beschreibt $\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{S}^{\text{kin}}(\underline{x})$ jenen Anteil des Energieaustausches $\frac{1}{2} \text{Re}[\underline{E}^*(\underline{x}, t) \cdot \underline{J}(\underline{x}, t)]$ der Plasmateilchen mit dem Wellenfeld, der auf der schnellen Zeitskala stattfindet, also den reversiblen Beitrag. Der irreversible Energieaustausch wird dann durch den Term $\sum_\alpha P_{\text{abs}}^\alpha(\underline{x})$ berücksichtigt, in Übereinstimmung mit seiner zuvor skizzierten Herleitung. Schließlich besitzt der zeitgemittelte Poynting-Vektor die Gestalt²

$$\underline{S}(\underline{x}) = \frac{c}{8\pi} \text{Re}[\underline{E}^*(\underline{x}, t) \wedge \underline{B}(\underline{x}, t)] \quad (5.12)$$

²Im Grenzfall $\omega_i \rightarrow 0_+$ ist wegen (2.11) sowohl $\underline{E}^*(\underline{x}, t) \wedge \underline{B}(\underline{x}, t)$ im Feldanteil des Poynting-Flusses als auch $\underline{E}^*(\underline{x}, t) \cdot \underline{J}(\underline{x}, t)$ im Poynting-Theorem (5.10) zeitunabhängig.

Der Ausdruck für $\underline{S}^{\text{kin}}(\underline{x})$ wird hier nicht benötigt, ist aber gegebenenfalls der Arbeit [Bra 88] zu entnehmen.

5.2 Die lokal dissipierte Leistung im "slab"

In den Beiträgen (5.8) und (5.9) zu $P_{\text{abs}}^\alpha(\underline{x})$ müssen beide Trajektorienintegrationen und das Geschwindigkeitsraumintegral analytisch ausgewertet werden, falls damit konkrete Rechnungen, wie beispielsweise die Erstellung von Leistungsdepositionsprofilen durchgeführt werden sollen. In Ref. [Bra 88] werden solche expliziten Ausdrücke für die lokal dissipierte Leistung $P_{\text{abs}}^\alpha(\underline{x})$ für den Spezialfall des homogenen Plasmas, bzw. für Szenarien in denen die FGR-Approximation anwendbar ist, angegeben.

Um die dissipierte Leistungsdichte in einer für numerische Rechnungen geeigneten Form zu erhalten, die auch für das Modenkversionsproblem der SW in eine IBW relevant ist, wird in diesem Abschnitt ein entsprechender Ausdruck sowohl für den Stix-Term als auch für den diamagnetischen Term hergeleitet, gültig in der in Abschnitt 2.3 definierten "slab"-Geometrie. Das statische Magnetfeld dieser "slab"-Konfiguration sei darüber hinaus schwach inhomogen³, was in diesem Zusammenhang bedeutet:

- die Führungszentrumsvariable \underline{Y}_\perp der ungestörten Trajektorien ist bis auf Terme zweiter Ordnung der Driftapproximation eine Konstante der Bewegung.

Im Hinblick auf die Modenkversion des IBW-Heizszenarios rechtfertigt der langsame Abfall des statischen Magnetfeldes im Bereich der Abschältschicht diese Annahme, mit der sich für die ungestörten Trajektorien

$$\underline{q}' = \underline{q}(t - t'; \underline{x}) = \underline{x} - \frac{\epsilon v_\perp}{\iota \Omega_{C\alpha}(\underline{Y}_x)} \left[(\sin(\phi + (t - t')\iota \Omega_{C\alpha}(\underline{Y}_x)) - \sin(\phi)) \underline{e}^1 + \right. \quad (5.13)$$

$$\left. (\cos(\phi + (t - t')\iota \Omega_{C\alpha}(\underline{Y}_x)) - \cos(\phi)) \underline{e}^2 \right] - (t - t')\iota v_\parallel \underline{e}^3 + O(\epsilon^2)$$

bzw.

$$\underline{v}' = \underline{v}(t - t'; \underline{v}) = \quad (5.14)$$

$$v_\perp \left[\cos(\phi + (t - t')\iota \Omega_{C\alpha}(\underline{Y}_x)) \underline{e}^1 + \sin(\phi + (t - t')\iota \Omega_{C\alpha}(\underline{Y}_x)) \underline{e}^2 \right] + \iota v_\parallel \underline{e}^3 + O(\epsilon^2)$$

ergibt, wo die Gyrofrequenz $\Omega_{C\alpha}$ im "slab" ebenso wie allen anderen Plasmaparameter nur von $\underline{Y}_x = \underline{Y}_\perp \cdot \underline{e}^1 = x + \frac{\epsilon v_\perp}{\iota \Omega_{C\alpha}(\underline{x})} \sin \phi + O(\epsilon^2)$ abhängen kann. Dabei ist der Winkel ϕ durch $\phi := \arctan(v_y/v_x) \in [0, 2\pi]$ definiert und ϵ bezeichnet den Skalenparameter der Driftapproximation, der als Indikator der Größenordnung der diversen Terme dient. Geometrisch veranschaulicht, beschreibt Gl. (5.13) eine Helix im Ortsraum. Die ungestörten Trajektorien $(\underline{q}'', \underline{v}'')$, die in den diamagnetischen Beiträgen benötigt werden, erhält man durch die Substitutionen $(\underline{q}', \underline{v}') \rightarrow (\underline{q}'', \underline{v}'')$ und $t' \rightarrow t''$ in den Parameterdarstellungen

³Auf dieser Annahme beruht auch, wie in Abschnitt 2.2 erwähnt wurde, die integrale konstitutive Relation (2.19) der "slab"-Geometrie.

(5.13) bzw. (5.14).

Die Auswertung der Stix-Terme (5.8) erfordert zunächst die analytische Berechnung der Trajektorienintegrale, d.h. in diesem Fall der Größe $|H|^2$. Mit Gl. (5.4), der Fourier-Darstellung des elektrischen Feldes

$$\underline{E}(x; k_y, k_{\parallel}) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x x} \tilde{\underline{E}}(k_x, k_y, k_{\parallel}) \quad (5.15)$$

und mit den expliziten Ausdrücken (5.13) und (5.14) für die Trajektorien, die erst die Berechnung von H ermöglichen, folgt durch Vertauschung von k_x - und t' -Integration und anschließender Substitution $t' \rightarrow t - \tau'$:

$$H = \sum_{k_y} e^{ik_y y} \sum_{k_{\parallel}} e^{ik_{\parallel} z} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x x} \tilde{\underline{E}}(k_x, k_y, k_{\parallel}) \cdot \quad (5.16)$$

$$\left[\int_0^{\infty} d\tau' e^{i(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel})\tau'} e^{-i \frac{\epsilon k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_{C\alpha}(\underline{Y}_x)} \sin(\phi - \psi + \Omega_{C\alpha}(\underline{Y}_x)\tau')} e^{i \frac{\epsilon v_{\perp}}{\Omega_{C\alpha}(\underline{Y}_x)} (k_x \sin \phi - k_y \cos \phi)} \times \right. \\ \left. \left[v_{\perp} \left(\cos(\phi + \tau' \Omega_{C\alpha}(\underline{Y}_x)) \underline{e}^1 + \sin(\phi + \tau' \Omega_{C\alpha}(\underline{Y}_x)) \underline{e}^2 \right) + \nu v_{\parallel} \underline{e}^3 \right] \right] + O(\epsilon^2) \cdot$$

Bedient man sich der mathematischen Identität

$$e^{ix \sin(\psi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\psi} \quad , \quad (5.17)$$

wo $J_n(x)$ die n -te Besselfunktion bezeichnet, so können die τ' -Integrationen analytisch ausgeführt werden und man erhält folgendes Zwischenergebnis:

$$H = \sum_{k_y} e^{ik_y y} \sum_{k_{\parallel}} e^{ik_{\parallel} z} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_{C\alpha}(\underline{Y}_x)}\right) e^{in(\psi - \phi)} e^{i \frac{\epsilon v_{\perp}}{\Omega_{C\alpha}(\underline{Y}_x)} (k_x \sin \phi - k_y \cos \phi)} \cdot \quad (5.18)$$

$$\tilde{\underline{E}}(k_x, k_y, k_{\parallel}) \cdot \left[v_{\perp} \frac{1}{2} \left\{ i \left(\frac{e^{i\phi}}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - (n-1)\Omega_{C\alpha}(\underline{Y}_x)} + \frac{e^{-i\phi}}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - (n+1)\Omega_{C\alpha}(\underline{Y}_x)} \right) \underline{e}^1 + \right. \right. \\ \left. \left. \left(\frac{e^{i\phi}}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - (n-1)\Omega_{C\alpha}(\underline{Y}_x)} - \frac{e^{-i\phi}}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - (n+1)\Omega_{C\alpha}(\underline{Y}_x)} \right) \underline{e}^2 \right\} + i \nu v_{\parallel} \frac{1}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\Omega_{C\alpha}(\underline{Y}_x)} \underline{e}^3 \right] + O(\epsilon^2) \cdot$$

Geeignete Umbenennungen der Summationsindizes in (5.18) und die Benutzung der Relationen

$$J_{n+1}(z) e^{i\psi} + J_{n-1}(z) e^{-i\psi} = \frac{2n}{z} J_n(z) \cos(\psi) - 2i J'_n(z) \sin(\psi) \quad (5.19)$$

und

$$J_{n+1}(z) e^{i\psi} - J_{n-1}(z) e^{-i\psi} = i \frac{2n}{z} J_n(z) \sin(\psi) - 2J'_n(z) \cos(\psi) \quad , \quad (5.20)$$

die aus den Rekursionsformeln der Bessel-Funktionen folgen, liefern

$$H = \sum_{k_y} e^{ik_y y} \sum_{k_{\parallel}} e^{ik_{\parallel} z} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{v_{th}^{\alpha}(Y_x) e^{in(\psi-\phi)} e^{i \frac{\epsilon v_{\perp}}{\Omega_{C\alpha}(Y_x)} (k_x \sin \phi - k_y \cos \phi)}}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n \Omega_{C\alpha}(Y_x)} \times \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{\underline{E}}(k_x, k_y, k_{\parallel}) \cdot \left[w \left(\frac{in}{\mu w} J_n(\mu w) \cos(\psi) + J'_n(\mu w) \sin(\psi) \right) \underline{e}^1 + \right. \\ & \left. w \left(\frac{in}{\mu w} J_n(\mu w) \sin(\psi) - J'_n(\mu w) \cos(\psi) \right) \underline{e}^2 + i \nu J_n(\mu w) \underline{e}^3 \right] + O(\epsilon^2), \end{aligned}$$

wo μ mit $x'' = Y_x$ durch (2.31) gegeben ist, und die dimensionslosen Normal- und Parallelgeschwindigkeiten durch $w := v_{\perp}/v_{th}^{\alpha}(Y_x)$ bzw. $u := v_{\parallel}/v_{th}^{\alpha}(Y_x)$ definiert sind. Mit Hilfe der Drehmatrix (2.25) und der Definition

$$\underline{W}_n^{\alpha}(u, w; \mu) := \frac{in}{\mu} J_n(\mu w) \underline{e}^1 - w J'_n(\mu w) \underline{e}^2 + i \nu J_n(\mu w) \underline{e}^3 \quad (5.22)$$

läßt sich (5.21) etwas kompakter anschreiben, was für die folgenden Rechnungen von Vorteil ist,

$$H = \sum_{k_y} e^{ik_y y} \sum_{k_{\parallel}} e^{ik_{\parallel} z} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in(\psi-\phi)} v_{th}^{\alpha}(Y_x)}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n \Omega_{C\alpha}(Y_x)} \times \quad (5.23)$$

$$e^{i \frac{\epsilon v_{\perp}}{\Omega_{C\alpha}(Y_x)} (k_x \sin \phi - k_y \cos \phi)} \underline{W}_n^{\alpha}(u, w; \mu) \cdot \underline{R}^{-1}(\psi) \cdot \tilde{\underline{E}}(k_x, k_y, k_{\parallel}) + O(\epsilon^2).$$

Bildet man damit das Betragsquadrat von H und multipliziert es mit dem Imaginärteil der Wellenfrequenz ω_i , dann erhält man im Grenzfall $\omega_i \rightarrow 0_+$ den Ausdruck

$$\lim_{\omega_i \rightarrow 0_+} \omega_i |H|^2 = \lim_{\omega_i \rightarrow 0_+} \omega_i H^* H = \quad (5.24)$$

$$\sum_{k_y, k'_y} e^{i(k_y - k'_y)y} \sum_{k_{\parallel}, k'_{\parallel}} e^{i(k_{\parallel} - k'_{\parallel})z} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x x} \int_{-\infty}^{\infty} dk'_x e^{-ik'_x x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i(m-n)\phi} e^{in\psi} e^{-im\psi''} \times$$

$$(v_{th}^{\alpha}(Y_x))^2 e^{i \frac{\epsilon v_{\perp}}{\Omega_{C\alpha}(Y_x)} ((k_x - k'_x) \sin \phi - (k_y - k'_y) \cos \phi)} \lim_{\omega_i \rightarrow 0_+} \left(\frac{\omega_i}{\omega^* - k'_{\parallel} v_{\parallel} - m \Omega_{C\alpha}(Y_x)} \frac{1}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n \Omega_{C\alpha}(Y_x)} \right) \times$$

$$\tilde{\underline{E}}^*(k'_x, k'_y, k'_{\parallel}) \cdot \underline{R}(\psi'') \cdot ([\underline{W}_m^{\alpha}(u, w; \mu'')]^* \otimes \underline{W}_n^{\alpha}(u, w; \mu)) \cdot \underline{R}^{-1}(\psi) \cdot \tilde{\underline{E}}(k_x, k_y, k_{\parallel}),$$

mit $k''_{\perp} := \text{sgn}(k'_x)(k_x'^2 + k_y'^2)^{1/2}$, $\psi'' := \arctan(k'_y/k'_x)$ und $\mu'' := \nu k''_{\perp} v_{th}^{\alpha}(Y_x)/\Omega_{C\alpha}(Y_x)$. Den Grenzwert in obenstehender Gleichung kann man leicht mit Hilfe folgender Identität, die im distributionellen Sinne⁴ aufzufassen ist, berechnen:

$$\lim_{\omega_i \rightarrow 0_+} \left(\frac{\omega_i}{\omega^* - k'_{\parallel} v_{\parallel} - m \Omega_{C\alpha}(Y_x)} \frac{1}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n \Omega_{C\alpha}(Y_x)} \right) = \delta_{nm} \delta_{k_{\parallel} k'_{\parallel}} \frac{\pi}{|k_{\parallel}|} \delta \left(v_{\parallel} - \frac{\omega - n \Omega_{C\alpha}(Y_x)}{k_{\parallel}} \right). \quad (5.25)$$

⁴Das heißt, daß sie nur unter einem v_{\parallel} -Integral, wobei der Grenzübergang nach der Integration auszuführen ist, Sinn macht.

Das Auftreten der δ -Distribution und die spezielle Gestalt ihres Argumentes bedeutet, daß nur resonante Teilchen zu $P_{\text{abs}}^{(0)\alpha}(\underline{x})$ beitragen können. Für (5.24) ergibt sich also

$$\lim_{\omega_i \rightarrow 0_+} \omega_i |H|^2 = \quad (5.26)$$

$$\sum_{k_y, k'_y} e^{i(k_y - k'_y)y} \sum_{k_{\parallel}} \frac{\pi v_{th}^{\alpha}(\underline{Y}_x)}{|k_{\parallel}|} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x x} \int_{-\infty}^{\infty} dk'_x e^{-ik'_x x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\psi - \psi'')} \times$$

$$e^{i\epsilon w \varrho_{\alpha}^{Gyro}(\underline{Y}_x)((k_x - k'_x) \sin \phi - (k_y - k'_y) \cos \phi)} \delta(u - \text{sgn}(k_{\parallel}) x_n^{\alpha}(\underline{Y}_x)) \times$$

$\tilde{E}^*(k'_x, k'_y, k_{\parallel}) \cdot \underline{R}(\psi'') \cdot ([\underline{W}_n^{\alpha}(u, w; \mu'')]^* \otimes \underline{W}_n^{\alpha}(u, w; \mu)) \cdot \underline{R}^{-1}(\psi) \cdot \tilde{E}(k_x, k_y, k_{\parallel}) + O(\epsilon^2)$,
wo x_n^{α} durch Gl. (2.30) gegeben ist.

Speziell in der hier vorausgesetzten "slab"-Geometrie vereinfacht sich die thermische Geschwindigkeit, die in Gl. (5.8) zunächst allgemein als Funktion $v_{th}^{\alpha}(\underline{Y}_{\perp})$ der Führungszentrumsvariablen $\underline{Y}_{\perp} = Y_x \underline{e}^1 + Y_y \underline{e}^2$ aufgefaßt wurde, auf $v_{th}^{\alpha}(Y_x)$, bzw. die Maxwell-Verteilung $F_{\alpha, M}(\underline{Y}_{\perp}, v)$ auf

$$F_{\alpha, M}(Y_x, v) = \frac{n_{\alpha}(Y_x)}{(\sqrt{\pi} v_{th}^{\alpha}(Y_x))^3} e^{-u^2} e^{-w^2}. \quad (5.27)$$

Damit gilt für den Stix-Term der lokal dissipierten Leistung im "slab" offenbar

$$P_{\text{abs}}^{(0)\alpha}(\underline{x}) = \frac{e^2 Z_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 v \frac{F_{\alpha, M}(Y_x, v)}{(v_{th}^{\alpha}(Y_x))^2} \lim_{\omega_i \rightarrow 0_+} \omega_i |H|^2. \quad (5.28)$$

Mit der Identität

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3 v (\cdot) = \int_0^{\infty} dw w \int_{-\infty}^{\infty} du \int_0^{2\pi} d\phi (v_{th}^{\alpha}(Y_x))^3 (\cdot) \quad (5.29)$$

ist die Ausführung des Integrals über die Parallelgeschwindigkeit u in $P_{\text{abs}}^{(0)\alpha}(\underline{x})$ durch die δ -Distribution im Grenzwert (5.26) und die Tatsache, daß Y_x nicht mit u variiert, trivial. Die Abhängigkeit der x -Komponente Y_x der Führungszentrumsposition von den Geschwindigkeitsvariablen w und ϕ erschwert allerdings die analytische Auswertung der restlichen beiden Geschwindigkeitsintegrationen im Stix-Term. Mit Hilfe der Identität

$$F(Y_x, Y_y) = F(x, y) + \frac{\epsilon v_{\perp}}{i\Omega_{C\alpha}(x)} \sin \phi \frac{\partial}{\partial x} F(x, y) - \frac{\epsilon v_{\perp}}{i\Omega_{C\alpha}(x)} \cos \phi \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) + O(\epsilon^2), \quad (5.30)$$

die unter Vernachlässigung höherer Terme der Driftapproximation aus einer Taylor-Reihenentwicklung einer beliebigen Funktion F der Führungszentrumsvariablen Y_x und $Y_y = \underline{Y}_{\perp} \cdot \underline{e}^2 = y - \frac{\epsilon v_{\perp}}{i\Omega_{C\alpha}(x)} \cos \phi + O(\epsilon^2)$ folgt, kann der Integrand des ϕ -Integrals so umgeformt werden, daß sich letzteres in der Folge elementar integrieren läßt. Dabei ist auch der Exponentialfaktor

$$e^{i\epsilon w \varrho_{\alpha}^{Gyro}(\underline{Y}_x)((k_x - k'_x) \sin \phi - (k_y - k'_y) \cos \phi)} = e^{i(k_x - k'_x)(Y_x - x) - i(k_y - k'_y)(Y_y - y)} + O(\epsilon^2) \quad (5.31)$$

als Funktion von Y_x und Y_y aufzufassen, dessen Taylor-Entwicklung in nullter Ordnung gerade den Faktor 1 liefert. Der Beitrag erster Ordnung wird, wie alle anderen Terme $O(\epsilon)$ des Integranden, durch die ϕ -Integration zu Null; man erhält

$$P_{\text{abs}}^{(0)\alpha}(\underline{x}) = \frac{\omega_{\text{pe}}^2(x)}{2\sqrt{\pi}v_{\text{th}}^\alpha(x)} \sum_{k_y, k'_y} e^{i(k_y - k'_y)y} \sum_{k_{\parallel}} \frac{1}{|k_{\parallel}|} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x x} \int_{-\infty}^{\infty} dk'_x e^{-ik'_x x} \times \quad (5.32)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\psi - \psi'')} e^{-(x_n^\alpha(x))^2} \tilde{\underline{E}}^*(k'_x, k'_y, k_{\parallel}) \cdot \underline{\underline{R}}(\psi'') \cdot \left(\int_0^{\infty} dw w e^{-w^2} \left[\underline{W}_n^\alpha(\text{sgn}(k_{\parallel})x_n^\alpha(x), w; \mu'') \right]^* \otimes \right. \\ \left. \underline{W}_n^\alpha(\text{sgn}(k_{\parallel})x_n^\alpha(x), w; \mu) \right) \cdot \underline{\underline{R}}^{-1}(\psi) \cdot \tilde{\underline{E}}(k_x, k_y, k_{\parallel}) + O(\epsilon^2),$$

wo nun die Konventionen $\mu = k_{\perp} \varrho_\alpha^{\text{Gyro}}(x)$ und $\mu'' = k'_{\perp} \varrho_\alpha^{\text{Gyro}}(x)$ gelten. Die verbleibende Integration über die Normalgeschwindigkeit w , läßt sich mit den Identitäten

$$\int_0^{\infty} dw w e^{-w^2} J_n(\mu'w) J_n(\mu w) = \frac{1}{4} S^n(\mu, \mu') \quad , \quad (5.33)$$

$$\int_0^{\infty} dw w^2 e^{-w^2} J'_n(\mu'w) J_n(\mu w) = \frac{1}{4} D^n(\mu, \mu') \quad , \quad (5.34)$$

$$\int_0^{\infty} dw w^2 e^{-w^2} J_n(\mu'w) J'_n(\mu w) = \frac{1}{4} D^n(\mu', \mu) \quad (5.35)$$

und

$$\int_0^{\infty} dw w^3 e^{-w^2} J'_n(\mu'w) J'_n(\mu w) = \frac{1}{4} T^n(\mu, \mu') \quad , \quad (5.36)$$

wo $S^n(\mu, \mu')$, $D^n(\mu, \mu')$ und $T^n(\mu, \mu')$ durch (2.27), (2.28) und (2.29) gegeben sind, und mit (5.22) analytisch durchführen, mit dem Ergebnis:

$$\int_0^{\infty} dw w e^{-w^2} \left[\underline{W}_n^\alpha(\text{sgn}(k_{\parallel})x_n^\alpha(x), w; \mu'') \right]^* \otimes \underline{W}_n^\alpha(\text{sgn}(k_{\parallel})x_n^\alpha(x), w; \mu) = \quad (5.37)$$

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} \frac{n^2}{\mu\mu''} S^n(\mu, \mu'') & i \frac{n}{\mu''} D^n(\mu'', \mu) & i \text{sgn}(k_{\parallel}) x_n^\alpha(x) \frac{n}{\mu''} S^n(\mu, \mu'') \\ -i \frac{n}{\mu} D^n(\mu, \mu'') & T^n(\mu, \mu'') & -i \text{sgn}(k_{\parallel}) x_n^\alpha(x) D^n(\mu, \mu'') \\ i \text{sgn}(k_{\parallel}) x_n^\alpha(x) \frac{n}{\mu} S^n(\mu, \mu'') & i \text{sgn}(k_{\parallel}) x_n^\alpha(x) D^n(\mu'', \mu) & (x_n^\alpha(x))^2 S^n(\mu, \mu'') \end{bmatrix} .$$

Damit ist der gesuchte, zur numerischen Erstellung von Leistungsdepositionsprofilen geeignete Ausdruck des Stix-Terms der lokal dissipierten Leistung im "slab" gefunden, in den das elektrische Wellenfeld durch seine Fourier-Transformierte eingeht.

Im folgenden wird gezeigt, daß diese dissipierte Leistungsdichte in engem Zusammenhang mit dem in Kapitel 2 präsentierten Leitfähigkeitskern der integralen konstitutiven Relation steht. Dazu ist mit Hilfe folgender Sätze über die Plasmodispersionsfunktion und ihre Ableitung,

$$\lim_{\text{Im}[\tau] \rightarrow 0_+} [Z(\tau) - [Z(\tau)]^*] = 2i\sqrt{\pi} e^{-\text{Re}[\tau]^2} \quad , \quad (5.38)$$

$$\lim_{\text{Im}[\tau] \rightarrow 0_+} [Z'(\tau) - [Z'(\tau)]^*] = -4i\sqrt{\pi}\text{Re}[\tau]e^{-\text{Re}[\tau]^2} \quad (5.39)$$

und

$$\lim_{\text{Im}[\tau] \rightarrow 0_+} [\tau Z'(\tau) - [\tau Z'(\tau)]^*] = -4i\sqrt{\pi}\text{Re}[\tau]^2 e^{-\text{Re}[\tau]^2}, \quad (5.40)$$

der durch

$$[\underline{\hat{T}}_{\alpha}^n(k_{\perp}'' , k_{\perp}; k_{\parallel}; x)]^{\text{H}} := \frac{1}{2} \left(\hat{T}_{\alpha}^n(k_{\perp}'', k_{\perp}; k_{\parallel}; x) + \hat{T}_{\alpha}^{n+}(k_{\perp}, k_{\perp}''; k_{\parallel}; x) \right) \quad (5.41)$$

definierte modifizierte hermitesche Anteil des in Gl. (2.26) gegebenen Tensors $\hat{T}_{\alpha}^n(k_{\perp}'', k_{\perp}; k_{\parallel}; x)$ im Grenzfall $\omega_i \rightarrow 0_+$ zu berechnen. Man erhält

$$\lim_{\omega_i \rightarrow 0_+} [\hat{T}_{\alpha}^n(k_{\perp}'', k_{\perp}; k_{\parallel}; x)]^{\text{H}} = \sqrt{\pi} e^{-(x_n^{\alpha}(x))^2} \times \quad (5.42)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{n^2}{\mu\mu''} S^n(\mu, \mu'') & i \frac{n}{\mu''} D^n(\mu'', \mu) & i \text{sgn}(k_{\parallel}) x_n^{\alpha}(x) \frac{n}{\mu''} S^n(\mu, \mu'') \\ -i \frac{n}{\mu} D^n(\mu, \mu'') & T^n(\mu, \mu'') & -i \text{sgn}(k_{\parallel}) x_n^{\alpha}(x) D^n(\mu, \mu'') \\ i \text{sgn}(k_{\parallel}) x_n^{\alpha}(x) \frac{n}{\mu} S^n(\mu, \mu'') & i \text{sgn}(k_{\parallel}) x_n^{\alpha}(x) D^n(\mu'', \mu) & (x_n^{\alpha}(x))^2 S^n(\mu, \mu'') \end{bmatrix},$$

wo nun natürlich x_n^{α} nur mehr vom Realteil ω_r der Wellenfrequenz abhängt,

$$x_n^{\alpha}(x) = \frac{\omega_r - n\Omega_{C\alpha}(x)}{|k_{\parallel}|v_{ih}^{\alpha}(x)}. \quad (5.43)$$

Der Vergleich von (5.37) mit (5.42) liefert schließlich mit der unter Ausnutzung von (2.24) leicht zu beweisenden Relation

$$\underline{\underline{R}}(\psi'') \cdot [\hat{T}_{\alpha}^n(k_{\perp}'', k_{\perp}; k_{\parallel}; x)]^{\text{H}} \cdot \underline{\underline{R}}^{-1}(\psi) = \quad (5.44)$$

$$\frac{1}{2} \left(\underline{\underline{T}}_{\alpha}^n(k_{\perp}'', k_{\perp}; \psi'', \psi; k_{\parallel}; x) + \underline{\underline{T}}_{\alpha}^{n+}(k_{\perp}, k_{\perp}''; \psi, \psi''; k_{\parallel}; x) \right) =: [\underline{\underline{T}}_{\alpha}^n(k_{\perp}'', k_{\perp}; \psi'', \psi; k_{\parallel}; x)]^{\text{H}}$$

gemäß (5.32) bis auf Terme $O(\epsilon^2)$ der Driftapproximation den erwünschten Ausdruck für $P_{\text{abs}}^{(0)\alpha}(\underline{x})$:

$$P_{\text{abs}}^{(0)\alpha}(\underline{x}) = \frac{\omega_{F\alpha}^2(x)}{8\pi v_{ih}^{\alpha}(x)} \sum_{k_y, k_y'} e^{i(k_y - k_y')y} \sum_{k_{\parallel}} \frac{1}{|k_{\parallel}|} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x x} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x' e^{-ik_x' x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\psi - \psi'')} \times \quad (5.45)$$

$$\tilde{\underline{\underline{E}}}^*(k_x', k_y', k_{\parallel}) \cdot [\underline{\underline{T}}_{\alpha}^n(k_{\perp}'', k_{\perp}; \psi'', \psi; k_{\parallel}; x)]^{\text{H}} \cdot \tilde{\underline{\underline{E}}}(k_x, k_y, k_{\parallel}).$$

Nach Summation über den Teilchensortenindex α folgt mit den Gleichungen (2.23) und (3.48) insbesondere

$$P_{\text{abs}}^{(0)}(\underline{x}) := \sum_{\alpha} P_{\text{abs}}^{(0)\alpha}(\underline{x}) = \pi \sum_{k_y, k'_y} e^{i(k_y - k'_y)y} \sum_{k_{\parallel}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x x} \int_{-\infty}^{\infty} dk'_x e^{-ik'_x x} \times \quad (5.46)$$

$$\tilde{\underline{E}}^*(k'_x, k'_y, k_{\parallel}) \cdot \left[\underline{\sigma}^{(0)}(k''_{\perp}, k_{\perp}; \psi'', \psi; k_{\parallel}; x) \right]^H \cdot \tilde{\underline{E}}(k_x, k_y, k_{\parallel}),$$

sodaß der Stix-Beitrag zur totalen dissipierten Leistungsdichte offenbar mit dem modifizierten hermiteschen Anteil des "s = 0"-Terms des Integranden im Leitfähigkeitskern (2.21) verknüpft ist. Aus diesem Grund wurde in vorliegender Arbeit, sowohl in der Ortsraum- als auch in der Fourier-Raum-Darstellung, der gesamte "s = 0"-Term des Leitfähigkeitskernes als Stix-Term bezeichnet, vgl. Abschnitt 2.3.

Ausgehend von der Definition (5.3) kann durch eine im Prinzip analoge, unglücklicherweise aber etwas langwierige Rechnung (weshalb hier auf deren detaillierte Präsentation verzichtet wird) eine entsprechende explizite Form des diamagnetischen Beitrags zur lokal dissipierten Leistung im "slab" hergeleitet werden. Dabei ist nun, anstatt mit Hilfe von Gl. (5.25), der Grenzübergang $\omega_i \rightarrow 0_+$ gemäß

$$\lim_{\omega_i \rightarrow 0_+} \left(\frac{\omega_i}{\omega^* - k'_{\parallel} v_{\parallel} - m_i \Omega_{C\alpha}(Y_x)} \frac{1}{2i\omega_i(k'_{\parallel} - k_{\parallel})v_{\parallel} + (m-n)\Omega_{C\alpha}(Y_x)} \right) = \quad (5.47)$$

$$\delta_{nm} \delta_{k_{\parallel} k'_{\parallel}} \left(\frac{\pi}{2|k_{\parallel}|} \delta \left(v_{\parallel} - \frac{\omega_r - n_i \Omega_{C\alpha}(Y_x)}{k_{\parallel}} \right) + \frac{1}{2k_{\parallel}} P \left(\frac{1}{v_{\parallel} - \frac{\omega_r - n_i \Omega_{C\alpha}(Y_x)}{k_{\parallel}}} \right) \right)$$

durchzuführen, wo $P(\cdot)$ den Cauchy-Hauptwert bezeichnet. Man erhält das Ergebnis

$$P_{\text{abs}}^{(1)\alpha}(\underline{x}) = \frac{\omega_{P\alpha}^2(x)}{8\pi v_{i\alpha}^2(x)} \sum_{k_y, k'_y} e^{i(k_y - k'_y)y} \sum_{k_{\parallel}} \frac{1}{|k_{\parallel}|} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x x} \int_{-\infty}^{\infty} dk'_x e^{-ik'_x x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\psi - \psi'')} \times \quad (5.48)$$

$$\tilde{\underline{E}}^*(k'_x, k'_y, k_{\parallel}) \cdot \frac{1}{2} \left(\underline{U}_{\alpha}^n(k''_{\perp}, k_{\perp}; \psi''; k_{\parallel}; x) + \underline{U}_{\alpha}^{n+}(k_{\perp}, k''_{\perp}; \psi; k_{\parallel}; x) \right) \cdot \tilde{\underline{E}}(k_x, k_y, k_{\parallel}),$$

das ebenfalls bis auf Terme $O(\epsilon^2)$ der Driftapproximation genau ist.

Die Summation über die diversen Teilchensorten liefert mit den Relationen (2.32) und (3.47) eine zu Gl. (5.46) vollständig analoge Form des diamagnetischen Beitrags zur totalen dissipierten Leistungsdichte,

$$P_{\text{abs}}^{(1)}(\underline{x}) := \sum_{\alpha} P_{\text{abs}}^{(1)\alpha}(\underline{x}) = \pi \sum_{k_y, k'_y} e^{i(k_y - k'_y)y} \sum_{k_{\parallel}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x x} \int_{-\infty}^{\infty} dk'_x e^{-ik'_x x} \times \quad (5.49)$$

$$\tilde{\underline{E}}^*(k'_x, k'_y, k_{\parallel}) \cdot \left[\underline{\sigma}^{(1)}(k''_{\perp}, k_{\perp}; \psi'', \psi; k_{\parallel}; x) \right]^H \cdot \tilde{\underline{E}}(k_x, k_y, k_{\parallel}),$$

weswegen hier die "s = 1"-Terme des Leitfähigkeitskernes als diamagnetische Terme bezeichnet wurden.

An dieser Stelle erhebt sich die Frage der physikalischen Bedeutung der zuvor berechneten Beiträge $P_{\text{abs}}^{(0)}(\underline{x})$ bzw. $P_{\text{abs}}^{(1)}(\underline{x})$. Ein erster signifikanter Unterschied zwischen diesen

Größen ist festzustellen, wenn man den Grenzfall des homogenen Plasmas betrachtet; dann reduziert sich der durch Gl. (5.46) gegebene Term $P_{\text{abs}}^{(0)}(\underline{x})$ auf einen bekannten, von Stix in Ref. [Sti 61] angegebenen Ausdruck für die Leistung, die von einer sich im homogenen Plasma ausbreitenden Welle durch die Plasmateilchen dissipiert wird (daher die hier gewählte Bezeichnung Stix-Beitrag für $P_{\text{abs}}^{(0)}(\underline{x})$). Im Gegensatz dazu verschwindet in diesem Spezialfall der Term $P_{\text{abs}}^{(1)}(\underline{x})$, da entsprechend den Relationen (2.32) bis (2.34) der diamagnetische Beitrag zum Leitfähigkeitskern proportional den Dichte- und Temperaturgradienten ist.

Um zu zeigen, daß sich in beiden Beiträgen $P_{\text{abs}}^{(0)}(\underline{x})$ und $P_{\text{abs}}^{(1)}(\underline{x})$ verschiedene physikalische Mechanismen der Energiedissipation manifestieren, muß nochmals von den in allgemeiner Geometrie gültigen Ausdrücken (5.8) und (5.9) ausgegangen werden. Im "slab" kann dann der diamagnetische Term $P_{\text{abs}}^{(1)\alpha}(\underline{x})$ aus Gl. (5.9) in der Form

$$P_{\text{abs}}^{(1)\alpha}(\underline{x}) := -2 \frac{e^2 Z_\alpha^2}{m_\alpha} \lim_{\omega_i \rightarrow 0_+} \omega_i \int_{\mathbb{R}^3} d^3v \frac{F_{\alpha,M}(\underline{Y}_x, v)}{(v_{th}^\alpha)^2} \times \quad (5.50)$$

$$\text{Re} \left[\int_{-\infty}^t dt' e^{i\omega t} \underline{E}(\underline{q}', t') \cdot \underline{v}' \int_{-\infty}^{t'} dt'' e^{-i\omega^* t} \underline{E}^*(\underline{q}'', t'') \cdot \underline{U}^\alpha(\underline{Y}_x) \right]$$

geschrieben werden, falls homogene Temperaturverteilungen angenommen werden (was für die thermischen Geschwindigkeiten $v_{th}^\alpha = \text{const.}$ bedeutet). Dabei bezeichnet $\underline{U}^\alpha(x)$ jene Fluidgeschwindigkeit, die unter Vernachlässigung von Termen $O(\epsilon^2)$ der Driftapproximation durch Momentenbildung über die Gleichgewichtsverteilung (5.27) gewonnen wird,

$$\underline{U}^\alpha(x) := \frac{1}{N_\alpha(x)} \int_{\mathbb{R}^3} d^3v \underline{v} F_{\alpha,M}(\underline{Y}_x, v) = \left(\frac{\epsilon (v_{th}^\alpha)^2}{2 \Omega_{C\alpha}(x) n_\alpha(x)} \frac{1}{dx} \frac{dn_\alpha(x)}{dx} + O(\epsilon^2) \right) \underline{e}^2, \quad (5.51)$$

mit dem Moment nullter Ordnung

$$N_\alpha(x) := \int_{\mathbb{R}^3} d^3v F_{\alpha,M}(\underline{Y}_x, v) = n_\alpha(x) + O(\epsilon^2), \quad (5.52)$$

den Teilchenzahldichten. $\underline{U}^\alpha(x)$, das in Gl. (5.50) in der Form $\underline{U}^\alpha(\underline{Y}_x)$ eingeht, ist als diamagnetische Drift bekannt, einer Drift mit der bekanntlich kein makroskopischer Massetransport verbunden ist. Der besondere Wert dieses Ausdrucks besteht darin, daß die Stix-Terme (5.8) in einer vollständig analogen Gestalt geschrieben werden können,

$$P_{\text{abs}}^{(0)\alpha}(\underline{x}) := 2 \frac{e^2 Z_\alpha^2}{m_\alpha} \lim_{\omega_i \rightarrow 0_+} \omega_i \int_{\mathbb{R}^3} d^3v \frac{F_{\alpha,M}(\underline{Y}_x, v)}{(v_{th}^\alpha)^2} \times \quad (5.53)$$

$$\text{Re} \left[\int_{-\infty}^t dt' e^{i\omega t} \underline{E}(\underline{q}', t') \cdot \underline{v}' \int_{-\infty}^{t'} dt'' e^{-i\omega^* t} \underline{E}^*(\underline{q}'', t'') \cdot \underline{v}'' \right],$$

wo nun abgesehen von einem Vorzeichen, anstelle der diamagnetischen Drift die Geschwindigkeit eines Einzelteilchens auftritt. Der Vergleich beider Relationen (5.50) und (5.53) legt folgende Interpretation nahe:

- Der Stix-Term $P_{\text{abs}}^{(0)\alpha}(\underline{x})$ beschreibt jenen Anteil des irreversiblen Energietransfers zwischen dem Wellenfeld und den Plasmateilchen, der auf einer Wechselwirkung der Einzelteilchen mit der Welle beruht.
- Der diamagnetische Term $P_{\text{abs}}^{(1)\alpha}(\underline{x})$ berücksichtigt hingegen, wie schon sein Name andeutet, den irreversiblen Energieaustausch zwischen Plasma und Wellenfeld aufgrund einer Wechselwirkung des letzteren mit der diamagnetischen Driftbewegung des Plasmas.

Obige Interpretation beider Beiträge zur lokal dissipierten Leistung wird auch durch die verschiedenen Grenzwerte $\omega_i \rightarrow 0_+$, die in ihre Herleitung eingingen, bestätigt. So besagt Gl. (5.25), daß nur solche Plasmateilchen zum Stix-Term beitragen, die mit der Welle resonant sind. Dies ist für einen Energieaustausch, der auf einer Wechselwirkung von Einzelteilchen mit einem Wellenfeld basiert, zu erwarten. Hingegen bedeutet im Falle des diamagnetischen Terms im Grenzwert (5.47) das Auftreten eines Hauptwertintegrals neben dem bereits bekannten δ -Distributionsanteil, daß alle Teilchen, also auch Nichtresonante, am irreversiblen Energietransfer zwischen Plasma und Wellenfeld beteiligt sind. Dies ist leicht verständlich, wenn man bedenkt, daß die diamagnetische Drift ein kollektiver Effekt ist, der erst durch das Zusammenwirken aller Plasmateilchen entsteht.

Schließlich kann gemäß den Gleichungen (2.22), (5.46) und (5.49) die von einer Welle durch Plasmateilchen lokal dissipierte Leistung in der Form

$$P_{\text{abs}}(\underline{x}) := \sum_{s=0}^1 P_{\text{abs}}^{(s)}(\underline{x}) = \sum_{\alpha} P_{\text{abs}}^{(1)\alpha}(\underline{x}) = \pi \sum_{k_y, k'_y} e^{i(k_y - k'_y)y} \sum_{k_{\parallel}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x x} \int_{-\infty}^{\infty} dk'_x e^{-ik'_x x} \times \quad (5.54)$$

$$\tilde{\underline{E}}^*(k'_x, k'_y, k_{\parallel}) \cdot \left[\underline{\sigma}(k'_{\perp}, k_{\perp}; \psi'', \psi; k_{\parallel}; x) \right]^H \cdot \tilde{\underline{E}}(k_x, k_y, k_{\parallel})$$

geschrieben werden. Dabei ist bemerkenswert, daß die Leistungsdissipation in z -Richtung nicht moduliert ist. Das ist im Rahmen der linearen Vlasov-Theorie insofern verständlich, als eine wohldefinierte Phasenbeziehung zwischen den Oszillationen des elektromagnetischen Wellenfeldes und der entsprechenden kohärenten Bewegung der Plasmateilchen parallel zum statischen Magnetfeld nur über einen Zeitraum kleiner als das Inverse der "bounce"-Frequenz der Teilchen im Wellenfeld besteht. Über längere Zeiträume erfolgt also eine Dekorrelation der Teilchenbewegung von der Wellenphase, sodaß die Leistungsdeposition in z -Richtung gewissermaßen gemittelt, d.h. uniform wird.

Das elektrische Wellenfeld geht in Gl. (5.54) durch eine quadratische Form seiner Fourier-Transformierten $\tilde{\underline{E}}(k_x, k_y, k_{\parallel})$ ein. Die Erstellung des Leistungsdepositionsprofils zu einer gegebenen numerischen Lösung der nichtlokalen Wellengleichung, die in Form der Koeffizienten $\epsilon_{n,k}^{[\beta]}$ aus Ansatz (4.55) bzw. der Amplituden von aus dem FEL-Rechenbereich auslaufenden WKB-Moden vorliegt, vgl. Abschnitt 4.6, erfordert also zunächst die Berechnung der Fourier-Transformierten der Wellenlösung gemäß Gl. (2.42), $\tilde{\underline{E}}(k_x, k_y, k_{\parallel}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-ik_x x'} \underline{E}(x'; k_y, k_{\parallel})$. Formal trägt das elektrische Wellenfeld $\underline{E}(x; k_y, k_{\parallel})$ im gesamten x -Intervall $[+\infty, -\infty]$ zu $\tilde{\underline{E}}(k_x, k_y, k_{\parallel})$ bei, entsprechend der

Annahme eines unendlich ausgedehnten "slab"-Plasmas, die sowohl bei der Herleitung des Leitfähigkeitskernes, vgl. Kapitel 2, als auch des Ausdrucks für die lokal dissipierte Leistung getroffen wurde. Tatsächlich spiegelt das Auftreten von $\tilde{E}(k_x, k_y, k_{||})$ anstelle von $\underline{E}(x; k_y, k_{||})$ in (5.54) die Nichtlokalität der dissipierten Leistungsdichte im elektrischen Wellenfeld wider. Aus Abschnitt 4.2 ist bekannt, daß die Nichtlokalität des Wellenausbreitungsproblems im räumlich dispersiven Plasma durch eine endliche Länge $L_{nonlocal}$ charakterisiert werden kann. Entsprechend ist auch zu erwarten, daß zur am Ort x dissipierten Leistungsdichte die Wellenlösung nur in einem durch dieselbe Nichtlokalitätslänge determinierten Intervall um diesen Aufpunkt x signifikant beiträgt, d.h. im Ausdruck (5.54) die Gleichung (2.42) durch

$$\tilde{E}(k_x, k_y, k_{||}) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{x-\delta}^{x+\Delta} dx' e^{-ik_x x'} \underline{E}(x'; k_y, k_{||}) \quad (5.55)$$

approximiert werden kann, wobei für δ und Δ die in Abschnitt 4.5 gewählten Werte einzusetzen sind.

Qualitativ kann dieses Verhalten verstanden werden, wenn man mit der Definition (2.42) in Relation (5.54) eingeht und die Ortsraumintegrationen mit den Fourier-Raum-Integralen vertauscht. Beispielsweise enthält dann der Integrand der k_x -Integration den oszillierenden Faktor $\exp(i(x-x')k_x)$, sodaß das Integral für $|x-x'| \rightarrow \infty$ offenbar gegen Null geht; signifikante Beiträge sind also im wesentlichen für Argumente $x \approx x'$ zu erwarten, also von Werten des elektrischen Wellenfeldes $\underline{E}(x'; k_y, k_{||})$ in der Nähe des Aufpunktes x . Die Auswertung der durch Gl. (5.55) approximierten Fourier-Transformierten des elektrischen Wellenfeldes mit Hilfe des erweiterten Galerkin-Ansatzes (4.55) wurde schon in Abschnitt 4.5 durchgeführt, mit dem Ergebnis (4.73). Alle erforderlichen analytischen Vorarbeiten zur numerischen Berechnung eines Leistungsdepositionsprofils, die im wesentlichen die Auswertung der Zweifachintegration bzgl. k_x und k'_x in (5.54) umfassen, wären damit bereits durchgeführt. Für die numerische Rechnung erweist es sich jedoch als vorteilhaft, das elektrische Wellenfeld zur Berechnung seiner Fourier-Transformierten gemäß (5.55) auch außerhalb des FEL-Rechenbereiches, wo es in Form von WKB-Lösungen vorliegt, durch kubische Hermite-Polynome auf einer entsprechenden Fortsetzung des Gitters im FEL-Rechenbereich zu approximieren. Einige der auf diese Weise durch geeignete Subroutinen des IBW-Codes errechneten Leistungsdepositionsprofile werden in Kapitel 6 präsentiert.

Aus Gl. (5.54) folgt nun ein expliziter Ausdruck für die gesamte, im x -Intervall $[x_0, x_N]$ in einem räumlich dispersiven Plasma dissipierte Leistung

$$P_{tot}(x_0, x_N) = \int_{x_0}^{x_N} dx P_{abs}(\underline{x}), \quad (5.56)$$

vgl. Abschnitt 4.6. Dies ermöglicht insbesondere die direkte Berechnung des Absorptionskoeffizienten (4.109) des Modenkonzversionsproblems und in der Folge gemäß Bilanz (4.110) den expliziten Nachweis der globalen Energieerhaltung für eine gegebene numerische Modenkonzversionslösung der Wellengleichung.

5.3 Ein Kriterium marginaler Stabilität einer linearen Driftwelle, der "Universellen Instabilität"

Um eine weitere Bestätigung der Relevanz des Ausdrucks (5.54) für $P_{\text{abs}}(\underline{x})$ zu gewinnen, wird in diesem Abschnitt, mit Hilfe der expliziten Form des Stix- bzw. diamagnetischen Terms, ein aus der Driftwellenphysik wohlbekanntes Stabilitätskriterium reproduziert. Dabei ist zunächst zu klären, wie das Bild einer zeitlich anwachsenden, instabilen Mode mit der lokal von einer Welle dissipierten Leistung $P_{\text{abs}}(\underline{x})$, nun im Falle eines stationären Problems⁵, korrespondiert. Anschaulich ist klar, daß eine instabile Mode Energie benötigt, um ihr Wellenfeld aufzubauen. Diese Energie entzieht sie dem Plasma irreversibel, was im stationären Fall der durch $P_{\text{abs}}(\underline{x}) < 0$ charakterisierten Richtung des Energietransfers zwischen dem Plasma und dem Wellenfeld entspricht. Vice versa korrespondieren stabile, zeitlich gedämpfte Moden mit einer positiven dissipierten Leistungsdichte $P_{\text{abs}}(\underline{x}) > 0$, bzw. marginal stabile Wellen mit $P_{\text{abs}}(\underline{x}) = 0$. Da nun eine marginal stabile Mode eine verschwindende Anwachsrate besitzt, für eine solche Mode der Ausdruck (5.54) für $P_{\text{abs}}(\underline{x})$ also anwendbar ist, sollte $P_{\text{abs}}(\underline{x}) = 0$ genau das Kriterium für die marginale Stabilität dieser Welle darstellen. In der Driftwellenphysik werden solche Stabilitätskriterien beispielsweise aus der Analyse lokaler Dispersionsrelationen gewonnen.

Konkret wird hier die Stabilität von durch Dichtegradienten getriebenen, elektrostatischen Oszillationen in einem stoßfreien Plasma-"slab" untersucht, d.h. also die sogenannte "Universelle Instabilität", vgl. [Kra 65]. Es sei nochmals betont, daß dieses Kriterium marginaler Stabilität, das im folgenden aus der Leistungsbilanz abgeleitet wird, in der Arbeit [Kra 65] durch eine Stabilitätsanalyse der entsprechenden lokalen Dispersionsrelation longitudinaler Oszillationen gewonnen wird; also durch einen vollständig unterschiedlichen physikalischen Zugang zum Problem. Die Übereinstimmung der Resultate beider Analysen bekräftigt umso mehr die Relevanz der im vorangehenden Abschnitt hergeleiteten Form der dissipierten Leistungsdichte.

Bekanntlich ist eine elektrostatische Welle durch die Beziehung

$$\underline{E}(\underline{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \Phi(\underline{x}, t) \quad (5.57)$$

charakterisiert, wo $\Phi(\underline{x}, t)$ das elektrostatische Potential bezeichnet. Aus dem zu Gl. (2.17) analogen Ansatz

$$\Phi(\underline{x}, t) = e^{-i\omega t} \sum_{k_y} e^{ik_y y} \sum_{k_{\parallel}} e^{ik_{\parallel} z} \Phi(x; k_y, k_{\parallel}) \quad (5.58)$$

folgt für die Fourier-Transformierte des elektrostatischen Potentials

$$\tilde{\Phi}(k_x, k_y, k_{\parallel}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ik_x x} \Phi(x; k_y, k_{\parallel}) \quad (5.59)$$

⁵Wie aus Gl. (5.6) zu ersehen ist, setzt die Gültigkeit von $P_{\text{abs}}(\underline{x})$ definitionsgemäß einen verschwindenden Imaginärteil ω_i voraus, bei vorgegebenem ω_r .

die Identität

$$\tilde{\underline{E}}(k_x, k_y, k_{||}) = -ik \tilde{\Phi}(k_x, k_y, k_{||}) , \quad (5.60)$$

wo der Wellenzahlvektor $\underline{k} = k_x \underline{e}^1 + k_y \underline{e}^2 + \iota k_{||} \underline{e}^3$ eingeht. Im folgenden werden, in Übereinstimmung mit [Kra 65], räumlich konstante Temperaturen angenommen, d.h. es gilt formal $1/L^{(v_{th}^\alpha)}(x) \rightarrow 0$. Damit führt die Identität (5.60) zusammen mit der Relation

$$\underline{\underline{R}}^{-1}(\psi) \cdot \underline{k} = \underline{k} \cdot \underline{\underline{R}}(\psi) = k_{\perp} \underline{e}^1 + \iota k_{||} \underline{e}^3 \quad (5.61)$$

und den Definitionen

$$F^{(0)}(k_{\perp}'' , k_{\perp} ; \psi'' , \psi ; k_{||} ; x) := \sum_{\alpha} \frac{\omega_{P\alpha}^2(x)}{4\pi^{3/2} v_{th}^{\alpha}} |k_{||}| \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\psi-\psi'')} e^{-(x_n^{\alpha}(x))^2} (x_0^{\alpha})^2 S^n(\mu, \mu'') \quad (5.62)$$

bzw.

$$F^{(1)}(k_{\perp}'' , k_{\perp} ; \psi'' , \psi ; k_{||} ; x) := \sum_{\alpha} \frac{\omega_{P\alpha}^2(x)}{8\pi^2 |k_{||}| v_{th}^{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\psi-\psi'')} \frac{\rho_{\alpha}^{Gyro}(x)}{L^{(n\alpha)}(x)} \times \quad (5.63)$$

$$\left(k_{\perp} k_{\perp}'' \left(\sin \psi V_1(k_{\perp}'' , k_{\perp} ; k_{||} ; x) + \sin \psi'' V_1^*(k_{\perp} , k_{\perp}'' ; k_{||} ; x) \right) + \right. \\ \left. \iota k_{||} \left(k_{\perp} \sin \psi V_3(k_{\perp}'' , k_{\perp} ; k_{||} ; x) + k_{\perp}'' \sin \psi'' V_3^*(k_{\perp} , k_{\perp}'' ; k_{||} ; x) \right) \right) ,$$

wo $V_j(k_{\perp}'' , k_{\perp} ; k_{||} ; x) := \underline{V}(k_{\perp}'' , k_{\perp} ; k_{||} ; x) \cdot \underline{e}^j$ gilt, gemäß den Gleichungen (2.23), (2.32) und (3.47) auf die Beziehungen ($s \in [0, 1]$)

$$\underline{\underline{E}}^*(k'_x, k'_y, k_{||}) \cdot \left[\underline{\underline{\sigma}}^{(s)}(k_{\perp}'' , k_{\perp} ; \psi'' , \psi ; k_{||} ; x) \right]^H \cdot \underline{\underline{E}}(k_x, k_y, k_{||}) = \quad (5.64)$$

$$\frac{1}{2} \tilde{\Phi}^*(k'_x, k'_y, k_{||}) \tilde{\Phi}(k_x, k_y, k_{||}) F^{(s)}(k_{\perp}'' , k_{\perp} ; \psi'' , \psi ; k_{||} ; x) .$$

In der Folge können, entsprechend den Gl. (5.46) und (5.49), der Stix-Term bzw. der diamagnetische Term der von einer elektrostatischen Oszillation lokal dissipierten Leistung in der Form

$$P_{\text{abs}}^{(s)}(\underline{x}) = \frac{\pi}{2} \sum_{k_y, k'_y} e^{i(k_y - k'_y)y} \sum_{k_{||}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x x} \int_{-\infty}^{\infty} dk'_x e^{-ik'_x x} \times \quad (5.65)$$

$$\tilde{\Phi}^*(k'_x, k'_y, k_{||}) \tilde{\Phi}(k_x, k_y, k_{||}) F^{(s)}(k_{\perp}'' , k_{\perp} ; \psi'' , \psi ; k_{||} ; x)$$

geschrieben werden.

Wie zuvor erwähnt, wird in [Kra 65] das Stabilitätskriterium durch die Untersuchung der relevanten Dispersionsrelation longitudinaler Moden gewonnen, es basiert also auf einer lokalen Analyse des Maxwell-Vlasov-Systems. Eine solche lokale Dispersionsrelation beruht auf der Annahme hinreichend langsam variierender Plasmaparameter, vgl. Kapitel 3. Der entsprechende asymptotische Grenzfall ist gerade ein homogenes Plasma, wo eine einzelne Fourier-Mode aus Gl. (5.58) bzw. (5.59) einen geeigneten Lösungsansatz

des Maxwell-Vlasov-Systems darstellt; der lokalen Analyse dieses Gleichungssystems ist in den hier benutzten Termini offenbar die Annahme

$$\tilde{\Phi}(k_x, k_y, k_{\parallel}) = \delta_{k_y, K_y} \delta_{k_{\parallel}, K_{\parallel}} \delta(k_x - K_x) \tilde{\Phi} \quad (5.66)$$

äquivalent, mit $\tilde{\Phi} = \text{const.}$ Damit reduziert sich Gl. (5.65) auf

$$P_{\text{abs}}^{(s)}(\underline{x}) = \frac{\pi}{2} |\tilde{\Phi}|^2 F^{(s)}(K_{\perp}, K_{\perp}; \Psi, \Psi; K_{\parallel}; x), \quad (5.67)$$

wo $K_{\perp} := \text{sgn}(K_x)(K_x^2 + K_y^2)^{1/2} \in \mathbf{R}$, $\Psi := \arctan(K_y/K_x) \in [-\pi/2, \pi/2]$ und $K_{\parallel} \in \mathbf{R}$ gilt.

Gemäß den Definitionen (5.62), (5.63) und (2.35) folgt mit Gl. (5.38), (5.39) und (2.27)

$$F^{(0)}(K_{\perp}, K_{\perp}; \Psi, \Psi; K_{\parallel}; x) = \sum_{\alpha} \frac{\omega_{P\alpha}^2(x)}{4\pi^{3/2} v_{th\alpha}^{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n(\lambda^{\alpha}) e^{-(x_n^{\alpha}(x))^2} 2|K_{\parallel}| (x_0^{\alpha})^2, \quad (5.68)$$

bzw.

$$F^{(1)}(K_{\perp}, K_{\perp}; \Psi, \Psi; K_{\parallel}; x) = \quad (5.69)$$

$$- \sum_{\alpha} \frac{\omega_{P\alpha}^2(x)}{4\pi^{3/2} v_{th\alpha}^{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n(\lambda^{\alpha}) e^{-(x_n^{\alpha}(x))^2} \frac{K_y}{L^{(n\alpha)}(x)} \left(\frac{n}{|K_{\parallel}|} + x_n^{\alpha}(x) \varrho_{\alpha}^{Gyro}(x) \right).$$

Dabei wurden die Notationen $x_n^{\alpha}(x) := (\omega_r - n\Omega_{c\alpha}(x))/(|K_{\parallel}|v_{th\alpha}^{\alpha})$, $\lambda^{\alpha} := \frac{1}{2}(K_{\perp}\varrho_{\alpha}^{Gyro}(x))^2$ und $S_n(\lambda^{\alpha}) := I_n(\lambda^{\alpha}) \exp(-\lambda^{\alpha})$ benutzt.

In Übereinstimmung mit der Analysis in Ref. [Kra 65] werden folgende vereinfachenden Annahmen getroffen:

- “frequency-ordering”: $|\omega_r| \ll |\Omega_{c\alpha}(x)|$
- Gyroradien klein gegen parallele Wellenlänge: $|\varrho_{\alpha}^{Gyro}(x)| \ll \frac{2\pi}{|K_{\parallel}|}$
- Das Plasma enthält nur eine einzige Ionensorte mit der Temperatur:
 $T_i = \frac{1}{2} m_i (v_{th}^i)^2 = \frac{1}{2} m_e (v_{th}^e)^2 = T_e$
- Quasineutralität der Gleichgewichtsdichten: $n_e(x) = Z_i n_i(x)$

Aus den ersten beiden Bedingungen folgt, daß in den Größen $F^{(s)}(K_{\perp}, K_{\perp}; \Psi, \Psi; K_{\parallel}; x)$ wegen der Exponentialfaktoren $\exp(-(x_n^{\alpha}(x))^2)$ nur der “ $n = 0$ ”-Term signifikant zur Summe über die Harmonischen der Gyrofrequenzen beiträgt, das heißt, es kann formal substituiert werden:

$$e^{-(x_n^{\alpha}(x))^2} \rightarrow \delta_{n,0} e^{-(x_0^{\alpha}(x))^2}. \quad (5.70)$$

Durch die restlichen Annahmen werden diverse Elektronengrößen zu den entsprechenden Ionengrößen in Relation gesetzt, konkret: $v_{th}^e = (m_i/m_e)^{1/2} v_{th}^i$, $x_0^e = (m_e/m_i)^{1/2} x_0^i$, $\rho_e^{Gyro}(x) = -Z_i (m_e/m_i)^{1/2} \rho_i^{Gyro}(x)$, $\omega_{Pe}^2(x) = \omega_{Pi}^2(x) m_i/(m_e Z_i)$ und $L^{(n_e)}(x) = L^{(n_i)}(x)$.

Damit und mit den Gleichungen (5.67) bis (5.69) kann die gesamte von einer solchen elektrostatischen Welle lokal dissipierte Leistung in der Form

$$P_{\text{abs}}(\underline{x}) = |\tilde{\Phi}|^2 \frac{\omega_{P_i}^2(x)}{4\pi^{1/2}v_{th}^i} |K_{\parallel}|(x_0^i)^2 \left[S_0(\lambda^i) e^{-(x_0^i)^2} \left(1 - \frac{K_y \rho_i^{Gyro}(x)}{2L^{(n_i)}(x)} \frac{1}{x_0^i |K_{\parallel}|} \right) + \right. \quad (5.71)$$

$$\left. \frac{m_e^{1/2}}{Z_i m_i^{1/2}} S_0(\lambda^e) e^{-\frac{m_e}{m_i}(x_0^i)^2} \left(1 + \frac{K_y Z_i \rho_i^{Gyro}(x)}{2L^{(n_i)}(x)} \frac{1}{x_0^i |K_{\parallel}|} \right) \right]$$

geschrieben werden.

In Ref. [Kra 65] wird darauf hingewiesen, daß zur Untersuchung der universellen Instabilität eine lokale Theorie ausreichend ist. Eine geeignete lokale Approximation, die in der Literatur routinemäßig angewandt wird, d.h. insbesondere auch in Ref. [Kra 65], beruht auf der Annahme eines Skalarpotentials, das in Richtung der Inhomogenität des Plasma-“slab” konstant ist. Aus der Bedingung $\frac{\partial}{\partial x} \Phi(x; k_y, k_{\parallel}) = 0$ folgt dann gemäß den Gleichungen (5.59) und (5.66) $K_x = 0$. Damit vereinfacht sich Gl. (5.71), falls ebenso wie in der Arbeit [Kra 65] für die Elektronen der “zero gyroradius” Limes $\lambda^e \rightarrow 0$ genommen wird, auf

$$P_{\text{abs}}(\underline{x}) = |\tilde{\Phi}|^2 \frac{\omega_{P_i}^2(x)}{4\pi^{1/2}v_{th}^i} |K_{\parallel}|(x_0^i)^2 \left[S_0(\lambda^i) e^{-(x_0^i)^2} \left(1 - \frac{\iota \text{sgn}(K_y)}{L^{(n_i)}(x) x_0^i |K_{\parallel}|} \left(\frac{\lambda^i}{2} \right)^{1/2} \right) + \right. \quad (5.72)$$

$$\left. e^{-\frac{m_e}{m_i}(x_0^i)^2} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{Z_i} + \frac{\iota \text{sgn}(K_y)}{L^{(n_i)}(x) x_0^i |K_{\parallel}|} \left(\frac{\lambda^i}{2} \right)^{1/2} \right) \right] =: |\tilde{\Phi}|^2 \frac{\omega_{P_i}^2(x)}{4\pi^{1/2}v_{th}^i} |K_{\parallel}|(x_0^i)^2 \zeta(x) .$$

Die in Ref. [Kra 65] abgeleitete lokale Dispersionsrelation der hier betrachteten elektrostatischen Moden besteht aus je einer Gleichung für den Realteil ω_r der Wellenfrequenz und ihrem Imaginärteil ω_i . Letztere Gleichung besitzt die Struktur

$$\omega_i = \frac{\pi^{1/2} \omega_r^2}{|K_{\parallel}| v_{th}^i} \frac{\zeta(x)}{\chi} , \quad (5.73)$$

wo ein Quotient eingeht, dessen Zähler die bereits aus der Relation (5.72) bekannte Funktion $\zeta(x)$ bildet. Die detaillierte Gestalt des Nenners χ , der auch in der Gleichung für ω_r auftritt, ist hier nicht von Interesse, kann aber gegebenenfalls der Arbeit [Kra 65] entnommen werden. Die Bedingung $\omega_i = 0$ für marginale Stabilität der longitudinalen Oszillationen lautet schließlich gemäß Gl. (5.73)

$$\zeta(x) = 0 . \quad (5.74)$$

Vergleicht man dies mit der Identität (5.72), so folgt, daß die Bedingung für marginale Stabilität erwartungsgemäß der Forderung $P_{\text{abs}}(\underline{x}) = 0$ äquivalent ist.

Mit Hilfe des Ausdrucks (5.54) für die lokal von einer im “slab” propagierenden Mode dissipierte Leistung $P_{\text{abs}}(\underline{x})$ konnten also in zwei Fällen bereits aus der Literatur bekannte Resultate reproduziert werden. Einerseits der Grenzfall des homogenen Plasmas,

der die korrekte Form des Stix-Terms bestätigt, andererseits das Stabilitätskriterium der universellen Instabilität nach Krall und Rosenbluth, ein Beweis der Relevanz des diamagnetischen Terms.

5.4 Zur Kompatibilität der WKB-Leistungsbilanz mit der lokalen Leistungsbilanz des räumlich dispersiven "slab"

In Abschnitt 3.1 wurde die Leistungsbilanz der WKB-Approximation unter Berücksichtigung der integralen konstitutiven Relation (2.19) erstellt. Hier soll untersucht werden ob diese Bilanz, d.h. insbesondere die Relation (3.48) für die von einer WKB-Mode dissipierte Leistung $P_{\lambda}^{\text{abs}}(x; k_y, k_{\parallel})$, mit dem durch Gl. (5.54) gegebenen exakten Ausdruck $P_{\text{abs}}(\underline{x})$ kompatibel ist. Letzterer wurde, wie aus Abschnitt 3.1 ersichtlich ist, lediglich aufgrund von Überlegungen auf kinetischem Niveau gewonnen und nicht wie (3.48) durch eine lokale Analyse der Wellengleichung.

Der Vergleich der Resultate (3.48) und (5.54) ist nicht unmittelbar möglich, weil in $P_{\text{abs}}(\underline{x})$ die Fourier-Transformierte des elektrischen Feldes eingeht, hingegen die WKB-Approximation auf das Feld im Ortsraum Bezug nimmt. Nun läßt sich allerdings mit Hilfe der Relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' \underline{E}^*(x'; k_y, k_{\parallel}) \cdot \underline{\sigma}(x', x; k_y, k_{\parallel}) \cdot \underline{E}(x; k_y, k_{\parallel}) = \quad (5.75)$$

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk'_x \tilde{\underline{E}}^*(k'_x, k_y, k_{\parallel}) \cdot \tilde{\underline{\sigma}}(k'_x, k_x; k_y, k_{\parallel}) \cdot \tilde{\underline{E}}(k_x, k_y, k_{\parallel}),$$

die durch eine einfache Rechnung zu beweisen ist, zeigen, daß der exakte Ausdruck der im Volumen $\tau := \mathbf{R} \times [0, L_y] \times [0, L_z]$ dissipierten Gesamtleistung die Identität

$$\int_{\tau} d^3x P_{\text{abs}}(\underline{x}) = \quad (5.76)$$

$$\pi L_y L_z \sum_{k_y} \sum_{k_{\parallel}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk'_x \tilde{\underline{E}}^*(k'_x, k_y, k_{\parallel}) \cdot [\tilde{\underline{\sigma}}(k'_x, k_x; k_y, k_{\parallel})]^{\text{H}} \cdot \tilde{\underline{E}}(k_x, k_y, k_{\parallel}) =$$

$$\frac{1}{2} L_y L_z \sum_{k_y} \sum_{k_{\parallel}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' \underline{E}^*(x'; k_y, k_{\parallel}) \cdot [\underline{\sigma}(x', x; k_y, k_{\parallel})]^{\text{H}} \cdot \underline{E}(x; k_y, k_{\parallel})$$

erfüllt. Die Größe $\int_{\tau} d^3x P_{\text{abs}}(\underline{x})$ bietet sich als Ausgangspunkt einer entsprechenden Kontrollrechnung an, da sie sich durch die Feldgrößen der WKB-Approximation ausdrücken läßt. Im folgenden wird gezeigt, daß sich Gl. (5.76) nach analoger Anwendung der im Rahmen der WKB-Analysis in Abschnitt 3.1 durchgeführten Näherungen, auf den aus der Relation (3.48) folgenden Ausdruck für die dissipierte Gesamtleistung reduziert, wie es aus Konsistenzgründen erforderlich ist.

Mit dem Ansatz (3.1), wo auf die Summation über den Modenindex zu verzichten ist

festes λ gewählt wird), weil die WKB-Leistungsbilanz (3.43) für jede WKB-abhängig erfüllt werden muß, ergibt sich die Identität

$$\int_{\tau} d^3x P_{\text{abs}}(\underline{x}) = \frac{1}{2} L_y L_z \sum_{k_y} \sum_{k_{\parallel}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{i(S_{\lambda}(x; k_y, k_{\parallel}) - S_{\lambda}(x'; k_y, k_{\parallel}))} \quad (5.77)$$

$$\underline{E}^{\lambda*}(x'; k_y, k_{\parallel}) \cdot \left[\underline{\sigma}(x', x; k_y, k_{\parallel}) \right]^H \cdot \underline{E}^{\lambda}(x; k_y, k_{\parallel}) ,$$

falls der modifizierte hermitesche Anteil des Leitfähigkeitskerns im Ortsraum durch

$$\left[\underline{\sigma}(x', x; k_y, k_{\parallel}) \right]^H := \frac{1}{2} \left(\underline{\sigma}(x', x; k_y, k_{\parallel}) + \underline{\sigma}^+(x, x'; k_y, k_{\parallel}) \right) \quad (5.78)$$

definiert wird. Die Kurznotationen

$$I_1 := \sum_{k_y} \sum_{k_{\parallel}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{i(S_{\lambda}(x; k_y, k_{\parallel}) - S_{\lambda}(x'; k_y, k_{\parallel}))} \quad (5.79)$$

$$\underline{E}^{\lambda*}(x'; k_y, k_{\parallel}) \cdot \underline{\sigma}(x', x; k_y, k_{\parallel}) \cdot \underline{E}^{\lambda}(x; k_y, k_{\parallel})$$

bzw.

$$I_2 := \sum_{k_y} \sum_{k_{\parallel}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{i(S_{\lambda}(x; k_y, k_{\parallel}) - S_{\lambda}(x'; k_y, k_{\parallel}))} \quad (5.80)$$

$$\underline{E}^{\lambda*}(x'; k_y, k_{\parallel}) \cdot \underline{\sigma}^+(x, x'; k_y, k_{\parallel}) \cdot \underline{E}^{\lambda}(x; k_y, k_{\parallel})$$

erlauben dann die kompakte Schreibweise

$$\int_{\tau} d^3x P_{\text{abs}}(\underline{x}) = \frac{1}{4} L_y L_z (I_1 + I_2) . \quad (5.81)$$

Unter der Voraussetzung hinreichend langsam variierender Plasmaparameter, vgl. Abschnitt 3.1, kann im folgenden die asymptotische WKB-Analyse des obigen Ausdrucks für die dissipierte Gesamtleistung durchgeführt werden. Dabei ist es zweckmässig, anstelle der asymptotischen Form (3.22) von $\underline{\sigma}(x', x; k_y, k_{\parallel})$ den äquivalenten asymptotischen Leitfähigkeitskern

$$\underline{\sigma}(x', x; k_y, k_{\parallel}) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{i(x-x')k_x} \left[\left(1 + \kappa(x' - x) \frac{\partial}{\partial x_s} \right) \underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{\parallel}; x_s) - \right. \quad (5.82)$$

$$\left. i\kappa \frac{\partial}{\partial x_s} \left[\frac{\partial}{\partial k_x'} \underline{\sigma}(k'_{\perp}, k_{\perp}; \psi', \psi; k_{\parallel}; x_s) \right]_{k_x' \rightarrow k_x} + O(\kappa^2) \right]$$

zu benutzen, der durch einige, im Detail etwas von (3.19) bis (3.22) abweichende Rechenschritte hergeleitet werden kann. Damit und mit den Skalierungen (3.23) und (3.24) folgt für I_1 gemäß Gl. (5.79) nach einer etwas länglichen Rechnung

$$I_1 = 2\pi \sum_{k_y} \sum_{k_{||}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left[\underline{E}^{\lambda*}(x_s; k_y, k_{||}) \cdot \left\{ \underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{||}; x_s) + \right. \right. \right. \quad (5.83)$$

$$i\kappa \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial}{\partial k_x} \underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{||}; x_s) - \frac{i}{2} \kappa \frac{\partial^2}{\partial k_x^2} \underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{||}; x_s) \frac{\partial}{\partial x_s} K_{\lambda}(x_s; k_y, k_{||}) -$$

$$i\kappa \frac{\partial}{\partial x_s} \left[\frac{\partial}{\partial k_x'} \underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}'; \psi, \psi'; k_{||}; x_s) \right]_{k_x' \rightarrow k_x} \left. \right\} \cdot \underline{E}^{\lambda}(x_s; k_y, k_{||}) +$$

$$i\kappa \left(\frac{\partial}{\partial x_s} \underline{E}^{\lambda*}(x_s; k_y, k_{||}) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial k_x} \underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{||}; x_s) \cdot \underline{E}^{\lambda}(x_s; k_y, k_{||}) \left. \right]_{k_x \rightarrow K_{\lambda}(x_s; k_y, k_{||})} \Bigg|_{x_s \rightarrow x},$$

wo Terme $O(\kappa^2)$ vernachlässigt wurden. Mit der Annahme (3.26) eines schwach dispersiven Plasmas kann man I_1 schließlich in der Gestalt

$$I_1 = 2\pi \sum_{k_y, k_{||}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\underline{E}^{\lambda*}(x; k_y, k_{||}) \cdot \left\{ i \left[\underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{||}; x) \right]^A + \kappa \left[\underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{||}; x) \right]^H - \right. \right. \quad (5.84)$$

$$\kappa \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial k_x} \left[\underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{||}; x) \right]^A + \frac{1}{2} \kappa \frac{\partial^2}{\partial k_x^2} \left[\underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{||}; x) \right]^A \frac{\partial}{\partial x} K_{\lambda}(x; k_y, k_{||}) +$$

$$\left. \left. \kappa \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial k_x'} \left[\underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}'; \psi, \psi'; k_{||}; x) \right]^A \right]_{k_x' \rightarrow k_x} \right\} \cdot \underline{E}^{\lambda}(x; k_y, k_{||}) -$$

$$\kappa \left(\frac{\partial}{\partial x} \underline{E}^{\lambda*}(x; k_y, k_{||}) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial k_x} \left[\underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{||}; x) \right]^A \cdot \underline{E}^{\lambda}(x; k_y, k_{||}) \left. \right]_{k_x \rightarrow K_{\lambda}(x; k_y, k_{||})}$$

schreiben.

Eine analoge Rechnung liefert für I_2 , wo nun der adjungierte Leitfähigkeitskern in der Form

$$\underline{\sigma}^+(x, x'; k_y, k_{||}) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{i(x-x')k_x} \left[(1 + \kappa(x'-x) \frac{\partial}{\partial x_s}) \underline{\sigma}^+(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{||}; x_s) - \right. \quad (5.85)$$

$$\left. i\kappa \frac{\partial}{\partial x_s} \left[\frac{\partial}{\partial k_x'} \underline{\sigma}^+(k_x, k_x'; \psi, \psi'; k_{||}; x_s) \right]_{k_x' \rightarrow k_x} + O(\kappa^2) \right]$$

eingeht, den Ausdruck:

$$I_2 = 2\pi \sum_{k_y, k_{||}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\underline{E}^{\lambda*}(x; k_y, k_{||}) \cdot \left\{ -i \left[\underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{||}; x) \right]^A + \kappa \left[\underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{||}; x) \right]^H + \right. \right. \quad (5.86)$$

$$\kappa \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial k_x} \left[\underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{||}; x) \right]^A - \frac{1}{2} \kappa \frac{\partial^2}{\partial k_x^2} \left[\underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{||}; x) \right]^A \frac{\partial}{\partial x} K_{\lambda}(x; k_y, k_{||}) -$$

$$\left. \left. \kappa \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial k_x'} \left[\underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}'; \psi, \psi'; k_{||}; x) \right]^A \right]_{k_x' \rightarrow k_x} \right\} \cdot \underline{E}^{\lambda}(x; k_y, k_{||}) +$$

$$\kappa \left(\frac{\partial}{\partial x} \underline{E}^{\lambda*}(x; k_y, k_{||}) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial k_x} \left[\underline{\sigma}(k_{\perp}, k_{\perp}; \psi, \psi; k_{||}; x) \right]^A \cdot \underline{E}^{\lambda}(x; k_y, k_{||}) \left. \right]_{k_x \rightarrow K_{\lambda}(x; k_y, k_{||})}.$$

Mit den Identitäten (5.84) und (5.86) läßt sich die totale in τ dissiperte Leistung gemäß Gl. (5.81) berechnen; berücksichtigt man in dem so erhaltenen Ergebnis einerseits die Skalierung (3.29) des diamagnetischen Terms im Leitfähigkeitskern, andererseits den Reihenansatz (3.31) für das elektrische Wellenfeld und werden Terme $O(\kappa^2)$ vernachlässigt, so ergibt ein Vergleich mit Gl. (3.46)

$$\int_{\tau} d^3x P_{\text{abs}}(\underline{x}) = \sum_{k_y} \sum_{k_{\parallel}} \int_{\tau} d^3x P_{\lambda}^{\text{abs}}(x; k_y, k_{\parallel}) , \quad (5.87)$$

wie es sein muß.

Kapitel 6

Numerische Ergebnisse zur Modenkonzersion der langsamen Welle in eine Ionen-Bernstein-Welle

In diesem Kapitel werden einige der hinsichtlich des Modenkonzersionsproblems der IBW-Heizung relevanten numerischen Ergebnisse, die mit Hilfe des IBW-Codes errechnet wurden, präsentiert. Diese umfassen neben den entsprechenden Lösungen der lokalen Dispersionsrelation eine Auswahl typischer Modenkonzersionslösungen der nichtlokalen Wellengleichung und gegebenenfalls zugehörige Leistungsdepositionsprofile. Insbesondere wurden dabei untersucht:

- Die Effizienz der Modenkonzersion durch Integration der nichtlokalen Wellengleichung mit Hilfe des hier als "vollständigen" Leitfähigkeitskern bezeichneten Ausdrucks (4.15) in Fällen, in denen lokale Dämpfung vermieden werden kann. Weiters die Reproduzierbarkeit dieser Modenkonzersionslösungen im Rahmen der Approximation (4.21), auf die im folgenden als "1-Punkt-Näherung" verwiesen wird (Fig. 1 bis 10).
- Der Einfluß einer sich in der Nähe der Modenkonzersionsschicht befindlichen Ionen-Zyklotron-Harmonischen auf die Gestalt der lokalen Dispersionsrelation (Fig. 11 bis 20).
- Die mögliche Heizung der Abschältschicht eines Tokamaks durch lokale Dämpfung der IBW an einer hohen Ionen-Zyklotron-Harmonischen (Fig. 23 bis 36).
- Die Möglichkeit signifikanter Elektronen-Landau-Dämpfung im Bereich der Modenkonzersionsschicht (Fig. 21 bis 22).
- Die Gestalt der Leistungsdepositionsprofile und die Übereinstimmung der durch Integration dieser Profile berechneten Absorptionskoeffizienten mit den Ergebnissen der globalen WKB-Leistungsbilanz, also die Prüfung der Energieerhaltung einer entsprechenden Modenkonzersionslösungen der nichtlokalen Wellengleichung (Fig. 37 bis 48).
- Der Einfluß von Stößen auf die Effizienz der Ankopplung der SW an die IBW in der Abschältschicht (Fig. 49 bis 53).

6.1 Die Modenkonzersion der IBW in eine SW in der Nähe der kalten LH-Resonanz

Im folgenden wird anhand diverser Plots eine konkrete numerische Lösung der nichtlokalen Wellengleichung im Bereich der Modenkonzersionsschicht präsentiert, wobei eine Gegenüberstellung der Ergebnisse, die mit Hilfe des "vollständigen" Leitfähigkeitskernes erzielt wurden, zu den Resultaten der "1-Punkt-Näherung" durchgeführt wird.

- Figur 1 zeigt eine typische lokale Dispersionsrelation eines IBW-Modenkonzersionsproblems. Die involvierten Moden sind rein propagativ, besitzen also reelle Wellenzahlen, sodaß aufgrund der Analyse der Dispersionsrelation keine lokale Dämpfung der Moden zu erwarten ist. Dies ist eine Folge einer speziellen Wahl der Gleichgewichtsplasmaparameter, die bewirkt, daß im FEL-Rechenbereich $[x_a, x_b]$ keine dissipativen Mechanismen wirksam werden können, d.h. weder eine Ionen-Zyklotron-Harmonische anzutreffen ist, noch $\omega/|k_{\parallel}|v_{th}^e = O(1)$ gilt, die Bedingung für starke Elektronen-Landau-Dämpfung.

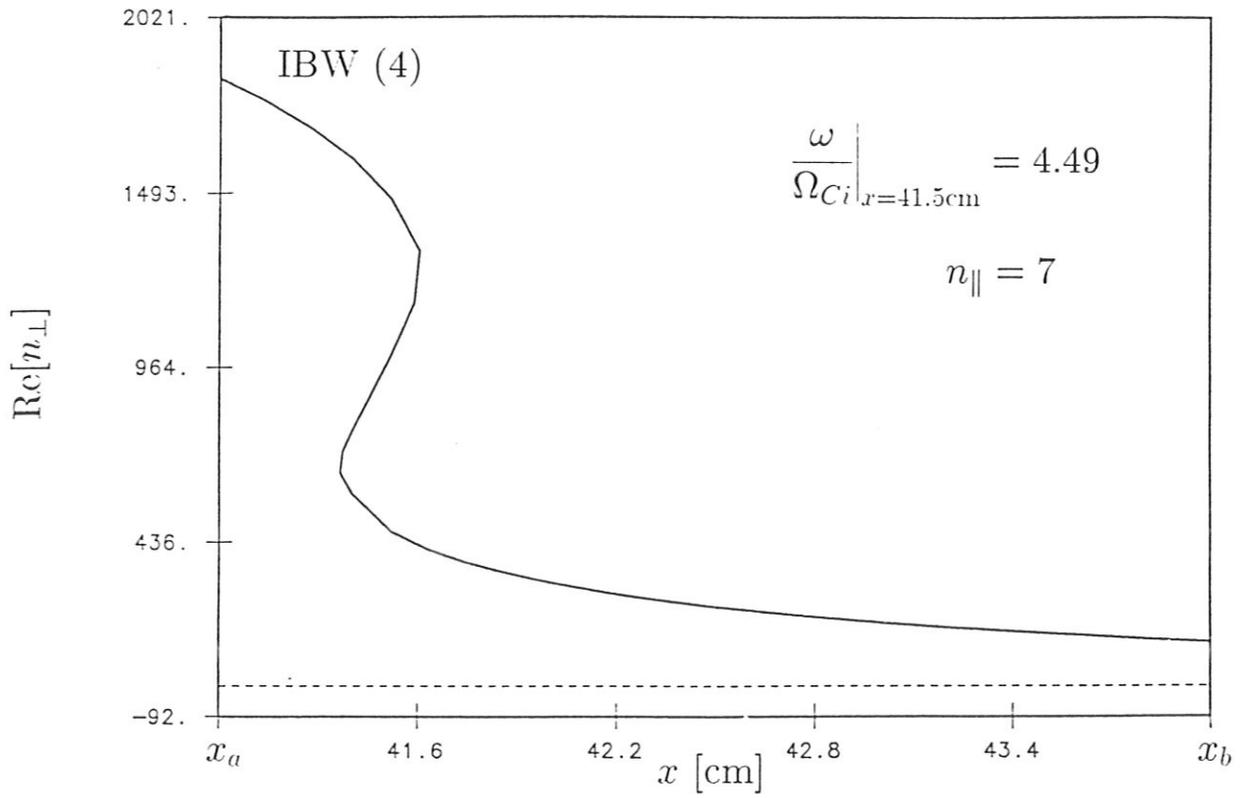
Im Plot ist der Realteil des Brechungsindex in Normalrichtung zum statischen Magnetfeld gegen die x -Koordinate des "slab" aufgetragen, die der radialen Koordinate im Bereich der Abschältschicht eines Tokamaks entspricht. $x = x_a = 41$ cm bezeichnet dabei die Position des Limiters, $x = x_b = 44$ cm einen Punkt nahe der Wand, bzw. nahe der Mündung eines Grills. Dieser Plot wurde für einen parallelen Brechungsindex $n_{\parallel} = 7$ berechnet. Wenn man in Richtung fallender x -Werte, d.h. von außen nach innen vorgeht, sieht man zunächst den Zweig der langsamen Welle, der nur für $n_{\parallel}^2 \geq 1$ propagativ ist. Im Anschluß daran folgt die Modenkonzersionsschicht, wo drei Moden simultan existieren. Schließlich sieht man den Zweig der IBW mit seinen relativ großen n_{\perp} -Werten, also kurzen Wellenlängen von der Größenordnung des Ionen-Gyroradius.

In diesem numerischen Beispiel wurde eine Wellenfrequenz von $f = 438$ MHz gewählt, was in etwa dem Frequenzbereich der IBW-Heizexperimente am FTU entspricht, vgl. Abschnitt 1.3. Weiters wurden exponentiell abfallende Dichte- und Temperatur-Profile eines e^-H^+ -Plasmas vorausgesetzt, die durch $n_{\alpha}(x) := n_{\alpha}(x_a)[n_{\alpha}(x_b)/n_{\alpha}(x_a)]^{[(x-x_a)/(x_b-x_a)]}$ bzw. einer analogen Formel für die Temperaturen definiert, und durch folgende Werte (in cgs-Einheiten) fixiert sind:

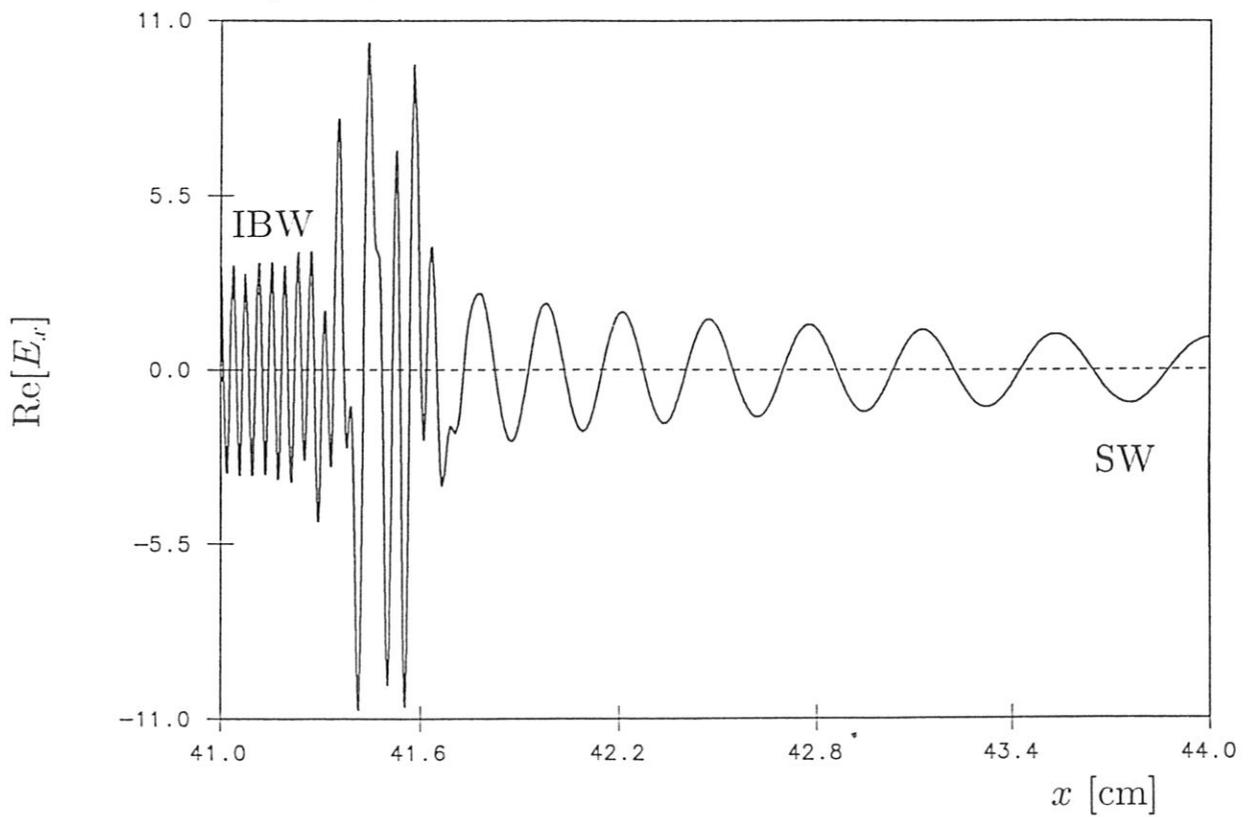
$$\begin{aligned} n_e(x_a) &= n_i(x_a) = 3.82 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3}, \\ n_e(x_b) &= n_i(x_b) = 0.72 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3}, \\ T_e(x_a) &= T_i(x_a) = 1.10 \times 10^{-10} \text{ cm}^2 \text{ g}^1 \text{ s}^{-2} \equiv 68.7 \text{ eV} \text{ und} \\ T_e(x_b) &= T_i(x_b) = 0.83 \times 10^{-10} \text{ cm}^2 \text{ g}^1 \text{ s}^{-2} \equiv 51.8 \text{ eV}. \end{aligned}$$

Diese Profile besitzen Gradientenlängen $L[n_e(x)] = L[n_i(x)] = 1.8$ cm bzw. $L[T_e(x)] = L[T_i(x)] = 10.65$ cm, vgl. (3.4). Für das statische Magnetfeld wird ein " $1/(R_0 + x)$ "-Abfall angenommen, wo R_0 dem großen Radius im Tokamak entspricht. Im konkreten Fall wurde $R_0 = 165$ cm und $|\underline{B}^{stat}(x_a)| = 6.4 \times 10^4 \text{ cm}^{1/2} \text{ g}^{1/2} \text{ s}^{-1} \equiv 6.4 \text{ T}$ gewählt. Das führt auf ein statisches Magnetfeld von rund 8 Tesla auf dem "slab"-Äquivalent zur magnetischen Achse, definiert

Figur 1



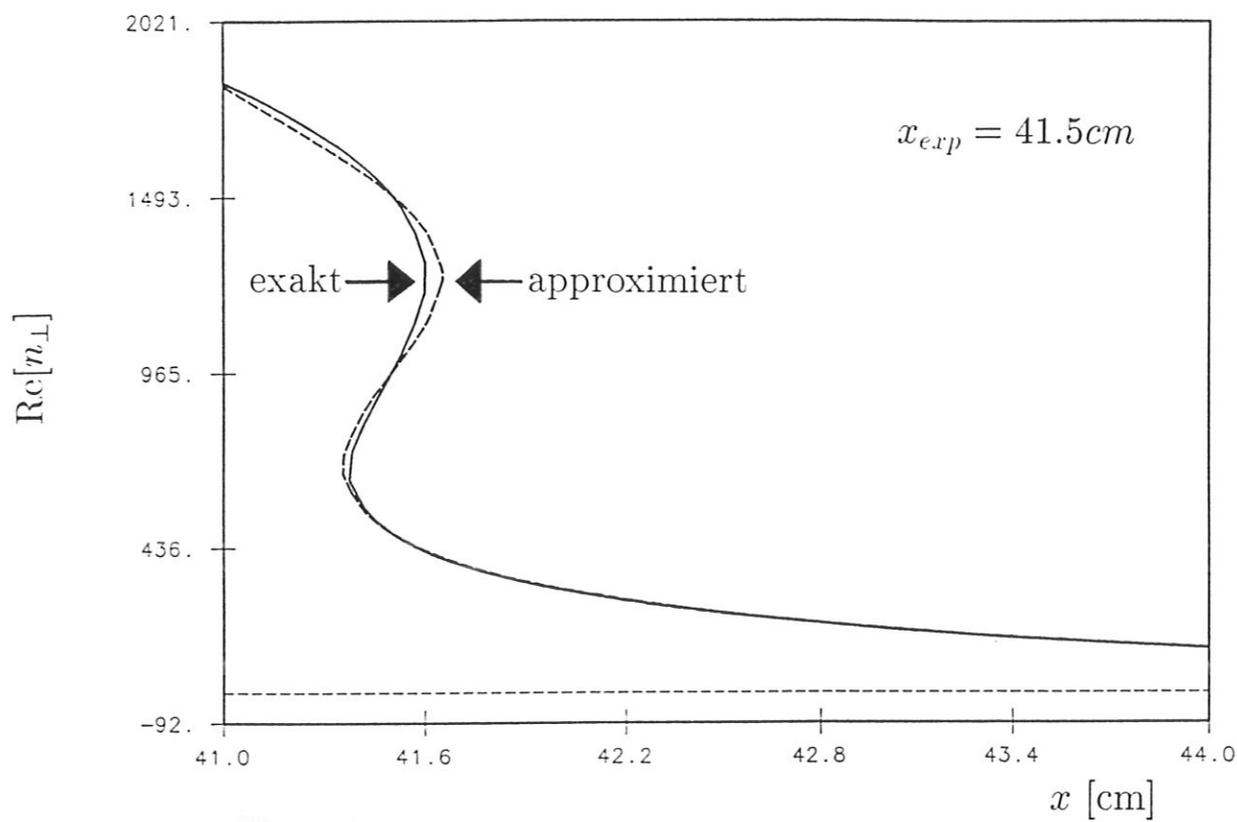
Figur 2



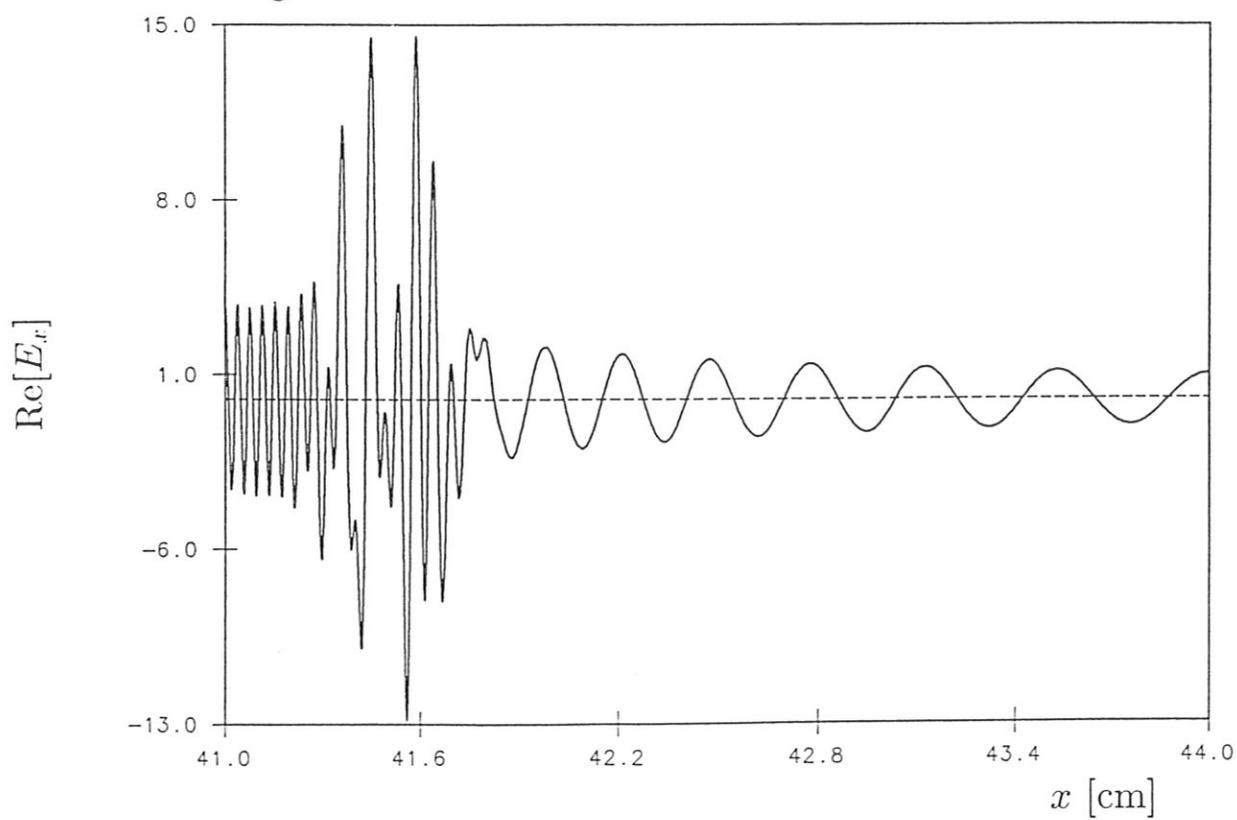
durch $x = 0$ cm, und auf ein Frequenzverhältnis von $\omega/\Omega_{Ci} = 4.49$ an der Stelle $x = 41.5$ cm. Man befindet sich also zwischen vierter und fünfter Ionen-Zyklotron-Harmonischer, sodaß die SW an die IBW mit Index 4 ankoppelt, vgl. Abschnitt 1.3.

- Figur 2 zeigt für den Brechungsindex $n_y = 5$ den Realteil der x -Komponente des elektrischen Wellenfeldes der zur Dispersionsrelation aus Figur 1 gehörenden, mit Hilfe des "vollständigen" Leitfähigkeitskernes erstellten Lösung der nichtlokalen Wellengleichung. Die Amplitude der extern angeregten, einlaufenden SW ist dabei, wie auch in allen folgenden Beispielen, bei $x = x_b$ auf eine Einheitsamplitude normiert. Ohne Schwierigkeit können im Plot die langwellige SW und die kurzwellige IBW identifiziert werden. In der Modenkonversionsschicht kommt es hingegen zu einer komplizierten Überlagerung der drei simultan existierenden Moden der lokalen Dispersionsrelation aus Figur 1. Eine Beurteilung der Effizienz dieser Modenkonversion wird durch die entsprechenden Ergebnisse der globalen Leistungsbilanz (4.107) bis (4.110) ermöglicht; es ergibt sich ein Transmissionskoeffizient $T = 101.7\%$, ein Reflexionskoeffizient $R = 0.0\%$ und schließlich gemäß Gl. (4.110) ein zugehöriger Absorptionskoeffizient $A = -1.7\%$. Da im untersuchten Szenario keine lokale Dämpfung der involvierten Moden zu erwarten ist, sollte die numerische Lösung einen verschwindenden Absorptionskoeffizienten liefern; der kleine negative Wert von A stimmt damit gut überein, zumal gemäß Gl. (4.97) bis (4.100) die WKB-Amplituden der Wellenlösung in A quadratisch eingehen. Da in der numerischen Rechnung die vernachlässigbaren diamagnetischen Terme nicht mitgenommen wurden, die gemäß der Diskussion in Abschnitt 5.2 erst die Möglichkeit eines irreversiblen Energietransfers vom Plasma auf die Welle eröffnen, muß der negative Wert von A physikalisch bedeutungslos sein. Er ist offenbar auf numerische Ungenauigkeiten der Rechnung zurückzuführen und erlaubt so die Abschätzung ihrer Größenordnung. Bemerkenswert ist der praktisch verschwindende Reflexionskoeffizient; die Modenkonversion ist vollständig und eine effiziente Ankopplung an die IBW möglich, wenigstens solange durch geeignete Parameterwahl deren lokale Dämpfung in der Nähe der Modenkonversionsschicht vermieden werden kann.
- Figur 3 zeigt nun einen Vergleich der lokalen Dispersionsrelation aus Abbildung 1 mit jener Dispersionsrelation, die man im Rahmen der "1-Punkt-Näherung" des Leitfähigkeitskernes gemäß Gl. (4.20) erhält. Wie in Abschnitt 4.2 im Rahmen der Diskussion dieser Approximation bereits erläutert wurde, bleibt der Zweig der SW durch sie offensichtlich unbeeinflusst. Die Übereinstimmung der Lösungen beider Dispersionsrelationen ist im konkreten Fall, wo als Entwicklungspunkt für den FGR-Anteil des Leitfähigkeitskernes $x_{exp} = 41.5$ cm gewählt wurde, auch für den IBW-Zweig ausgezeichnet; insbesondere sind diese bei $x = x_{exp}$, wie es sein muß, identisch.

Figur 3

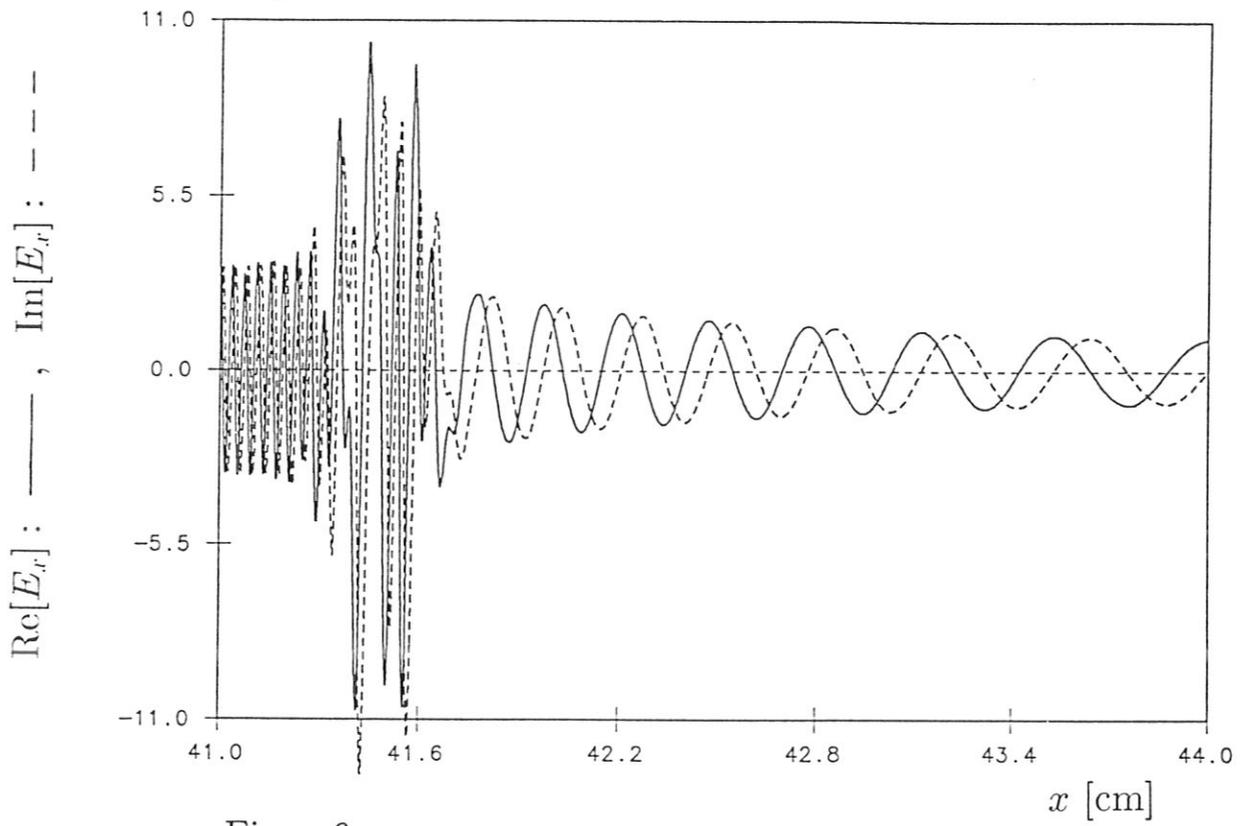


Figur 4

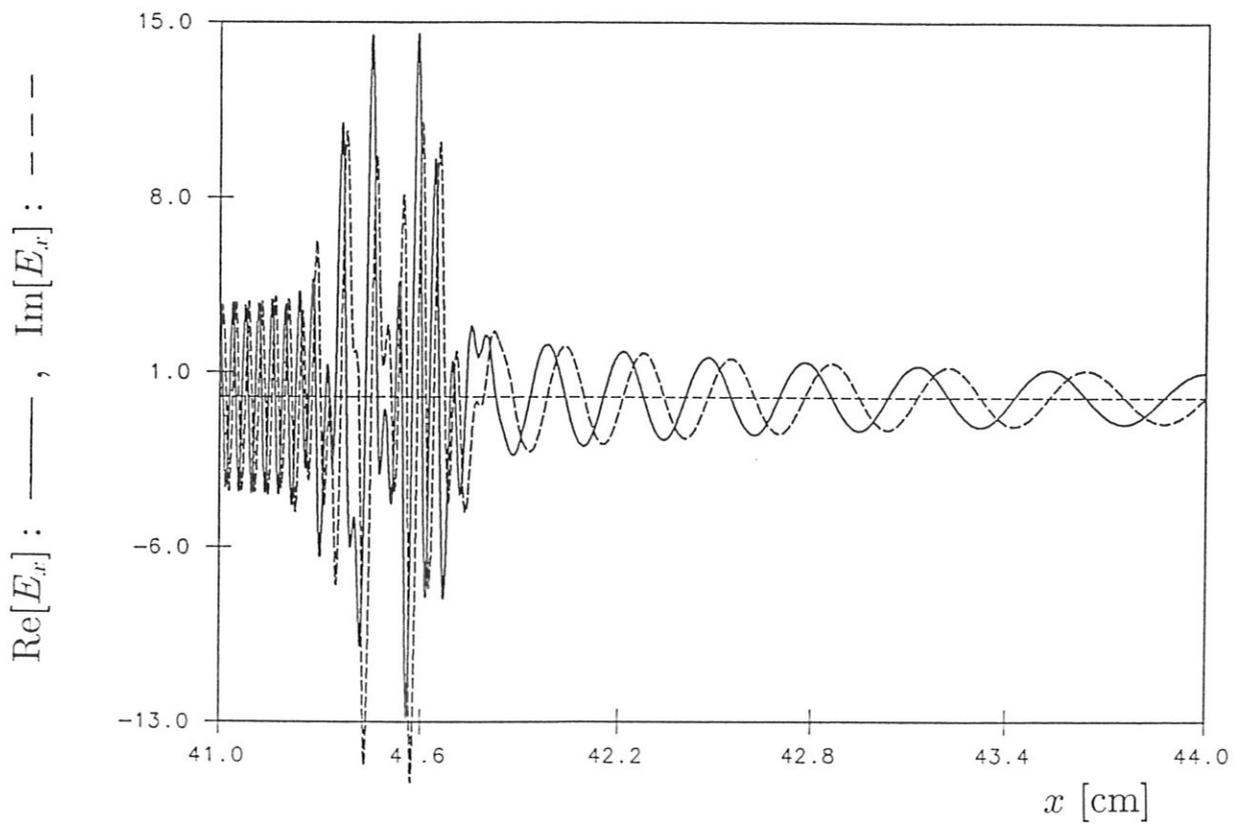


- In Abbildung 4 ist wieder der Realteil der x -Komponente des elektrischen Wellenfeldes als Funktion der Ortskoordinate x zu sehen, wobei die Lösung der nichtlokalen Wellengleichung für die gleichen Parameterwerte wie sie den Figuren 1 bis 3 zugrunde liegen, errechnet wurde, nun allerdings mit Hilfe der "1-Punkt-Näherung" des Leitfähigkeitskernes. Die entsprechende globale Leistungsbilanz, vgl. Abschnitt 4.6, liefert dazu die Koeffizienten $T = 98.6\%$, $R = 0.0\%$ bzw. $A = 1.4\%$, in guter Übereinstimmung mit den zu Figur 2 gehörenden Resultaten. Der Vorteil dieser Näherung liegt in der Rechenzeit begründet; so sind entsprechende Rechnungen in Abhängigkeit von der Anzahl der Gitterpunkte im x -Intervall $[x_a, x_b]$ typisch um einen Faktor 500 – 1000 schneller als jene, die auf dem "vollständigen" Leitfähigkeitskern basieren, vgl. Abschnitt 4.5. Der direkte Vergleich der Plots 2 und 4 zeigt, daß die "1-Punkt-Näherung" die Tendenz besitzt, die Amplituden der Wellen zu überschätzen. Auch treten insbesondere innerhalb der Modenkonzersionschicht geringfügige Phasenverschiebungen zwischen beiden Wellenlösungen auf.
- Figur 5 zeigt den bereits in Abbildung 2 dargestellten Realteil von E_x , nun gemeinsam mit dem zugehörigen Imaginärteil. Man beachte die Phasenverschiebung von Real- und Imaginärteil, die auf eine laufende Welle schließen läßt, ebenso wie der verschwindende Reflexionskoeffizient dieser mit Hilfe des "vollständigen" Leitfähigkeitskerns errechneten Modenkonzersionslösung.
- In Figur 6 sind die entsprechenden Größen, nun mit Hilfe der "1-Punkt-Näherung" errechnet, dargestellt. Auch hier besteht eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus Abbildung 5.

Figur 5

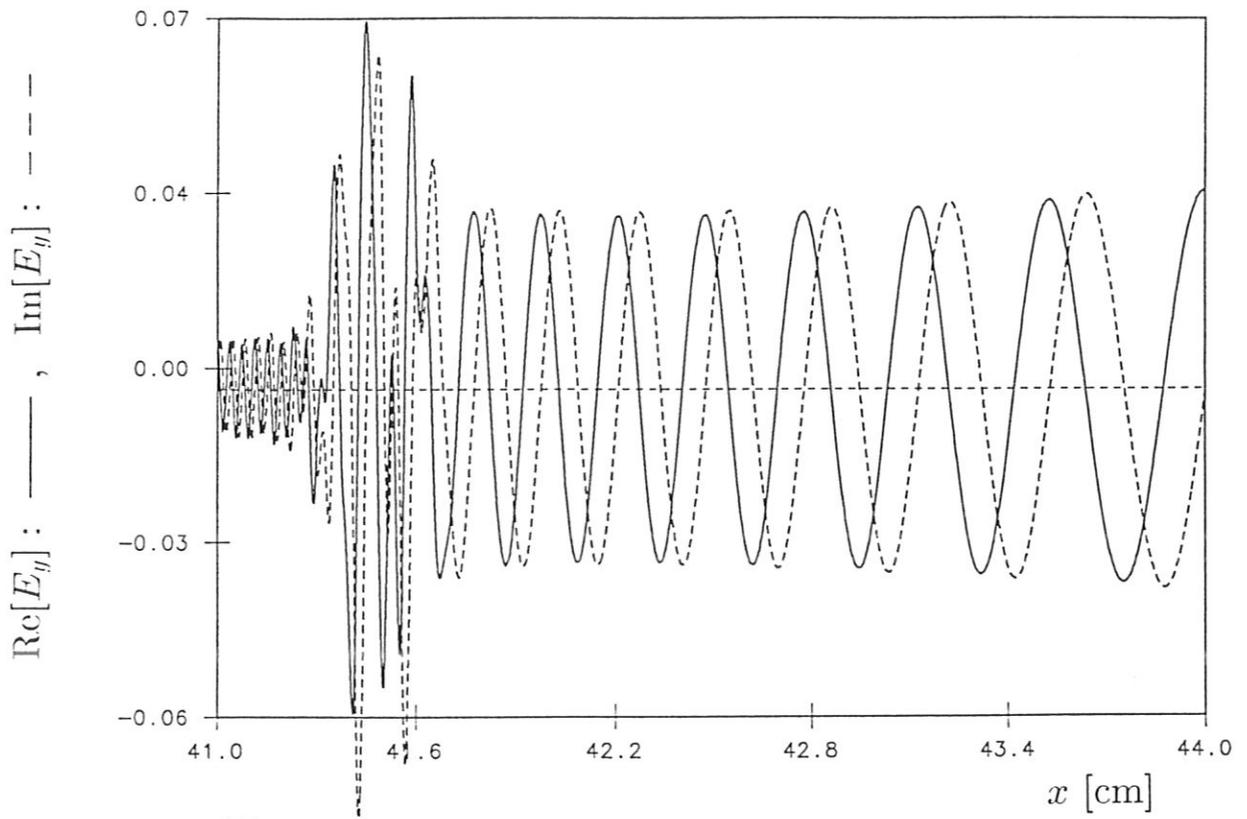


Figur 6

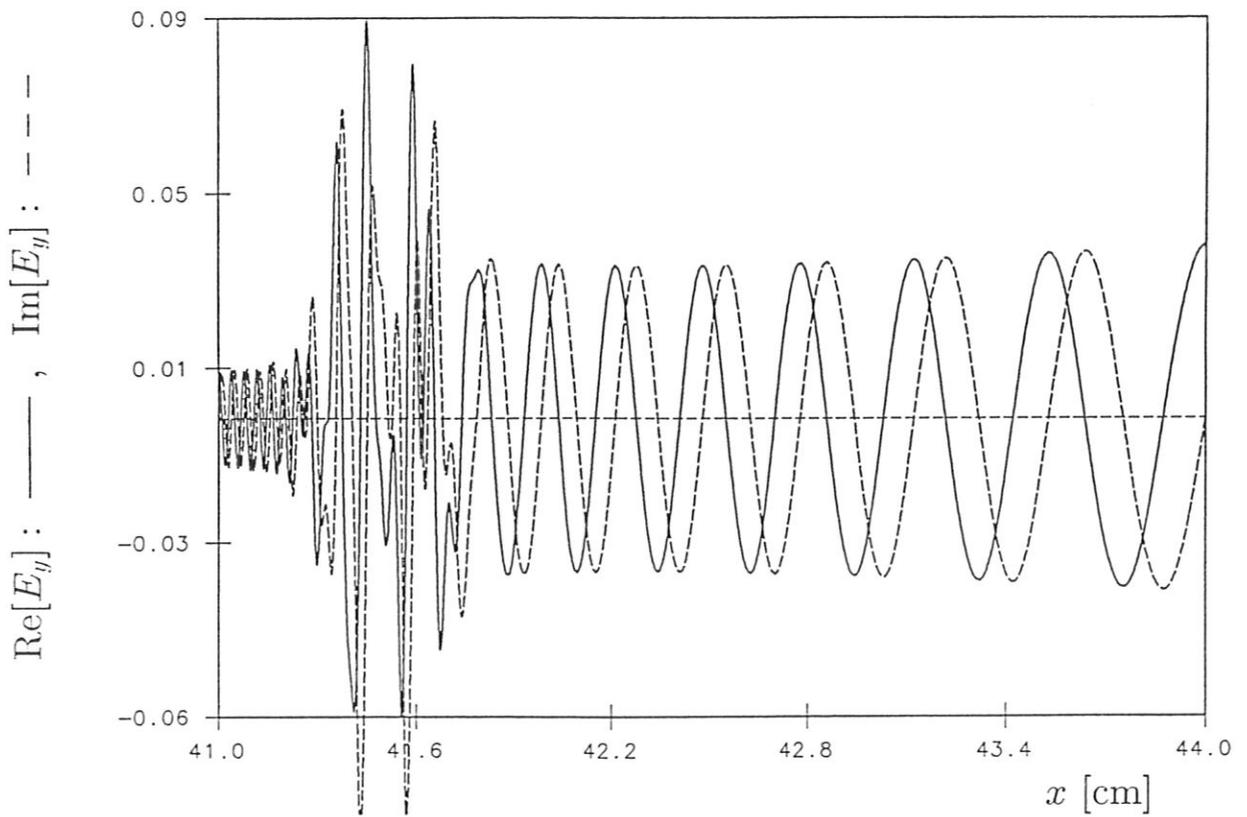


- Die Figuren 7 und 8 zeigen die elektrischen Feldkomponenten in y -Richtung der Wellenlösungen des in diesem Abschnitt diskutierten Szenarios. Dabei wird in Abbildung 7 das zum “vollständigen” Leitfähigkeitskern gehörige Ergebnis dargestellt, bzw. zum Vergleich in Abbildung 8 das Resultat der “1-Punkt-Näherung”.

Figur 7



Figur 8



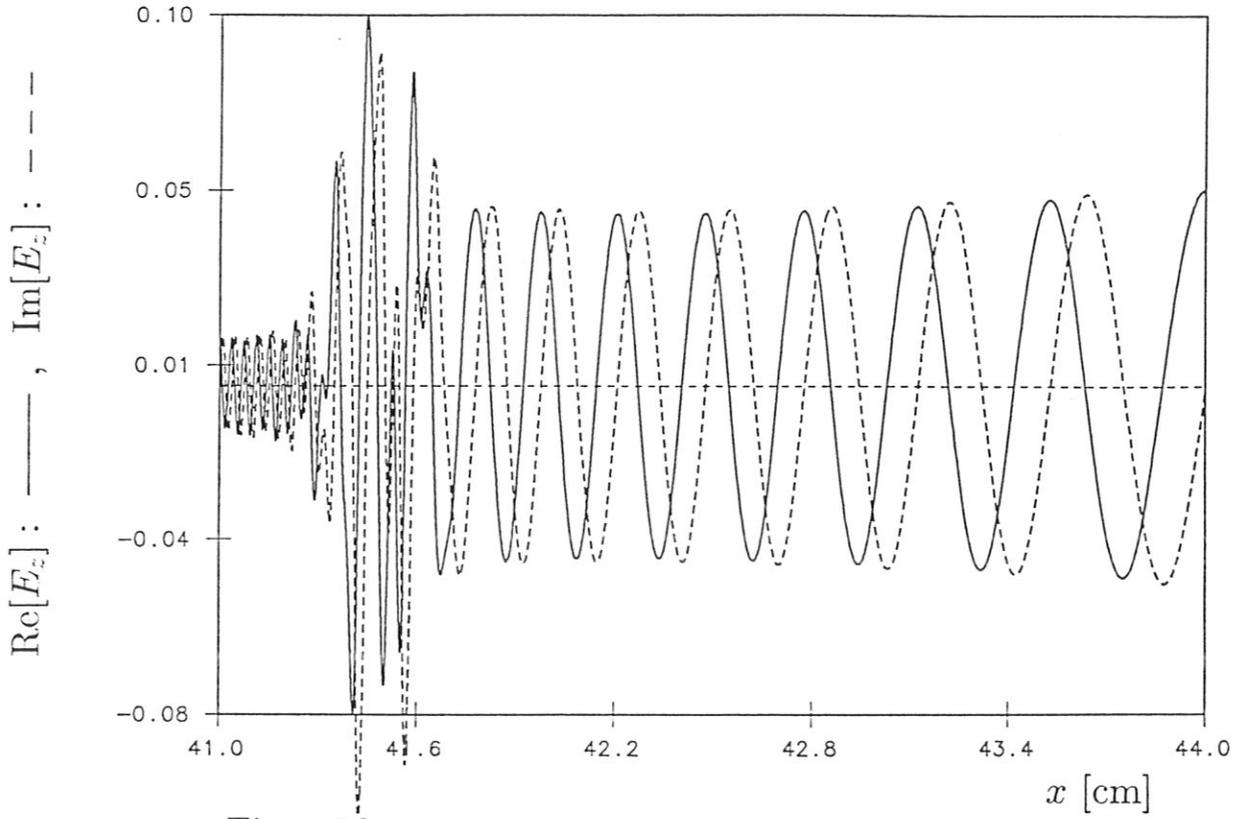
- In den Figuren 9 und 10 ist schließlich die z -Komponente des elektrischen Wellenfeldes abgebildet. Dabei wurde Figur 10 mit Hilfe der "1-Punkt-Näherung" errechnet. Aus den Abbildungen 5, 7 und 9 oder 6, 8 und 10 kann abgelesen werden, daß die SW und insbesondere die IBW erwartungsgemäß im wesentlichen longitudinal polarisiert sind, vgl. Abschnitt 1.3, wobei die Ausbreitungsrichtung der Moden in etwa der x -Richtung entspricht.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß im konkreten Szenario, charakterisiert durch die Dispersionsrelation aus Figur 1, der FGR-Entwicklungsparameter $\lambda_i := \frac{1}{2} k_{\perp}^2 (\rho_i^{Gyro})^2$ in etwa den Wert 5 besitzt, die entsprechende Wellengleichung also tatsächlich nichtlokal, d.h. als Integro-Differentialgleichung zu behandeln ist. Bei ihrer Lösung sorgt, auch im Falle der Anwendung der "1-Punkt-Näherung", ein Wert des diskreten Parameters s , der bei einer gegebenen Gitterkonstanten¹ $h = 0.005$ cm einer Nichtlokalitätslänge von $L_{nonlocal} = sh = 0.12$ cm entspricht, das sind in etwa 6 Ionen-Gyroradien, bereits für zufriedenstellende Konvergenz.

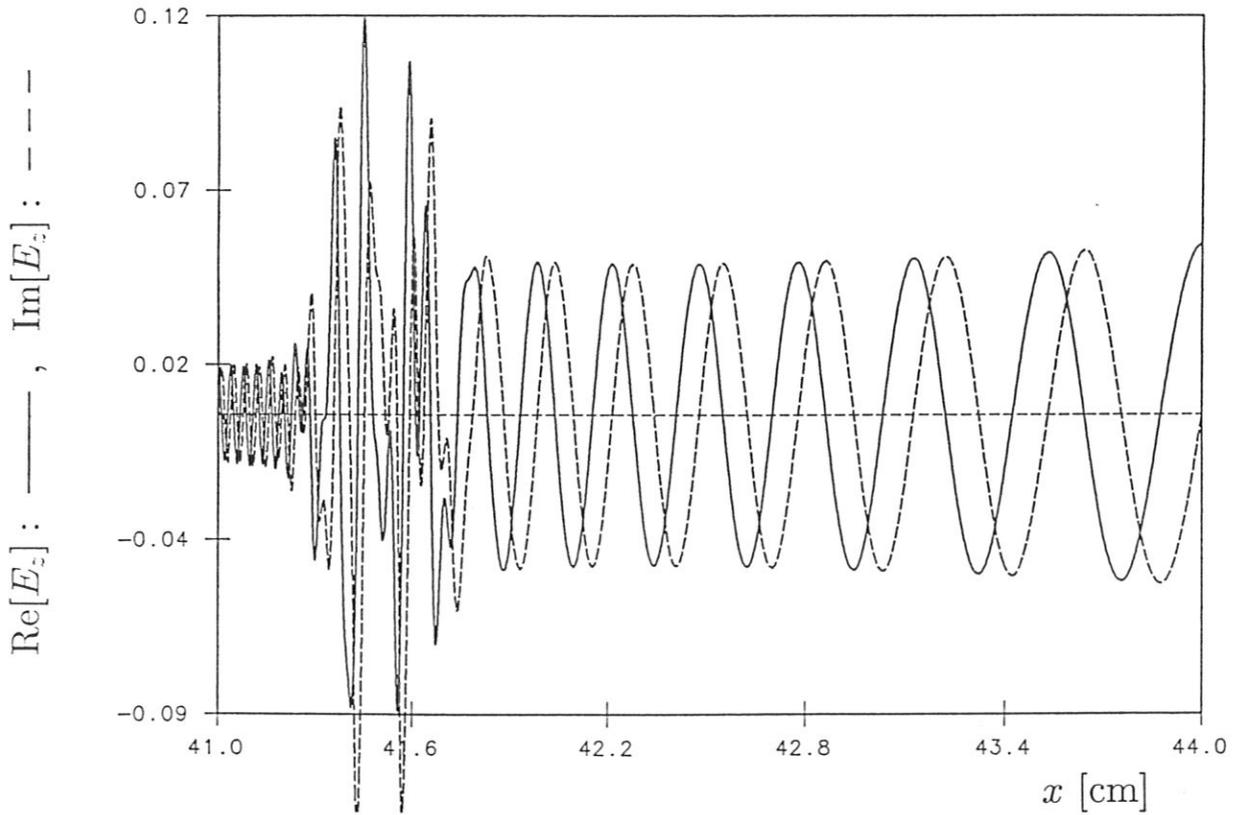
Entsprechende, mit Hilfe des IBW-Codes durchgeführte numerische Experimente zeigen, daß die vollständige Konversion der SW in eine IBW, wie sie im Falle der durch Figur 1 charakterisierten Konfiguration gefunden wird, allen Szenarien gemein ist, in denen durch eine entsprechende Wahl der Profile der Gleichgewichtsplasmaparameter eine lokale Dämpfung der Moden innerhalb des FEL-Rechenbereichs $[x_a, x_b]$ vermieden werden kann. Folglich erscheint im Hinblick auf die IBW-Heizung die effiziente Ankopplung der über den Koppler eingespeisten Leistung an den IBW-Zweig prinzipiell möglich. Zu klären ist im folgenden allerdings noch der Einfluß bisher unterdrückter (Ionen-Zyklotron-Dämpfung, Elektronen-Landau-Dämpfung) bzw. vernachlässigter (Stoßdämpfung) dissipativer Effekte, die möglicherweise parasitäre Verlustkanäle darstellen.

¹Diese ist so zu wählen, daß eine ausreichende Auflösung der IBW sichergestellt ist.

Figur 9



Figur 10



6.2 Die lokale Dispersionsrelation des IBW-Modenkonversionsproblems in der Nähe einer Ionen-Zyklotron-Harmonischen

In diesem Abschnitt soll der Einfluß einer Ionen-Zyklotron-Harmonischen auf die Gestalt der lokalen Dispersionsrelation eines IBW-Heizszenarios im Bereich der Abschältschicht untersucht werden, mit dem Ziel, die mögliche Struktur der Lösungen der Wellengleichung abzuschätzen. Durch Variation des skalierenden Faktors von $|\underline{B}^{stat}(x)|$, dem "slab"-Äquivalent zum Toroidalfeldprofil im Tokamak, wobei sich nur dessen Absolutwerte ändern, nicht aber die Profilstalt, wird eine Folge von Szenarien erzeugt, die sich durch die Position der Ionen-Zyklotron-Harmonischen unterscheiden und durch einen einzigen Parameter $[\omega/\Omega_{Ci}]_{x=const.}$ charakterisiert werden können. Mit wachsenden Werten von $[\omega/\Omega_{Ci}]_{x=const.}$ wandert dabei gewissermaßen die Harmonische vom Randbereich des Plasmas in Richtung zentraler Regionen.

- Figur 11 zeigt eine lokale Dispersionsrelation rein propagativer Moden, die durch den Parameterwert $[\omega/\Omega_{Ci}]_{x=41.5\text{cm}} = 4.49$ charakterisiert und im x -Intervall $[41\text{ cm}, 43\text{ cm}]$ mit der Dispersionsrelation aus Figur 1 identisch ist. Sie soll das Ausgangsszenario dieser parametrischen Studie bilden, in der konkret die Position der fünften Ionen-Zyklotron-Harmonischen über die Modenkonversionsschicht hinweg variiert wird. Dabei wurden hier die der Figur 1 zugrundeliegenden Parameterwerte übernommen, wobei es sich allerdings im Hinblick auf die graphische Darstellbarkeit der Ergebnisse als zweckmäßig erwies, die exponentiellen Dichte- und Temperaturprofile auf das Intervall $[37\text{ cm}, 47\text{ cm}]$ fortzusetzen. Bezeichnet also x_a den Punkt $x = 37\text{ cm}$, bzw. x_b den Ort $x = 47\text{ cm}$, dann gilt für die Parameterwerte an den Intervall-Endpunkten:

$$n_e(x_a) = n_i(x_a) = 3.535 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3},$$

$$n_e(x_b) = n_i(x_b) = 0.014 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3},$$

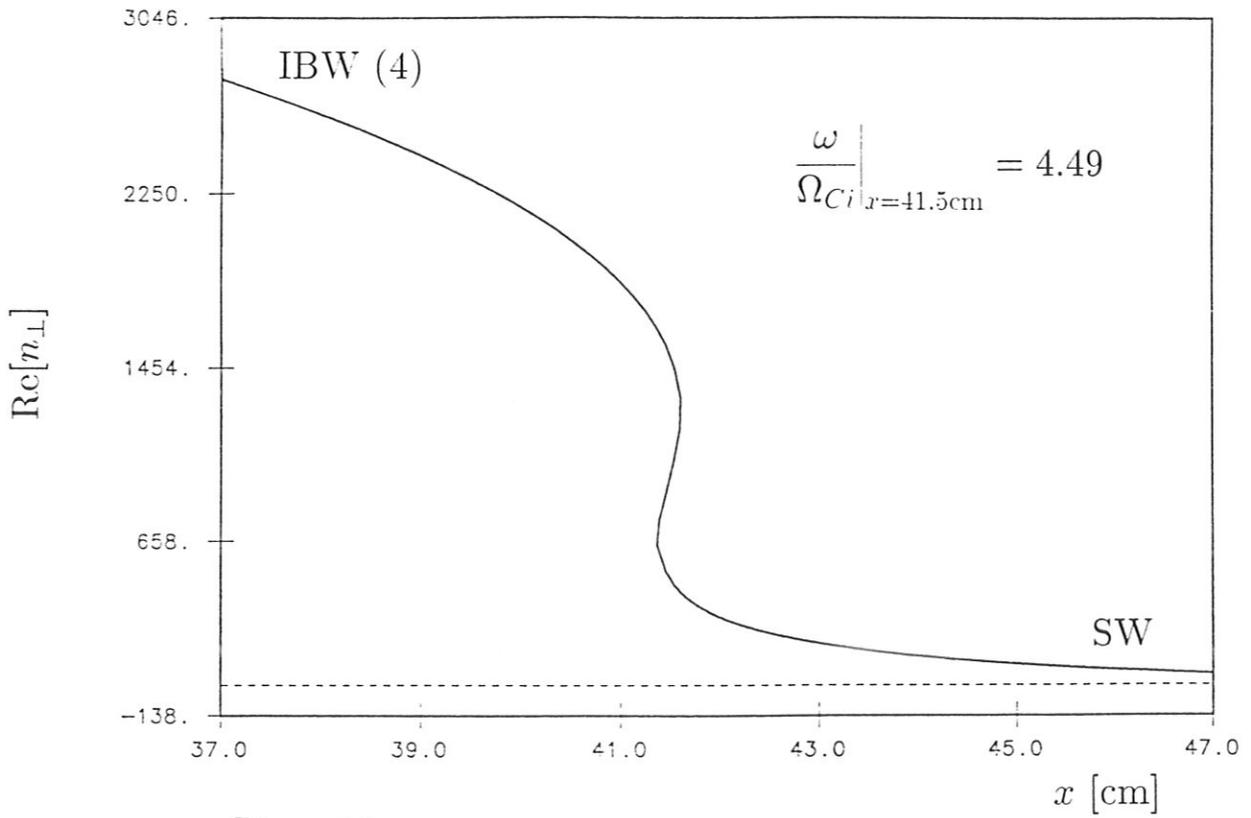
$$T_e(x_a) = T_i(x_a) = 1.601 \times 10^{-10} \text{ cm}^2 \text{g}^1 \text{s}^{-2} \equiv 99.9 \text{ eV}, \text{ bzw.}$$

$$T_e(x_b) = T_i(x_b) = 0.626 \times 10^{-10} \text{ cm}^2 \text{g}^1 \text{s}^{-2} \equiv 39.1 \text{ eV}.$$

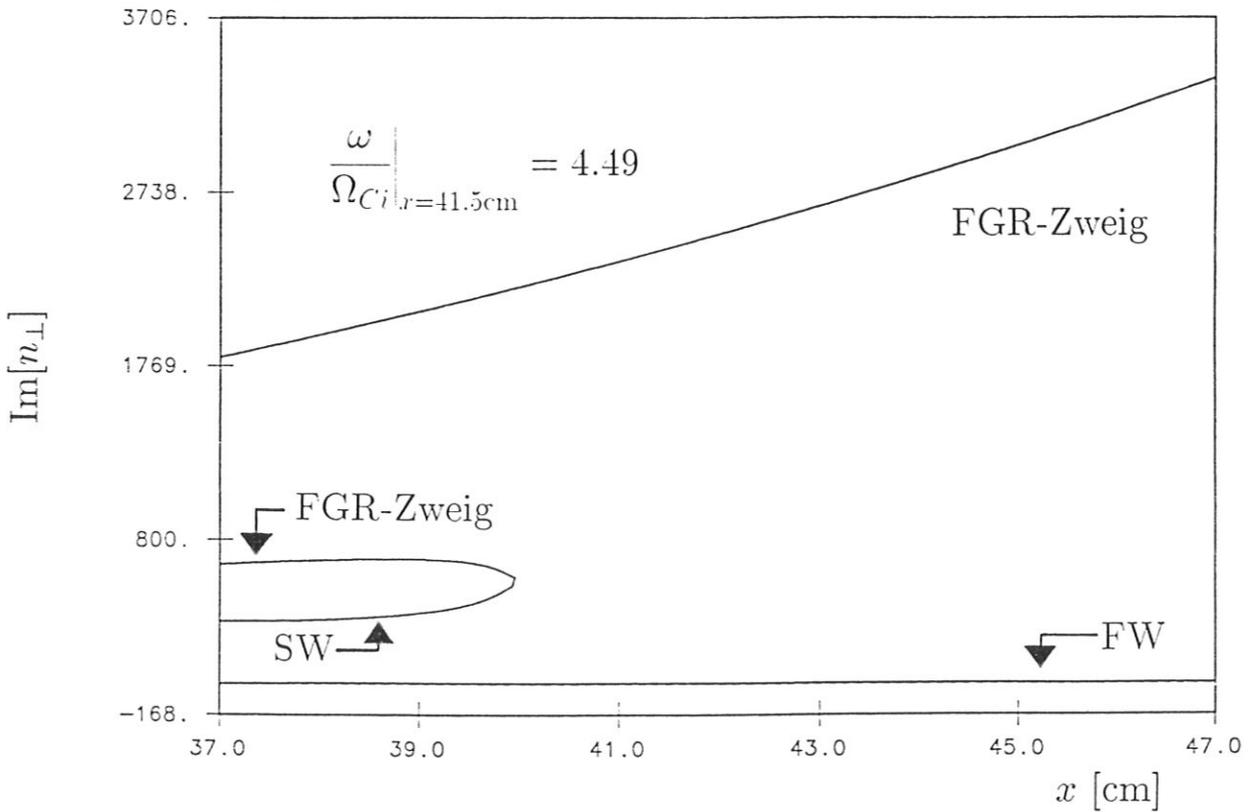
Das statische Magnetfeld ist wieder durch $|\underline{B}^{stat}(x)| = B_{axis} R_0 / (R_0 + x)$ gegeben, mit $R_0 = 165\text{ cm}$ bzw. $B_{axis} = 8\text{ T}$. In diesem Fall befindet sich die Position der fünften Harmonischen außerhalb des im Diagramm dargestellten Bereiches, bei $x = 64.5\text{ cm}$. Die kalte LH-Resonanz ist an der Stelle $x = 40.8\text{ cm}$ lokalisiert, also nahe der Modenkonversionsschicht, wo der SW-Zweig mit dem Zweig der vierten IBW durch drei simultan existierende Moden verbunden wird.

- Figur 12 zeigt die zu Abbildung 11 gehörenden evaneszenten Moden, also Moden die einen rein imaginären Brechungsindex in Normalrichtung zum statischen Magnetfeld besitzen. Dabei bezeichnet "FW" die schnelle Welle, bzw. "FGR-Zweig" Zweige, die durch finite-Gyroradius-Effekte entstehen, sodaß sie im Grenzfall verschwindender Gyroradien gegen Unendlich divergieren. Die jenseits der kalten LH-Resonanz evaneszente SW ist offenbar, wie ihr propagatives Gegenstück, mit einem

Figur 11



Figur 12



solchen FGR-Zweig verbunden. Ein weiterer ist oberhalb von $\text{Im}(n_{\perp}) = 1700$ anzutreffen, also extrem stark gedämpft und daher wohl ohne physikalische Bedeutung.

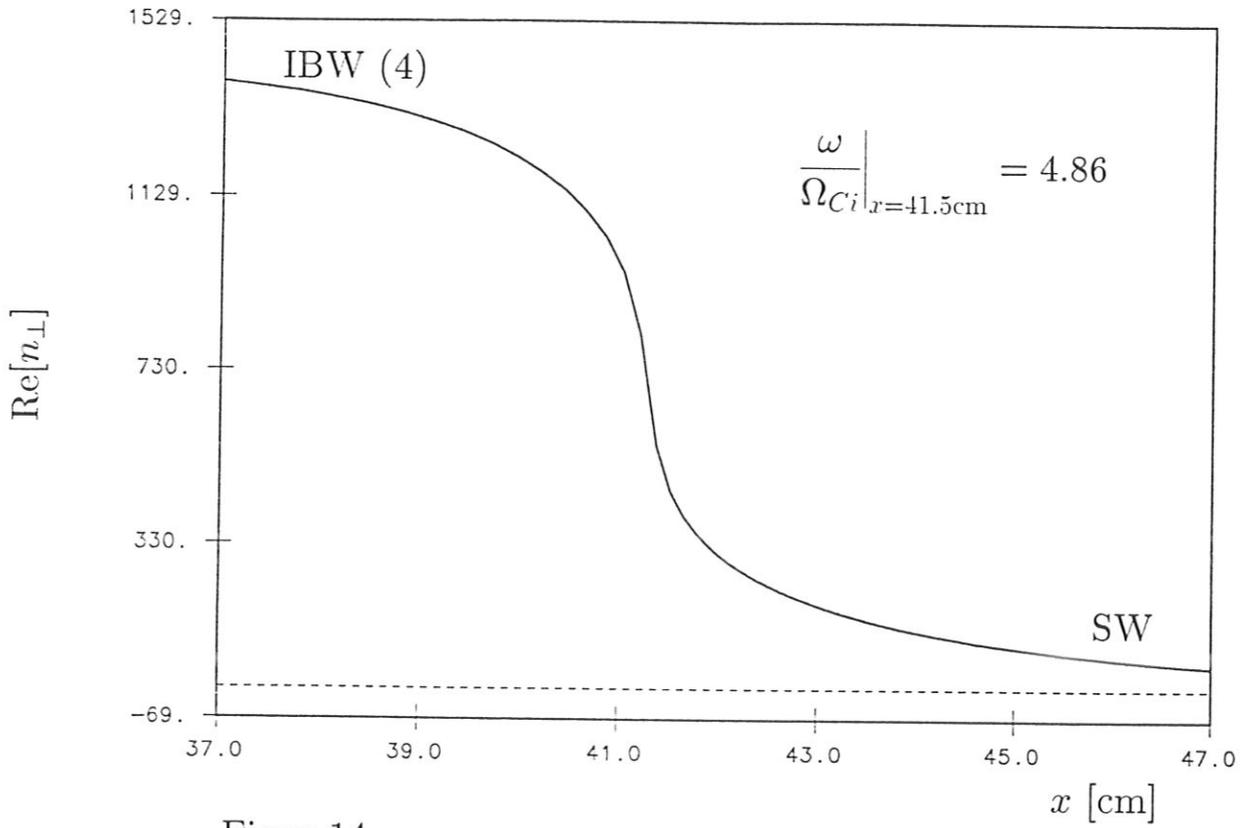
Die evaneszenten Lösungen der Dispersionsrelation sind hier nur der Vollständigkeit halber angeführt. Aufgrund ihrer Polarisierungen spielen sie für das IBW-Modenkonzversionsproblem, wie es durch Figur 11 charakterisiert ist, keine Rolle und können in den Randbedingungen zur Integration der nichtlokalen Wellengleichung vernachlässigt werden.

- In Figur 13 ist die lokale Dispersionsrelation der propagativen Moden für $[\omega/\Omega_{Ci}]_{x=41.5\text{cm}} = 4.86$ dargestellt. In diesem Fall befindet sich die fünfte Ionen-Zyklotron-Harmonische bei $x = 47.3$ cm, also knapp außerhalb des dargestellten Bereiches. Der wesentliche Unterschied zu Figur 4 besteht darin, daß es zu keiner Ausformung einer ausgeprägte Modenkonzversionsschicht kommt.

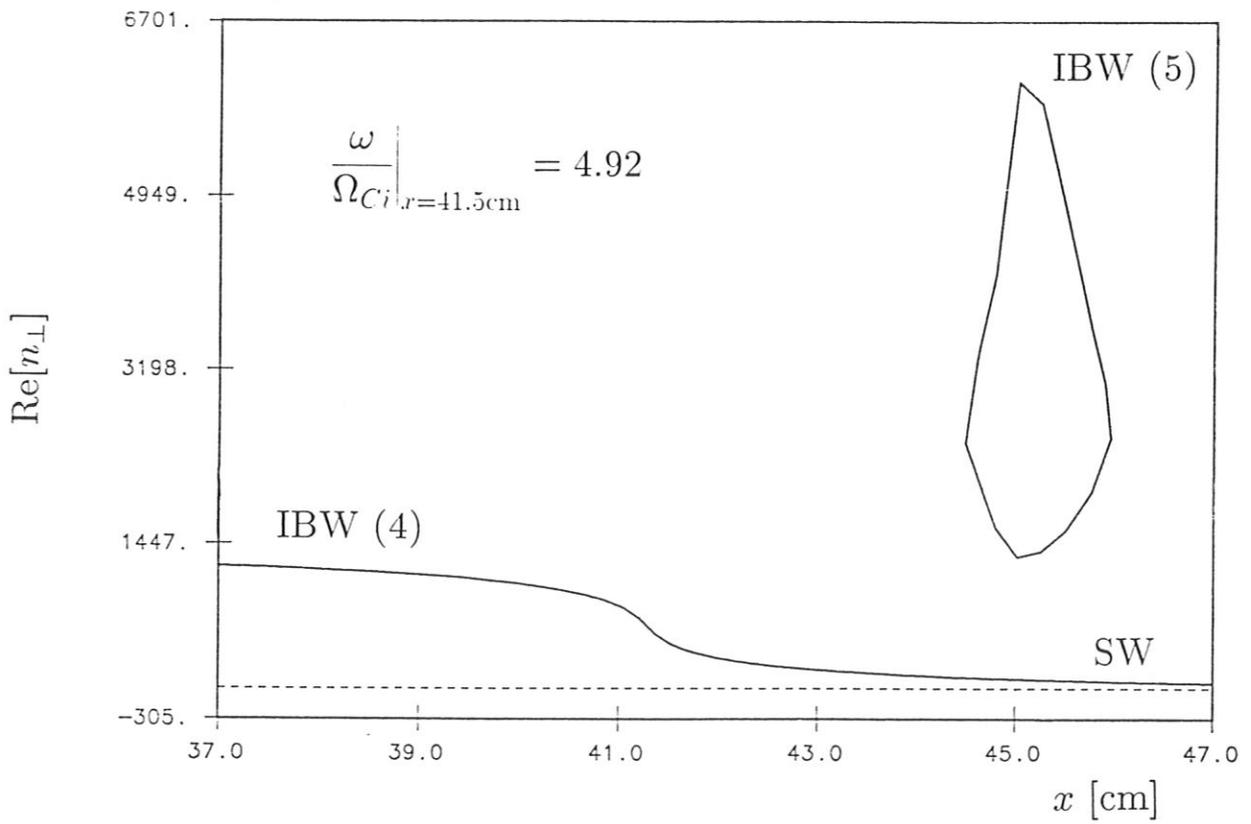
Es bleibt anzumerken, daß in der Nähe einer Ionen-Zyklotron-Harmonischen im allgemeinen keine rein propagativen Moden mehr auftreten. Diese Moden unterliegen vielmehr einer mehr oder weniger ausgeprägten lokalen Dämpfung, sodaß ihre Brechungsindizes, d.h. ihre dimensionslosen Wellenzahlen in Normalrichtung komplexwertig sind. Dies trifft insbesondere auf den IBW-Zweig zu. Im Rahmen dieser Arbeit wird allerdings auf die Darstellung der zugehörigen Imaginärteile verzichtet.

- Figur 14 zeigt die Dispersionsrelation für den Parameterwert $[\omega/\Omega_{Ci}]_{x=41.5\text{cm}} = 4.92$. Rechts der fünften Ionen-Zyklotron-Harmonischen, die bei $x = 44.4$ cm anzutreffen ist, tritt nun in Form einer geschlossenen Kurve der Zweig der IBW mit Index 5 auf, der sich entsprechend den Bemerkungen in Abschnitt 1.3 nur zwischen fünfter und sechster Harmonischer ausbreiten kann.

Figur 13

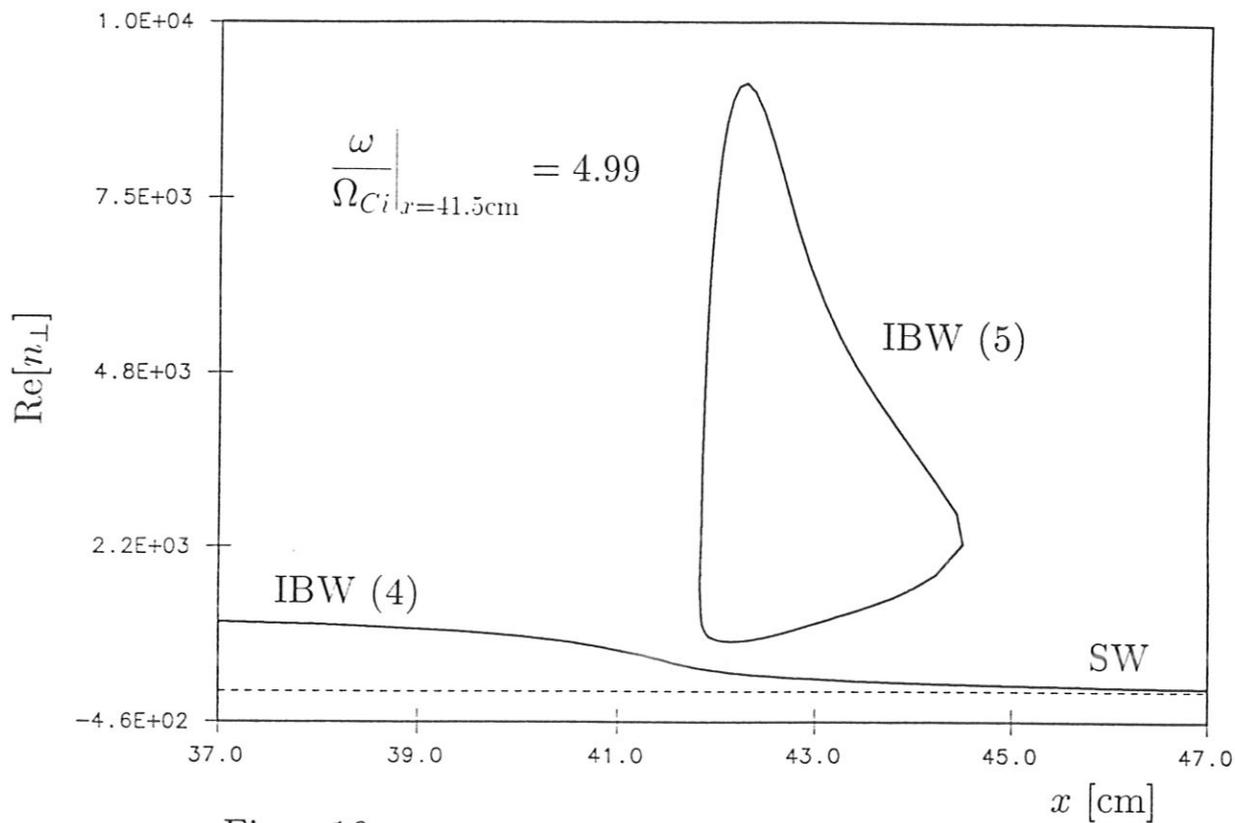


Figur 14

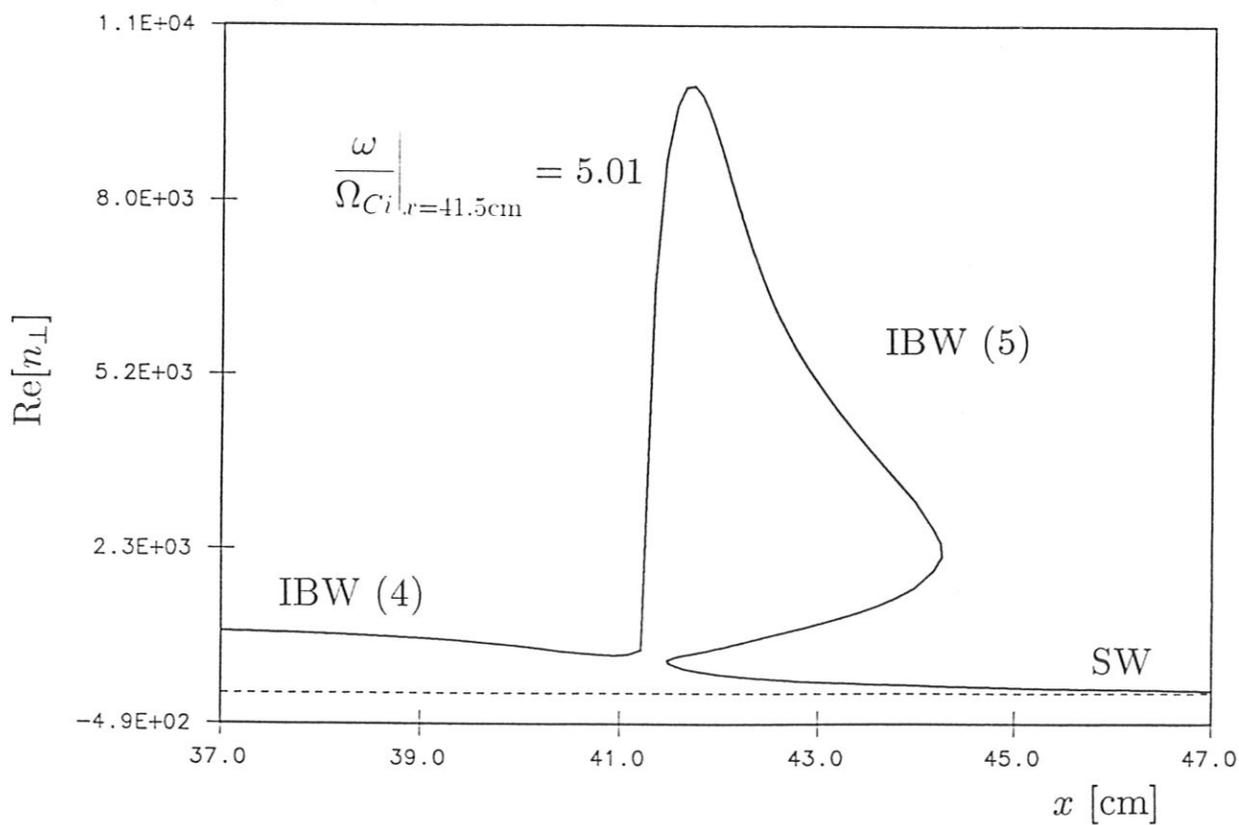


- Aus Figur 15 und 16 ist die Entwicklung des Zweiges der fünften IBW im Parameterbereich zwischen $[\omega/\Omega_{Ci}]_{x=41.5\text{cm}} = 4.99$ und $[\omega/\Omega_{Ci}]_{x=41.5\text{cm}} = 5.01$ abzulesen. Die geschlossene Kurve der fünften IBW wandert näher an die kalte LH-Resonanz heran und verbindet sich schließlich mit der SW bzw. der vierten IBW, wodurch sich wieder eine Modenkonzersionsschicht ausbildet, charakterisiert durch drei simultan existierende Moden. Dabei ist die 5. Ionen-Zyklotron-Harmonische in Abbildung 15 bei $x = 41.6$ cm bzw. in Abbildung 16 bei $x = 41.0$ cm lokalisiert.

Figur 15

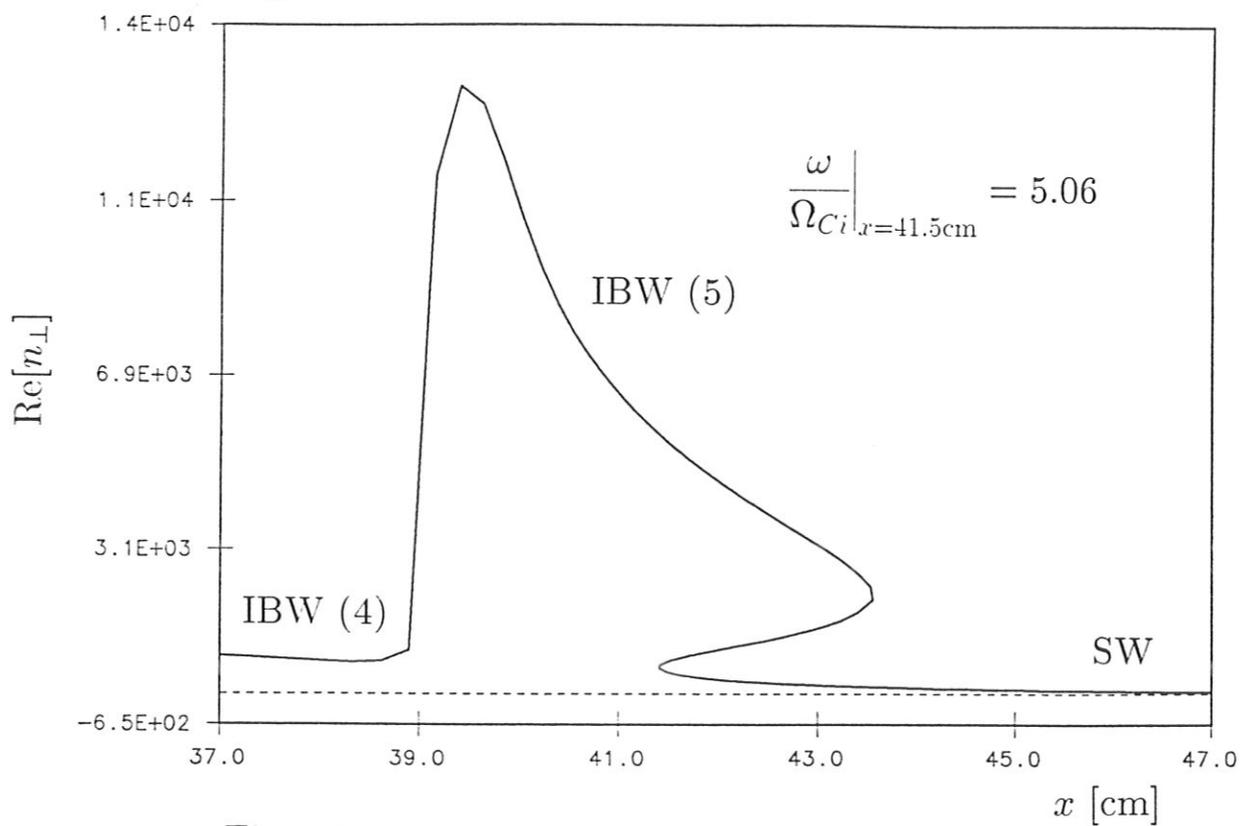


Figur 16

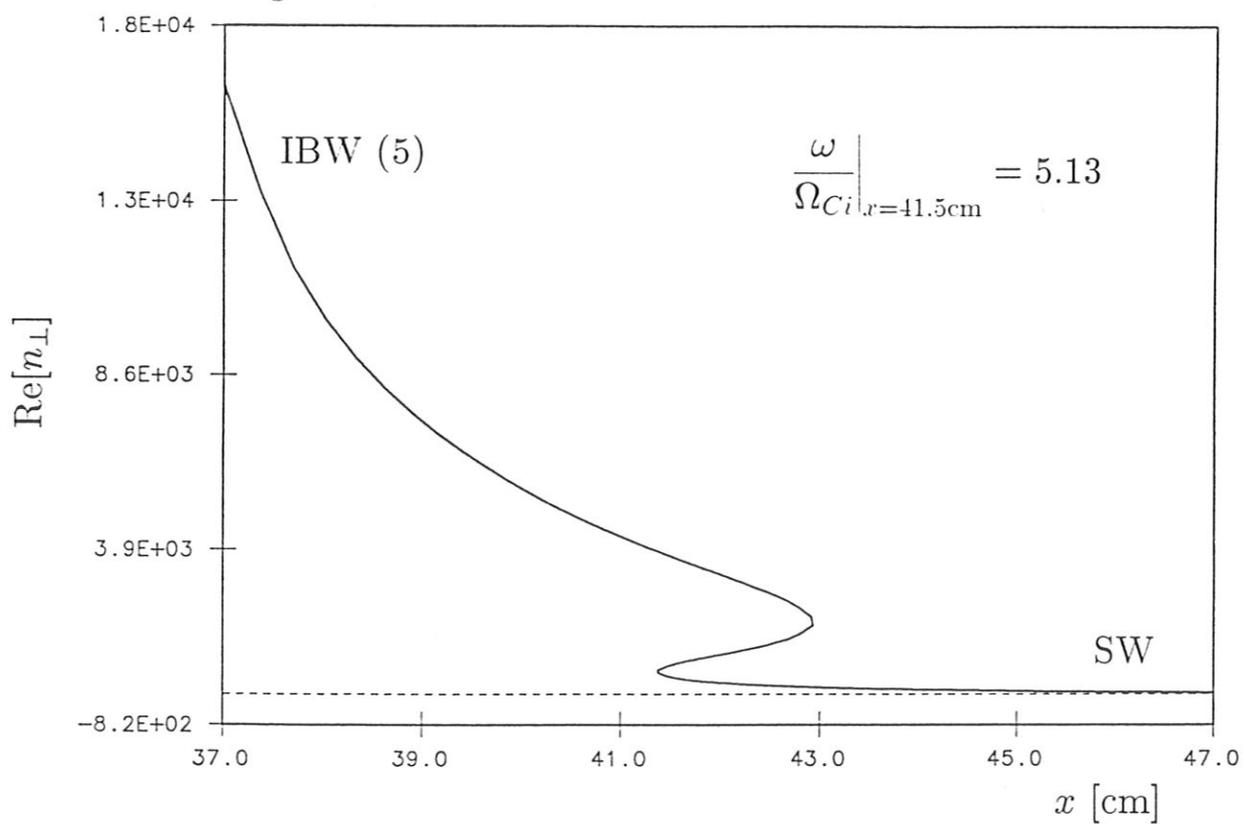


- Figur 17 und 18 zeigen die lokale Dispersionsrelation für die Parameterwerte $[\omega/\Omega_{Ci}]_{x=41.5\text{cm}} = 5.06$ und $[\omega/\Omega_{Ci}]_{x=41.5\text{cm}} = 5.13$. Im wesentlichen ist eine Verschmälerung der Modenkonversionsschicht zu beobachten. Die 5. Ionen-Zyklotron-Harmonische, die sich in Figur 17 an der Stelle $x = 38.7$ cm befindet, bzw. in Figur 16 bei $x = 35.8$ cm, zieht dabei gewissermaßen den stark aufgestellten Zweig der 5. IBW ins Plasmaintere mit.

Figur 17



Figur 18



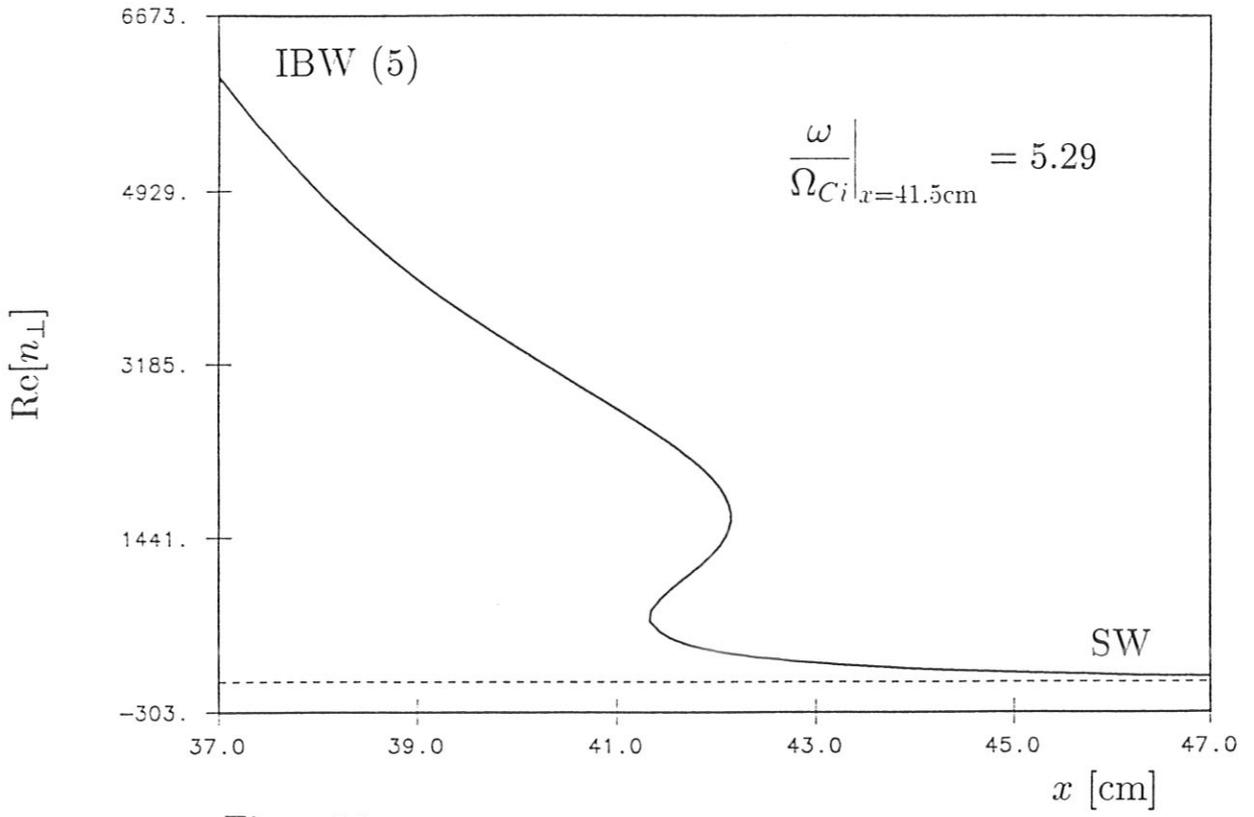
- Figur 19 und 20 dokumentieren, nun für die Werte $[\omega/\Omega_{Ci}]_{x=41.5\text{cm}} = 5.29$ bzw. $[\omega/\Omega_{Ci}]_{x=41.5\text{cm}} = 5.71$, eine Fortsetzung der Tendenz einer Verschmälerung der Modenkonzersionsschicht; d.h. in Figur 20 wird schließlich gar keine mehr ausgebildet. In beiden Fällen befindet sich die fünfte Ionen-Zyklotron-Harmonische weit außerhalb des dargestellten Bereiches, nämlich bei $x = 30.1$ cm, bzw. $x = 15.7$ cm.

Entsprechend der ausgeprägten Ähnlichkeit von Figur 13 mit Figur 20 kann generell festgestellt werden, daß sich das durch die Abbildungen 11 bis 20 dokumentierte Verhalten der Dispersionsrelation beim Durchgang der fünften Ionen-Zyklotron-Harmonischen qualitativ auch im Falle eines Durchgangs höherer Harmonischer wiederholt.

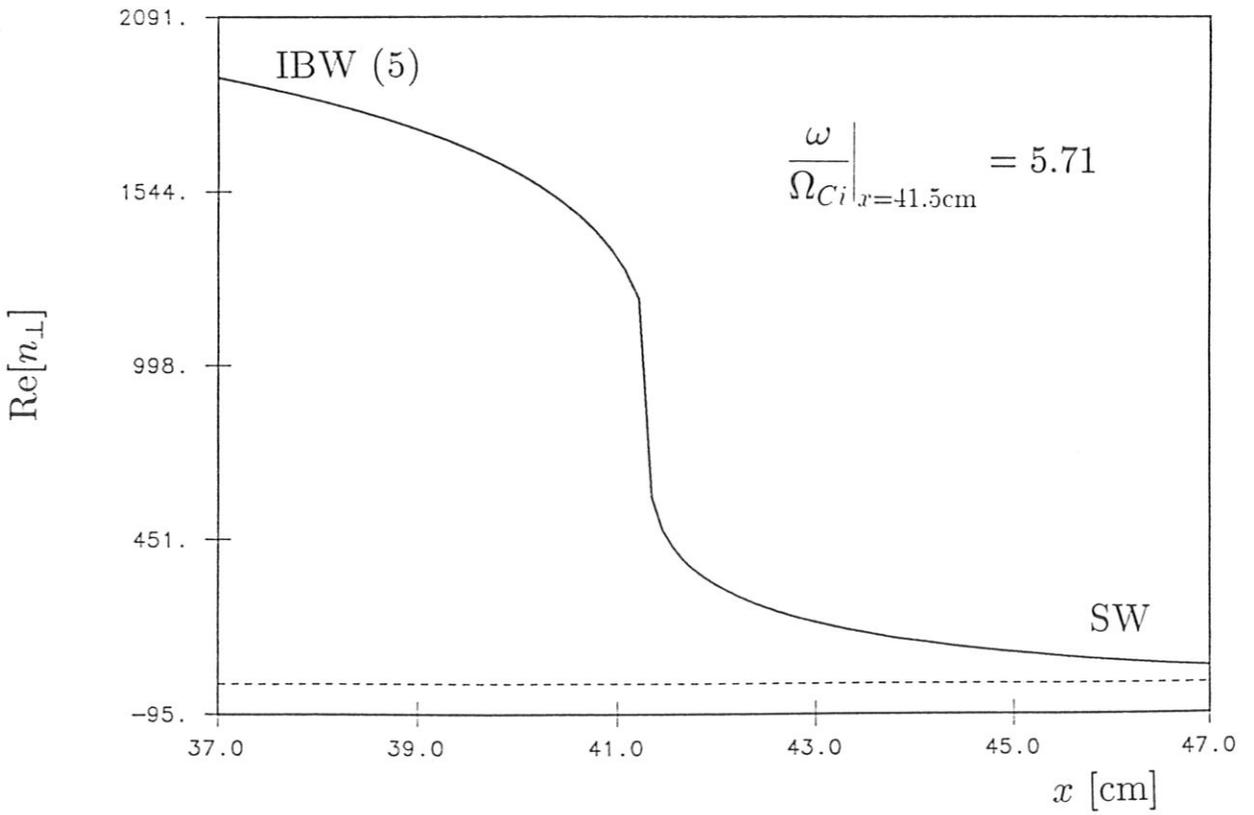
Der Analyse der lokalen Dispersionsrelationen solcher Szenarien, in denen die Modenkonzersion der SW in eine IBW in unmittelbarer Nähe einer Ionen-Zyklotron-Harmonischen stattfindet, wie etwa in Figur 14 bis 17 dargestellt, sollte nun die Integration der nicht-lokalen Wellengleichung für diese Konfigurationen folgen. Dabei stellt sich aber das Problem, daß die involvierten Moden zum Teil sehr große Brechungsindizes besitzen, bis hin zu Werten $\text{Re}(n_{\perp}) \approx 1.3 \times 10^4 \text{cm}^{-1}$, denen Wellenlängen in Normalrichtung zum statischen Magnetfeld in der Größenordnung von 0.005 cm entsprechen. Die Auflösung dieser extrem kurzwelligigen Moden würde ein sehr feines Gitter voraussetzen und in der Folge bei der Lösung der Wellengleichung zu extrem langen Rechenzeiten führen, vgl. Abschnitt 4.5, Fußnote 9, bzw. Abschnitt 4.6 und 4.7.

Man könnte nun versuchen die "1-Punkt-Näherung" des Leitfähigkeitskernes zu benutzen, die wie in Abschnitt 4.5 erörtert, viel Rechenzeit einsparen würde. Doch konnte mit dem so approximierten Leitfähigkeitskern schon die komplizierte Struktur der Dispersionsrelationen aus den Abbildungen 14 bis 17 nicht zufriedenstellend reproduziert werden, sodaß der Einsatz der "1-Punkt-Näherung" zur Integration der Wellengleichung nicht zweckmäßig erscheint. Einen Ausweg aus dieser Zwangslage stellt eine Parameterwahl dar, die auf etwas artifizielle Szenarien führt, die allerdings den Erfordernissen der Numerik mehr entgegenkommen. Diese Szenarien sollten immer noch wesentliche Informationen über den Einfluß einer Ionen-Zyklotron-Harmonischen auf die Effizienz der Modenkonzersion liefern können, und werden im folgenden Abschnitt gemeinsam mit den entsprechenden Lösungen der nichtlokalen Wellengleichung präsentiert. Es bleibt anzumerken, daß trotz dieser, für die numerische Rechnung günstigeren Parameterwahl, die Integration der Wellengleichung erst nach einer relativ aufwendigen Optimierung des IBW-Codes möglich war.

Figur 19



Figur 20



6.3 Die Modenkonzersion der IBW in eine SW in der Nähe einer Ionen-Zyklotron-Harmonischen

Im folgenden soll eine parametrische Studie, ähnlich der des vorangehenden Abschnitts präsentiert werden, wobei nun allerdings zu den lokalen Dispersionsrelationen die entsprechenden Lösungen der integralen Wellengleichung erstellt werden. Dies erfordert, wie bereits diskutiert, Zugeständnisse bei der Parameterwahl, da die Berechnung der zu den Figuren 14 bis 17 gehörenden Wellenlösungen auf der dem Autor zur Verfügung stehenden Computer-Anlage (eine Multi-User Cray-YMP am Rechenzentrum Garching) aufgrund der dafür notwendigen langen Rechenzeiten praktisch nicht durchführbar ist.

Bei der Auswahl der Parameter, die zu numerisch berechenbaren Szenarien führen, wurden zwei allgemeine Tendenzen berücksichtigt, die aufgrund der Analyse einer Vielzahl von Dispersionsrelationen gefunden wurden. Bei Erhöhung des Wertes von n_{\parallel} verschiebt sich das Maximum der Lösung einer Dispersionsrelation $\text{Re}(n_{\perp})$ gegen niedrigere Werte, d.h. der Wert jener Gitterkonstanten, die die involvierte Mode gerade noch auflösen kann, wird größer. Eine ähnliche Wirkung erzielt man, wenn man die Temperaturprofile, d.h. insbesondere das Ionen-Temperaturprofil im Bereich der Abschältschicht anhebt. Nutzt man beide Effekte gleichzeitig aus, so kann man Konfigurationen finden, deren Beschreibung durch ein hinreichend grobes Gitter möglich ist (typisch um die 600 bis 800 Gitterpunkte auf 3 bis 4 cm), sodaß die numerische Lösung der nichtlokalen Wellengleichung in einer vernünftigen Zeitspanne erfolgen kann.

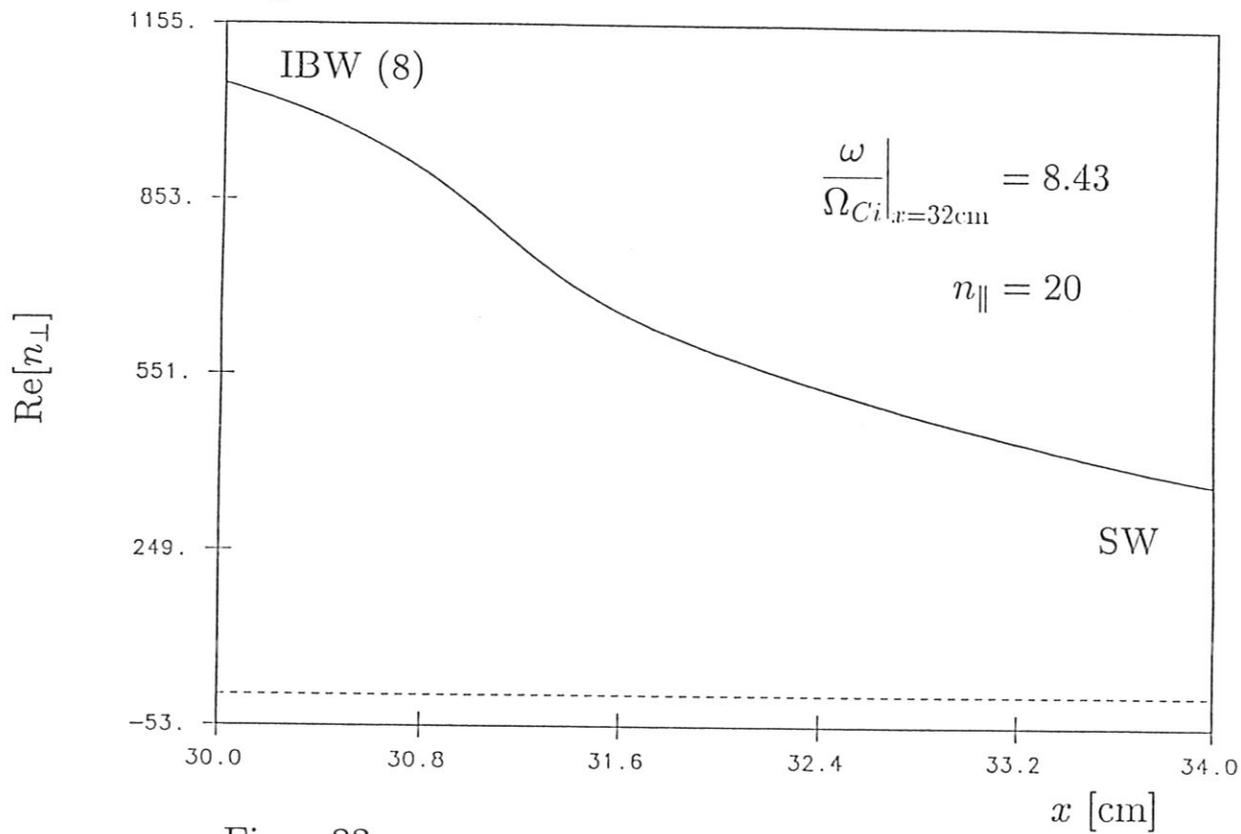
- In Figur 21 ist nun ein solches "Hochtemperaturszenario" für $n_{\parallel} = 20$ dargestellt, was dem oberen Bereich des von einem typischen Koppler abgestrahlten n_{\parallel} -Spektrums entspricht. In diesem numerischen Beispiel wurde eine Wellenfrequenz von $f = 668$ MHz gewählt. Weiters wurden wieder exponentiell abfallende Dichte- und Temperatur-Profile eines $e^{-}H^{+}$ -Plasmas vorausgesetzt, die durch folgende Werte an den Punkten $x_a = 30$ cm bzw. $x_b = 34$ cm fixiert sind:

$$\begin{aligned} n_e(x_a) &= n_i(x_a) = 3.89 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3}, \\ n_e(x_b) &= n_i(x_b) = 1.23 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3}, \\ T_e(x_a) &= T_i(x_a) = 3.59 \times 10^{-10} \text{ cm}^2 \text{g}^1 \text{s}^{-2} \equiv 224.2 \text{ eV} \text{ und} \\ T_e(x_b) &= T_i(x_b) = 1.38 \times 10^{-10} \text{ cm}^2 \text{g}^1 \text{s}^{-2} \equiv 86.2 \text{ eV}. \end{aligned}$$

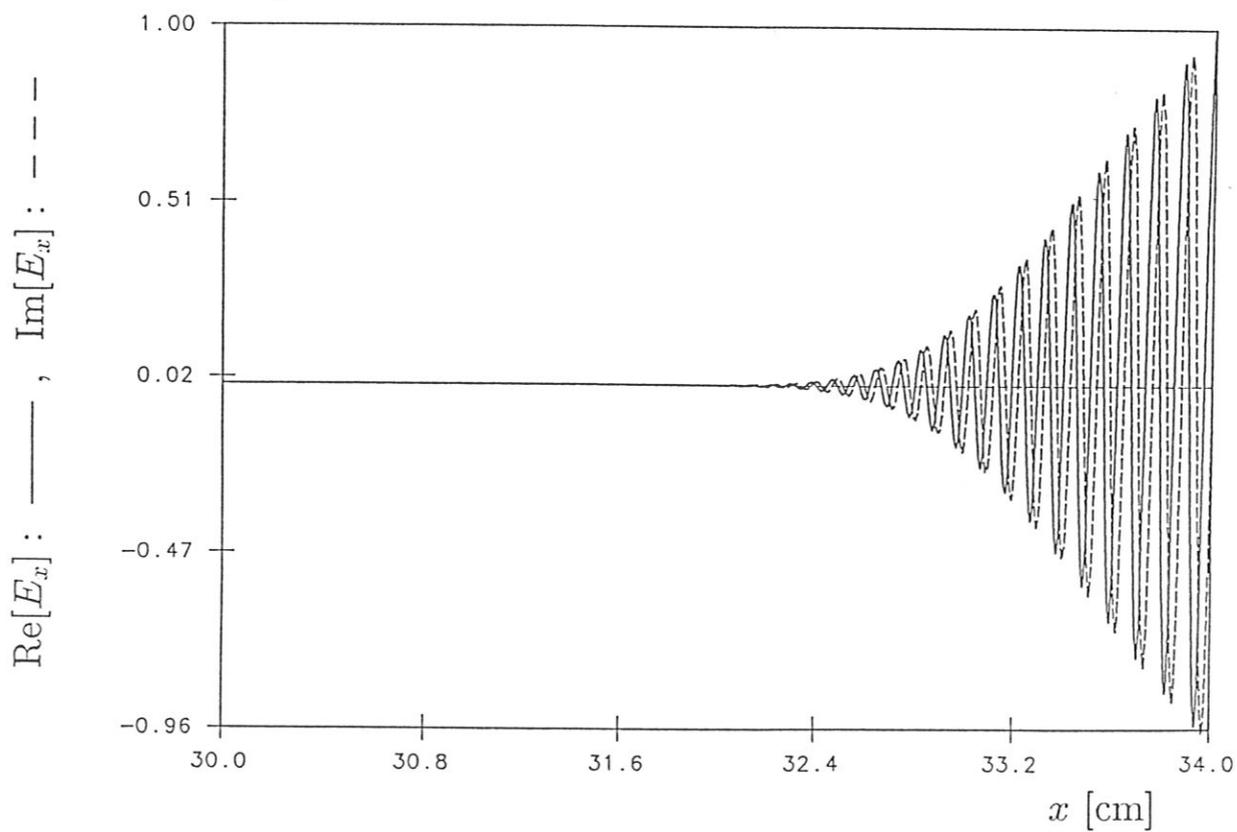
Diese Profile besitzen Gradientenlängen $L[n_e(x)] = L[n_i(x)] = 3.47$ cm bzw. $L[T_e(x)] = L[T_i(x)] = 4.18$ cm, vgl. (3.4). Hier wird ein lineares statisches Magnetfeld der Form $|B^{stat}(x)| = B_a(1 - (x - x_a)/L)$ angenommen, mit $B_a = |B^{stat}(x_a)| = 5.23 \times 10^4 \text{ cm}^{1/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-1} \equiv 5.23 \text{ T}$ und $L = 300$ cm. Das führt auf ein Frequenzverhältnis von $\omega/\Omega_{Ci} = 8.43$ an der Stelle $x = 32$ cm.

Obwohl man sich nun also zwischen 8. und 9. Ionen-Zyklotron-Harmonischer befindet (die SW koppelt dementsprechend an die IBW mit Index 8 an), zeigt Abbildung 21 im Gegensatz zu den Dispersionsrelationen aus Figur 1 bzw. Figur 11, die ebenfalls Szenarien zwischen zwei Harmonischen beschreiben, keine ausgeprägte Modenkonzersionsschicht. Vielmehr erfolgt der Übergang der SW in die IBW, aufgrund des hohen n_{\parallel} -Wertes, fließend. Von besonderem Interesse sind in diesem Fall

Figur 21



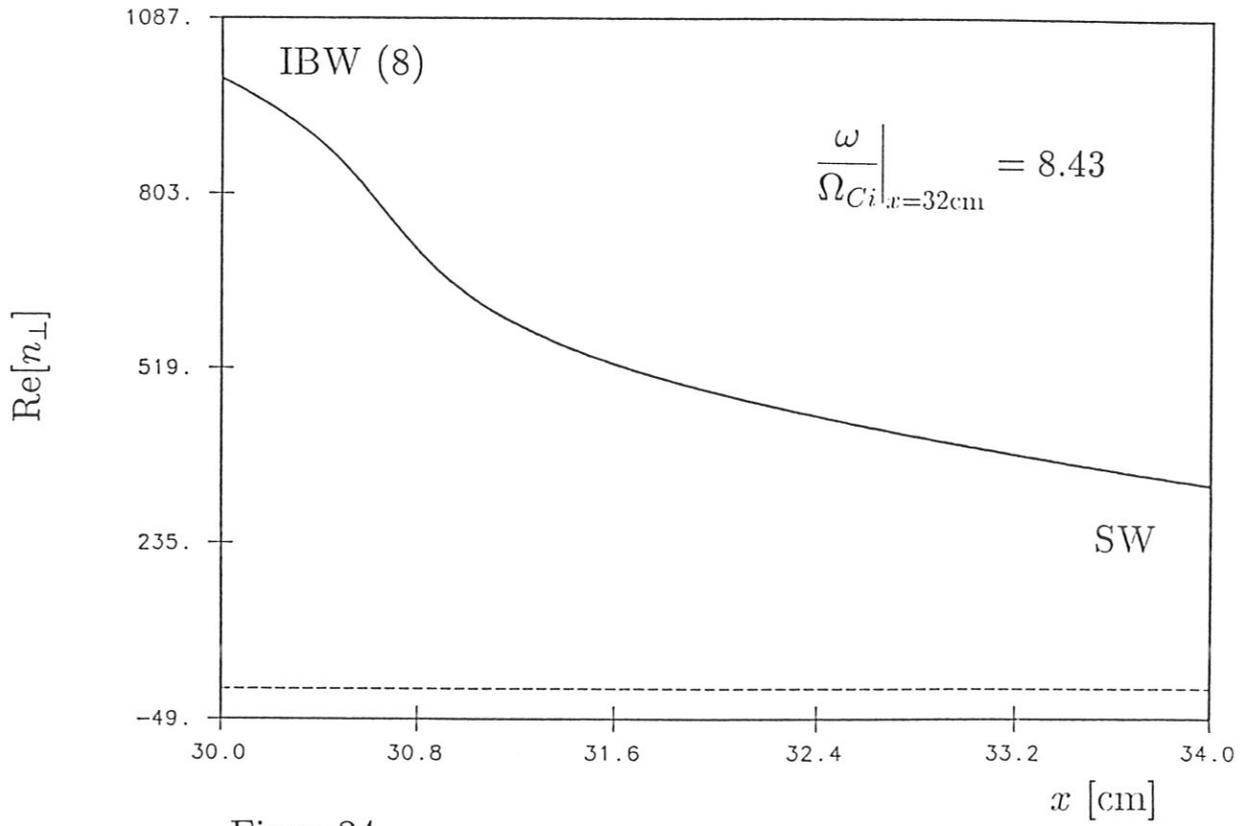
Figur 22



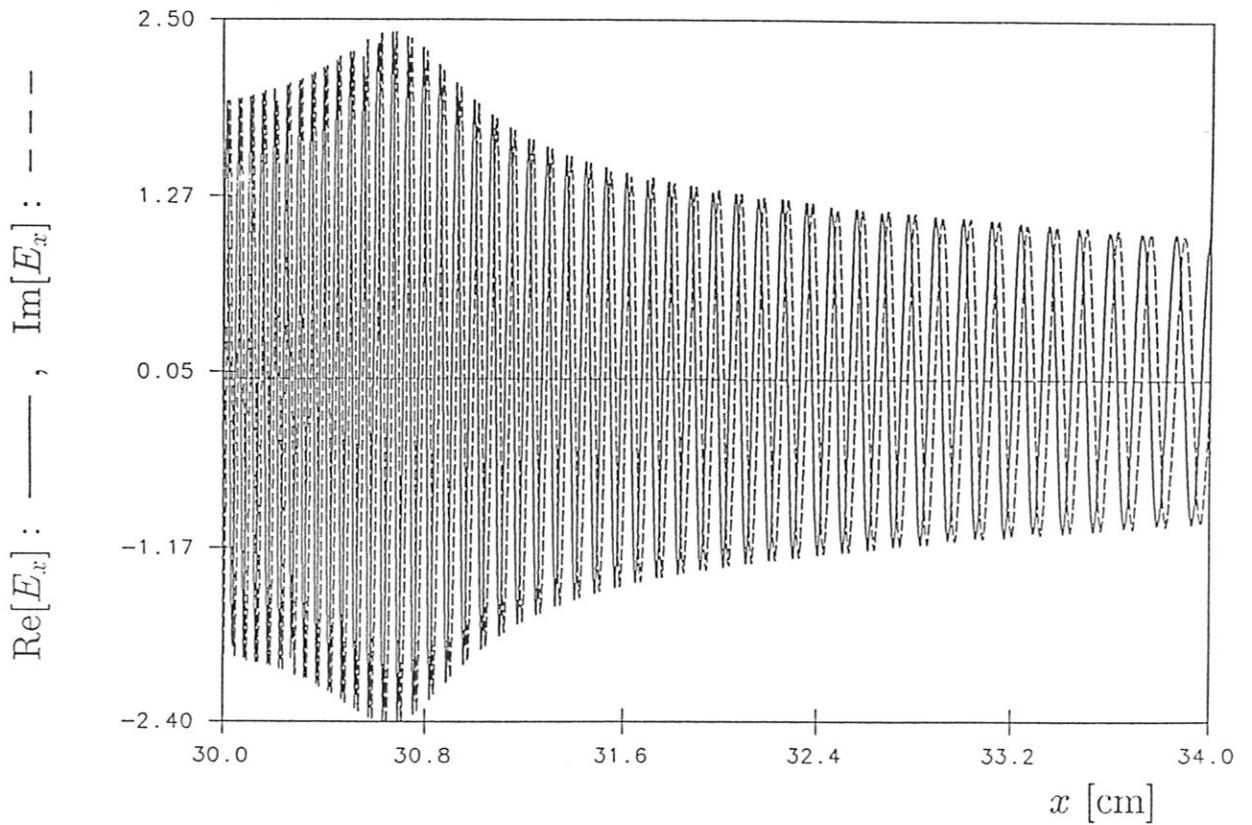
die zu Figur 21 gehörenden Imaginärteile; so lautet beispielsweise bei $x = x_a$ die vollständige komplexe Lösung der Dispersionsrelation $n_{\perp} = 1050 - 155i$, bzw. bei $x = x_b$, $n_{\perp} = 368 - 6i$. Sowohl die SW als auch die IBW scheinen also starker Dämpfung zu unterliegen.

- Dies wird durch Figur 22 bestätigt, in der die x -Komponente des elektrischen Feldes der entsprechenden Wellenlösung für $n_y = 5$ dargestellt ist. Die IBW kann nicht angeregt werden, da die SW bereits vor ihrer Konversion vollständig absorbiert wird. Die zugehörige globale Leistungsbilanz liefert die Koeffizienten $A = 100\%$, $T = 0\%$ und $R = 0\%$. Es tritt also auch hier wie in Fig. 5 keine Reflexion auf, jedoch wird die eingestrahelte Leistung vollständig zur parasitären Heizung des Randschichtplasmas verbraucht. Da sich keine Ionen-Zyklotron-Harmonische im FEL-Rechenbereich befindet, kann diese Leitungsdissipation nur durch Elektronen-Landau-Dämpfung erfolgen, was durch den Wert 1.69 des Parameters $c/n_{\parallel}v_{th}^e$ an der Stelle $x = x_b$, der in die Bedingung $c/n_{\parallel}v_{th}^e = O(1)$ signifikanter Elektronen-Landau-Dämpfung eingeht, bekräftigt wird. Für die IBW-Heizmethode bedeutet das, daß die eingekoppelten n_{\parallel} -Spektren nach oben hin begrenzt sein müssen, da Anteile zu großer n_{\parallel} -Werte auf eine unerwünschte Heizung der Abschälschicht führen würden.
- Figur 23 zeigt das Szenario, das man aus Figur 21 durch Absenken des exponentiellen Elektronen-Temperaturprofils gemäß
 $T_e(x_a) = 0.87 \times 10^{-10} \text{ cm}^2 \text{g}^1 \text{s}^{-2} \equiv 54.3 \text{ eV}$ bzw.
 $T_e(x_b) = 0.41 \times 10^{-10} \text{ cm}^2 \text{g}^1 \text{s}^{-2} \equiv 25.6 \text{ eV}$
erhält, wodurch sich der Parameter $c/n_{\parallel}v_{th}^e$ bei $x = x_b$ auf den Wert 5 erhöht. Es ist also kaum mehr signifikante Elektronen-Landau-Dämpfung zu erwarten, was auch die sehr kleinen zur Lösung der Dispersionsrelation in Figur 23 gehörenden Imaginärteile von n_{\perp} bestätigen (beispielsweise $n_{\perp} = 988 - 0.3i$ bei $x = x_a$). Die Wahl stark unterschiedlicher Elektronen- und Ionentemperaturen ist artifizuell, ermöglicht aber in der folgenden Untersuchung den Einfluß der Ionen-Zyklotron-Harmonischen auf die Effizienz der Modenkonzersion zu isolieren, der sonst vollständig durch die Elektronen-Landau-Dämpfung verdeckt würde. Das in Figur 23 dargestellte Szenario dient als Ausgangskonfiguration dieser parametrischen Studie, wobei hier durch Absenken des Wertes B_a im linearen Magnetfeldprofil die achte Ionen-Zyklotron-Harmonische von links nach rechts, also von innen nach außen durch den FEL-Rechenbereich bewegt wird.
- In Figur 24 ist die zur Dispersionsrelation aus Figur 23 gehörende Wellenlösung abgebildet, für die die globale Leistungsbilanz $A = -0.05\%$, $T = 100.05\%$ bzw. $R = 0.00\%$ liefert. Der niedrige Wert des Absorptionskoeffizienten steht im Einklang mit der speziellen Parameterwahl, durch die innerhalb des FEL-Rechenbereichs lokale Dämpfung vermieden wird. Er stellt eine gute Konvergenz der präsentierten Wellenlösung sicher. Auch ist die Modenkonzersion wiederum vollständig.

Figur 23

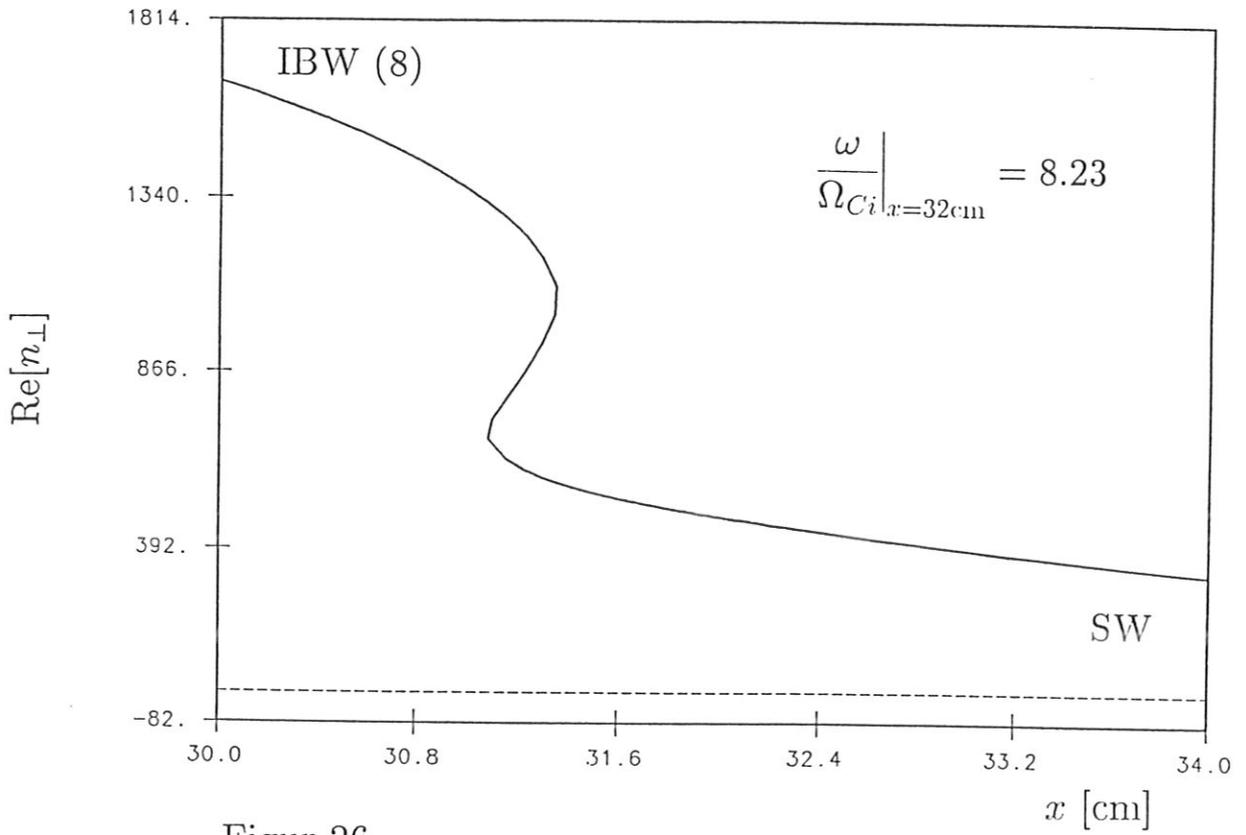


Figur 24

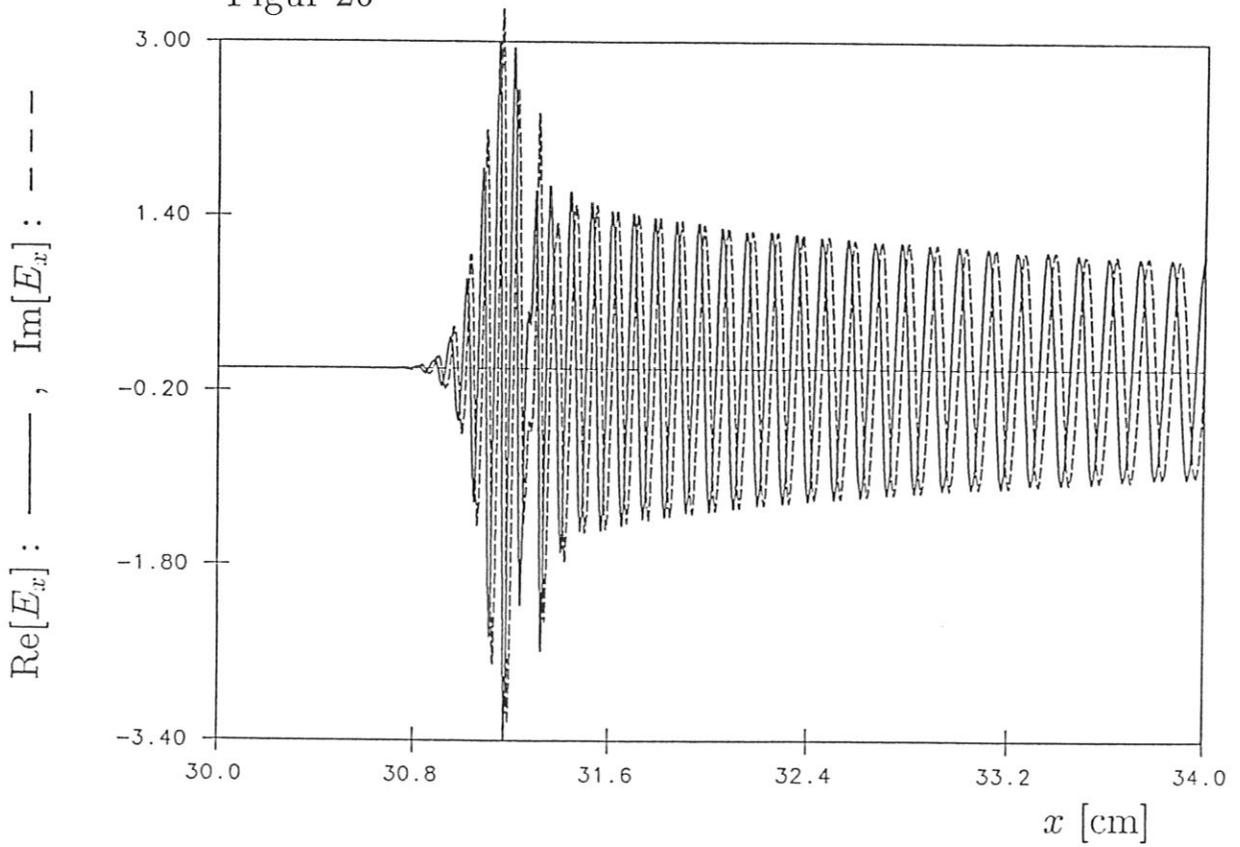


- Fig. 25 zeigt die lokale Dispersionsrelation für den Fall $[\omega/\Omega_{Ci}]_x = 32\text{cm} = 8.32$, wo ähnlich wie in Abbildung 1 eine deutlich ausgeprägte Modenkonzersionsschicht zu sehen ist.
- Die entsprechende Wellenlösung zu Figur 25 ist in Figur 26 dargestellt. Die einlaufende SW kann sich ungehindert bis zur Modenkonzersionsschicht ausbreiten, wo eine Überlagerung der drei simultan existierenden Moden gerade noch erkennbar ist. Die IBW unterliegt aber offenbar derart starker Dämpfung, daß sie praktisch nicht mehr angeregt werden kann, und dies, obwohl die 8. Ionen-Zyklotron-Harmonische noch relativ weit entfernt, im zentralen Plasmabereich anzusiedeln ist. Die globale Bilanz liefert hundertprozentige Absorption der eingekoppelten Leistung und wiederum keine Reflexion. Generell kann an dieser Stelle vorweggenommen werden, daß bei allen in vorliegender Arbeit untersuchten Modenkonzersionsszenarien keine Reflexion der SW zu beobachten ist; dabei sind die entsprechenden Werte von R mit einer Genauigkeit gleich Null zu setzen, die die zu erwartende Präzision des numerischen Verfahrens um Größenordnungen übertrifft. Bei den folgenden Darstellungen der Modenkonzersionlösungen wird daher der Einfachheit halber der Hinweis auf die verschwindenden Reflexionskoeffizienten unterlassen.

Figur 25

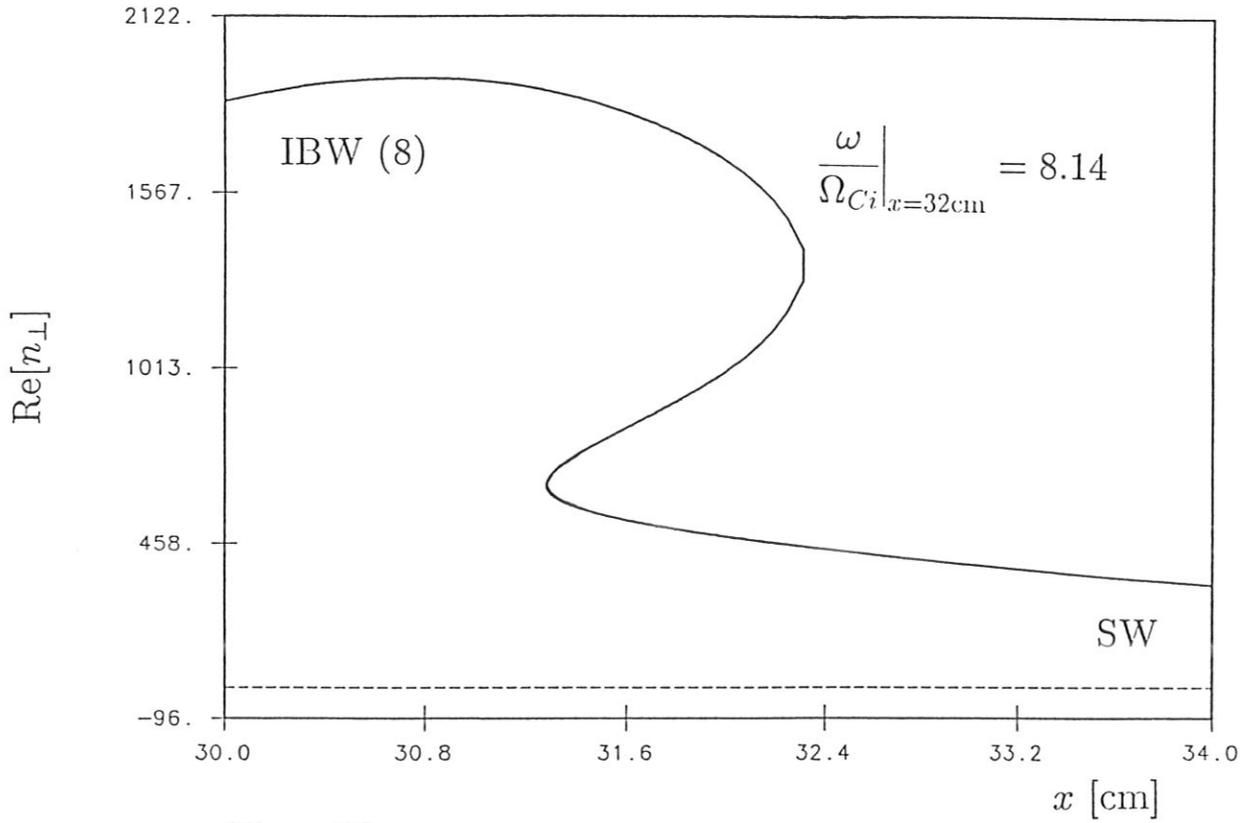


Figur 26

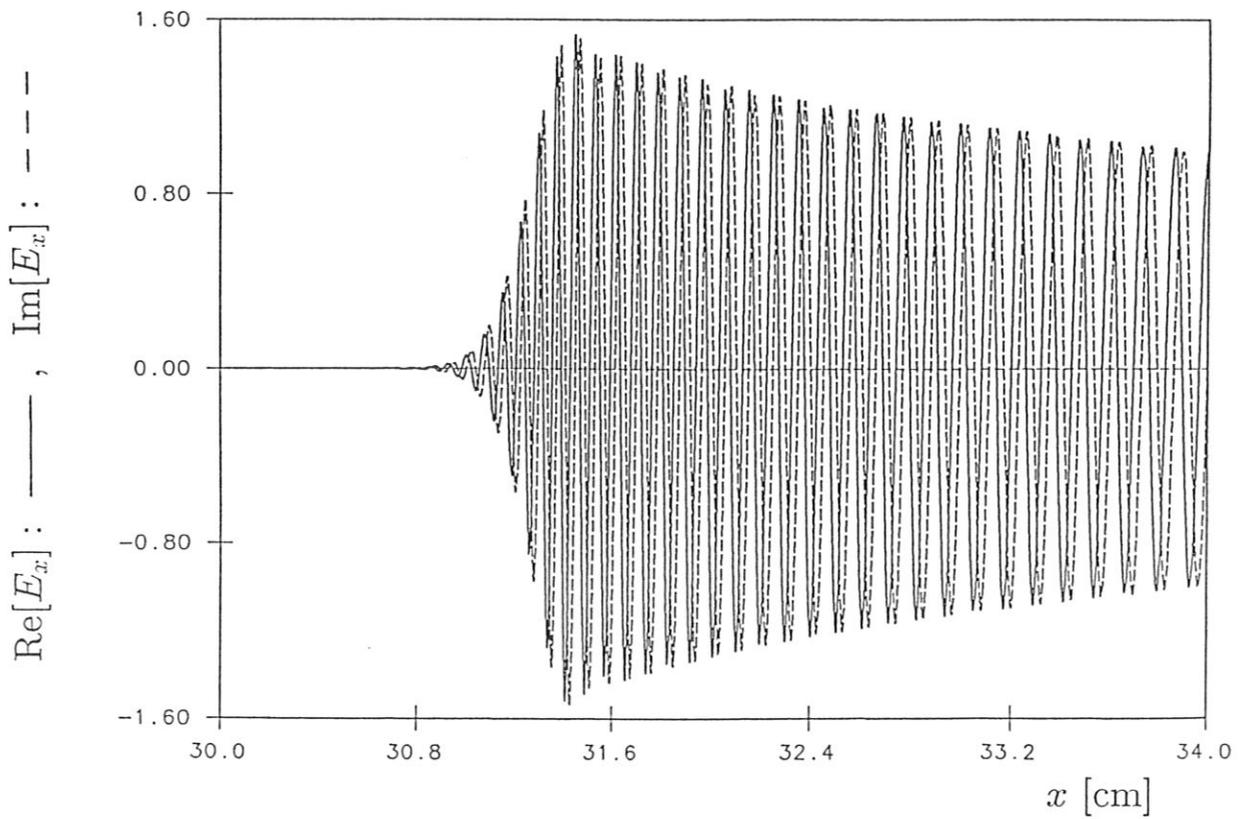


- In Figur 27 ist die Dispersionsrelation für den Fall $[\omega/\Omega_{Ci}]_x = 32\text{cm} = 8.14$ dargestellt, bzw. in Figur 28 die x -Komponente des elektrischen Feldes der zugehörigen Wellenlösung. Auch hier kommt es wieder zur vollständigen Absorption der einstrahlten Leistung. Die 8. Ionen-Zyklotron-Harmonische befindet sich zwar noch außerhalb des FEL-Rechenbereiches, ist nun aber doch etwas nähergerückt, sodaß die Dämpfung der IBW effizienter wird und innerhalb der Modenkonversionschicht keine Superposition der entsprechenden drei Moden erkennbar ist. Die SW scheint als einzige nicht der Ionen-Zyklotron-Dämpfung zu unterliegen und breitet sich in guter Übereinstimmung mit der lokalen Dispersionsrelation mehr oder weniger ungehindert bis zu $x \approx 31.4$ cm aus.

Figur 27

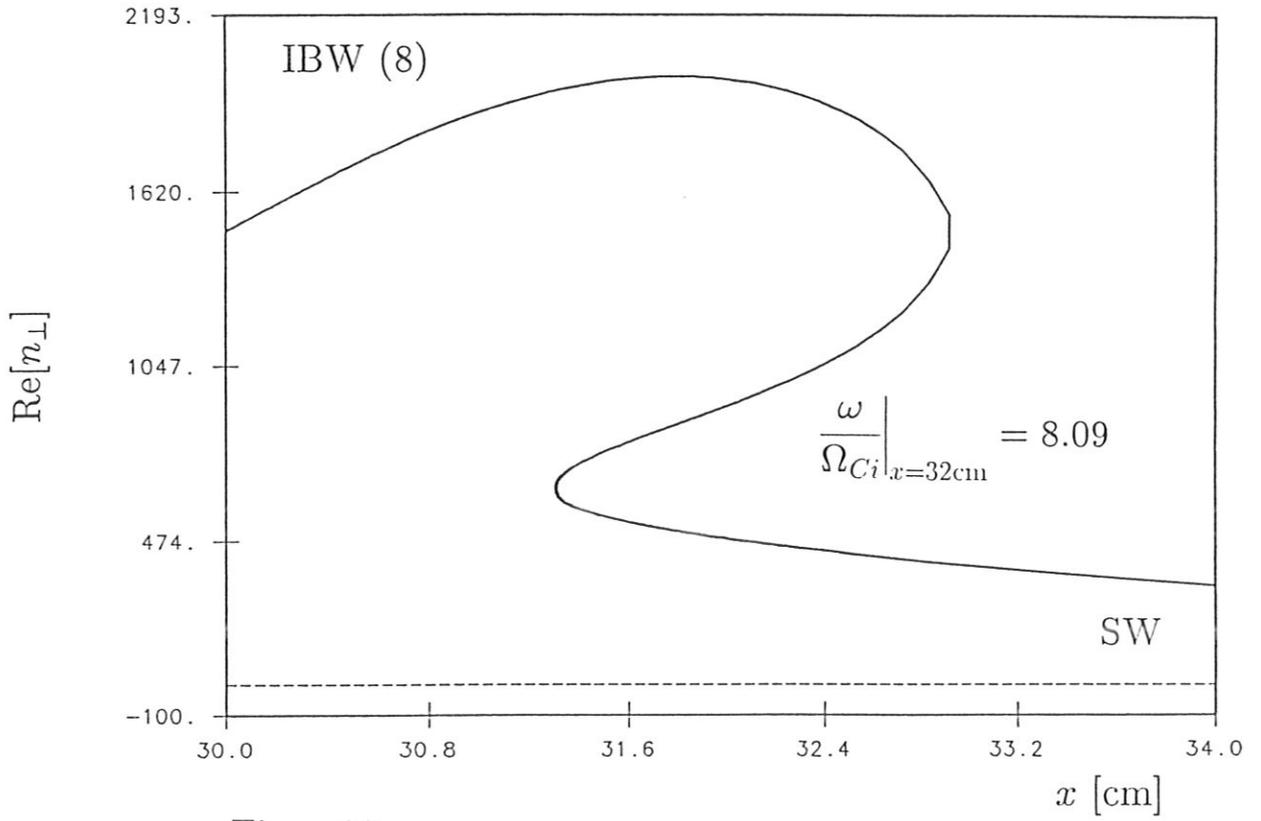


Figur 28

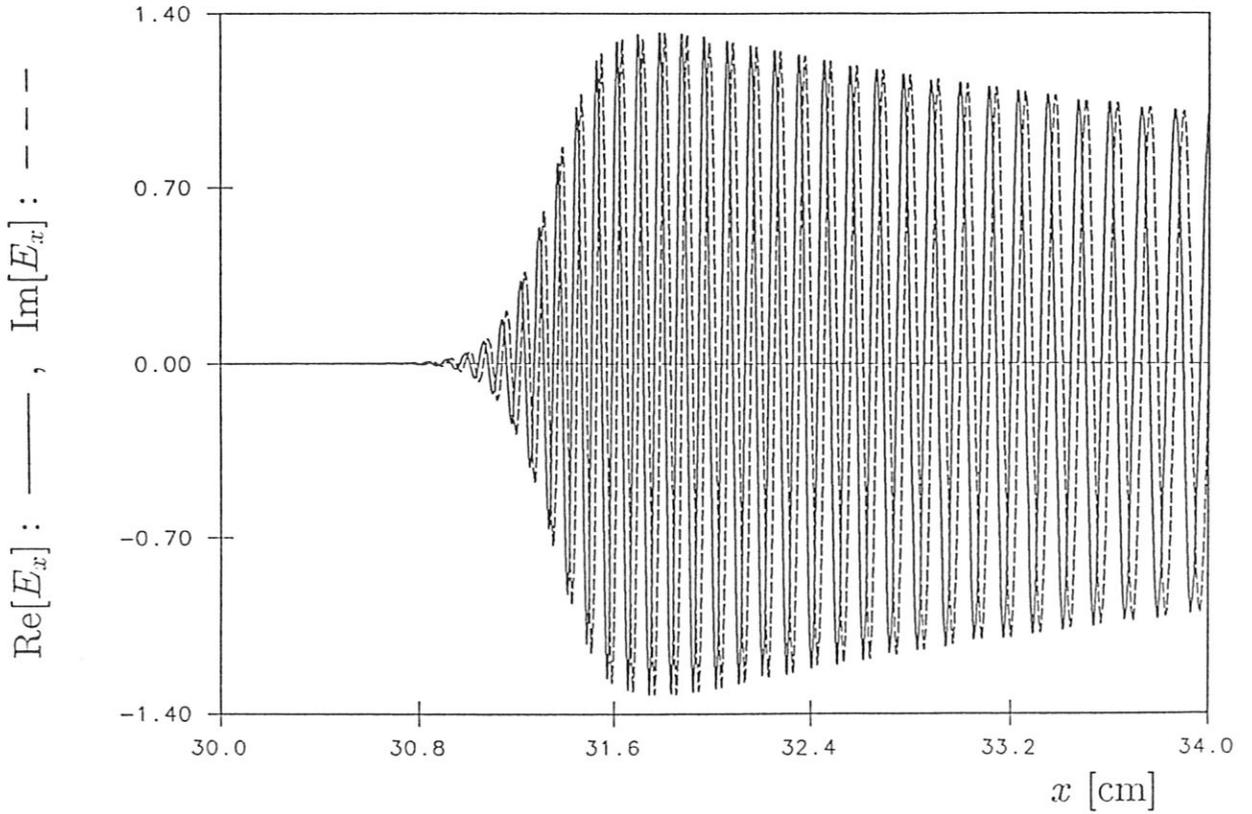


- Figur 29 zeigt ein mit Figur 27 vergleichbares Szenario, nun mit einer etwas breiteren Modenkonzersionsschicht, das auf die Wellenlösung aus Figur 30 führt. Auch für diesen Fall, also $[\omega/\Omega_{Ci}]_{x=32\text{cm}} = 8.09$, wo die 8. Ionen-Zyklotron-Harmonische noch immer außerhalb des Intervalls $[x_a, x_b]$ lokalisiert ist, gilt wieder $A = 100\%$.

Figur 29

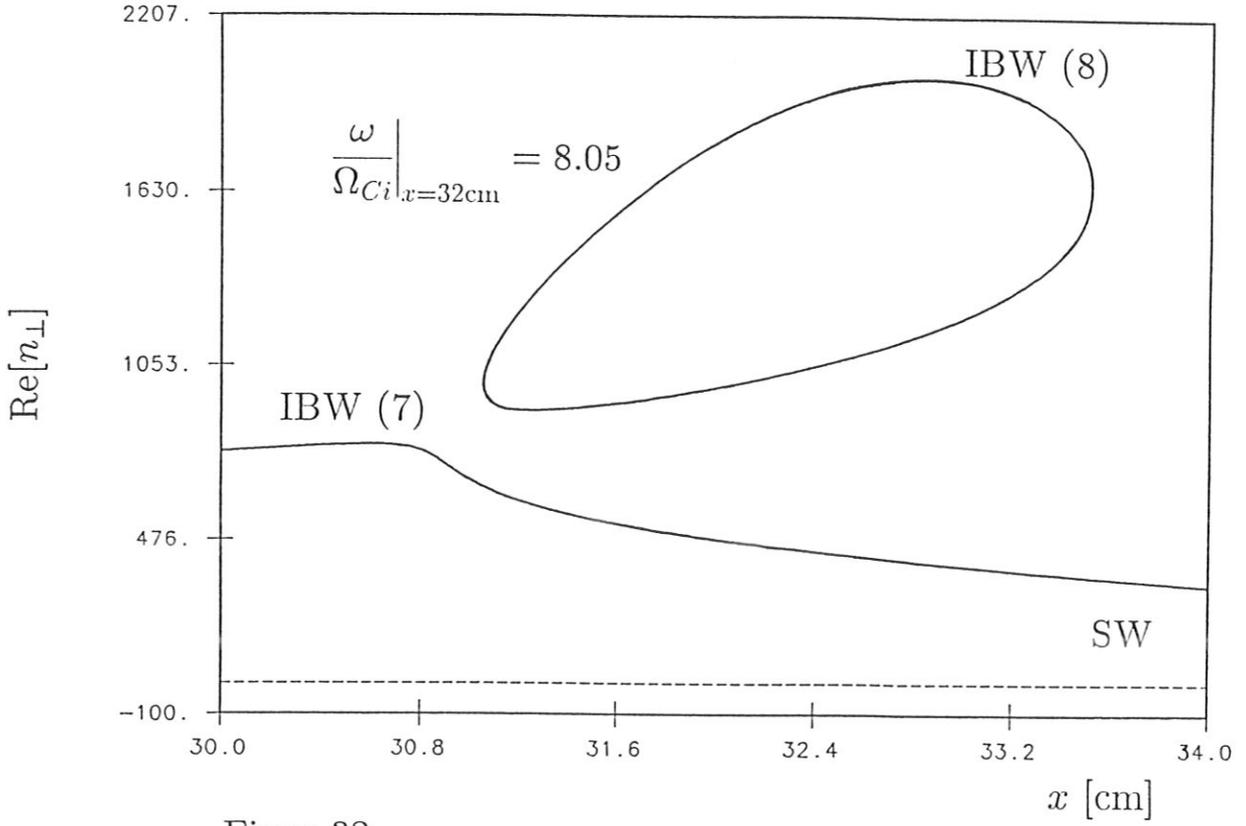


Figur 30

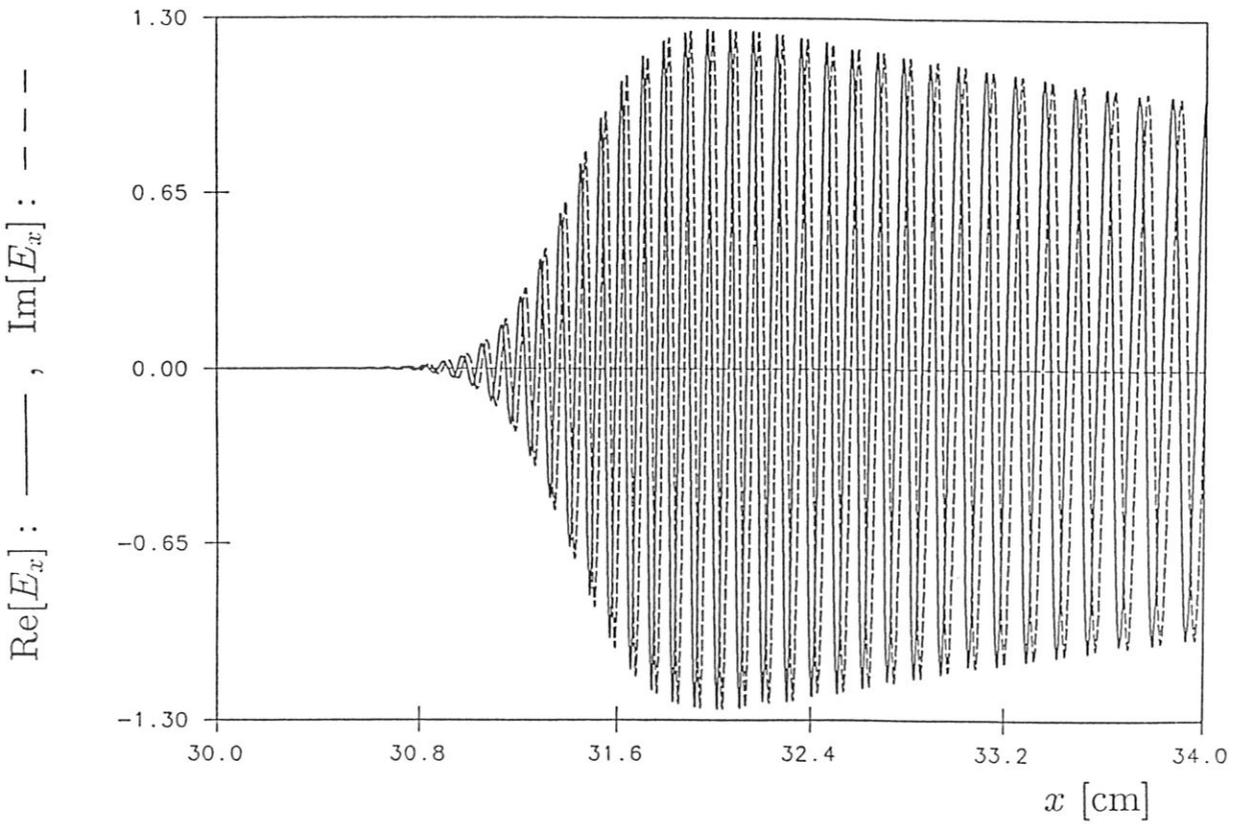


- Figur 31, wo die Dispersionsrelation für den Parameterwert $[\omega/\Omega_{Ci}]_x = 32\text{cm} = 8.05$ dargestellt ist, unterscheidet sich von Figur 29 insofern, als es zur Ausbildung einer blasenförmigen geschlossenen Kurve für den Zweig der achten IBW kommt. Analog zu dem in Figur 15 abgebildeten Szenario besitzt die SW links der 8. Ionen-Zyklotron-Harmonischen, die sich nun am Ort $x = 30.2\text{ cm}$ befindet, eine Konfluenz mit der siebten IBW.
- Die entsprechende Lösung der Wellengleichung in Figur 32 ist jener aus Abbildung 30 sehr ähnlich, wobei es kaum überraschen dürfte, daß die IBW mit Index 8 nicht angeregt wird.

Figur 31

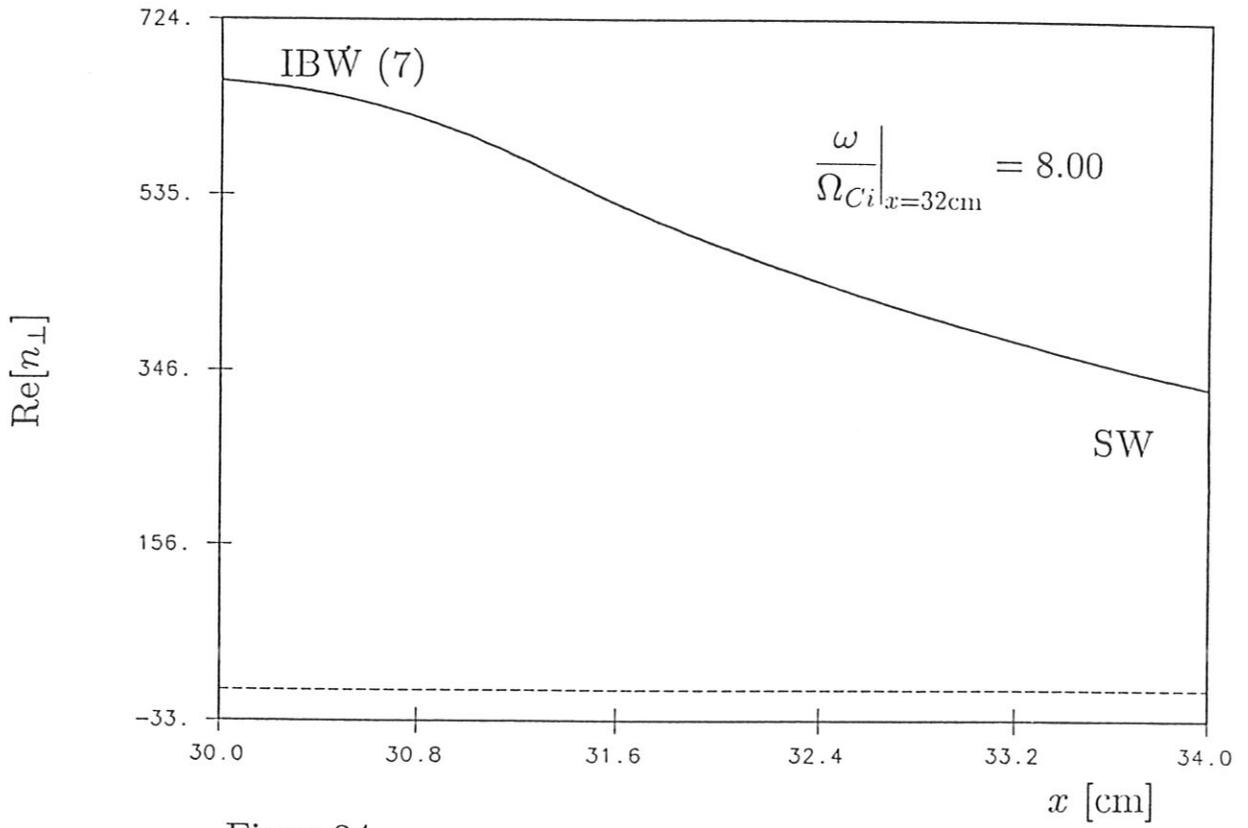


Figur 32

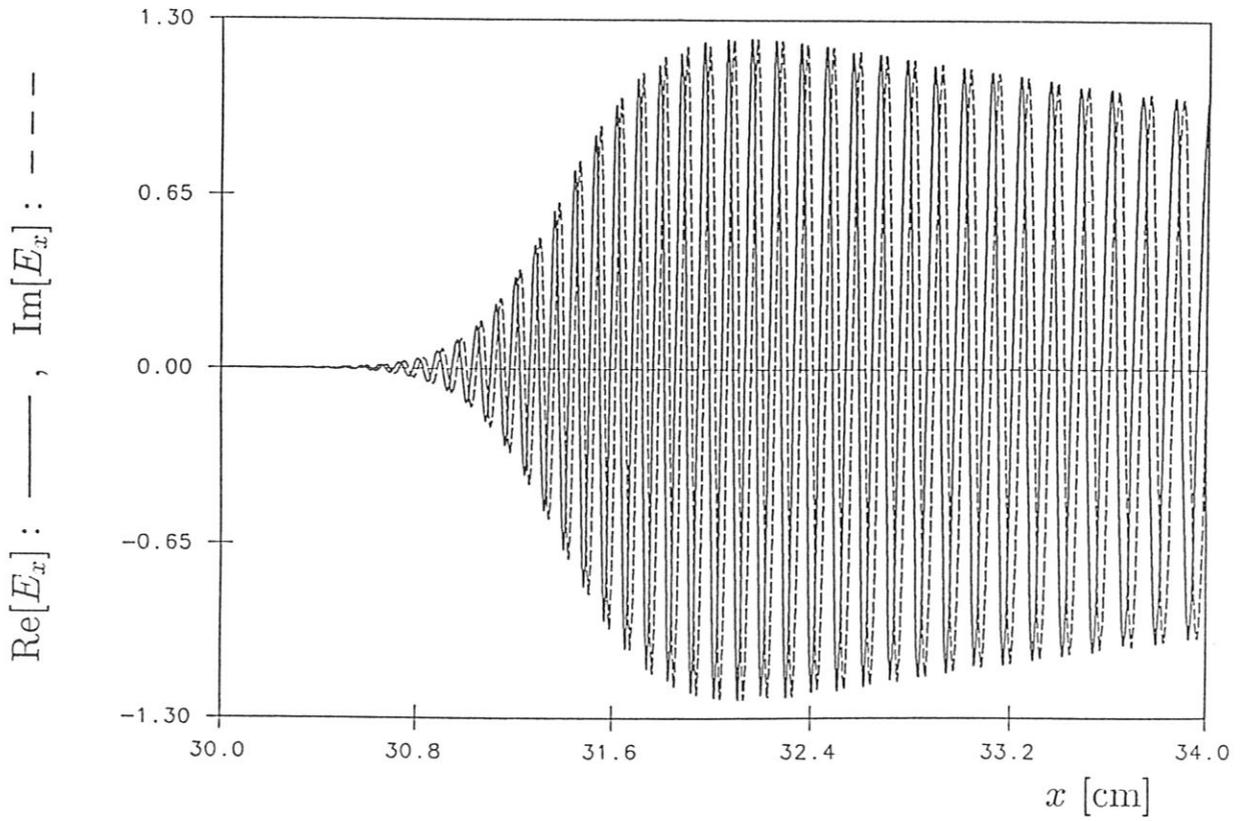


- Verkleinert man den Wert des Parameters $[\omega/\Omega_{Ci}]_{x=32\text{cm}}$ auf 8, dann erhält man das in Figur 33 dargestellte Szenario. Die achte Ionen-Zyklotron-Harmonische befindet sich nun offenbar genau bei $x = 32\text{ cm}$; der blasenförmige Zweig der 8. IBW ist verschwunden. Die in Figur 34 abgebildete Lösung zeigt wieder eine totale Absorption der eingestrahlten Leistung, wobei sich die SW noch ein gutes Stück über die Harmonische hinweg ausbreiten kann.

Figur 33



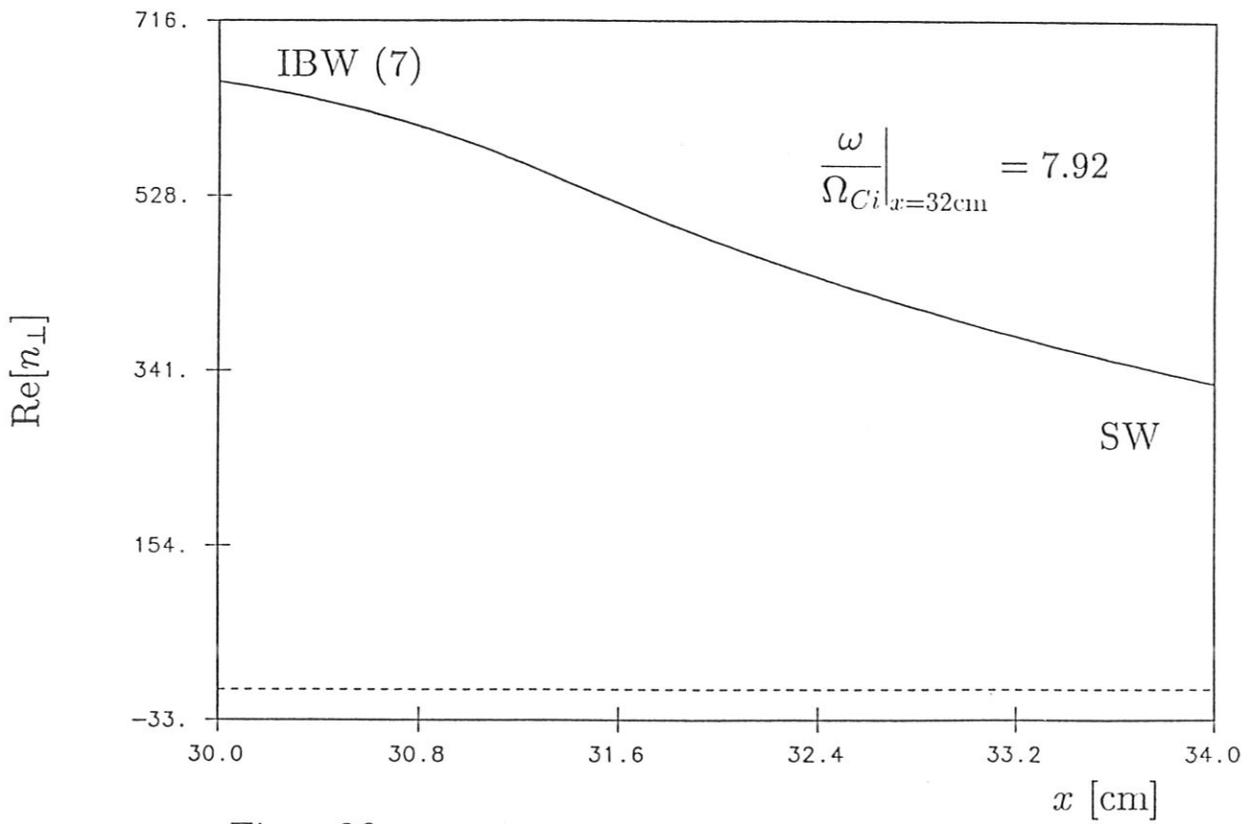
Figur 34



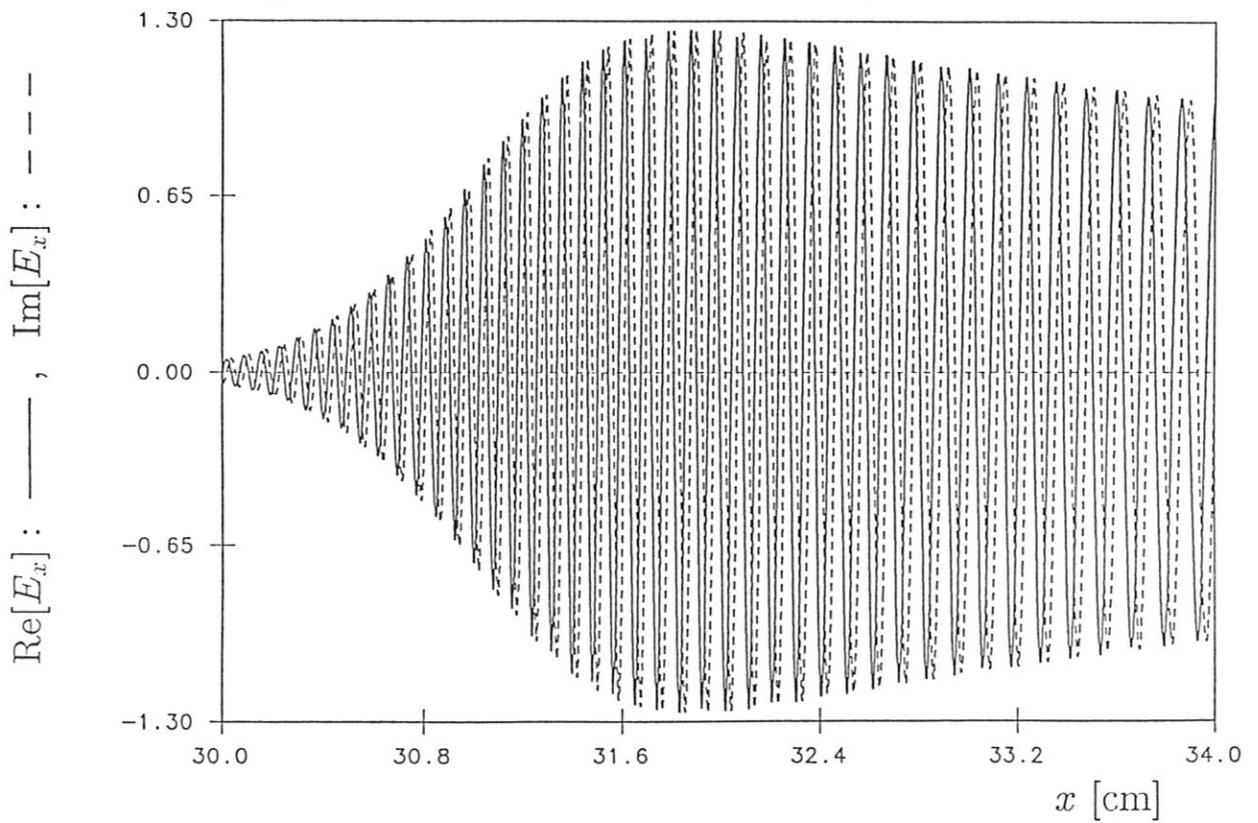
- Ein interessanter Fall ist in Figur 35 zu sehen, die die Dispersionsrelation für $[\omega/\Omega_{Ci}]_{x=32\text{cm}} = 7.92$ darstellt. Die achte Ionen-Zyklotron-Harmonische ist nun bei $x = 35$ cm, also etwas außerhalb des FEL-Rechenbereiches auf der SW-Seite lokalisiert. Figur 36 zeigt die entsprechende Wellenlösung, die sich als SW offenbar auch in der Nähe der Harmonischen ungehindert ausbreiten kann; erst nach ihrer Konversion in die IBW setzt starke Dämpfung ein, sodaß gemäß den Ergebnissen der globalen Leistungsbilanz, $A = 99.82\%$, $T = 0.18\%$ bzw. $R = 0.00\%$ sogar noch ein geringer Teil der eingekoppelten Leistung transmittiert wird.

Die in Figur 23 bis 36 dargestellten Ergebnisse lassen Bedenken hinsichtlich der Effizienz des Kopplungsmechanismus der IBW-Heizung aufkommen. Zwar ist die SW gegen höhere Ionen-Zyklotron-Harmonische insensitiv, die IBW unterliegt aber starker Ionen-Zyklotron-Resonanz-Dämpfung und kann daher in der Nähe einer solchen Harmonischen nicht effizient angeregt werden. Obwohl diese Aussagen im Rahmen der etwas artifiziellen Szenarien überhöhter Iontemperaturen (gegenüber den Elektronentemperaturen) gewonnen wurden, scheinen sie von allgemeiner Gültigkeit zu sein; so weisen die entsprechenden Dispersionsrelationen eine große Ähnlichkeit mit jenen auf, die für eine kleinere parallele Wellenzahl die realistischeren Konfigurationen aus Abschnitt 6.2 charakterisieren. Demzufolge ist bei Heizexperimenten mit IBW zu vermeiden, daß sich eine Ionen-Zyklotron-Resonanz in der Abschältschicht befindet, da sonst, wenigstens bei entsprechenden Leistungsflüssen, eine nicht vernachlässigbare parasitäre Heizung des Randschichtplasmas zu befürchten ist.

Figur 35



Figur 36

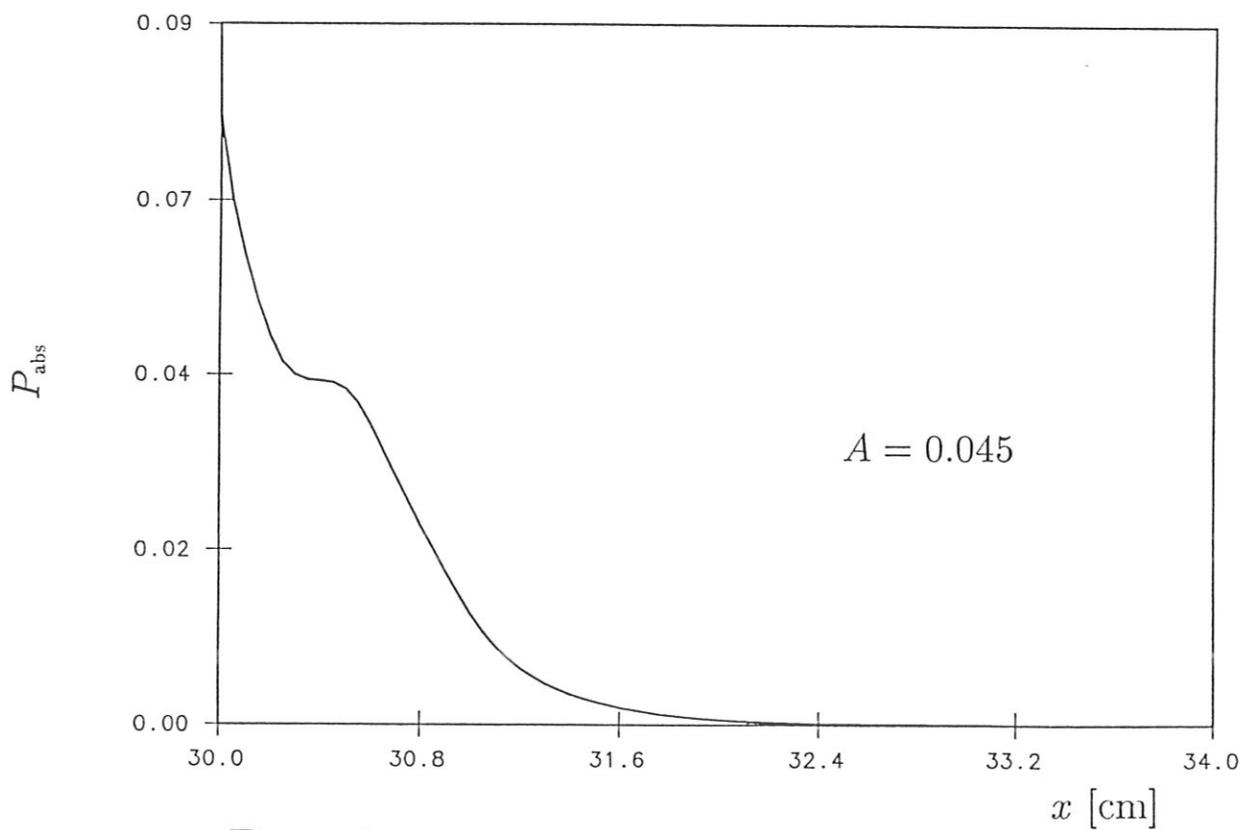


6.4 Leistungsdepositionsprofile

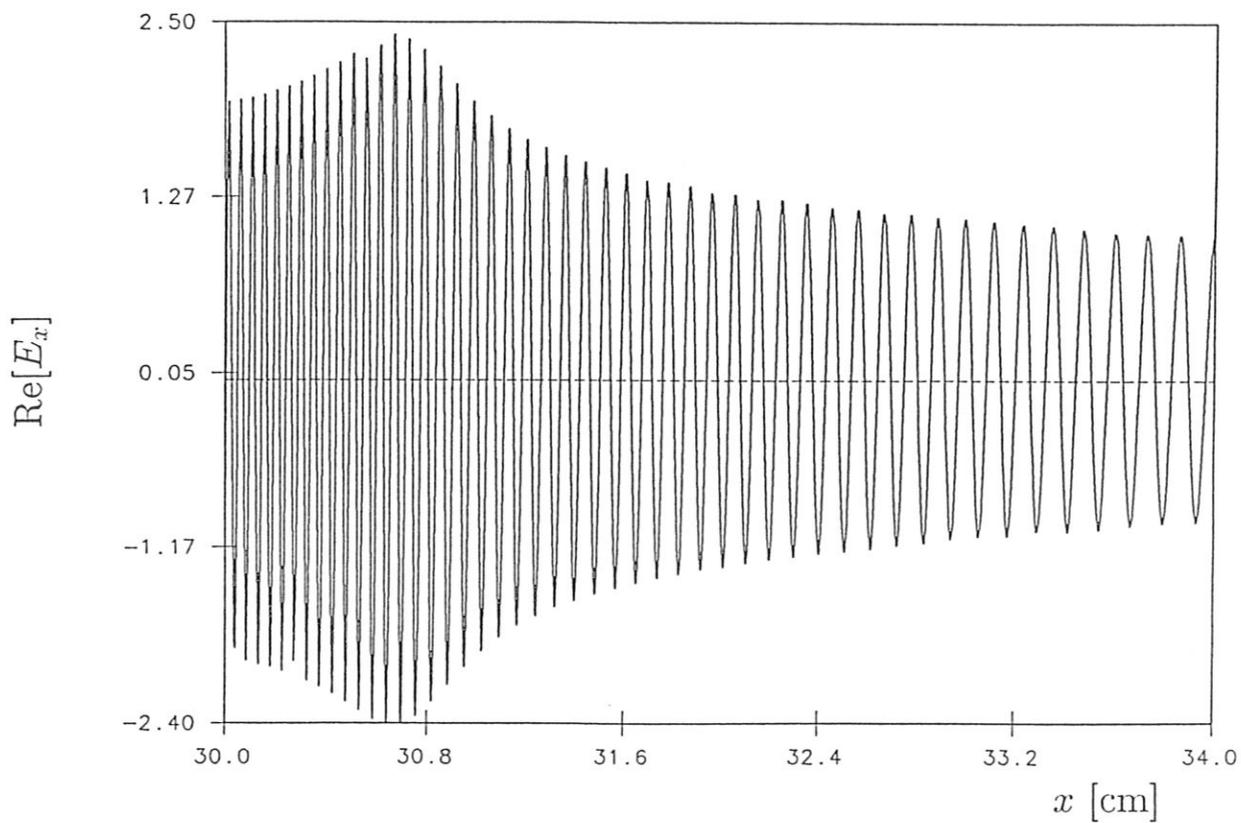
Um die Relevanz der in Abschnitt 6.3 präsentierten Resultate zu bestätigen, wurden mit Hilfe der in 5.2 beschriebenen Analysis zu einigen Modenkonsolutionslösungen die entsprechenden Leistungsdepositionsprofile numerisch berechnet. Die Integration dieser Profile führt gemäß (5.56) und (4.109) schließlich auf einen direkt berechneten Absorptionskoeffizienten; dessen Vergleich mit dem Ergebnis der globalen Leistungsbilanz (4.110) dient der Sicherstellung der Energieerhaltung und kann mit Einschränkungen als Konvergenztest für eine errechnete Wellenlösung angesehen werden. Mit Einschränkungen deshalb, da falls es zu signifikanten Abweichungen von der globalen Bilanz kommt, diese nicht nur durch eine schlechte Konvergenz der FEL-Lösung sondern auch durch numerische Fehler bei der Erstellung der Leistungsdepositionsprofile verursacht sein können. Das erscheint umso glaubhafter, als die Berechnung der lokal dissipierten Leistung gemäß Gl. (5.54) die numerische Auswertung eines komplizierten, zweifachen Fourier-Raum-Integrals erfordert (eine etwas diffizile Art der Berechnung der Fourier-Transformierten der Wellenlösung vorausgesetzt, vgl. (5.55)). Tatsächlich ist, wenigstens hinsichtlich der erforderlichen Rechenzeit, die Erstellung eines Leistungsdepositionsprofils numerisch aufwendiger als die Integration der Wellengleichung, die genaugenommen nur die Auswertung eines einfachen Fourier-Raum-Integrals umfaßt; letztere sollte damit auch weniger anfällig gegen numerische Fehler sein. Die benötigten langen Rechenzeiten ließen die Berechnung der Leistungsdepositionsprofile nur für einige wenige, ausgewählte Wellenlösungen zu, nämlich jene aus Figur 24, 26, 32 und 36. Dabei wurden, wie schon bei der Integration der Wellengleichung, nur die Stix-Terme berücksichtigt, da die diamagnetischen Beiträge als vernachlässigbar anzusehen sind. Im folgenden werden zu den Profilen (diese wurden so normiert, daß ihr Integral über den FEL-Rechenbereich gerade den entsprechenden dimensionslosen Absorptionskoeffizienten ergibt) nochmals die Realteile der x -Komponenten der elektrischen Wellenfelder gezeigt, um eine direkte Überprüfung der räumlichen Koinzidenz zu ermöglichen.

- In Figur 37 ist das zum Szenario aus Abbildung 23 gehörende Leistungsdepositionsprofil dargestellt. Figur 38 zeigt die entsprechende Wellenlösung, deren globale Leistungsbilanz den Absorptionskoeffizienten $A = -0.05\%$ liefert. Das stimmt gut mit dem Integral des Profils überein, das einen Koeffizienten $A = 0.045\%$ ergibt.

Figur 37

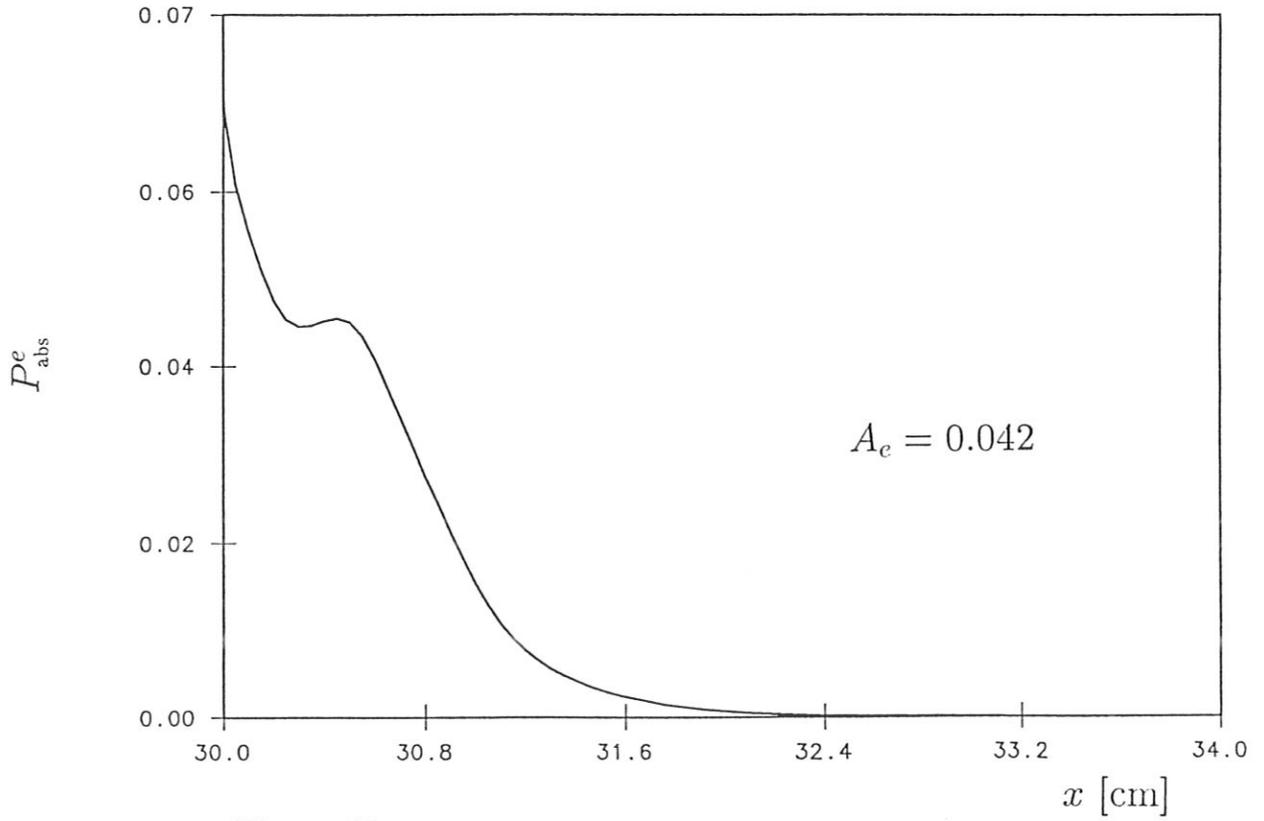


Figur 38

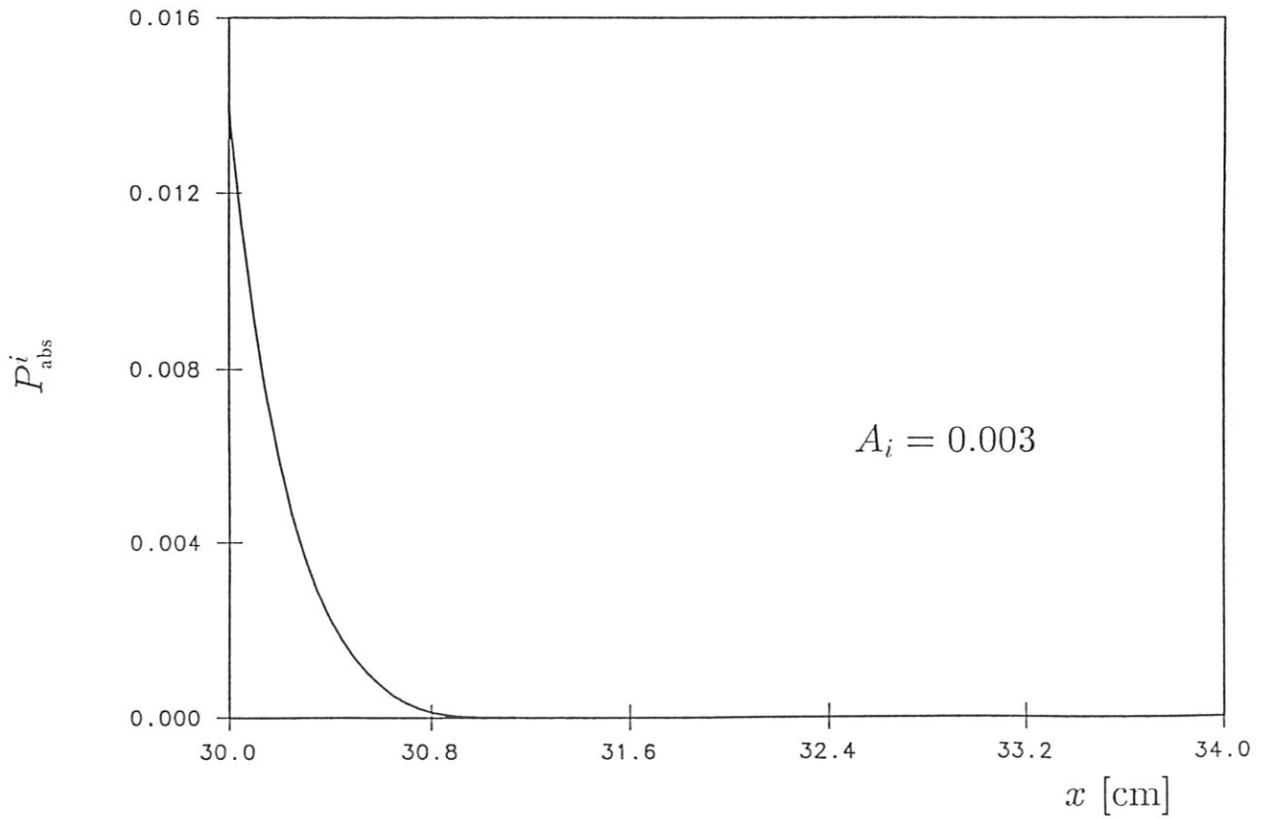


- Figur 39 und 40 zeigen das Leistungsdepositionsprofil aus Abbildung 37, aufgespalten in Elektronen- und Ionenanteile. Entsprechende Absorptionskoeffizienten, die $A_e + A_i = A$ erfüllen, verdeutlichen, daß die Leistung der Welle hauptsächlich durch die Elektronen dissipiert wird. Offenbar kommt es am Innenrand des FEL-Rechenbereiches aufgrund des ansteigenden Temperaturprofils zu geringfügiger Elektronen-Landau-Dämpfung. Die in Figur 39 sichtbaren lokalen Extremwerte korrespondieren dabei mit dem nichtmonotonen Verhalten der Amplitude der Wellenlösung.

Figur 39

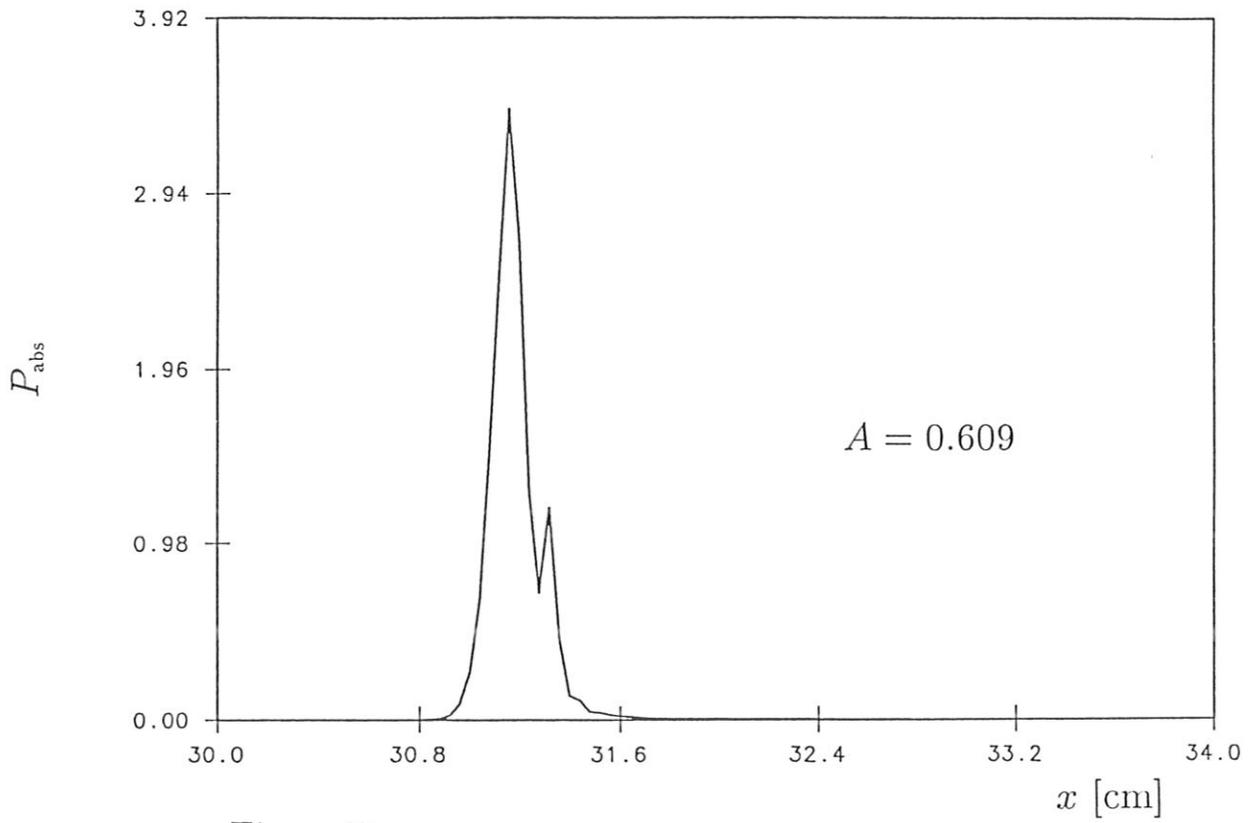


Figur 40

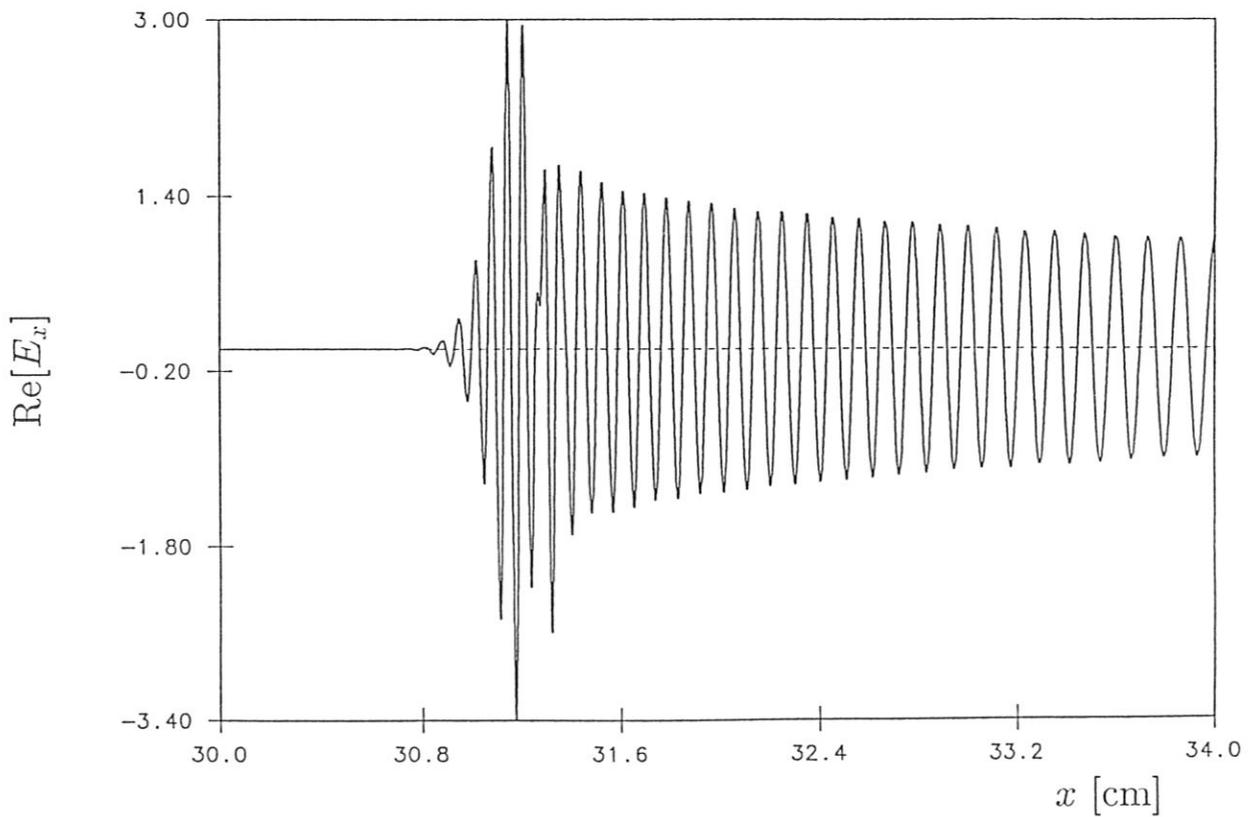


- In Figur 41 ist das Leistungsdepositionsprofil der Wellenlösung aus Figur 42, die zur Dispersionsrelation aus Abbildung 25 gehört, dargestellt. Obwohl die Gestalt dieses Profils den qualitativen Erwartungen entspricht (sowohl die räumliche Lage der absorbierenden Schicht als auch der "spike" an der rechten Flanke des Profils, der durch eine destruktive Interferenz in der Modenkonzersionsschicht verursacht wird, scheinen korrekt zu sein) ergibt sich in diesem Beispiel für alle untersuchten Szenarien die größte Diskrepanz zur globalen Bilanz, die den Koeffizienten $A = 100\%$ liefert. Das Integral des Profils entspricht einer Absorption von $A = 60.9\%$. Trotzdem dürfte dieses Mißverhältnis nicht auf eine schlechte Konvergenz der FEL-Lösung der integralen Wellengleichung zurückzuführen sein. Viel wahrscheinlicher scheint, daß es aufgrund der in diesem Beispiel extrem schmalen absorbierenden Schicht zu Problemen bei der Berechnung der lokal dissipierten Leistung kommt. Es ist schwierig im Falle einer derart komplizierten Analysis, wie sie der Berechnung eines Leistungsdepositionsprofils zugrunde liegt, im nachhinein die Quelle numerischer Fehler zu isolieren, falls diese überhaupt isolierbar ist, doch wäre eine Inkompatibilität der approximativen Berechnung der Fourier-Transformierten des Wellenfeldes gemäß (5.55) mit der hier stark lokalisierten Leistungsabsorption denkbar.

Figur 41

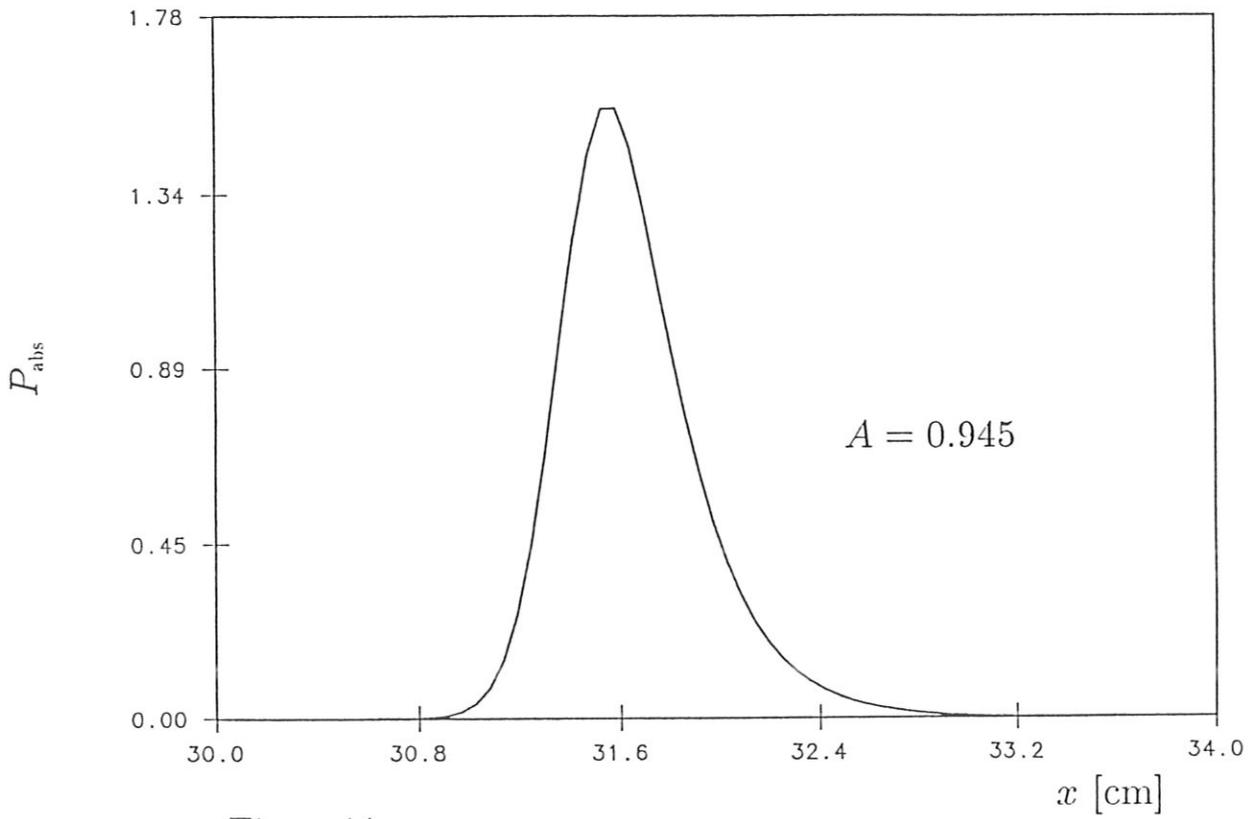


Figur 42

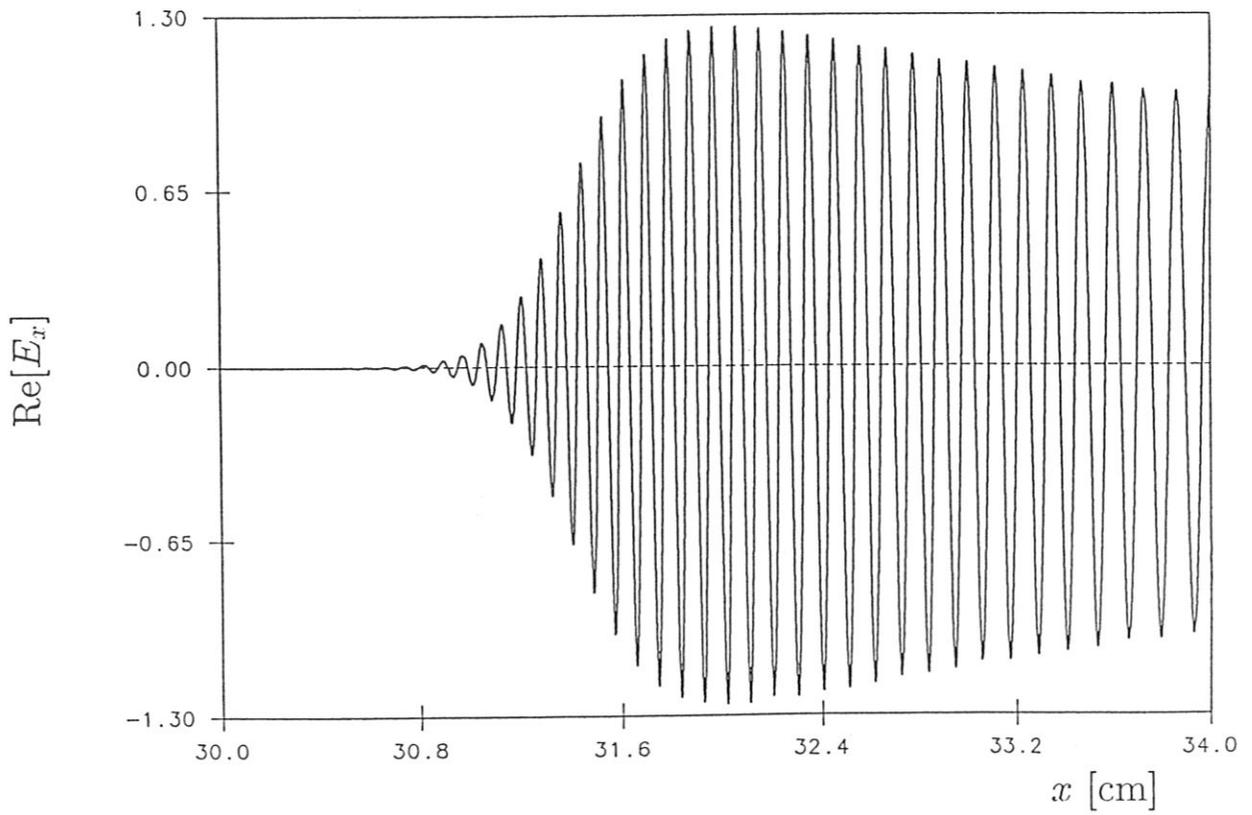


- Figur 43 zeigt das Leistungsdepositionsprofil des Szenarios aus Abbildung 31, bzw. Figur 44 die entsprechende Wellenlösung. Das Integral des Profils liefert einen Absorptionskoeffizienten $A = 94.5\%$, in guter Übereinstimmung mit dem Ergebnis $A = 100\%$ der globalen Leistungsbilanz.

Figur 43

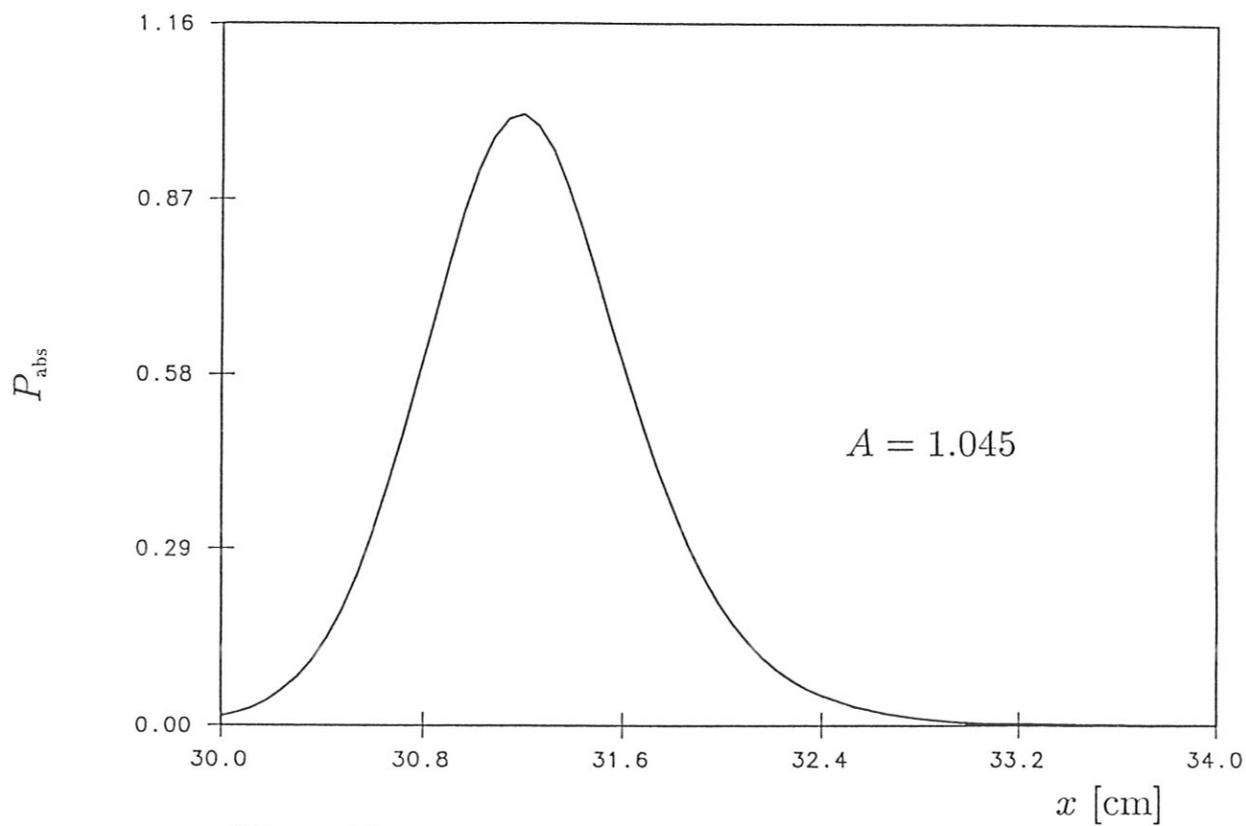


Figur 44

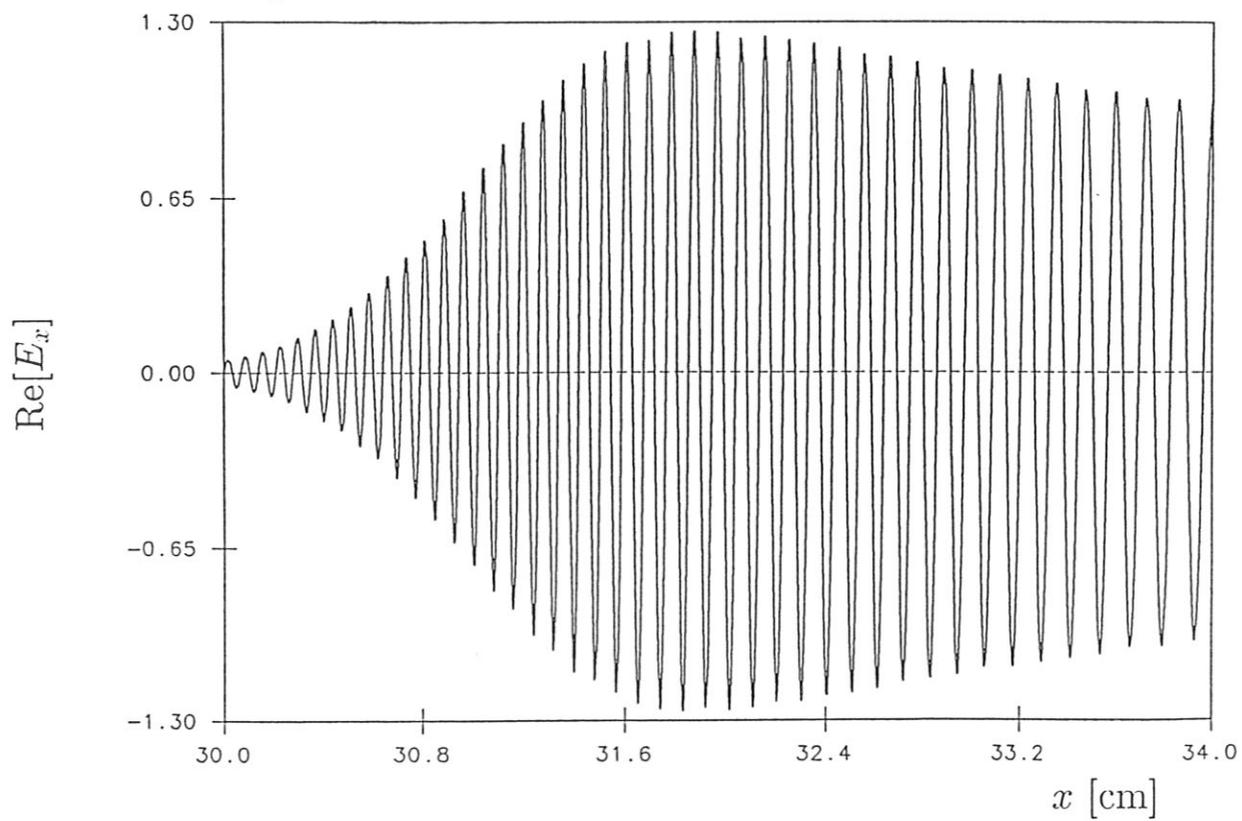


- In Figur 45 ist das zur Dispersionsrelation aus Abbildung 35 gehörende Leistungsdepositionsprofil zu sehen, bzw. in Figur 46 die entsprechende Wellenlösung. Auch hier besteht eine gute Übereinstimmung zwischen dem Integral des Profils, $A = 104.5\%$, und dem Ergebnis der globalen Leistungsbilanz, $A = 99.82\%$.

Figur 45

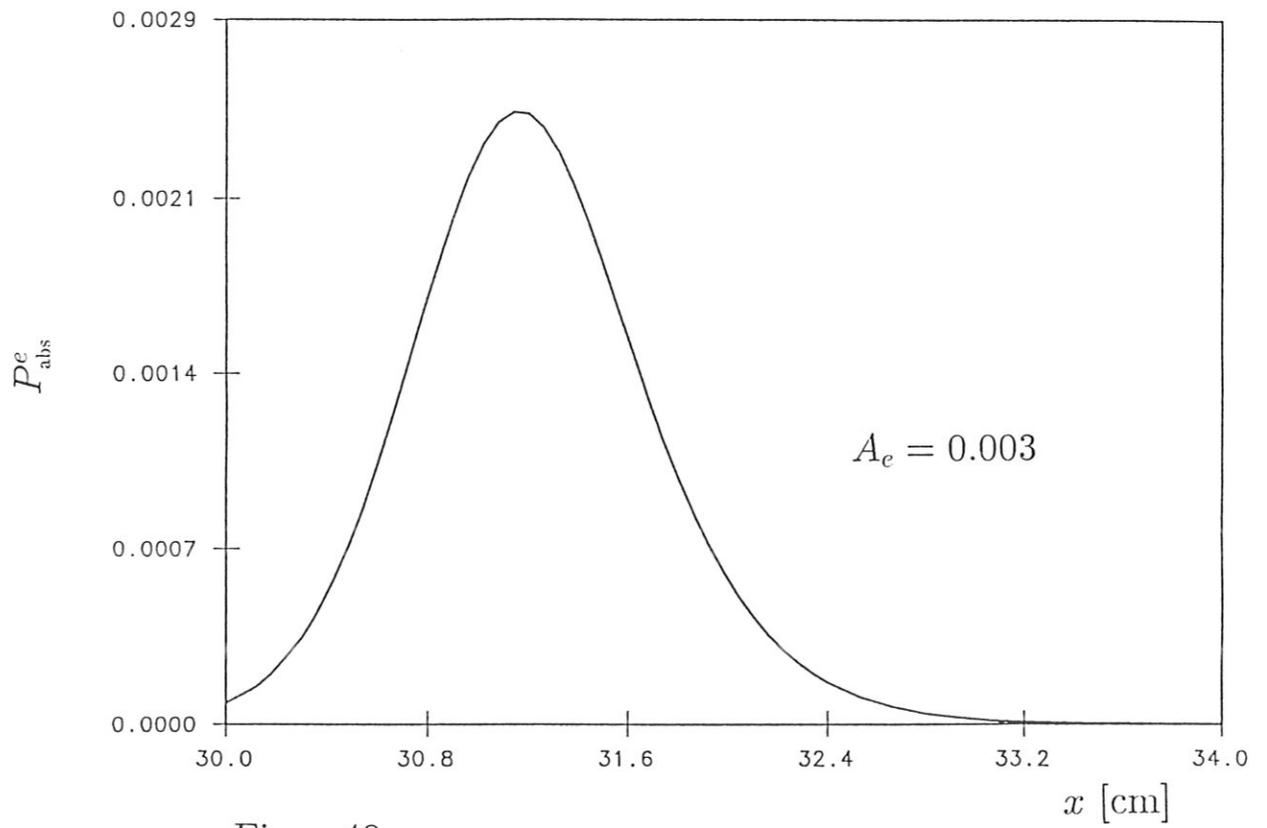


Figur 46

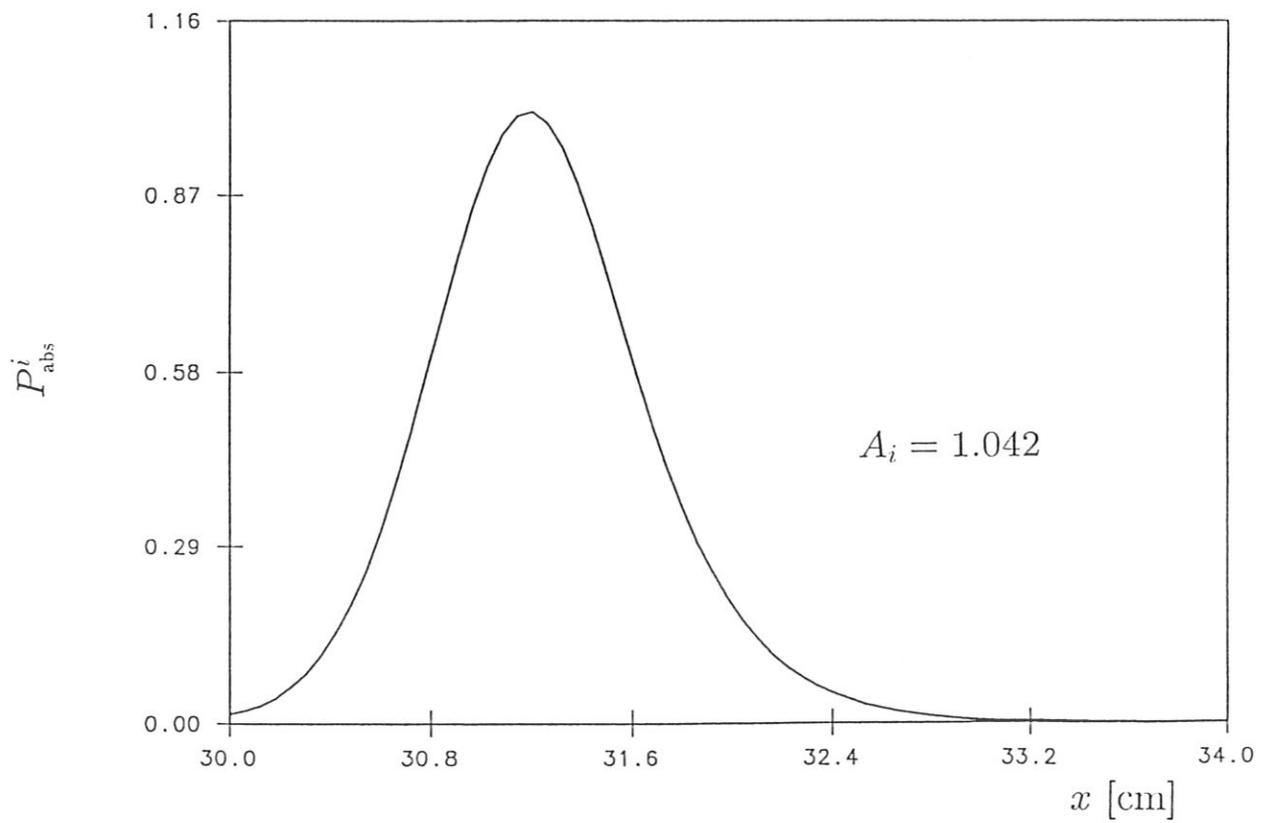


- In Figur 47 und 48 ist schließlich die Aufspaltung des Leistungsdepositionsprofils aus Abbildung 45 in Elektronen- bzw. Ionenanteile dargestellt. Wie für die Dämpfung der IBW an der achten Ionen-Zyklotron-Harmonischen zu erwarten ist, wird dabei praktisch die gesamte Leistung der IBW durch die Ionen dissipiert.

Figur 47



Figur 48



6.5 Die Modenkonzersion unter dem Einfluß von Stößen

Im folgenden soll die Effizienz der Ankopplung an die IBW unter dem Einfluß von Stößen untersucht werden. Die Beschreibung von Plasmawellen durch die lineare Vlasov-Gleichung setzt eine im allgemeinen geringe Anzahl von Stößen voraus, derart, daß das "trapping" der Teilchen im Wellenfeld verhindert wird. Dies erklärt auch ihren dissipativen Charakter, man denke beispielsweise an den Effekt der Landau-Dämpfung, obwohl die lineare Vlasov-Gleichung keinen expliziten Stoßterm wie andere kinetische Gleichungen besitzt. Abgesehen von diesem "particle detrapping" beschreibt sie jedoch keine stoßinduzierten Effekte. Solche lassen sich aber, wenigstens qualitativ, relativ einfach in das lineare Maxwell-Vlasov-Gleichungssystem einbauen; so kann beispielsweise mit Hilfe eines Crook-Stoßterms gezeigt werden, daß die Beschreibung dieser Stoßeffekte durch Hinzufügen eines Imaginärteils zur Wellenfrequenz ω in der durch die konstitutive Relation (2.19) gegebenen Stromdichte gemäß $\omega \rightarrow \omega + \nu_{coll}^\alpha i$ möglich ist. ν_{coll}^α bezeichnet dabei die effektiven Stoßfrequenzen in den Beiträgen der verschiedenen Teilchensorten α zur verallgemeinerten konstitutiven Relation. In realistischen Szenarien, wo Coulomb-Stöße unvermeidlich sind, werden die Werte von ν_{coll}^α nach unten durch entsprechende Coulomb-Stoßfrequenzen $\nu_{Coul}^{\alpha,\beta}$ beschränkt. Es gilt also im Falle eines Zweispezienplasmas in den Elektronentermen der konstitutiven Relation $\nu_{coll}^e \geq \nu_{Coul}^{e,i}$, bzw. in den Ionentermen $\nu_{coll}^i \geq \nu_{Coul}^{i,e}$. Im Experiment können die Stoßfrequenzen ν_{coll}^α des Randschichtplasmas jene durch die Coulomb-Frequenzen markierten Minimalwerte deutlich übersteigen, beispielsweise durch Stöße mit Neutralteilchen.

In den folgenden Abbildungen werden die Ergebnisse einer parametrischen Studie in ν_{coll}^e und ν_{coll}^i präsentiert, die mit einer geeignet adaptierten Version des IBW-Codes berechnet wurden. Dabei dient das in Figur 3 dargestellte Szenario, wo eine effiziente Ankopplung an die IBW möglich ist, als Ausgangskonfiguration dieser Studie, mit entsprechenden Parameterwerten $\nu_{coll}^e = \nu_{coll}^i = 0$ Hz. Um Rechenzeit zu sparen wurde im Rahmen dieser Untersuchung, wie bei der Berechnung der zugehörigen Wellenlösung aus Figur 4, die "1-Punkt-Näherung" des Leitfähigkeitskernes zur Integration der Wellengleichung benutzt.

Um eine Beurteilung der Untersuchungsergebnisse zu ermöglichen, sind gewissermaßen als Bezugspunkt die Coulomb-Stoßfrequenzen zu berechnen. Hierzu werden die Formeln

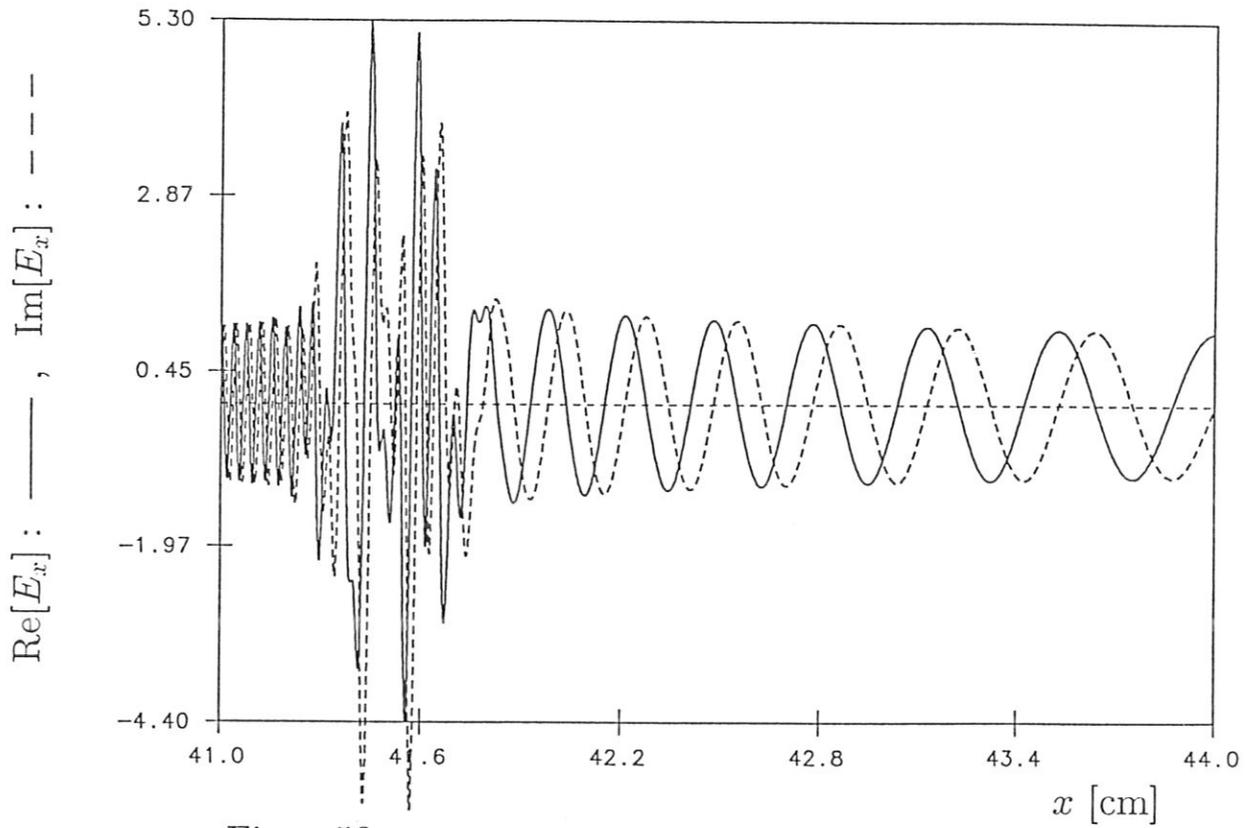
$$\nu_{Coul}^{e,i} = 1.222 \times 10^{-10} \frac{n_i Z_i^2 \lambda_{Coul}}{T_e^{3/2}} \quad (6.1)$$

und

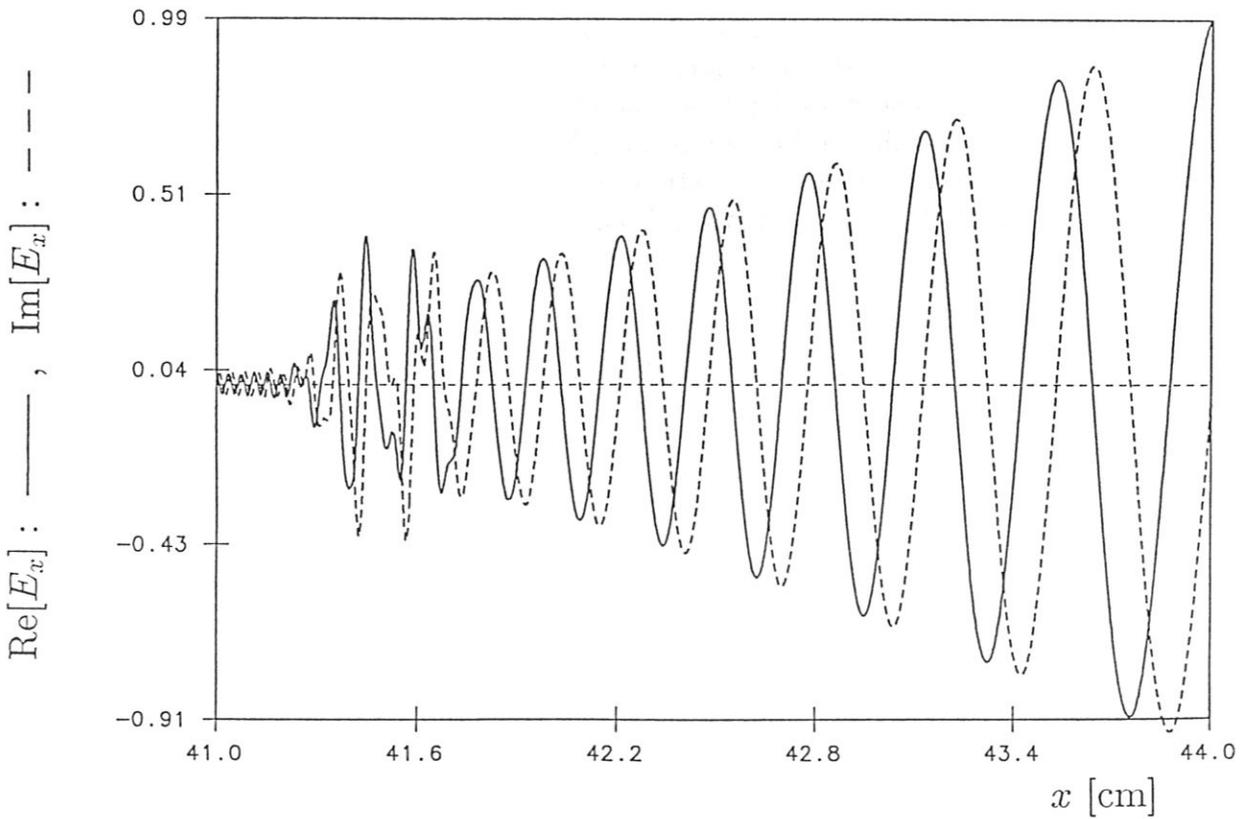
$$\nu_{Coul}^{i,e} = 2.851 \times 10^{-12} \frac{n_e Z_i^2 \lambda_{Coul}}{A_i^{1/2} T_i^{3/2}} \quad (6.2)$$

benutzt, wo die Dichten in Einheiten Teilchen/cm³ bzw. die Temperaturen in keV anzugeben sind. Dabei bezeichnet A_i das Massenverhältnis der Ionen zu Protonen, bzw. λ_{Coul} den Coulomb-Logarithmus, $\lambda_{Coul} = 30.9 - 0.5 \ln(n_e) + \ln(T_e) \approx 14$. Für die Gleichgewichtsparameter am Punkt $x = x_a$ des in Figur 3 dargestellten Szenarios ergeben sich Werte in der Größenordnung von $\nu_{coll}^e = 3.5 \times 10^5$ Hz bzw. $\nu_{coll}^i = 8 \times 10^3$ Hz.

Figur 49

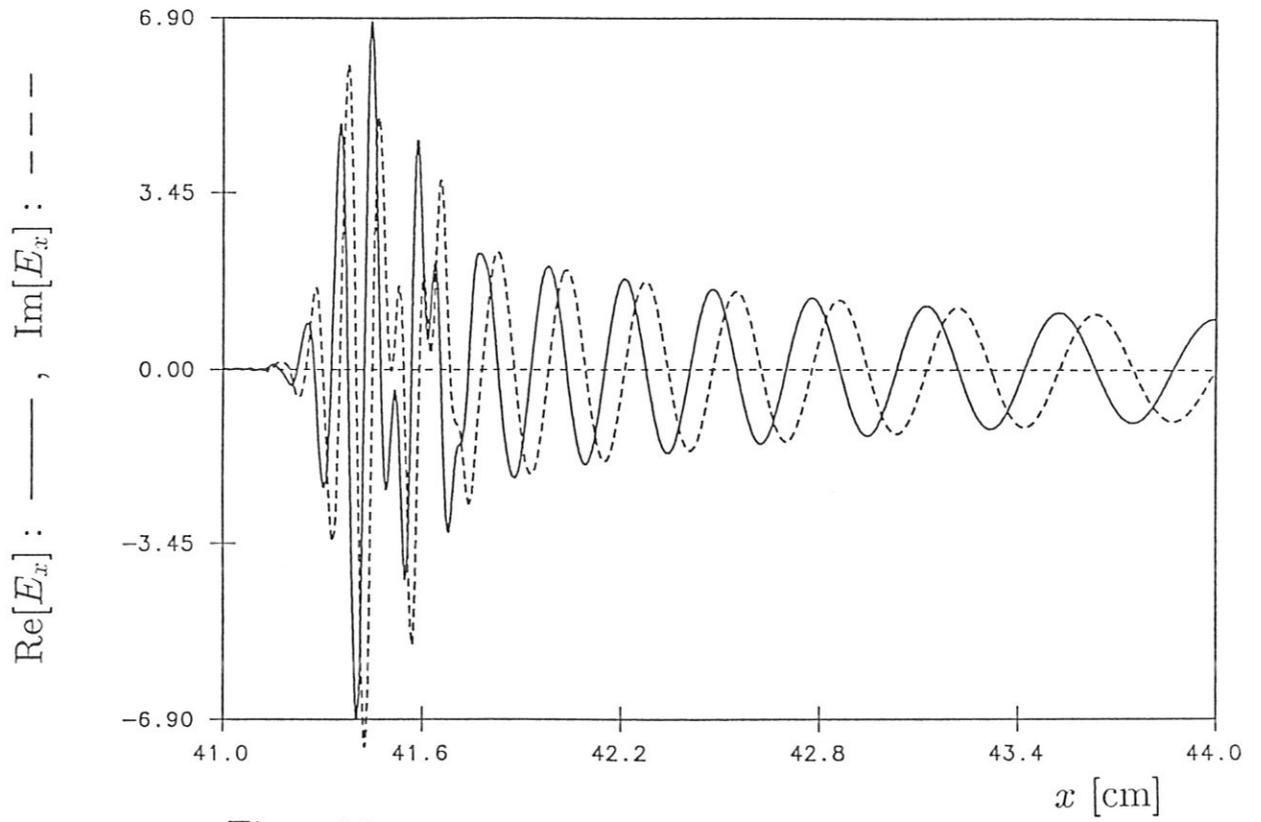


Figur 50

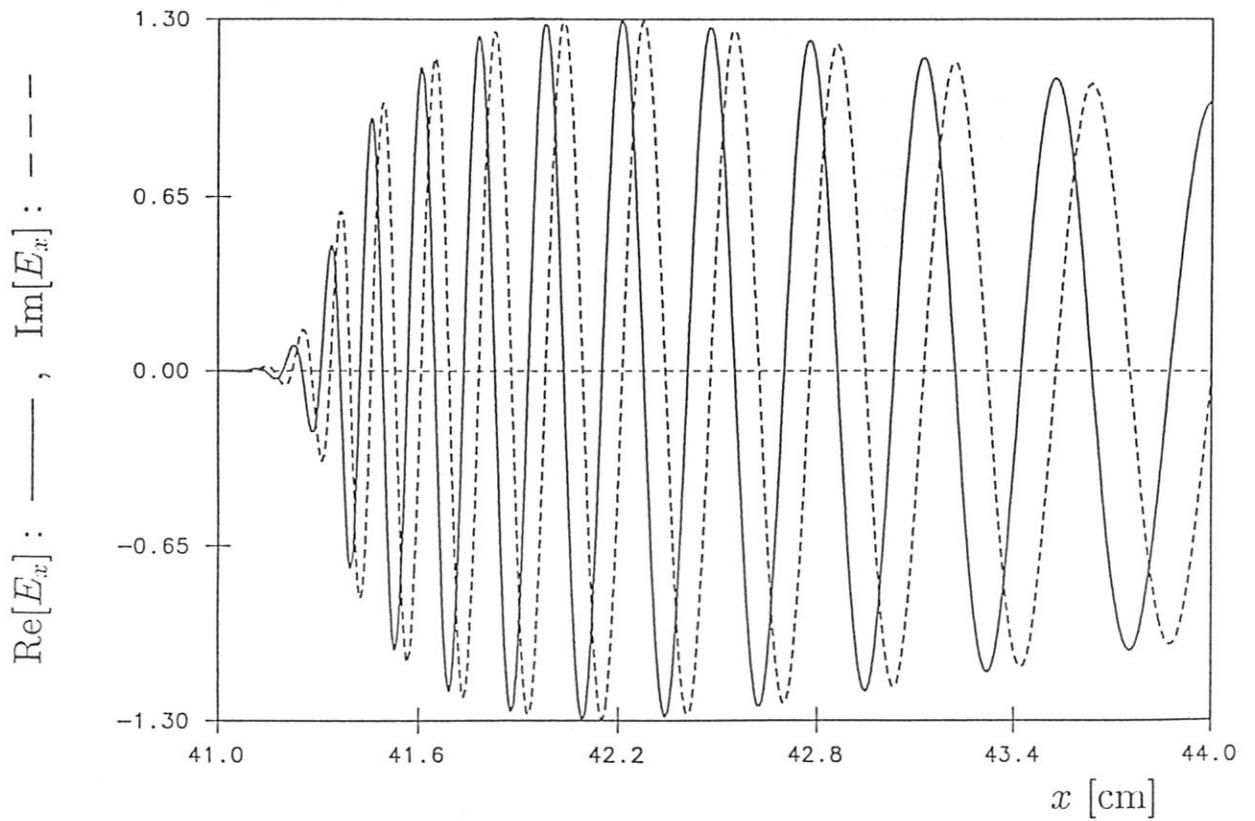


- Figur 49 zeigt die entsprechende Modenkonzersionslösung für die Stoßfrequenzen $\nu_{coll}^e = 6.57 \times 10^7$ Hz bzw. $\nu_{coll}^i = 0.00$ Hz. Hier wurden, um die Auswirkung der Elektronenstöße gesondert beobachten zu können, einerseits die Ionenstöße vollständig unterdrückt, andererseits die Elektronenstoßfrequenz deutlich höher gewählt, als sie aufgrund reiner Coulomb-Stöße zu erwarten wäre. Abgesehen von den stark reduzierten Amplituden besitzt diese Wellenlösung noch relativ große Ähnlichkeit mit jener aus Abbildung 6; die Ankopplung an die IBW ist möglich, wenn auch sehr ineffizient. Entsprechend liefert die globale Leistungsbilanz die Koeffizienten $A = 91.8\%$, $T = 8.2\%$ bzw. $R = 0.0\%$. Es sei an dieser Stelle explizite darauf hingewiesen, daß sich die hier untersuchte Konfiguration außer durch ν_{coll}^e in keinem der Parameter von jenem durch Abbildung 1 charakterisierten Szenario unterscheidet.
- Erhöht man die Elektronenstoßfrequenz weiter auf $\nu_{coll}^e = 2.5 \times 10^8$ Hz, dann erhält man die in Figur 50 dargestellte Wellenlösung. Offensichtlich wird in diesem Fall die extern eingestrahlte SW stark gedämpft; die mit geringer Amplitude angeregte IBW scheint etwas insensitiver gegenüber Elektronenstößen zu sein. Die globale Leistungsbilanz weist ähnliche Werte wie im zuvor untersuchten Beispiel auf, $A = 99.96\%$, $T = 0.04\%$ und $R = 0.00\%$, sodaß es wieder zur signifikanten Heizung des Randschichtplasmas kommt.
- In Figur 51 und 52 sind die Wellenlösungen für die zwei Fälle $\nu_{coll}^i = 1 \times 10^7$ Hz bzw. $\nu_{coll}^i = 1 \times 10^8$ Hz dargestellt, mit jeweils verschwindender Elektronenstoßfrequenz. Die SW wird offensichtlich von den Ionenstößen kaum beeinflusst, ganz im Gegensatz zur IBW, deren Ankopplung nicht mehr möglich ist. In Figur 52 konnten sogar die Interferenzen innerhalb der Modenkonzersionsschicht vollständig unterdrückt werden, da sich als einzige Mode nur die SW ungehindert ausbreiten kann. Dementsprechend liefert die globale Leistungsbilanz hundertprozentige Absorption der eingekoppelten Leistung in der Abschältschicht.

Figur 51



Figur 52

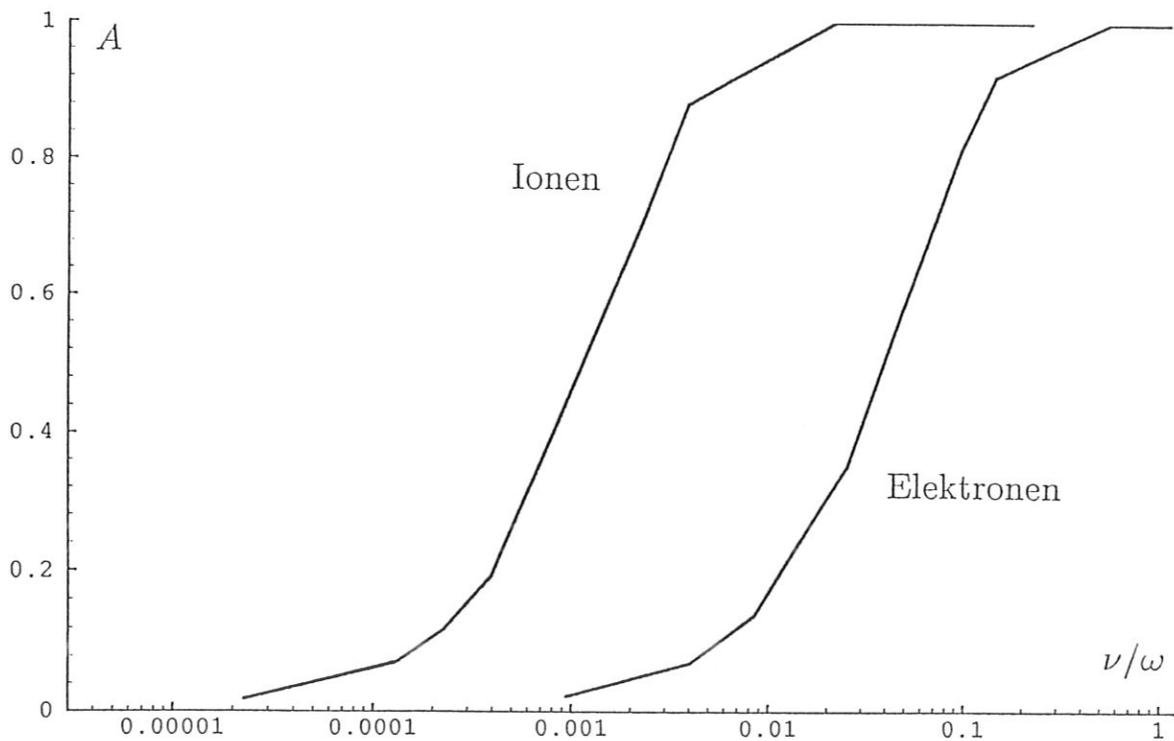


- In Figur 53 sieht man den aus der globalen Leistungsbilanz diverser Wellenlösungen gewonnenen Absorptionskoeffizienten A gegen den Parameter $\nu/\omega = \nu_{coll}^i/\omega$ bzw. $\nu/\omega = \nu_{coll}^e/\omega$ aufgetragen. Den Coulomb-Stoßfrequenzen entsprechen dabei in etwa die Werte 3×10^{-6} im Ionenast bzw. 1.27×10^{-4} im Elektronenast, die sich beide knapp vor dem steilen Anstieg dieser Kurven bis zur Sättigung bei $A = 1$ befinden. Dementsprechend würde eine relativ geringe anomale Vergrößerung der effektiven Stoßfrequenzen über jene Coulomb-Werte hinaus, bereits zur nicht vernachlässigbaren Heizung der Abschältschicht führen. Diese Gefahr besteht umso mehr, da im Experiment die Leistungsdissipation durch Elektronen und Ionen simultan erfolgen würde, die Effekte der Elektronen- und Ionenstöße also kummulativ wären.

Gemäß den zuvor präsentierten Resultaten ist eine Sensitivität der SW insbesondere gegen Elektronenstoßdämpfung, bzw. der IBW gegen Ionenstoßdämpfung festzustellen. Obwohl die entsprechenden Rechnungen Modellcharakter besitzen, kommt ihnen eine besondere Bedeutung zu, da ihre Ergebnisse die mögliche Gefahr einer nicht vernachlässigbaren Stoßabsorption sowohl der SW als auch der IBW innerhalb der Abschältschicht aufzeigen. Dies umso mehr, als zum Zwecke der Vermeidung parasitärer Dämpfung die Kollisionalität eines Randschichtplasmas vom Experimentator, im Gegensatz zur Position einer Ionen-Zyklotron-Harmonischen oder zur Gestalt des eingekoppelten $n_{||}$ -Spektrums, kaum beeinflusst werden kann.

Abschließend ist die Genauigkeit der bei der Erstellung der Figuren 49 bis 53 benutzten "1-Punkt-Näherung" des Leitfähigkeitskernes abzuschätzen. Zu diesem Zweck wurde eine Kontrollrechnung mit dem "vollständigen" Kern für den Parametersatz $\nu_{coll}^e = 0$ Hz bzw. $\nu_{coll}^i = 1 \times 10^6$ Hz durchgeführt, mit dem Ergebnis $A = 60.73\%$. Das ist in befriedigender Übereinstimmung mit dem Ergebnis der "1-Punkt-Näherung", die auf $A = 70.02\%$ führt und somit die Absorption im Bereich des steilsten Anstieges des Ionen-Astes aus Figur 53 leicht überschätzt.

Figur 53



Kapitel 7

Zusammenfassung

Die zentrale Aufgabenstellung der Arbeit war die theoretische Untersuchung der Effizienz der Modenkonzersion einer langsamen Welle in eine Ionen-Bernstein-Welle in der Nähe der kalten LH-Resonanz, wie sie das IBW-Heizschema zur Ankopplung der extern eingestrahlten RF-Leistung an die longitudinal polarisierte IBW im Bereich der Abschältschicht eines Tokamaks vorsieht. Dies erforderte die Lösung des linearen Maxwell-Vlasov-Systems, das im konkreten Fall auf eine mathematisch aufwendige Wellengleichung vom Integro-Differential-Typ führt. Als Lösungsmethode kam ein Galerkin-Finite-Elemente-Verfahren zur Anwendung. Zur Bewältigung der damit verbundenen numerischen Aufgaben wurde ein Fortran-Programm, der IBW-Code, entwickelt.

Eine umfassende Beurteilung der Anwendbarkeit der IBW-Heizmethode unter Reaktorbedingungen erforderte im Rahmen der vorliegenden Studie insbesondere die Untersuchung des Einflusses dissipativer Effekte auf die Modenkonzersionseffizienz. Für die in Frage kommenden Szenarien sind im linearen Regime Elektronen-Landau-Dämpfung und Ionen-Zyklotron-Resonanz-Dämpfung, aber auch Stoßabsorption der SW bzw. IBW denkbar. Da das lineare Maxwell-Vlasov-System grundsätzlich nur stoßfreie Wellendämpfung beschreiben kann, wurde im weiteren Verlauf der Arbeit zur Abschätzung der stoßinduzierten Verluste im IBW-Code ein Crook-Stoßterm implementiert.

Zunächst jedoch dienten die mit Hilfe des IBW-Codes durchgeführten Rechnungen der Untersuchung von Modenkonzersionsszenarien, deren Parameter keinerlei Dissipation erwarten lassen. Es zeigte sich, daß die von der SW getragene RF-Leistung unter diesen idealen Bedingungen nicht reflektiert wird und daher zur Gänze an den IBW-Zweig gekoppelt werden kann. Dies ist eine entscheidende Voraussetzung für die Realisierbarkeit des IBW-Heizschemas. Auch in Fällen, wo dissipative Mechanismen wirksam wurden, konnte festgestellt werden, daß keine Reflexion der SW auftritt, die Modenkonzersion in diesem Sinne also immer vollständig ist.

Durch eine parametrischen Studie wurde weiters der Einfluß einer sich im Bereich der Modenkonzersionsschicht befindlichen Ionen-Zyklotron-Harmonischen auf die Effizienz der Ankopplung an die IBW untersucht. Es wurde festgestellt, daß sich die SW praktisch ungehindert über die Ionen-Zyklotron-Harmonische hinweg ausbreiten kann, die IBW hingegen so stark geämpft wird, daß sie in der Umgebung einer solchen Harmonischen nicht angeregt werden kann. Die Leistung der SW wird typisch innerhalb einer Schicht von der radialen Ausdehnung in der Größenordnung eines Zentimeters dissipiert. Um eine parasitäre Heizung des Randschichtplasmas zu vermeiden, darf also die Wellenfrequenz nicht nahe einer Ionen-Zyklotron-Harmonischen in der Peripherie des

Plasmas gewählt werden. Dafür existieren auch experimentelle Hinweise. So wurde bei IBW-Heizexperimenten am DIII-D Tokamak eine starke Heizung der Randschichtionen insbesondere dann beobachtet, wenn sich eine solche Harmonische in der Plasmarandschicht befand [Pin 93].

Ferner wurde mit Hilfe des IBW-Codes untersucht, ob durch Landau-Dämpfung die Effizienz der Modenkonzersion beeinflusst werden kann. Es zeigte sich, daß für realistische Werte der Temperaturen und parallelen Wellenzahlen eine derart starke Elektronen-Landau-Dämpfung sowohl der SW als auch der IBW möglich ist, daß die eingestrahlte RF-Leistung noch innerhalb der Abschältschicht vollständig dissipiert wird. Die Leistungsabsorption durch Elektronen-Landau-Dämpfung ist besonders für Wellen mit hohen k_{\parallel} -Werten groß. Daher sollte, um eine Heizung der Abschältschicht zu vermeiden, das mittlere k_{\parallel} des über die Antenne eingekoppelten Spektrums nicht zu groß gewählt werden.

Schließlich wurde der IBW-Code eingesetzt, um eine Reihe numerischer Experimente durchzuführen, die eine Abschätzung des Einflusses von Stoßdämpfungsverlusten auf die Modenkonzersionseffizienz erlauben. Dabei wurde durch Variation der entsprechenden effektiven Stoßfrequenzen eines Crook-Stoßterms die Auswirkung der Stöße auf Elektronen und Ionen gesondert untersucht. Es zeigte sich, daß die SW insbesondere gegen Elektronenstöße sensitiv ist, bzw. die IBW gegen Ionenstöße. Bereits im Falle einer geringfügigen anomalen Vergrößerung der effektiven Stoßfrequenzen gegenüber den Coulomb-Stoßfrequenzen, etwa infolge von Kollisionen mit Neutralen, konnte innerhalb der Abschältschicht ein nicht vernachlässigbarer Anteil der eingestrahlten RF-Leistung dissipiert werden.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß obwohl keine Reflexion der extern angeregten SW zu erwarten ist, eine effiziente Ankopplung an die IBW und damit die Anwendbarkeit der IBW-Heizmethode unter Reaktorbedingungen zweifelhaft erscheint. Als problematisch sind die diversen Verlustkanäle des Modenkonzersionsprozesses anzusehen, die unter realistischen Bedingungen zur parasitären Heizung des Randschichtplasmas führen können. Zwar besitzt der Experimentator die Möglichkeit durch Wahl der Wellenfrequenz und einer entsprechenden Antennengestaltung Ionen-Zyklotron-Dämpfung bzw. Elektronen-Landau-Dämpfung zu vermeiden, die Kollisionalität des Randschichtplasmas und damit eine mögliche Stoßabsorption der eingestrahlten RF-Leistung läßt sich jedoch kaum beeinflussen.

Als weiterer Schwerpunkt der Arbeit ist die Formulierung einer lokalen Leistungsbilanz zur Erstellung von Leistungsdepositionsprofilen innerhalb der Modenkonzersionsschicht zu nennen. Die lokale Leistungsbilanz ermöglichte, als Fortran-Programm realisiert, die Überprüfung der Energieerhaltung konkreter numerischer Modenkonzersionslösungen. Abgesehen von dieser Funktion eines Konvergenztests, ist sie aber auch in einem allgemeineren Kontext von physikalischem Interesse. Sie erlaubt einen Einblick in die Mechanismen der Wellenabsorption im linearen Regime. So ist ein irreversibler Energietransfer zwischen Welle und Plasmateilchen nicht nur aufgrund von resonanten Wechsel-

wirkungen, sondern auch durch einen Energieaustausch zwischen dem elektromagnetischen Wellenfeld und der diamagnetischen Driftbewegung, einem kollektiven Effekt der Teilchen eines inhomogenen Plasmas, möglich. Bemerkenswert ist, daß letzterer gegebenenfalls auch zu Welleninstabilitäten führen kann. Gewissermaßen als Test für die Relevanz der Leistungsbilanz konnte aus der Bedingung, daß von der Welle lokal keine Leistung dissipiert wird, ein in der Literatur bekanntes Kriterium marginaler Stabilität einer speziellen linearen Driftwelle reproduziert werden, der sogenannten universellen Instabilität [Kra 65].

Literaturverzeichnis

- [App 86] K. Appert, *Computer Physics Communications* **40**, p. 73, 1986
- [Bec 81] E. B. Becker, G. F. Carey, J. T. Oden, *Finite Elements, An Introduction*, Prentice Hall, 1981
- [Bra 77] M. Brambilla, Report EUR-CEA-FC-890, 1977
- [Bra 82] M. Brambilla, A. Cardinali, *Plasma Physics* Vol. **24**, p.1187, 1982
- [Bra 88] M. Brambilla, T. Krücken, *Plasma Physics and Controlled Fusion* **30**, p. 1083, 1988
- [Bra 89] M. Brambilla, IPP-Report 5/27, 1989
- [Bra 91] M. Brambilla, *Plasma Physics and Controlled Fusion* **33**, p. 1029, 1991
- [Bra 93] M. Brambilla, *Private Communication*, 1993
- [Cai 85] R. A. Cairns, *Plasma Physics*, Blackie, Glasgow, 1985
- [Cai 91] R. A. Cairns, *Radiofrequency Heating of Plasmas*, Adam Hilger, Bristol, 1991
- [Che 87] L. Chen, *Waves and Instabilities in Plasmas*, World Scientific, Singapore, 1987
- [Fic 79] G. M. Fichtenholz, *Differential- und Integralrechnung Bd.II*, VEB (8. Auflage), Berlin, 1979
- [Fle 84] C. A. J. Fletcher, *Computational Galerkin Methods*, Springer, 1984
- [Kra 65] N. A. Krall, M. N. Rosenbluth, *Physics of Fluids* Vol. **8**, p. 1488, 1965
- [Law 57] J. D. Lawson, *Proc. Phys. Soc.*, Vol. **B70**, p. 6, 1957
- [Miy 89] K. Miyamoto, *Plasma Physics for Nuclear Fusion*, MIT Press, Cambridge, 1989
- [Ono 79] M. Ono, Report PPPL-1593, Princeton Plasma Physics Laboratory, Princeton, 1979
- [Ono 85] M. Ono, et al., *Phys. Rev. Lett.* **54**, p. 2339, 1985
- [Ono 92] M. Ono, *Physics of Fluids B*, Vol. **5**, p. 241, 1992
- [Pin 93] R. I. Pinsky, et al., *Nuclear Fusion* Vol. **33**, p. 777, 1993

- [Pur 79] S. Puri, *Physics of Fluids* Vol. **22**, p. 1716, 1979
- [Sau 92] O. Sauter, Report LRP 457/92, CRPP Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, Lausanne, 1992
- [Sti 61] T. H. Stix, *The Theory of Plasma Waves*, McGraw-Hill, N.Y., Ch. 3., 1961
- [Str 71] G. Strang, G. J. Fix, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice Hall, 1971
- [Swa 89] D. G. Swanson, *Plasma Waves*, Academic Press, San Diego, 1989
- [Tri 87] V. K. Tripathi, C. S. Liu, S. C. Chiu, *Nuclear Fusion* Vol. **27**, p. 287, 1987
- [Wes 87] J. Wesson, *Tokamaks*, Clarendon Press, Oxford, 1987

Danksagung

Mein besonderer Dank für das Interesse an dieser Arbeit gilt Herrn Prof. Dr. Karl Lackner, der mir durch seine wohlwollende Förderung deren Durchführung am Max-Planck-Institut für Plasmaphysik erst ermöglichte.

Herrn Dr. Marco Brambilla danke ich sehr herzlich einerseits für die interessante Themenstellung, andererseits für die vielen Anregungen und hilfreichen Diskussionen, die diese Arbeit von Beginn an begleitet haben.

Zu Dank verpflichtet bin ich nicht zuletzt der Friedrich-Schiedel-Stiftung für Energietechnik, durch die in großzügiger Weise diese Arbeit gefördert wurde.