

Fakultät für Physik und Astronomie

Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Diplomarbeit

im Studiengang Physik

vorgelegt von

Carlus Clemens Deneke

aus Bonn

2008

Gebunden-freie Paarerzeugung in kombinierten Laser- und Coulombfeldern

Die Diplomarbeit wurde von Carlus Clemens Deneke ausgeführt am
Max-Planck-Institut für Kernphysik
unter der Betreuung von
Prof. Dr. Christoph H. Keitel

Gebunden-freie Paarerzeugung in kombinierten Laser- und Coulombfeldern

Kurze Zusammenfassung:

In der vorliegenden Arbeit wird der Prozess der gebunden-freien Paarerzeugung von Elektronen und Positronen in kombinierten Laser- und Coulombfeldern untersucht. Es wird angenommen, dass ein relativistischer Ionenstrahl frontal mit einem intensiven Röntgenlaserstrahl kollidiert. Das Elektron-Positron-Paar wird durch simultane Absorption mehrerer Laserphotonen in einem nichtlinearen Prozess erzeugt. Der Einfang der Elektronen wird sowohl für den Grundzustand als auch für angeregte Zustände untersucht. Es wird die Prozesswahrscheinlichkeit im Rahmen der relativistischen Quantenmechanik berechnet. Für diesen nichtlinearen Prozess starker Laserfelder kann keine gewöhnliche Störungsentwicklung angewandt werden; stattdessen wird hier die *Strong-Field-Approximation* benutzt, welche den Einfluss des Coulombfelds auf das Positron vernachlässigt. Es werden ein analytisches Ergebnis für die Übergangsamplitude gefunden und numerische Ergebnisse für die Paarproduktionsraten mit Parametern des geplanten Röntgenlasers bei DESY vorgestellt. Hauptresultate sind, dass gebunden-freie Paarproduktion zu endlich hohen Raten führt, und diese von vergleichbarer Größenordnung wie für frei-freie Paarproduktion sind. In naher Zukunft wird die experimentelle Beobachtung des untersuchten Prozesses möglich sein.

Bound-free Pair creation in combined laser and Coulomb fields

Abstract:

In the present work, the process of bound-free pair production of electrons and positrons in combined laser and Coulomb fields is investigated. It is assumed that an ion at relativistic speed collides with an intense x-ray laser beam. The process proceeds nonlinearly due to simultaneous absorption of several laser photons. The capture of the electron into the ground state and excited states is considered. The process probability is calculated in the framework of relativistic quantum mechanics. For this nonlinear process ordinary perturbation theory cannot be applied; instead the *Strong-Field-Approximation* is used, which neglects the influence of the Coulomb field on the positron. An analytical result for the amplitude is derived and numerical results of pair production rates for parameters for the planned x-ray laser at DESY are presented. The main outcome is that bound-free pair production has a sizeable probability and that it is comparable to the free-free reaction channel. Experimental observation of this process will become feasible in the near future.

Im Rahmen dieser Diplomarbeit sind die folgenden Publikationen entstanden:

- C. Deneke, C. Müller und C. H. Keitel, in Vorbereitung, *Bound-free e^+e^- pair creation with a linearly polarized laser field and a nuclear field*
- C. Müller, C. Deneke und C. H. Keitel, eingereicht (arXiv:0803.3512 [atom-ph]), *Muon pair creation by two x-ray laser photons in the field of an atomic nucleus*

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Allgemeines zu Paarerzeugung	1
1.2	Paarproduktion mit Laserstrahlung	3
1.3	Experimentelle Untersuchungen	4
1.3.1	Experiment am SLAC (E-144)	5
1.3.2	Experimenteller Fund von gebunden-freier Paarerzeugung	6
1.3.3	Röntgen-Freie-Elektronen Laser	7
1.4	Untersuchter Prozess und Stoßgeometrie	9
1.5	Wesentliche Ergebnisse und Aufbau dieser Arbeit	12
2	Analytische Rechnung	13
2.1	Theoretische Methode	13
2.1.1	Grundlegende Betrachtungen	13
2.1.2	S-Matrix Formalismus	16
2.1.3	Struktur der Rechnung	21
2.2	Analytische Rechnung für die K-Schale	24
2.2.1	Wasserstoffähnliche Atome	24
2.2.2	Positron-Volkov-Zustände	24
2.2.3	Übergangsamplitude, S-Matrix	26
2.2.4	Elektronenspinsumme	27
2.2.5	Positronenspinsumme	28
2.2.6	Phasenfaktor und generalisierte Besselfunktionen	34
2.2.7	Amplitudenquadrat	36
2.2.8	Ortsintegration	40
2.2.9	Endergebnis	46
2.3	Analytische Rechnung für die L-Schale	48
2.3.1	Einfang in den 2s -Zustand	48
2.3.2	Einfang in den 2p_{1/2} -Zustand	60
2.4	Transformation ins Laborsystem	69

3	Ergebnisse	71
3.1	Numerische Methode und Parameter	71
3.2	Einphotonenprozess	73
3.3	Totale Raten im Kernsystem	76
3.4	Differentielle Raten im Kernsystem	79
3.5	Differentielle Raten im Laborsystem	82
3.6	Grenzwert hoher Intensitäten	85
3.7	L-Schale	86
3.7.1	Differentielle Raten für den $2s$ und $2p_{1/2}$ -Zustand	87
3.7.2	Vergleich von K und L Schale	89
3.8	Myonen	91
3.9	Reale Laser	94
4	Zusammenfassung und Ausblick	97
4.1	Zusammenfassung	97
4.2	Ausblick	99
A	Verwendete Einheiten und Notation	101
B	Verwendete Abkürzungen	103
C	Integrale	109
C.1	Integrale für K- und L-Schale	109
C.2	Integrale für die L-Schale	112
D	Generalisierte Besselfunktionen	115
D.1	Numerische Beispiele	119

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Allgemeines zu Paarerzeugung

Bei der Aufstellung relativistischer Wellengleichungen in der Quantenmechanik (Klein-Gordon und Diracgleichung, siehe z.B. in [BD64]) fand man neben den üblichen Lösungen auch Lösungen für negative Energien. Dies stand im Widerspruch zu allen bisherigen Annahmen und der Existenz von stabilen atomaren Zuständen. Dirac fand 1929 [Dir30] einen Ausweg, indem er, dem Pauli-Prinzip folgend, die Lösungen von Elektronen mit negativer Energie im negativen Energiekontinuum anordnet. Alle Zustände sind besetzt und daher können keine Elektronen von gebundenen Zuständen ins negative Kontinuum *fallen*. Es können aber durch bestimmte physikalische Prozesse Elektronen aus diesem Dirac-See in Bereiche positiver Energie gehoben werden. Nun besteht ein Loch im Dirac-See und dieses wird in der Dirac'schen Löchertheorie als Positron gedeutet [BD64].

Die experimentelle Entdeckung von Positronen gelang Anderson im Jahre 1933 [And33]. In diesem Experiment untersuchte Anderson kosmische Strahlung in einer Nebelkammer. Durch ein Magnetfeld werden geladene Teilchen abgelenkt, und der Krümmungsradius entspricht dem Verhältnis von Masse zu Ladung. In der Untersuchung wurde festgestellt, dass die Krümmung einiger unbekannter Teilchen der von Elektronen entgegengesetzt war. Anderson benannte sie Positronen, da sie die Eigenschaften positiv geladener Elektronen hatten.

Eine Erweiterung und Neuinterpretation der Dirac-Theorie erfolgt in der Quantenfeldtheorie [PS95, BD67]. So ist eine Quantenfeldtheorie automatisch eine Vielteilchentheorie. In der Quantenelektrodynamik (QED) können Felder anschwingen, die man als Teilchen- oder Antiteilchen deuten kann. Der Vakuumzustand besteht aus virtuellen Teilchen-Antiteilchen-Paaren. Dies folgt aus der Energie-Zeit Unschärfe - für sehr kurze Zeiten können ausreichende Energien zur Verfügung stehen, dass sich Teilchen-Antiteilchen-Paare bilden. Diese müssen nicht unbedingt

Elektronen sein. *Sehen* kann man diese aber nur, wenn es gelingt, das Paar räumlich über eine Comptonwellenlänge zu separieren. Die Teilchen werden dann real. Legt man zum Beispiel ein statisches elektrisches Feld an, so wird ein virtuelles Elektron beschleunigt und gewinnt Energie. Ist der Energiegewinn über einer Compton-Wellenlänge größer als seine Masse, entstehen spontan reale $e^+ e^-$ Paare. Diese Feldstärke ist die kritische Feldstärke der QED [Sau31]:

$$\mathcal{E}_{kr} = \frac{m^2 c^3}{e \hbar} = 1.3 \times 10^{16} \text{V/cm} \quad (1.1)$$

Schwinger [Sch51] fand 1951, dass die Wahrscheinlichkeit für die spontane Paarerzeugung in einem elektrischen Feld der Stärke \mathcal{E}_0 näherungsweise exponentiell mit dem Verhältnis von kritischer zu angelegter Feldstärke abfällt:

$$W \sim \exp(-\pi \mathcal{E}_{kr} / \mathcal{E}_0) \quad (1.2)$$

Ist man also Größenordnungen von der kritischen Feldstärke entfernt, so ist die Wahrscheinlichkeit für Paarproduktion verschwindend gering.

Anstelle eines statischen elektrischen Feldes kann man sich auch andere Felder vorstellen. Von Pomeranchuk wurde erörtert, dass das Erdmagnetfeld aus Sicht eines relativistischen kosmischen Teilchens mit einer Energie von $\sim 10^{19}$ eV kritisch ist [Pom40]. Auch gibt es Anhaltspunkte, dass das Magnetfeld an der Oberfläche von Neutronensternen den kritischen Wert von $\mathcal{B}_{kr} = 4.4 \times 10^{13}$ Gauß übersteigt [Kou98]. Ein statisches, überkritisches Magnetfeld führt aber im Gegensatz zu elektrischen Feldern zu keiner Paarerzeugung. Aber auch Wechselfelder können zu Paarproduktion führen [Bec91, BI70]. Von besonderem Interesse sind dabei elektromagnetische Felder, da man in modernen Experimenten hohe Feldstärken elektromagnetischer Felder generieren kann.

Große Beachtung fand ein Experiment, welches 1997 am *Stanford Linear Accelerator Center* (SLAC) durchgeführt wurde [BFHS⁺97]. Dort wurden zum ersten Male Elektron-Positron-Paare aus dem Vakuum mit Hilfe eines starken Lasers erzeugt. Populäre Medien (z.B. *Die Zeit*) gingen so weit, diesem Experiment einen Schöpfungsakt zuzuschreiben. Aber selbst unter Wissenschaftlern ist man sich einig, dass dieser Prozess von fundamentalem Interesse ist, da die Instabilität des QED-Vakuums bis dato nur in externen Coulombfeldern (in Schwerionenstößen, [EM95]) überprüft worden ist.

Die QED ist eine der am präzisesten getesteten Theorien der modernen Physik und gilt als das Rollenmodell vieler Theorien. Daher ist die Ausweitung der experimentellen und auch theoretischen Untersuchung bei hohen Feldstärken und Energien von großer Bedeutung. Durch die Entwicklung intensiver und hochfrequenter Laser wird die experimentelle Überprüfung zunehmend besser.

1.2 Paarproduktion mit Laserstrahlung

Tunnel- und Multiphotonenregime. Bei der Paarerzeugung mit Lasern wird eine bestimmte Anzahl Photonen aus dem Laserfeld absorbiert und ihre Energie steht für die entstandenen Teilchen zur Verfügung. Die Kohärenzeigenschaft von Lasern ist hier unabdingbar, da nur so die Energie mehrerer Photonen genutzt werden kann¹. Für die Ruhemassen der Positronen und Elektronen muss sehr viel Energie aufgebracht werden. Zudem kann die Bewegung der geladenen Leptonen im Laserfeld weitere Energie erfordern. Es wird also mindestens ~ 1 MeV an Photonenenergie benötigt. Photonen optischer Laser haben eine Energie von ~ 1 eV; man braucht in diesem Fall also sehr viele Photonen, um die grundlegende Bedingung der Energieerhaltung zu erfüllen. Ist das Laserfeld bzw. seine Intensität schwach, dann wird die Paarerzeugung mit jeder höheren Photonenordnung unwahrscheinlicher. Bei geringen Photonenenergien und Laserfeldstärken ist die Wahrscheinlichkeit für Paarerzeugung verschwindend gering. Um zu endlichen Produktionswahrscheinlichkeiten zu kommen, gibt es nun zwei Möglichkeiten: Man muss die Laserfrequenz signifikant erhöhen, dann spricht man vom *Multiphotonenregime*, oder alternativ die Laserfeldstärke (*Tunnelregime*). Bei letzterem ist die Feldstärke so hoch, dass auch höhere Photonenordnungen gleichermaßen beitragen. Es wird eine große Anzahl Photonen simultan absorbiert. Der Name *Tunnelregime* rührt daher, dass sich die Produktionswahrscheinlichkeit wie die Tunnelwahrscheinlichkeit quantenmechanische Tunnelprozesse verhält ($W \sim \exp \left\{ -\pi \left(\frac{\mathcal{E}_{kr}}{\mathcal{E}_{Laser}} \right) \right\}$). Sind die Energien der Laserphotonen dagegen so hoch, dass für die Energieerhaltung nur wenige Photonen benötigt werden, spricht man vom *Multiphotonenregime*. Es ist immer die von der Energieerhaltung niedrigst mögliche Photonenordnung signifikant, alle höheren Ordnungen tragen nur geringfügig bei. Mit einem (prinzipiell) einfachen Trick, der Blauverschiebung der Frequenzen bei schnellen Bezugssystemen, kann man mit Photonen moderner, in Planung befindlicher Laserquellen (XFEL, siehe Abschnitt 1.3.3) Paarerzeugung mit endlichen Raten im *Multiphotonenregime* erreichen. Die Berechnung soll das Ziel der vorliegenden Arbeit sein und wird in Abschnitt 1.4 genauer erläutert.

Mögliche Prozesse. Möchte man Paarerzeugung mit Lasern untersuchen, muss man sich zunächst vor Augen führen, dass aus einem Laserfeld im Vakuum alleine keine Elektron-Positron-Paare entstehen können. Alle eichinvarianten Lorentz-Skalare (z.B. $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ und $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$) sind identisch Null im Falle einer ebenen elek-

¹Prinzipiell ist auch ein Mehrphotonenprozess ohne kohärentes Licht möglich [GM31], wenn die Photonendichte (also die Intensität) entsprechend hoch ist. Dann ist es statistisch möglich, dass mehrere Photonen gemeinsam wechselwirken. Ausreichend hohe Intensitäten kann man allerdings wiederum nur mit Laserlicht bereitstellen.

tromagnetischen Welle. Da der Prozess der Paarerzeugung (bzw. seine Wahrscheinlichkeit oder sein Wirkungsquerschnitt) eich- und Lorentzinvariant sein muss, ist er mit einem ebenen Laserfeld alleine nicht möglich.

Es gibt aber verschiedene Modi, mit Lasern Paare zu erzeugen. Zum einen kann man den Laser fokussieren, dann hat er nicht mehr die Eigenschaft, als ebene Welle aufgefasst zu werden. Eine theoretische Beschreibung erfordert, die Wellenform in die Wellenfunktion zu inkorporieren, und ist daher schwierig [Bul06]. Von experimenteller Seite muss man optische Elemente entwickeln, welche einen Laser im Röntgenbereich überhaupt (stark) fokussieren können, da herkömmliche Linsen bei derart kleinen Wellenlängen transparent sind.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, zwei gegenläufige (Röntgen-)Laserfelder zur Kollision zu bringen [BI70]. In dieser Konfiguration kann man die Vergrößerung von Frequenz und Feldstärke durch Lorentz-Boosts nicht ausnutzen. Voraussetzung sind daher sehr hohe Intensitäten und Frequenzen, so dass Magnetfeldeffekte eine Rolle spielen [RMM⁺].

Überlagert man ein hochenergetisches γ -Photon mit einem Laserfeld, können ebenfalls e^+e^- -Paare entstehen. Dies wurde u.a. von [NR64] untersucht. Nimmt man zudem noch ein Coulombfeld hinzu [LJK], hat man wiederum den Vorteil, dass man durch Lorentz-Boosts die Laserparameter verstärken kann.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, Laser- und Coulombfeld zu betrachten. Die Berechnung soll in der vorliegenden Arbeit geschehen. Dies ist der sogenannte nichtlineare Bethe-Heitler Prozess:

$$Z + n\hbar\omega \rightarrow Z + e^- + e^+ \quad (1.3)$$

Abbildung 1.1 zeigt die zum hier betrachteten Prozess der Paarproduktion in Laser- und Coulombfeld zugehörigen Feynman-Diagramme. Die wellenartigen Linien über den Fermionlinien stellen die Laserwechselwirkung (in allen Ordnungen) mit den Fermionen dar. Die doppelte Fermionlinie in Abb. 1.1(a) soll anzeigen, dass das Elektron im Coulombpotential gebunden ist. Die virtuelle Wechselwirkung mit dem Coulombpotential ist hier mit der gestrichelten Linie nach unten ausgedrückt. Gebunden-freie (Abb. 1.1(a)) und frei-freie (Abb. 1.1(b)) Paarerzeugung sind zwei konkurrierende Reaktionskanäle. Frei-freie Paarproduktion wurde bereits von [MVG03a, MVG03b] untersucht, die vorliegende Arbeit untersucht die gebunden-freie Paarproduktion.

1.3 Experimentelle Untersuchungen

In diesem Abschnitt sollen zwei Experimente zur Paarerzeugung vorgestellt und ein Überblick über geplante Röntgen-Freie-Elektronen-Laser (XFEL) gegeben werden.

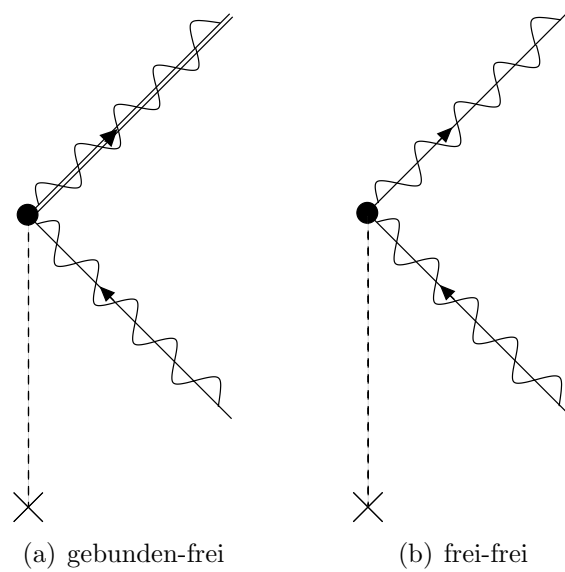


Abbildung 1.1: Die konkurrierenden Feynmangraphen für Paarerzeugung in einem Laser- und Coulombfeld. Die Notation ist auf S. 4 erklärt.

1.3.1 Experiment am SLAC (E-144)

Eine Kollaboration um Burke und McDonald konnte 1997 erstmals die Entstehung von Elektron-Positron Paaren durch Streuung von Licht an einem hochenergetischen Elektronenstrahl am SLAC demonstrieren [BFHS⁺97, BBK⁺99].

Dafür wurde ein gepulster, optischer Laser mit einer (fokalen) Intensität von $I = 10^{18}$ W/cm² mit einem gepulsten Elektronenstrahl von 10^{10} Elektronen/Puls mit einer Energie von 46.6 GeV (entsprechend einem γ -Faktor von $\sim 10^5$) überlagert. Der hohe γ -Faktor der Elektronen führt dazu, dass Feldstärke und Frequenz im Ruhesystem der Elektronen sehr viel größer sind. Für dieses Experiment ist die kritische Feldstärke in Reichweite und die Energieerhaltung erlaubt Paarproduktion mit wenigen Photonen.

Gemessen wurden die entstandenen Positronen sowie deren Energie. Es wurden mehr als hundert Positronen (über Untergrund) identifiziert - mit typischen Energien von ~ 15 GeV. Die zugeordneten Elektronen waren nicht identifizierbar.

Für die Paarproduktion werden zwei verschiedene Mechanismen betrachtet. Der Breit-Wheeler Prozess zusammen mit nichtlinearer Compton-Streuung ist ein zweistufiger Prozess:

$$\begin{aligned}
 e + n\hbar\omega_0 &\rightarrow e' + \omega \\
 \hbar\omega + \tilde{n}\hbar\omega_0 &\rightarrow e^+ + e^-
 \end{aligned}$$

Zunächst werden ein bzw. zwei Photonen an einem Elektron rückgestreut, es ent-

stehen hochenergetische Compton-Photonen. Diese können nun in einem zweiten Schritt mit weiteren fünf bzw. vier Laserphotonen wechselwirken und ein Elektron-Positron Paar bilden. Es werden insgesamt fünf Photonen in diesem zweistufigen Prozess absorbiert.

Alternativ kann die Paarbildung auch über den nichtlinearen Bethe-Heitler Prozess stattfinden:

$$e + n\hbar\omega_0 \rightarrow e' + e^+ + e^-$$

In Anwesenheit eines Elektrons werden n (in diesem Experiment fünf) Laserphotonen absorbiert und es entsteht ein Elektron-Positron-Paar. In seinem Ruhesystem ist die Masse des Elektrons mit der Photonenenergie vergleichbar und erfährt daher einen Rückstoß.

Formal sind beide Prozesse sehr ähnlich, sie haben die gleichen eingehenden und ausgehenden Teilchen. Beim Breit-Wheeler Prozess wird die Wechselwirkung ausschließlich über reale Photonen vermittelt, beim Bethe-Heitler-Prozess werden reale Laserphotonen absorbiert, der Prozess aber durch die virtuellen Photonen des Coulombfelds vermittelt.

In Überlegungen zum Experiment E-144 wurde geschlossen, dass der Breit-Wheeler den Bethe-Heitler Prozess (für die gegebenen Parameter) bei weitem übertrifft. Eine genaue Theorie des Bethe-Heitler Prozesses für Elektronen mit Einbeziehung des Rückstoßes ist nicht vorhanden, wird aber grundsätzlich in [Rit72] besprochen. Anstelle der Elektronen kann man sich vorstellen, dass auch Protonen oder Ionen an einem intensiven Laserstrahl gestreut werden können. Man erreicht keine vergleichbar hohen γ -Faktoren, aber es sind höherenergetische Laser verfügbar (siehe Abschnitt 1.3.3). Die Bedeutung der beiden im SLAC-Experiment verantwortlichen Prozesse ist dabei umgekehrt. Der Wirkungsquerschnitt für Compton-Streuung skaliert mit $1/M^2$ (siehe [BLP91], M ist die Masse des gestreuten Teilchens) und ist daher stark unterdrückt (um ca. sechs Größenordnungen). Der Produktionsquerschnitt des Bethe-Heitler Prozesses ist dabei im Falle hoher Energie fast identisch (siehe [Mül03]). Auch ist die Masse der Protonen bzw. Ionen so groß gegenüber der Photonenenergie, dass ein Rückstoß auf diese vernachlässigbar klein ist. Für die Kollision eines intensiven, hochfrequenten Lasers mit einem Proton- oder Ionenstrahl ist also der nichtlineare Bethe-Heitler Prozess der dominierende Reaktionskanal für Paarproduktion.

1.3.2 Experimenteller Fund von gebunden-freier Paarerzeugung

Gebunden-freie Paarerzeugung mit Lasern ist noch nicht beobachtet worden, aber der Prozess ist aus Schwerionenstößen bekannt. Experimentell wurde die gebunden-freie Paarerzeugung erstmals 1993 beobachtet [BGF⁺93, BGF⁺94]. Es wurden

hoch geladene und stark beschleunigte Ionen (U^{92+} , später La^{57+}) auf ein dünnes, ruhendes Target geschossen. Beim Durchgang durch letzteres können verschiedene Reaktionen eintreten. Sehr häufig wird Ladungstransfer vom Target zum Projektil stattfinden. Dieser Prozess dominiert, sein Wirkungsquerschnitt nimmt aber mit steigender Projektilenergie ab. Durch die (z.T. hohen) elektromagnetischen Übergangsfelder beim Überlapp der Coulomb-Felder der kollidierenden Atome können auch Elektron-Positron Paare entstehen. Im Unterschied zum Ladungstransfer steigt der Wirkungsquerschnitt für diese Reaktion mit der Projektilenergie. Die Elektronen können einerseits frei, aber auch gebunden (im Projektil) entstehen. Bei letzterem ändert sich der Ladungszustand des Ions. Im Experiment wurde nun in Koinzidenz ein Positron und ein Wechsel des Ladungszustandes gemessen. Dies entspricht gebunden-freier Paarproduktion oder alternativ frei-freier Paarproduktion mit gleichzeitigem Ladungstransfer. Die beiden Prozesse haben verschiedene charakteristische Winkelverteilungen der Positronen und skalieren verschieden mit der Kernladung der Targetatome sowie mit der Energie der Projektile (s.o.). Daher kann man abschätzen, dass der letztgenannte Prozess in den meisten Fällen einen fast verschwindenden Untergrund zu dem erstgenannten Prozess der Paarproduktion mit Einfang beiträgt.

In den genannten Artikeln (s.o.) wurde die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von der Projektilenergie und den Kernladungszahlen von Projektil und Target untersucht. Ferner konnte auch die Häufigkeit von frei-freier Paarproduktion durch Messung der Koinzidenz von Positron und ursprünglichem Ion (ohne Änderung der Ladungszahl) bestimmt werden. Es wurde gefunden, dass die beiden Paarproduktionskanäle von etwa gleicher Größenordnung sind, die gebunden-freie Paarproduktion also kein vernachlässigbarer Reaktionskanal ist.

Zusammenfassend wurde in diesem Experiment zwischen den beiden Reaktionskanälen unterschieden, die Energie- und Winkelverteilung der entstandenen Positronen konnte ermittelt und der Wirkungsquerschnitt konnte in Abhängigkeit von Energie und Ladung der beteiligten Teilchen gemessen werden.

Großes Interesse an dem Prozess der gebunden-freien Paarerzeugung in relativistischen Ionenstößen rührt daher, dass dieser für den größten Teil der Ionenverluste (durch die Änderung des Ladungszustandes) in hochenergetische Ionenstrahlen moderner Experimente verantwortlich gemacht wird.

1.3.3 Röntgen-Freie-Elektronen Laser

An mehreren Orten sind Lichtquellen in Planung, welche im Röntgenbereich emittieren und Lasereigenschaften haben. Gleichzeitig haben sie auch eine sehr hohe Intensität und kurze Pulsdauer. Die ersten sogenannten *Röntgen-Freie-Elektronen-*

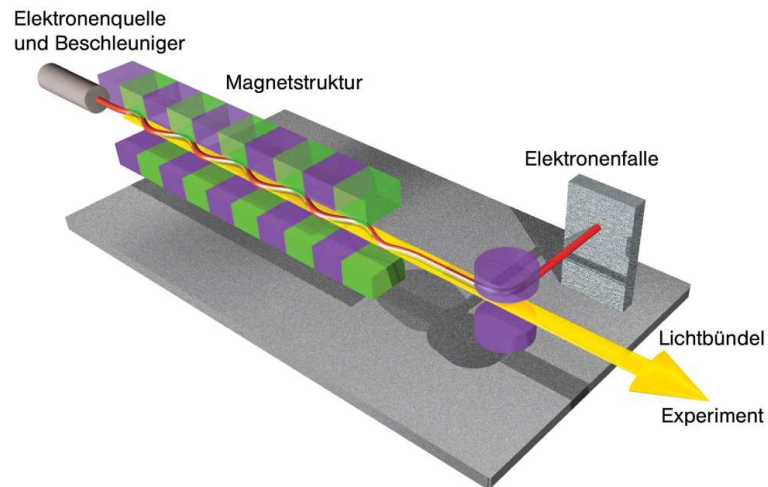


Abbildung 1.2: Grundaufbau eines Röntgenlicht freie-Elektronen Lasers (XFEL).
(Quelle: DESY, Hamburg)

Laser (*X-ray free-electron laser, XFEL*) sollen 2009 in Stanford² und 2013 in Hamburg³ fertiggestellt werden. Bereits heute existiert der FLASH-Laser, welcher eine Vorstufe des XFEL in Hamburg darstellt [Ack07]. Er emittiert Photonen von ~ 100 eV bei einer Intensität von bis zu 10^{16} W/cm² und erste Experimente wurden bereits durchgeführt [SBF⁺07, MJF⁺07].

Das Prinzip eines Freie-Elektronen-Lasers ist in Abb. 1.2 illustriert und in [DES02, SSJ00] beschrieben. Im Gegensatz zu einem konventionellen Laser besteht das Verstärkungsmedium eines Röntgenlasers aus freien Elektronen. Diese werden zuvor in einer Elektronenkanone hergestellt und auf hohe, relativistische Geschwindigkeit vorbeschleunigt. Im nächsten Schritt werden die Elektronen in einen sogenannten Undulator bündelweise (in sog. Paketen oder *bunches*) injiziert. Dieser besteht im wesentlichen aus alternierenden Magneten und bringt die Elektronen auf eine sinusförmige Bahn. Durch diese Oszillation emittieren sie Synchrotronstrahlung, die aufgrund der hohen Energie fast ausschließlich in Vorwärtsrichtung abgestrahlt wird. Es entsteht ein Strahlungsfeld aus spontaner Emission der Elektronen und dieses ist im Prinzip durch Konfiguration und Stärke der Magneten sowie der Elektronenenergie durchstimmbare. Durch geeignete Abstimmung der Elektronenenergie auf die Undulatoreigenschaften kann man erreichen, dass die Elektronen in einer Periode genau eine Wellenlänge (des Strahlungsfeldes) zurück-

²LCLS (*Linear Coherent Light Source*) bei SLAC (*Stanford Linear Accelerator Center*: www-ssl.slac.stanford.edu/lcls)

³XFEL bei DESY (*Deutsches Elektronen-Synchrotron*: www.xfel.eu)

fallen; es liegt konstruktive Interferenz der emittierten Strahlung vor. Wichtig ist dabei die Ausbildung sogenannter *microbunches* (Kleingruppen). Das Paket von Elektronen wechselwirkt mit seinem eigenen Strahlungsfeld - man spricht vom sogenannten SASE-Prinzip (*self amplification of spontaneous emission*). Abhängig von der relativen Phase zwischen elektromagnetischer Strahlung und Elektronenoszillation werden die Elektronen entweder beschleunigt oder verzögert (abgebremst). Elektronen in Phase verlieren und Elektronen in Gegenphase gewinnen an Energie.

Auf diese Weise etabliert sich eine Feinstruktur, die longitudinale Verteilung des Elektronenpakets wird in kleine Scheiben *geschnitten*. Mehr und mehr Elektronen beginnen in Phase zu strahlen, was zu einer wachsenden kohärenten Überlagerung der Strahlung führt. Anstatt, dass die einzelnen Elektronen individuell strahlen, strahlen nun alle Elektronen nahezu in Phase. Solange sich diese *microbunches* fortbilden, steigt die Leistung exponentiell an, bis sie an einem Punkt sättigt und keine Leistungssteigerung mehr eintritt. Dann ist das Paket (*bunch*) der Elektronen vollständig in Kleingruppen unterteilt.

Der Elektronenstrahl wird nun in einem *Elektronenauffänger* abgeführt und die entstandene Strahlung weist die gewünschten Eigenschaften geringer Bandbreite, voller (normalerweise) linearer Polarisierung und transversaler Kohärenz auf. Die longitudinale Kohärenz ist dabei eher schwach. Zudem sind die Frequenzen im harten Röntgenbereich sowie die Intensität extrem hoch.

Wichtig für die Realisierung sind eine extrem hohe Ladungsdichte und geringe Energieverteilung in den Elektronpaketen zusammen mit einem sehr präzise einstellbaren Magnetfeld und genauer Elektronenstrahlkontrolle.

1.4 Untersucher Prozess und Stoßgeometrie

Dirac'sche Löchertheorie. Der Prozess der gebunden-freien Paarproduktion kann im Rahmen der Dirac'schen Löchertheorie beschrieben werden (Abb. 1.3). Zunächst einmal sind alle Zustände im negativen Energiekontinuum (unter Berücksichtigung des Pauliprinzip) besetzt. Dagegen sind alle Zustände im positiven Energiekontinuum unbesetzt, ebenso die atomaren Zustände. Dies ist das Vakuum in der relativistischen Quantenmechanik. Fügt man einen Laserstrahl hinzu, führt die Wechselwirkung von Laserfeld, Coulombfeld und Vakuum dazu, dass ein Elektron mit negativer Energie in einen gebundenen Zustand gehoben wird. Im negativen Energiekontinuum befindet sich ein *Loch*, welches als Positron interpretiert wird. Die Energie wird durch das Laserfeld aufgebracht und es wurden letztendlich zwei reale Teilchen gebildet: Ein freies Positron und ein gebundenes Elektron. Alternativ kann das Elektron natürlich auch in das positive Kontinuum gehievt werden. Dies entspricht der frei-freien Paarerzeugung.

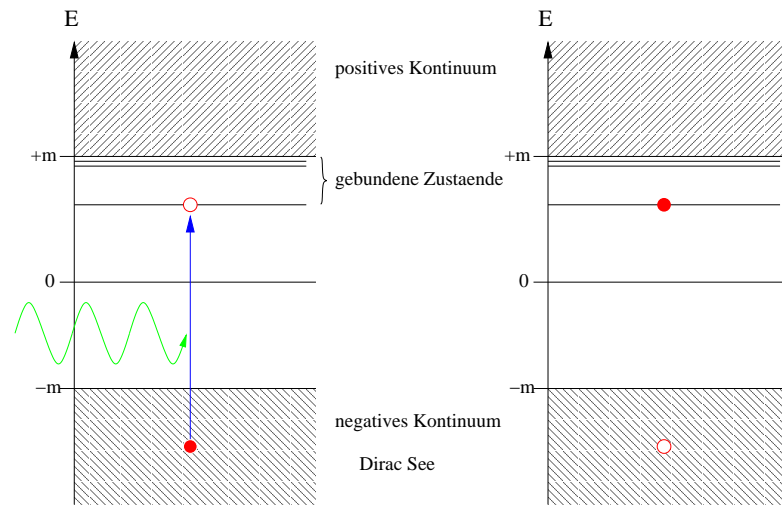


Abbildung 1.3: Darstellung gebunden-freier Paarproduktion im Rahmen der Dirac'schen Löchertheorie. Der volle rote Kreis entspricht einem Elektron mit Energie E , der rote Ring dem Fehlen eines solchen Teilchens. Der Zustand ist unbesetzt bzw. es liegt ein *Loch* vor.

Stoßgeometrie. Wie bereits weiter vorne beschrieben, soll in der vorliegenden Arbeit gebunden-freie Paarerzeugung in Laser- und Coulombfeld untersucht werden. Die Energieerhaltung fordert $n\hbar\omega \gtrsim E_b + E_p \approx 2m_e c^2 \sim 1 \text{ MeV}$. Dabei sind E_b die Bindungsenergie (inklusive Ruhemasse) des Elektrons und E_p die Ruhemasse und kinetische Energie des Positrons. In absehbarer Zeit werden sich keine Laserquellen mit Photonenenergien in der Größenordnung von MeV realisieren lassen, die Planungen für den XFEL bei DESY ersuchen maximal $\hbar\omega \sim 12 \text{ keV}$. So wäre eine simultane Absorption von $n \sim 100$ Photonen für die Energieerhaltung erforderlich und somit ginge die Wahrscheinlichkeit für Paarproduktion gegen nahezu Null.

Das Coulombfeld, in welchem das erzeugte Elektron gebunden werden soll, stammt von einem (hoch geladenen) Ion. Lässt man dieses nun dem Laser entgegenlaufen, kann man sich zu Nutze machen, dass der Prozess der Paarproduktion im Ruhesystem des Ions, dem Kernsystem, stattfindet. Bewegt sich das Ion mit relativistischer Geschwindigkeit, dann wird die Laserfrequenz blauverschoben. Formal lautet die Lorentz-Transformation für die Frequenz $\omega' = \gamma(1 + \beta)\omega$, wobei γ bzw. $\beta = \sqrt{1 - 1/\gamma^2}$ die relativistische Geschwindigkeit ist. Beschleunigt man die Ionen auf relativistische Geschwindigkeiten von $\gamma \sim 50$, erhält man auf diese Weise eine Frequenz im Kernsystem von $\omega' \sim 100\omega$. So sind für die Energieerhaltung nur die Absorption einiger weniger Photonen erforderlich. Abbildung 1.4 veranschaulicht die hier beschriebene Stoßgeometrie. Ion und Laser kollidieren frontal, in der Nähe

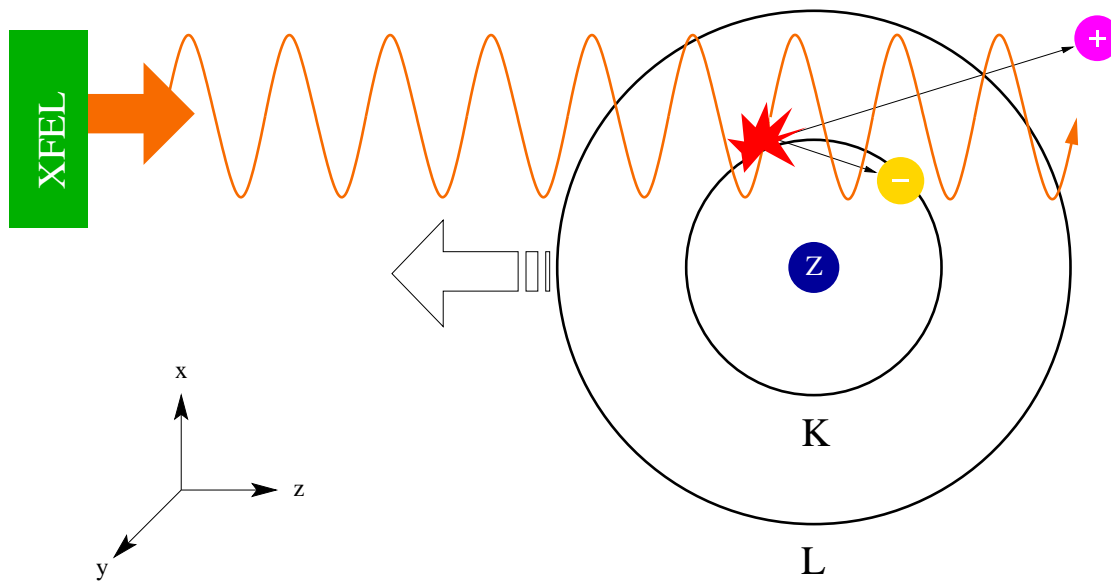


Abbildung 1.4: Stoßgeometrie für den in dieser Arbeit untersuchten Prozess

des Kerns entsteht das Elektron-Positron-Paar. Das Elektron kann nun in einem gebundenen Zustand (in der K-Schale oder höher) oder als freies Teilchen entstehen. Das Positron ist immer frei, es ist nach der Entstehung aber noch unter dem Einfluss von Laser- sowie Coulombfeld.

Ein $\gamma = 50$ ist sehr im relativistischen Bereich, dennoch produzieren Protonen- und Schwerionenbeschleuniger auch Teilchen mit deutlich höheren Geschwindigkeiten. So ist am LHC $\gamma = 7000$ (Protonen) bzw. $\gamma = 3500$ (Ionen), bei HERA $\gamma = 1000$ (Protonen) und bei der GSI $\gamma = 30$ (Ionen) bzw. $\gamma = 100$ (Protonen) vorgesehen. Natürlich ist es erforderlich, dass es an einem Ort sowohl eine Ionen- bzw. Protonenquelle als auch einen Röntgenlaser gibt.

Vergleich von Ionisation und gebunden-freier Paarproduktion. Der Prozess der gebunden-freien Paarproduktion ist von einem theoretischem Standpunkt dem Prozess der Ionisation sehr ähnlich. Bei der Ionisation geht man zunächst von einem gebundenen Elektron aus. Schaltet man nun eine Laserwechselwirkung ein, kann das Atom ionisiert werden und das Elektron wird zu einem freien Teilchen. Bei der Paarproduktion liegt im Endzustand ein gebundenes Elektron vor. Zu Beginn sind natürlich keine Teilchen vorhanden, aber da es sich beim Positron um ein Antiteilchen handelt, sind Anfangs- und Endzustand vertauscht. Antiteilchen bewegen sich rückwärts in der Zeit. Daher liegt formal im Anfangszustand ein freies Positron vor. Die Wechselwirkung wird ebenfalls durch das Laserfeld vermittelt. Anstelle des gebundenen Elektrons im Anfangszustand gibt es ein gebundenes

Elektron im Endzustand und anstelle des freien Elektrons im Endzustand gibt es ein freies Positron im Anfangszustand. Die gebunden-frei Paarproduktion ist also analog zu einem zeitumgekehrten Ionisationsprozess. Eine formale Beschreibung der beiden Prozesse wird in Abschnitt 2.1.2 unternommen.

1.5 Wesentliche Ergebnisse und Aufbau dieser Arbeit

Neue Ergebnisse. In dieser Arbeit wird der Prozess der gebunden-freien Paarerzeugung von Elektron-Positron Paaren in Laser- und Coulombfeld untersucht. In früheren Arbeiten [Mül03, Mat05] wurde bereits zirkulare Polarisation für den Einfang in die K-Schale betrachtet. Hier wird erstmalig eine Laserwelle von linearer Polarisation betrachtet, welche zu einer strukturell anderen Winkelverteilung der erzeugten Positronen führt. Die Berechnung von linearer Polarisation ist im Vergleich zur zirkularen technisch anspruchsvoller und führt zu den sogenannten generalisierten Besselfunktionen. Im Hinblick auf die geplanten XFEL-Anlagen entspricht lineare Polarisation den experimentellen Gegebenheiten. Zum ersten Mal für gebunden-freie Paarproduktion mit Laserfeldern wird überdies der Einfang in andere Schalen als der K-Schale betrachtet. Diese Erweiterung erhöht den Anteil des gebunden-freien Reaktionskanals und entspricht einer Korrektur von bis zu 20%.

Aufbau. Die vorliegende Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut: Nach diesem einleitenden Kapitel folgt die Beschreibung der für die theoretische Untersuchung des vorliegenden Prozesses maßgeblichen analytischen Rechnung (2). Dort wird zunächst die angewandte theoretische Methode besprochen (Abschn. 2.1). Anschließend wird die Rechnung explizit ausgeführt (Abschn. 2.2 und 2.3). Im darauf folgenden Kapitel 3 wird zunächst die für diese Rechnung erforderliche numerische Methode dargelegt und anschließend werden numerische Ergebnisse für den hier behandelten Prozess vorgestellt und diskutiert. Kapitel 4 fasst die aus dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnisse zusammen und gibt einen Ausblick. Einige detaillierte Punkte werden in den Anhängen A bis D weiter ausgeführt.

Kapitel 2

Analytische Rechnung

Im vorliegenden Kapitel wird der Prozess der Paarproduktion mit Einfang mit analytischen Methoden untersucht. Zunächst wird in Abschnitt 2.1 eine Einleitung in die theoretische Methode vorgelegt. Dabei werden hier benutzte Approximationen und die angenommenen Lasereigenschaften diskutiert. Anschließend werden in Abschnitt 2.2 alle erforderlichen Schritte für die Berechnung der Paarproduktion mit Einfang in den Grundzustand durchgeführt. Im darauf folgenden Abschnitt 2.3 werden diejenigen Schritte für den Einfang in die L-Schale wiederholt, für welche Unterschiede zur vorigen Rechnung bestehen. In Abschnitt 2.4 werden die gefundenen analytischen Ergebnisse ins Laborsystem transformiert.

2.1 Theoretische Methode

2.1.1 Grundlegende Betrachtungen

Relativistische Rechnung. Für die Berechnung der Erzeugung von Elektron-Positron-Paaren ist eine relativistische Beschreibung unabdingbar. Die Existenz von Teilchen mit negativer Energie und deren Interpretation als Antiteilchen ist schließlich eine Folge der relativistischen Quantenmechanik und in dieser natürlicherweise inkorporiert. Des Weiteren haben die Elektronen und Positronen in starken Laserfeldern relativistische Geschwindigkeiten und bewegen sich auf periodischen Bahnen. Da die erzeugten Elektronen und Positronen Teilchen mit halbzahligem Spin sind, erfolgt die korrekte Beschreibung im Dirac-Formalismus. Der Vergleich von Experimenten und theoretischen Rechnungen im Dirac-Formalismus bei Schwerionenstößen hat gezeigt, dass für die grundsätzliche Betrachtung des Problems eine feldtheoretische Beschreibung nicht erforderlich ist [EM95].

Exakte Lösungen der Diracgleichung. Für die Dirac-Gleichung mit zusätzlichen Wechselwirkungstermen existieren eine begrenzte Anzahl analytisch berechenbarer Lösungen. So ist die Lösung des relativistischen Wasserstoffatoms mit der Dirac-Gleichung exakt möglich. Dies gibt Korrekturen zu der Lösung des H-Atoms im Rahmen der (nichtrelativistischen) Schrödingergleichung.

Ebenso fand Volkov bereits im Jahre 1935 die Lösung der Bewegungsgleichung von Teilchen in einem Feld beschrieben durch eine ebene Welle [Vol35]. Dies entspricht beispielsweise der Bewegung eines Elektrons oder Positrons in einem Laserfeld - sie vollführen eine oszillatorische Bewegung; betrachtet man zum Beispiel ein linear polarisiertes Feld bewegen sich Elektronen auf sogenannten '8-Bahnen' in einer Ebene aufgespannt durch die Polarisations- und Fortbewegungsrichtung. Maßgeblich für die Stärke der oszillatorischen Bewegungen ist der sogenannte Intensitätsparameter $\xi = \frac{e\mathcal{E}_L}{mc\omega}$ (e ist die Elementarladung, \mathcal{E}_L die Laserfeldstärke, m die Elektronenladung, c die Lichtgeschwindigkeit und ω die Laserfrequenz, siehe auch Anhang A).

Eine (analytische) Lösung der Dirac-Gleichung für die Beschreibung eines Teilchens, welches sich simultan in einem Coulomb- und einem Laserfeld bewegt, ist dagegen nicht bekannt.

Störungstheorie. Wir können das vorliegende Problem so beschreiben, dass die Coulomb-Wechselwirkung im ungestörten Hamiltonian H_0 enthalten ist und das Laserfeld als zusätzliche Störung in einem Wechselwirkungshamiltonian H_{int} aufgefasst wird. Prinzipiell ist eine störungstheoretische Rechnung eine Entwicklung nach H_{int} . H_{int} enthält das Laserfeld, dessen Stärke bzw. Intensität durch den Intensitätsparameter ξ beschrieben werden kann. Eine Störungsentwicklung entspricht nun einer Entwicklung nach ξ . Für geringe Intensitäten wie z.B. $\xi \sim 10^{-4}$ ist eine solche Rechnung prinzipiell möglich und wurde auch für den linearen Fall, d.h. der Absorption von *einem* hochenergetischem Photon untersucht [Sau31, AS97]. Um aber verschiedene Photonennordnungen n zu berücksichtigen, müsste man viele störungstheoretische Ordnungen berechnen, welche mit jedem Grad komplizierter werden. Ob einfache analytische Lösungen für alle Ordnungen gefunden werden können, muss hinterfragt werden. Betrachtet man nun höhere Intensitäten ξ , konvergiert ein störungstheoretischer Ansatz nicht mehr, und es werden nicht-perturbative Ansätze erforderlich.

Lasereigenschaften. Die beiden geplanten *Röntgenlicht-Freie-Elektronen-Laser* (XFEL) in Stanford und Hamburg werden beide linear polarisiert sein. Dies ist Folge der Architektur des dem XFEL-Prinzip zugrunde liegenden Undulators. Für die in dieser Arbeit ausgeführten Rechnungen werden Abschätzungen erwarteter Laserparameter des XFEL in Hamburg adoptiert. Zudem müssen einige Verein-

fachungen angenommen werden. So wird das Laserfeld als monofrequent und frequenzstabil angenommen. Tatsächlich hat aber ein realer Laser immer eine endliche Bandbreite, welche mit der Pulsdauer zusammenhängt. Außerdem erwartet man bei der experimentellen Realisierung Schwankungen in der Frequenz. Es wird im Fortlauf zumeist eine Photonenenergie $\hbar\omega$ von ~ 9 keV angenommen, also im (harten) Röntgenbereich. Dies entspricht einer Wellenlänge von $\lambda \sim 0.1$ nm und einer Schwingungsdauer von $T \sim 10^{-18}$ s. Erwartet wird eine Pulslänge $\tau \sim 100$ fs, es finden also $\sim 10^5$ Laseroszillationen während eines Pulses statt. Es ist demnach durchaus gerechtfertigt, die Laserfeldstärke als konstant, d.h. unabhängig von der realen Pulsform, anzunehmen. Eine realistische Intensität für die hier angenommene Frequenz ist $I \sim 10^{18}$ W/cm² entsprechend einer elektrischen Spitzenfeldstärke von $\mathcal{E} \sim 10^{11}$ V/cm. Der für theoretische Betrachtungen anschaulichere Parameter ist der Intensitätsparameter ξ (siehe oben und Anhang A); er entspricht circa 10^{-4} für die hier angegebene Frequenz und Intensität. Zudem werden die einzelnen Pulse nicht kontinuierlich ausgesendet, sondern mit einer Wiederholungsrate von etwa 10 Hz werden sogenannte Züge (*trains*) ausgesandt. Jeder Zug enthält 4000 Pakete (*bunches*). Man kann also die Ergebnisse aus Kapitel 3 mit der Wiederholungsrate, Bunchzahl und Pulslänge multiplizieren um die Resultate an den realen Laser anzupassen. Bei genauerer Betrachtung sollte man zudem annehmen, dass nicht nur ein Ion mit dem Laser kollidiert, sondern ein Atomstrahl mit $\sim 10^{10}$ Atomen. Die Paarproduktionsrate wächst proportional zu der Anzahl der Atome im Strahl, so dass die Rate dadurch stark erhöht wird. Eine Abschätzung dieser Eigenschaften eines realen Experiments wird in Abschnitt 3.9 vorgenommen. All diese vereinfachenden Annahmen für den vorliegenden Prozess ändern aber nichts an der generellen Aussage der hier dargelegten Resultate.

Zusammenfassend kann man sagen, dass es für den hier diskutierten Prozess insgesamt drei physikalisch relevante, unabhängige Parameter gibt: Die Laserfrequenz ω , die Intensität I bzw. der Intensitätsparameter ξ sowie die Kernladungszahl des Ions Z . Ein weiterer Parameter ist die relativistische Geschwindigkeit γ des Ions. Diese skaliert aber lediglich die Frequenz und Feldstärke des Laserfelds im Kernsystem und ist daher kein unabhängiger Parameter für die theoretische Betrachtung.

Klassisches Licht. Bei Annahme von Einmodenbetrieb mit Frequenz ω , Intensität I und einem Kohärenzvolumen von $V = 10^3 \mu\text{m}^3$ ergibt sich eine Photonenzahl von circa $N = I * V / (\omega c) \sim 10^{15}$. Die Beschreibung des Laserfelds als klassisches Feld ist daher gerechtfertigt [Mit82]. Korrekturen durch eine quantenmechanische Beschreibung des Laserfeldes skalieren mit $1/\sqrt{N}$ [Mit82] und sind daher vernachlässigbar. Das Laserfeld wird als externes Feld angenommen, d.h. eine Rückwirkung auf das Laserfeld wird vernachlässigt, es ändert sich durch die Absorption von Photonen nicht - eine Verminderung der Anzahl der Photonen im

Feld wird nicht betrachtet. Dies ist wiederum gerechtfertigt, da die Anzahl der Photonen sehr groß ist gegenüber der Schwankung der Photonenzahl durch den vorliegenden Prozess [Mit75].

Atomkern. Der Atomkern wird als punktförmig angenommen, Effekte durch endliche Ausdehnung und Ladungsverteilung werden demnach vernachlässigt. Im Gegensatz zu Elektronen ist bei myonischen Atomen der Abstand zum Kern viel geringer und die Ausdehnung muss berücksichtigt werden. Eine Untersuchung soll in Abschnitt 3.8 erfolgen. Ebenso werden mögliche photoinduzierte Kernanregungen nicht berücksichtigt, der Wirkungsquerschnitt ist aber sehr klein. Zudem ändern Kernanregungen die atomaren Zustände nicht.

Lamb-Verschiebung und QED Effekte. Zusammengefasst nennt man die Summe der Strahlungskorrekturen und der nicht quantenelektrodynamischen Effekte Lamb-Verschiebung (siehe z.B. [GR03]). Dazu tragen die Selbstenergie Graphen, die Vakuum-Polarisierung sowie die endliche Größe des Atomkerns als auch seine innere Struktur bei. Generell skaliert die Lamb Verschiebung mit $(\alpha Z)^4$, wobei der Korrekturterm der Selbstenergie erster Ordnung dominiert, aber ab einer Kernladungszahl von $Z \sim 70$ die Ausdehnung und Struktur der Kerne die größte Rolle spielt. Bei der in der vorliegenden Arbeit zumeist angenommene Kernladungszahl von $Z \sim 50$ sind die relativen Korrekturen zur Grundzustandsenergie des wasserstoffähnlichen Atoms bei unter $\sim 1/1000$ und werden vernachlässigt.

2.1.2 S-Matrix Formalismus

Die nachfolgenden Herleitungen sind dem Formalismus von Reiss [Rei92] entnommen.

S-Matrix. Das System, beschrieben durch den Hamilton-Operator H , wird als zusammengesetzt aus einem ungestörten Teil H_0 und einer äußeren Störung H_{int} aufgefasst:

$$H = H_0 + H_{int} \quad (2.1)$$

H_0 kann dabei ebenfalls Wechselwirkungsterme enthalten und H_{int} ist eine zusätzliche Wechselwirkung. In unserem Fall ist in H_0 der freie Dirac Hamilton-Operator sowie die Coulomb-Wechselwirkung enthalten und das Laserpotential wird als zusätzliche Störung in H_{int} aufgefasst.

Im Folgenden sei Φ der Zustand des ungestörten Systems H_0 und Ψ der Zustand des vollen Hamiltonians H . Wir verwenden nachfolgend natürliche Einheiten mit $\hbar = c = 1$ und $\not{Q} = \gamma_\mu Q^\mu$ (siehe Anhang A). Die entsprechenden Bewegungsgleichungen lauten:

$$(i\partial + eA_K - m) \Phi = 0, \quad (i\partial + eA_L + eA_K - m) \Psi = 0 \quad (2.2)$$

A_K und A_L sind die Viererpotentiale von Coulomb- und Laserfeld. Asymptotische Zustände sind nun wie folgt definiert: Bei großen Zeiten (formal: $t \rightarrow \infty$) ist der Zustand frei, d.h. Eigenzustand von H_0 . Die Störung geht asymptotisch aus:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \Psi_i(t) = \Phi_i(t) \quad (2.3)$$

Große Zeiten $t \rightarrow \infty$ bedeuten, dass der Zustand zu großen Zeiten nicht mehr wechselwirkt. So kann man sich vorstellen, dass der Laser zu asymptotischen Zeiten ausgeschaltet ist, oder dass sich das erzeugte Teilchen im Detektor befindet und das Laserfeld nicht mehr spürt.

Die Übergangsamplitude oder auch *S-Matrix* ist definiert als Überlapp des Zustandes Ψ_i zu asymptotischen Zeiten mit dem ungestörten Zustand Φ_f :

$$S_{fi} = \lim_{t \rightarrow \infty} (\Phi_f(t), \Psi_i(t)) \quad (2.4)$$

i bezeichnet hier den Anfangszustand und f den Endzustand. (\cdot, \cdot) ist das innere Produkt und berechnet sich wie $(\Phi, \Psi) = \int d^3r \Phi^\dagger \Psi$.

Die zeitumgekehrte S-Matrix ist analog definiert:

$$S_{fi} = \lim_{t \rightarrow -\infty} (\Psi_f(t), \Phi_i(t)) \quad , \quad \text{mit} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Psi_f(t) = \Phi_f(t) \quad (2.5)$$

Betrachtet man neben Gl. (2.4) auch noch den Grenzwert $t \rightarrow -\infty$, kann man die Gleichung folgendermaßen umschreiben:

$$(S - 1)_{fi} = \lim_{t \rightarrow \infty} (\Phi_f(t), \Psi_i(t)) - \lim_{t \rightarrow -\infty} (\Phi_f(t), \Psi_i(t)) \quad (2.6)$$

Man benutzt hier die Orthogonalität der ungestörten Zustände $\lim_{t \rightarrow -\infty} (\Phi_f(t), \Psi_i(t)) = \delta_{fi}$. Die Erweiterung um δ_{fi} entspricht der Hinzunahme des elastischen Kanals, also der Situation, in der Laserfeld und Atom nicht wechselwirken.

Zunächst ist es vorteilhaft, Gleichung (2.6) in eine kovariante Form zu bringen. Benutzt man zudem noch die konkreten Bewegungsgleichungen (2.2) für die simultane Präsenz von Coulomb- und Laserpotential, kann man die S-Matrix auf die folgenden beiden Formen überführen:

$$(S - 1)_{fi}^{post} = -ie \int d^4x \bar{\Phi}_f A_L \Psi_i \quad , \quad (S - 1)_{fi}^{prior} = -ie \int d^4x \bar{\Psi}_f A_L \Phi_i \quad (2.7)$$

Ionisation		Paarproduktion	
Φ_f	freie Coulombwelle $H_0 (E > 0)$	Φ_f	gebundener Coulomb-Zustand $H_0 (E < 0)$ post
Ψ_i	Laser + gebundener Coulomb-Zustand $H (E < 0)$	Ψ_i	Laser + freie Coulombwelle $H (E > 0)$
Ψ_f	Laser + freie Coulombwelle $H (E > 0)$	Ψ_f	Laser + gebundener Coulomb-Zustand $H (E < 0)$ prior
Φ_i	gebundener Coulomb-Zustand $H_0 (E < 0)$	Φ_i	freie Coulombwelle $H_0 (E > 0)$

Tabelle 2.1: Vergleich von Ionisation und gebunden-freier Paarerzeugung. Dabei ist $H = H_0 + H_{int}$ und $E > 0$ und $E < 0$ steht hier für die freie bzw. die gebundene Lösung für das Coulomb-Problem (siehe Text).

Die sogenannte *post*-Form entspricht der S-Matrix abgeleitet von Gleichung (2.4), die *prior*-Form der zeitumgekehrten Form von Gl. (2.5). In einer exakten Theorie sind *post*- und *prior*-Form identisch, wendet man Näherungen an, ist dies im Allgemeinen nicht der Fall. Die *post-prior* Äquivalenz muss dann explizit gezeigt werden. Dies ist für die Anwendung der Strong-Field-Approximation (siehe unten) zum Beispiel in [Mül03] gemacht worden.

Im Fortlaufenden wird zur vereinfachten Schreibweise $(S - 1)_{fi}$ mit S abgekürzt. Der elastische Kanal δ_{fi} ist für den Paarproduktionsprozess irrelevant, da er gerade den Kanal beschreibt, in dem keine Paarerzeugung stattfindet.

Formaler Vergleich Ionisation und Paarproduktion. Die formale Ähnlichkeit von Ionisation und gebunden-freier Paarproduktion kann anhand von Gl. 2.7. demonstriert werden. Wir betrachten zunächst den Fall, dass das Laserfeld als Störung aufgefasst wird, also im Störterm H_{int} enthalten ist.

Tabelle 2.1.2 vergleicht die Bedeutung der ein- und auslaufenden Wellenfunktionen für Ionisation und Paarerzeugung. Dabei ist einmal in Worte gefasst, welche Wechselwirkungen zu der Wellenfunktion beitragen und zudem durch welchen Hamiltonian die Wellenfunktion beschrieben wird. H_0 ist dabei wie zuvor der ungestörte Operator und $H = H_0 + H_{int}$ der Gesamthamiltonoperator. $E > 0$ und $E < 0$ steht hier für die freie bzw. die gebundene Lösung für das Coulomb-Problem (in relativistischer Sprache fügt man normalerweise die Ruhemasse m zu den Bindungsenergien hinzu und die Bedingung würde $E \lesssim m$ lauten).

Diese Betrachtungen sind zunächst einmal alle exakt, es besteht kein Unterschied zwischen der *post*- und *prior*-Form.

Nun wurde aber oben bereits erwähnt, dass es keine analytische Lösung für die Bewegungsgleichung mit dem vollen Hamiltonoperator H gibt, in dem also sowohl Laser- als auch Coulombwechselwirkung betrachtet wird. Eine Möglichkeit, die Rechnung dennoch analytisch fortzusetzen, besteht darin, jeweils eines der beiden

Potentiale in der Wellenfunktion Ψ zu vernachlässigen. Wie oben bereits besprochen, existieren Lösungen sowohl für das Coulomb-Problem (gebunden und frei) als auch für ebene elektromagnetische Wellen (Volkov-Lösungen). Zu entscheiden ist nun, welche Approximationen das physikalische Problem richtig beschreiben und für die veranschlagten Stärken der beiden Wechselwirkungen die beste Annäherung an die Wirklichkeit bringen.

Betrachten wir nun die Ψ in Tabelle 2.1.2. Beginnen wir mit der Beschreibung der Ionisation in der post-Form. Vernachlässigt man zunächst die Coulombwechselwirkung, existiert am Anfang kein gebundener Zustand. Von Ionisation kann also nicht gesprochen werden. Vernachlässigt man dagegen die Laserwechselwirkung, beginnt man mit einem gebundenen Zustand. Die Wechselwirkung wird durch das Laserpotential beschrieben. Dies entspricht nun dem physikalischen Prozess, aber berücksichtigt nur lineare (d.h. 1 Photon) Ionisationsprozesse, da das Laserfeld nicht in den Zuständen enthalten ist. Für die Betrachtung starker Laserfelder ist dies offensichtlich nicht die gewünschte Beschreibung. Die post-Form bei Betrachtung des Laserfeldes als Störung ist also keine gute Beschreibung für die gegebene Problemstellung. Bei Vernachlässigung des Laserfeldes in der prior-Form kann man die gleichen Schlüsse ziehen wie zuvor, hingegen wird man dem physikalischen Prozess gerecht, wenn man den Einfluss des Coulombfeldes nicht berücksichtigt. Daher bietet sich für die Ionisation die Beschreibung in der prior-Form an, was auch in [Rei90] so gemacht wurde. Für die Paarproduktion gilt nun genau das Gegenteil. Bei Vernachlässigung der Coulomb-Wechselwirkung auf das Positron erhält man für starke Laserfelder in der post-Form eine geeignete Approximation. Diese wird im nachfolgenden Abschnitt weiter diskutiert. In der prior-Form kann man dagegen das Coulombpotential nicht vernachlässigen, da dann wiederum keine gebundenen Zustände existieren. Lässt man das Laserfeld außer Acht, kann man den nichtlinearen Bethe-Heitler Prozess, also die simultane Absorption mehrerer Photonen nicht beschreiben.

Es sei an dieser Stelle noch einmal gesagt, dass bisher nur das Laserfeld als Störung betrachtet wurde. Bei einer exakten Beschreibung ist es äquivalent, das Coulomb-Potential als Störung aufzufassen. So kann man durch analoge Betrachtungen dem physikalischen Problem angepasste, näherungsweise Übergangsamplituden in der post-Form für Ionisation und in der prior-Form für Paarproduktion aufstellen.

Strong-Field-Approximation. In diesem Abschnitt soll nun die oben gezeigte, geeignete Approximation für gebunden-frei Paarerzeugung in starken Laserfeldern in der post-Form bei Betrachtung des Laserfeldes als Störung genauer analysiert werden.

Die die volle Wechselwirkung beschreibende Dirac Gleichung lautet:

$$(i\cancel{\partial} + e\cancel{A}_L + e\cancel{A}_K - m) \Psi = 0 \quad (2.8)$$

Die Dirac Gleichung bei Vernachlässigung des Coulomb-Potentials lautet:

$$(i\cancel{\partial} + e\cancel{A}_L - m) \Psi_V = 0 \quad (2.9)$$

Dies ist die sogenannte *Volkov*-Lösung der Dirac-Gleichung (siehe Abschnitt Volkov). V steht für Volkov.

Die zu Gl. (2.9) zugeordnete Greens-Funktion lautet:

$$(i\cancel{\partial} + e\cancel{A}_L - m) G_V(x, x') = \delta^4(x - x') \mathbb{1} \quad (2.10)$$

Die formale Lösung von Gl. 2.8 lautet:

$$\Psi(x) = \Psi^V(x) - \int d^4x' G_V(x, x') \cancel{A}_K \Psi(x') \quad (2.11)$$

Einsetzen in die Gleichung für die S-Matrix (post-form) (Gl. (2.7)):

$$S = -ie \int d^4x \bar{\Phi}_f \cancel{A}_L \Psi_i^V + ie \int d^4x \int d^4x' \bar{\Phi}_f \cancel{A}_L G_V(x, x') e\cancel{A}_K \Psi_i(x') \quad (2.12)$$

Der erste Term ist die sogenannte *Strong Field Approximation* (SFA), der zweite Term enthält *alle* Korrekturen. Z.B. lautet der Korrekturterm niedrigster Ordnung:

$$S^{(1)} = ie \int d^4x \int d^4x' \bar{\Phi}_f \cancel{A}_L G_V(x, x') e\cancel{A}_K \Psi_i^V(x') \quad (2.13)$$

Jeder weitere Korrekturterm enthält einen zusätzlichen A_K Term. Dies entspricht keiner (gewöhnlichen) Störungsentwicklung, da hier A_L der Störungsterm ist und die Entwicklung in Potenzen von A_K stattfindet. Zudem enthält die Wellenfunktion Ψ das Coulombpotential vollständig, d.h. in allen Ordnungen.

Weitere Korrekturterme erhält man durch iteratives einsetzen von Gleichung (2.11). Der 1. Korrekturterm (2.13) hat jedoch bereits eine sehr komplizierte Gestalt, so dass keine geschlossene, analytische Lösung möglich ist. Zumindest ist keine bekannt.

Vergleich der Feldstärken. Die Strong-Field-Approximation setzt voraus, dass einerseits die gebundenen Zustände existieren, dass also im Abstand eines Bohrradius die Coulomb-Feldstärke deutlich stärker ist als die Laserfeldstärke. Andererseits wird der Einfluss des Coulombfeldes auf das neu entstandene Positron vernachlässigt.

Die Laserfeldstärke im Ruhesystems des Kerns ist bei einer relativistischen Geschwindigkeit von $\gamma \sim 50$ um den Faktor $\gamma(1 + \beta) \sim 100$ erhöht. Nehmen wir nun einen Intensitätsparameter von $\xi = 10^{-4}$ sowie eine Photonenenergie von $\hbar\omega = 9$

keV an, entspricht dies einer Feldstärke von $\mathcal{E} \sim 2.3 \times 10^{10}$ V/cm im Labor- und entsprechend $\mathcal{E}' \sim 2.3 \times 10^{12}$ V/cm im Kernsystem.

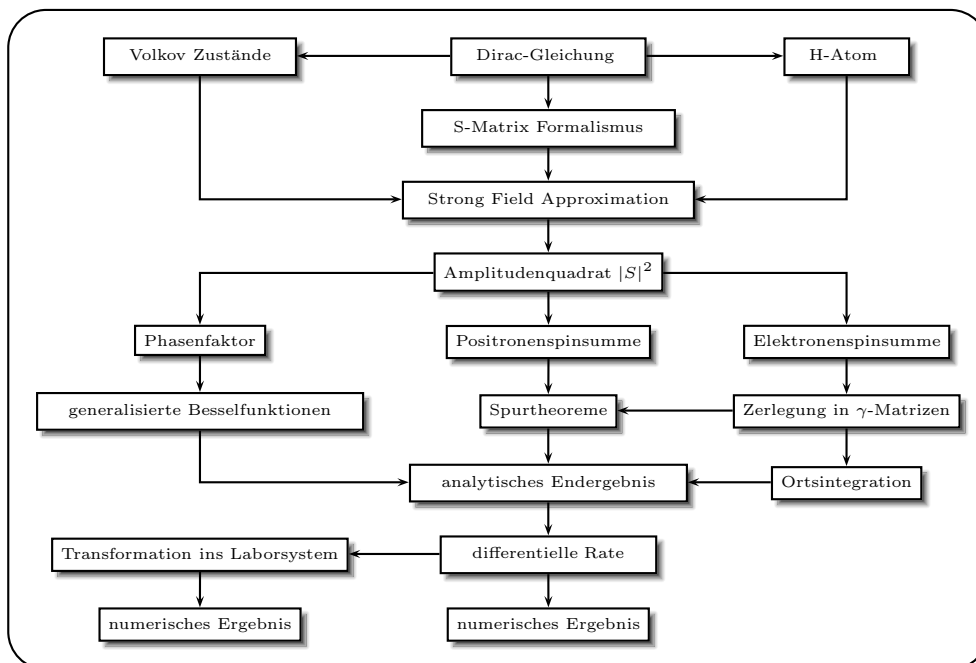
Die Coulomb-Feldstärke in der K-Schale, also im Abstand eines Bohrradius, entspricht $\mathcal{E}_K = Z^3 \mathcal{E}_0 \sim 6.4 \times 10^{14}$ V/cm. In der L-Schale ist die Feldstärke $\mathcal{E}_L \approx E_K/16 \sim 4 \times 10^{13}$ V/cm. Wie gefordert überwiegt die Stärke des Coulomb-Feldes die Laserfeldstärke um Größenordnungen für die angenommenen Parameter ($\gamma = 50$, $\xi = 10^{-4}$, $\hbar\omega = 9\text{keV}$, $Z = 50$). Für geringere Z ist dies nicht mehr der Fall.

Bei Absorption zweier Laserphotonen hat das Positron eine kinetische Energie von $E_{kin} \approx 2\hbar\omega' - \Delta E \sim 800$ keV, entsprechend einer relativistischen Geschwindigkeit von $\beta_+ = v/c \sim 0.92$. Daraus ergibt sich der sogenannte Sommerfeld-Parameter [EM95, MK] von $\varsigma = Z\alpha/\beta_+ \sim 0.4$. Demnach bedeutet kleines ς wenig Ablenkung von Teilchen im Coulombfeld und dementsprechend eine bessere Beschreibung durch ebene Wellen. Die Vernachlässigung des Coulomb-Felds bei der Beschreibung des Positrons ist also durchaus gerechtfertigt.

Eine mittlere Kernladungszahl Z von circa 50 ist also eine gute Wahl, da es sowohl die Existenz der atomaren Zustände sicherstellt, als auch den Einfluss des Coulomb-Feldes auf das Positron nicht zu groß werden lässt.

2.1.3 Struktur der Rechnung

Das folgende Diagramm gibt einen Überblick über die Struktur der Rechnung.



Ausgehend von der Dirac-Gleichung, sind analytische Lösungen für das Wasserstoffatom (Abschnitt 2.2.1) und für ebene Wellen (Volkov Zustände, Abschnitt 2.2.2) bekannt. Wendet man nun den S-Matrix Formalismus zur Bestimmung der Übergangsamplitude an, so gelangt man zu dem Punkt, an dem ohne weitere Approximation keine analytische Fortführung der Rechnung möglich ist. Benutzt man nun die sogenannte Strong-Field-Approximation (SFA) (Abschnitt 2.1.2), so gehen dort die beiden oben beschriebenen exakten Lösungen in die Übergangsamplitude ein. Übergänge wie z.B. die Paarerzeugung gehen mit dem Betragsquadrat der Amplitude. In der vorliegenden Rechnung betrachten wir eine spinunsensitive Messung, es muss also über die möglichen Spinkonfigurationen von Elektronen und Positronen summiert werden. Ferner enthält der Integrand des Amplitudenquadrates einen Phasenfaktor. Entwickelt man diesen, gelangt man zu den sogenannten generalisierten Besselfunktionen, welche typischerweise bei Betrachten von linearer Laserpolarisierung auftreten (Abschnitt D). Die Elektronenspinsumme (Abschnitt 2.2.4) führt zu einer Matrix M , welche in Produkte von γ -Matrizen entwickelt werden kann. Die auftretenden Koeffizienten zusammen mit dem Phasenfaktor führen zur analytischen Lösung der im Amplitudenquadrat auftretenden Ortsintegrale (Abschnitt 2.2.8 und Anhang C). Da nun die Matrix M in Produkte von γ -Matrizen zerlegt worden ist, können mittels geläufigen Spurtheoremen alle auftretenden Dirac-Matrizen kontrahiert werden und somit die Summe über die Positronenspinconfigurationen ausgeführt werden (Abschnitt 2.2.5). Zusammen führt die Entwicklung des Phasenfaktors nach generalisierten Besselfunktionen, die analytische Auswertung der auftretenden Ortsintegrale und die Kontraktion der γ^μ -Matrizen auf das analytische Endergebnis für das Amplitudenquadrat (Abschnitt 2.2.9). Physikalisch von Interesse sind zum Beispiel die totalen und differentiellen Produktionsraten von Elektron-Positron-Paaren. Dafür muss noch über alle möglichen Impulse des freien Positrons integriert werden, was nicht mehr analytisch möglich ist. Daher müssen numerische Methoden angewandt werden, um quantitative Resultate zu erreichen (Kapitel 3). Für eine mögliche experimentelle Beobachtung des vorliegenden Prozesses ist das Laborsystem maßgebend. Daher werden die differentiellen Raten ins Laborsystem transformiert und dort ebenfalls numerisch ausgewertet (Abschnitt 2.4).

Die beschriebene Prozedur ist so im Prinzip für alle Zustände des Wasserstoffatoms anwendbar. Für das relativistische H-Atom sind alle Zustände bekannt, für die verschiedenen Zustände verläuft die Rechnung (genauer: die Zerlegung in Produkte von γ -Matrizen und die Ortsintegration) entsprechend unterschiedlich. Die niedrigsten Schalen sind aber diejenigen mit der größten Wahrscheinlichkeit für den Einfang. Die Ortsunschärfe ist bei diesen am geringsten und die Impulsunschärfe entsprechend am größten. Eine Verringerung der Impulsunschärfe führt nun aber zu einer geringeren Einfangwahrscheinlichkeit. Für die s -Orbitale sinkt

die Wahrscheinlichkeit mit $1/n^3$, wobei n die Hauptquantenzahl ist. Daher werden in dieser Arbeit nur die drei wahrscheinlichsten atomaren Niveaus behandelt: Der Grundzustand $1s$, sowie $2s$ und $2p_{1/2}$.

2.2 Analytische Rechnung für die K-Schale

Dieser Abschnitt führt die Rechnung für die gebunden-freie Paarproduktion für den Einfang des Elektrons in den Grundzustand durch.

2.2.1 Wasserstoffähnliche Atome

Die Dirac Gleichung für wasserstoffähnliche Atome lautet:

$$(i\cancel{\partial} + eA_K - m) \phi_{1s} = 0 \quad (2.14)$$

$A_K^0 = Ze/r$ ist das Coulombpotential des Kerns in seinem Ruhesystem ($\mathbf{A}_K = 0$). Die Lösung ist die nachfolgende Grundzustandswellenfunktion:

$$\phi_{1s} = g(r) \chi^s e^{-iE_{1s}t} \quad (2.15)$$

Herleitungen werden ausführlich in der Literatur über fortgeschrittene Quantenmechanik gegeben (z.B. [Sak87]). Dabei ist $g(r)$ der Radialteil, χ sind Spinoren, welche den Winkelanteil repräsentieren und der letzte Term ist die Zeitentwicklung. Der Radialteil lautet explizit:

$$g(r) = N_{1s} (2Zr/a_B)^{\sigma-1} e^{-Zr/a_B} \quad (2.16)$$

Dabei ist N_{1s} die Normierungskonstante, σ die skalierte Bindungsenergie und $a_B = 1/\alpha m$ der Bohrradius:

$$\sigma = [1 - (\alpha Z)^2]^{1/2}, \quad N_{1s} = \left(\frac{Z^3}{\pi a_B^3} \frac{1 + \sigma}{\Gamma(1 + 2\sigma)} \right)^{1/2}$$

Die Spinoren für den Grundzustand lauten für die beiden möglichen Spineinstellungen:

$$\chi_{+1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i\frac{1-\sigma}{\alpha Z} \cos \vartheta \\ i\frac{1-\sigma}{\alpha Z} \sin \vartheta e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad \chi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i\frac{1-\sigma}{\alpha Z} \sin \vartheta e^{-i\varphi} \\ -i\frac{1-\sigma}{\alpha Z} \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

2.2.2 Positron-Volkov-Zustände

Für die Bewegung eines Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchens in einer ebenen Welle wurde die Lösung der entsprechenden Dirac Gleichung bereits 1935 von Volkov [Vol35] bestimmt. Die Dirac Gleichung lautet:

$$(i\cancel{\partial} + eA_L - m) \psi_V = 0 \quad (2.18)$$

Dabei ist A_L das Laserpotential. Die Wellenfunktion lautet:

$$\psi_V = \psi_{p,s}^{(+)}(x) = N_p \left(\mathbb{1} + \frac{e k A_L}{2(kp)} \right) v_{p,s} \exp \{iS^{(+)}\} \quad (2.19)$$

Die Indizes p,s stehen für Impuls und Spin des Teilchens, (+) für Positronen (Elektronen mit negativer Energie), k^μ ist der Viererimpuls der Laserphotonen, $N_p = \sqrt{\frac{m}{q^0}}$ ist die gewählte Normierung und $v_{p,s}$ sind Dirac-Spinoren. Die Phase $S^{(+)}$ lautet für Positronen explizit:

$$S^{(+)} = (px) + \frac{e}{(kp)} \int^\eta \left[p \cdot A_L(\tilde{\eta}) - \frac{e}{2} A_L^2(\tilde{\eta}) \right] d\tilde{\eta} \quad (2.20)$$

Im weiteren Verlauf betrachten wir den konkreten Fall, dass das Laserfeld in z-Richtung propagiert und linear polarisiert in x-Richtung sei. Die entsprechenden Lasergrößen lauten:

$$A_L^\mu = a_0^\mu \cos \eta \quad \text{mit} \quad a_0^\mu = (0, a, 0, 0) \quad \text{und} \quad k^\mu = \omega (1, 0, 0, 1) ,$$

a ist der Betrag des Vektorpotentials, $\eta = (kx)$ und ω die Laserfrequenz.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} p \cdot A_L(\eta) &= (pa_0) \cos \eta \\ A_L^2 &= A_\mu A^\mu = -a^2 \cos^2 \eta \\ \int^\eta p \cdot A_L(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} &= (pa_0) \sin \eta \\ \int^\eta A_L^2(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} &= -a^2 \left(\frac{1}{2} \eta + \frac{1}{4} \sin 2\eta \right) \end{aligned}$$

Somit können wir die Phase $S^{(+)}$ in den Volkov Wellenfunktionen explizit berechnen:

$$\begin{aligned} S^{(+)} &= (px) + \frac{e}{(kp)} (pa_0) \sin \eta + \frac{e^2 a^2}{4(kp)} \eta + \frac{e^2 a^2}{8(kp)} \sin 2\eta \\ &= (qx) + \frac{e}{(kp)} (pa_0) \sin \eta + \frac{e^2 a^2}{8(kp)} \sin 2\eta , \end{aligned} \quad (2.21)$$

wobei in der zweiten Zeile der effektive (Vierer-)Impuls q des Positrons eingeführt wurde. Dieser berücksichtigt die oszillatorische Bewegung des Positrons im Laserfeld. Der Zusammenhang zu p lautet $q = p + \frac{e^2 a^2}{4(kp)} k = p + \frac{1}{2} \nu k$ mit $\nu \equiv \frac{e^2 a^2}{2(kp)}$.

Ebenso kann man eine effektive Masse einführen: $m^* = m \sqrt{1 + \frac{1}{2} \xi^2}$. Für schwache Laserfelder (d.h. $\xi \ll 1$) gilt $q \approx p$ sowie $m^* \approx m$.

2.2.3 Übergangsamplitude, S-Matrix

Für die Berechnung der Übergangsamplitude nehmen wir die *post*-Form der S-Matrix (Gl. 2.7 in Abschnitt 2.1.2). In dieser ist das gebundene Elektronen durch den vom Laserfeld ungestörten (End-)Zustand ϕ beschrieben. Die Wellenfunktion des Positrons hingegen ist durch den voll wechselwirkenden (Anfangs-)Zustand ψ bestimmt:

$$S_{post} = -ie \int d^4x \bar{\phi}_{1s} A_L \psi^{(+)} \quad (2.22)$$

Die Wellenfunktion $\psi^{(+)}$ ist zum vollen Hamiltonoperator H zugehörig, welcher sowohl die Coulomb- als auch die Laserwechselwirkung beinhaltet. Eine analytische Lösung für die zugehörige Bewegungsgleichung ist nicht bekannt. Daher wenden wir die sogenannte Strong-Field-Approximation (siehe oben, Abschnitt 2.1.2) an. Hierbei wird die Wellenfunktion $\psi^{(+)}$ durch einen Volkovzustand $\psi_V^{(+)}$ angenähert, in welchem das Coulombpotential vernachlässigt wird.

$$S_{post}^{SFA} = -ie \int d^4x \bar{\phi}_{1s} A_L \psi_V^{(+)} \quad (2.23)$$

Im Folgenden werden die Wellenfunktionen für das H-Atom (Gl. 2.15) und das Volkovproblem (G. 2.19) eingesetzt.

$$S_{post}^{SFA} = -ie \int d^4x' g(r') e^{iE_{1s}t'} \bar{\chi}_{s-}' A_L' \sqrt{\frac{m}{q^0}} \left(\mathbb{1} + \frac{e\mathbf{k} A_L'}{2(kp)} \right) v_{p,s+} \exp \{iS^{(+)}(x')\} \quad (2.24)$$

Maßgeblich für den Übergang ist das Betragsquadrat der S-Matrix:

$$\begin{aligned}
|S_{post}^{SFA}|^2 &= (S_{post}^{SFA}(x))^* \cdot S_{post}^{SFA}(x') \\
&= \frac{e^2 m}{q^0} \cdot \int d^4 x \exp \{-iS^{(+)}(x)\} \bar{v}_{p,s_+} \left(\mathbf{1} + \frac{e \mathcal{A}_L \mathbf{k}}{2(kp)} \right) \mathcal{A}_L \chi_{s_-} g(r) e^{-iE_{1s}t} \\
&\quad \cdot \int d^4 x' g(r') e^{iE_{1s}t'} \bar{\chi}'_{s_-} \mathcal{A}'_L \left(\mathbf{1} + \frac{e \mathbf{k} \mathcal{A}'_L}{2(kp)} \right) v_{p,s_+} \exp \{iS^{(+)}(x')\} \\
&= \frac{e^2 m}{q^0} \int d^4 x \int d^4 x' \exp \{-iS^{(+)}(x) + iS^{(+)}(x') - iE_{1s}t + iE_{1s}t'\} g(r) g(r') \\
&\quad \cdot \bar{v}_{p,s_+} \left(\mathbf{1} + \frac{e \mathcal{A}_L \mathbf{k}}{2(kp)} \right) \mathcal{A}_L \chi_{s_-} \bar{\chi}'_{s_-} \mathcal{A}'_L \left(\mathbf{1} + \frac{e \mathbf{k} \mathcal{A}'_L}{2(kp)} \right) v_{p,s_+} \\
&= \frac{e^2 m}{q^0} \int d^4 x \int d^4 x' \exp \{-iS^{(+)}(x) + iS^{(+)}(x') - iE_{1s}t + iE_{1s}t'\} g(r) g(r') \\
&\quad \cdot \bar{v}_{p,s_+} \left(\mathcal{A}_L + \frac{ea^2}{2(kp)} \cos^2 \eta \mathbf{k} \right) \chi_{s_-} \bar{\chi}'_{s_-} \left(\mathcal{A}'_L + \frac{ea^2}{2(kp)} \cos^2 \eta' \mathbf{k} \right) v_{p,s_+}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Dabei sind s_- der Elektronenspin und s_+ der Positronenspin. Die gestrichenen Größen (z.B. $\bar{\chi}'_{s_-} \mathcal{A}'_L$) bedeuten, dass die Größen von den Koordinaten x' (im Gegensatz zu x) abhängen. In der letzten Umformung wurde $\mathcal{A}_L \mathbf{k} \mathcal{A}_L = a^2 \cos^2 \eta \mathbf{k}$ benutzt.

2.2.4 Elektronenspinsumme

In der vorliegenden Rechnung nehmen wir eine spinunsensitive Messung an. Also muss über alle möglichen Spineinstellungen der Elektronen summiert werden:

$$M = \sum_{s_-} \chi_{s_-} \bar{\chi}'_{s_-} = \chi_{+1/2} \bar{\chi}'_{+1/2} + \chi_{-1/2} \bar{\chi}'_{-1/2} \tag{2.26}$$

Die Matrixelemente von M lauten:

$$\begin{aligned}
M_{11} &= 1 \\
M_{12} &= 0 \\
M_{13} &= i\tau \cos \vartheta' \\
M_{14} &= i\tau \sin \vartheta' e^{-i\varphi'} \\
M_{21} &= 0 \\
M_{22} &= 1 \\
M_{23} &= i\tau \sin \vartheta' e^{i\varphi'} \\
M_{24} &= -i\tau \cos \vartheta' \\
M_{31} &= i\tau \cos \vartheta \\
M_{32} &= i\tau \sin \vartheta e^{-i\varphi} \\
M_{33} &= -\tau^2 \left(\cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' e^{-i\varphi} e^{i\varphi'} \right) \\
M_{34} &= -\tau^2 \left(\cos \vartheta \sin \vartheta' e^{-i\varphi'} - \cos \vartheta' \sin \vartheta e^{-i\varphi} \right) \\
M_{41} &= i\tau \sin \vartheta e^{i\varphi} \\
M_{42} &= -i\tau \cos \vartheta \\
M_{43} &= -\tau^2 \left(\cos \vartheta' \sin \vartheta e^{i\varphi} - \cos \vartheta \sin \vartheta' e^{i\varphi'} \right) \\
M_{44} &= -\tau^2 \left(\cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' e^{i\varphi} e^{-i\varphi'} \right) ,
\end{aligned} \tag{2.27}$$

mit $\tau = \frac{1-\sigma}{\alpha Z}$.

2.2.5 Positronenspinsumme

Für den mittleren Teil in Gl. 2.25 wird folgende Abkürzung getroffen:

$$\Gamma \equiv \left(A_L + \frac{ea^2}{2(kp)} \cos^2 \eta \not{k} \right) M \left(A'_L + \frac{ea^2}{2(kp)} \cos^2 \eta' \not{k} \right)$$

Nun wird auch über alle möglichen Positronspins summiert:

$$\begin{aligned}
\sum_{s_+} \bar{v}_{p,s_+} \Gamma v_{p,s_+} &= \sum_{s_+} \bar{v} \Gamma v \\
&= \sum_{s_+} \bar{v}_\kappa v_\lambda \Gamma_{\kappa\lambda} \\
&= \sum_{s_+} \Gamma_{\kappa\lambda} \bar{v}_\kappa v_\lambda \\
&= \Gamma_{\kappa\lambda} \frac{1}{2m} (\not{p} - m)_{\lambda\kappa} \\
&= \frac{1}{2m} Sp \{ \Gamma (\not{p} - m) \} \\
&\equiv \frac{1}{4m} \mathcal{T}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Die Indizes κ, λ sind Matrix- bzw. Spinorindizes. In der dritten Zeile wurde die allgemeine Dirac-Spinor Beziehung $\sum_{s_+} v_\lambda \bar{v}_\kappa = \frac{1}{2m} (\not{p} - m)_{\lambda\kappa}$ angewandt. In der letzten Zeile wurde die neue Abkürzung \mathcal{T} eingeführt:

$$\mathcal{T} = 2Sp \left\{ \left(A_L + \frac{\nu}{e} \cos^2 \eta \not{k} \right) M \left(A'_L + \frac{\nu}{e} \cos^2 \eta' \not{k} \right) (\not{p} - m) \right\}, \tag{2.29}$$

mit $\nu = \frac{e^2 a^2}{2(kp)}$.

Zerlegung der Matrix M in Produkte von γ -Matrizen. Zur weiteren Auswertung von \mathcal{T} wird die Matrix M (Gl.2.27) in Produkte von γ -Matrizen zerlegt. M ist eine 4×4 -Matrix und hat demnach 16 Einträge. Genauso gibt es 16 mögliche linear unabhängige Kombinationen von Produkten von γ -Matrizen und der Einheitsmatrix.

$$M = \frac{1}{2} (M^{(0)} + M^{(1)} + M^{(2)} + M^{(3)} + M^{(4)}) \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned}
M^{(0)} &= \tilde{c} \mathbf{1} \\
M^{(1)} &= c_0 \gamma^0 + c_1 \gamma^1 + c_2 \gamma^2 + c_3 \gamma^3 \\
M^{(2)} &= c_{01} \gamma^0 \gamma^1 + c_{02} \gamma^0 \gamma^2 + c_{03} \gamma^0 \gamma^3 + c_{12} \gamma^1 \gamma^2 + c_{13} \gamma^1 \gamma^3 + c_{23} \gamma^2 \gamma^3 \\
M^{(3)} &= c_{012} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 + c_{013} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^3 + c_{023} \gamma^0 \gamma^2 \gamma^3 + c_{123} \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \\
M^{(4)} &= c_{0123} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Durch Vergleich mit den Einträgen der Matrix M erhalten wir die Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
\tilde{c} &= 1 - \tau^2 (\cos \vartheta \cos \vartheta' + \cos (\varphi - \varphi') \sin \vartheta \sin \vartheta') \\
c_0 &= 1 + \tau^2 (\cos \vartheta \cos \vartheta' + \cos (\varphi - \varphi') \sin \vartheta \sin \vartheta') \\
c_1 &= -i\tau (\sin \vartheta \cos \varphi - \sin \vartheta' \cos \varphi') \\
c_2 &= -i\tau (\sin \vartheta \sin \varphi - \sin \vartheta' \sin \varphi') \\
c_3 &= -i\tau (\cos \theta - \cos \theta') \\
c_{01} &= i\tau (\sin \vartheta \cos \varphi + \sin \vartheta' \cos \varphi') \\
c_{02} &= i\tau (\sin \vartheta \sin \varphi + \sin \vartheta' \sin \varphi') \\
c_{03} &= i\tau (\cos \vartheta + \cos \vartheta') \\
c_{12} &= -\tau^2 \sin \vartheta \sin \vartheta' \sin (\varphi - \varphi') \\
c_{13} &= \tau^2 (\sin \vartheta \cos \vartheta' \cos \varphi - \sin \vartheta' \cos \vartheta \cos \varphi') \\
c_{23} &= \tau^2 (\sin \vartheta \cos \vartheta' \sin \varphi - \sin \vartheta' \cos \vartheta \sin \varphi') \\
c_{012} &= \tau^2 \sin \vartheta \sin \vartheta' \sin (\varphi - \varphi') \\
c_{013} &= -\tau^2 (\sin \vartheta \cos \vartheta' \cos \varphi - \sin \vartheta' \cos \vartheta \cos \varphi') \\
c_{023} &= -\tau^2 (\sin \vartheta \cos \vartheta' \sin \varphi - \sin \vartheta' \cos \vartheta \sin \varphi') \\
c_{123} &= 0 \\
c_{0123} &= 0
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Die Koeffizienten c_{123} und c_{0123} sind hier Null, für andere atomare Zustände ist dies aber im Allgemeinen nicht der Fall.

Ausrechnen der Spuren. Nach der Zerlegung nimmt \mathcal{T} die folgende Form an:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} = Sp \left\{ \left(A_L + \frac{\nu}{e} \cos^2 \eta \, \not{k} \right) (M^{(0)} + M^{(1)} + M^{(2)} + M^{(3)} + M^{(4)}) \right. \\
\left. \times \left(A'_L + \frac{\nu}{e} \cos^2 \eta' \, \not{k} \right) (\not{p} - m) \right\}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Zunächst kann man die allgemeine Tatsache benutzen, dass alle Spurterme mit ungeraden Vielfachen von γ -Matrizen verschwinden.

Es überleben die $M^{(0)} + M^{(2)} + M^{(4)}$ -Terme zusammen mit m und die $M^{(1)} + M^{(3)}$ -Terme mit \not{p} .

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &= Sp \left\{ (M^{(1)} + M^{(3)}) \left(A'_L + \frac{\nu}{e} \cos^2 \eta' k \right) \not{p} \left(A_L + \frac{\nu}{e} \cos^2 \eta k \right) \right\} \\
&\quad - mSp \left\{ (M^{(0)} + M^{(2)} + M^{(4)}) \left(A'_L + \frac{\nu}{e} \cos^2 \eta' k \right) \left(A_L + \frac{\nu}{e} \cos^2 \eta k \right) \right\} \\
&= Sp \left\{ (M^{(1)} + M^{(3)}) \left(A'_L \not{p} A_L + \frac{\nu}{e} \cos^2 \eta A'_L \not{p} k \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\nu}{e} \cos^2 \eta' k \not{p} A_L + \frac{\nu^2}{e^2} \cos^2 \eta \cos^2 \eta' k \not{p} k \right) \right\} \\
&\quad - mSp \left\{ (M^{(0)} + M^{(2)} + M^{(4)}) \left(A'_L A_L + \frac{\nu}{e} \cos^2 \eta A'_L k \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\nu}{e} \cos^2 \eta' k A_L + \frac{\nu^2}{e^2} \cos^2 \eta \cos^2 \eta' k k \right) \right\} \\
&= Sp \left\{ (M^{(1)} + M^{(3)}) \left(A'_L \not{p} A_L + \frac{\nu}{e} \cos^2 \eta A'_L \not{p} k \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\nu}{e} \cos^2 \eta' k \not{p} A_L + 2 \frac{\nu^2}{e^2} \cos^2 \eta \cos^2 \eta' (kp) k \right) \right\} \\
&\quad - mSp \left\{ (M^{(0)} + M^{(2)} + M^{(4)}) \left(A'_L A_L - \frac{\nu}{e} \cos^2 \eta k A'_L + \frac{\nu}{e} \cos^2 \eta' k A_L \right) \right\}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Im letzten Schritt wurden die Eigenschaften des elektromagnetischen Feldes (lichtartig $k k = k^2 = 0$, transversal $(Ak) = 0 \Leftrightarrow \{A, k\} = 0$) benutzt.

Ferner ist $Sp\{M k \not{p} k\} = -Sp\{M \not{p} k k\} + Sp\{M 2(kp) k\} = Sp\{M 2(kp) k\}$.

Definitionen.

$$\begin{aligned}
\epsilon^\mu &= (+1, 0, 0, 0) \Rightarrow \not{\epsilon} = \gamma^0 \\
\alpha^\mu &= (0, -1, 0, 0) \Rightarrow \not{\alpha} = \gamma^1 \\
\beta^\mu &= (0, 0, -1, 0) \Rightarrow \not{\beta} = \gamma^2 \\
\delta^\mu &= (0, 0, 0, -1) \Rightarrow \not{\delta} = \gamma^3
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Spurtheoreme.

$$\begin{aligned}
 Sp(\phi\psi) &= 4(ab) \\
 Sp(\phi\psi\phi\psi) &= 4(ab)(cd) - 4(ac)(bd) + 4(ad)(bc) \\
 Sp(\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\phi_5\phi_6) &= (a_1a_2) Sp(\phi_3\phi_4\phi_5\phi_6) \\
 &\quad - (a_1a_3) Sp(\phi_2\phi_4\phi_5\phi_6) \\
 &\quad + (a_1a_4) Sp(\phi_2\phi_3\phi_5\phi_6) \\
 &\quad - (a_1a_5) Sp(\phi_2\phi_3\phi_4\phi_6) \\
 &\quad + (a_1a_6) Sp(\phi_2\phi_3\phi_4\phi_5)
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Skalarprodukte. Nachfolgend sei $A_L = A$ zur vereinfachten Schreibweise angenommen.

$$\begin{aligned}
 \epsilon \cdot A &= \beta \cdot A = \delta \cdot A = 0 \\
 \alpha \cdot A &= a \cos \eta \\
 \alpha \cdot k &= \beta \cdot k = 0 \\
 \epsilon \cdot k &= \delta \cdot k = \omega
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon \cdot p &= p^0 \\
 \alpha \cdot p &= p_x \\
 \beta \cdot p &= p_y \\
 \delta \cdot p &= p_z
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}
 p \cdot k &= \omega (p^0 - p_z) \\
 p \cdot A &= A \cdot p = -p_x a \cos \eta \\
 A \cdot A' &= -a^2 \cos \eta \cos \eta' \\
 A \cdot k &= 0
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Anwendung der Spurtheoreme und Skalarprodukte.

- Terme mit $M^{(0)}$

$$Sp(\mathbb{1}A'A) = -4a^2 \cos \eta \cos \eta' \tag{2.40}$$

Alle anderen Spuren verschwinden.

- Terme mit $M^{(2)}$

$$\begin{aligned} Sp(\not{\epsilon}\not{\alpha}\not{k}\not{A}) &= -4\omega a \cos \eta \\ Sp(\not{\alpha}\not{\delta}\not{k}\not{A}) &= 4\omega a \cos \eta \end{aligned} \quad (2.41)$$

Alle anderen Spuren verschwinden.

- Terme mit $M^{(4)}$

$$\begin{aligned} Sp(\not{\epsilon}\not{\alpha}\not{\beta}\not{\delta}\not{A}'\not{A}) &= 0 \\ Sp(\not{\epsilon}\not{\alpha}\not{\beta}\not{\delta}\not{k}\not{A}') &= 0 \\ Sp(\not{\epsilon}\not{\alpha}\not{\beta}\not{\delta}\not{k}\not{A}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Alle Spuren verschwinden

- Terme mit $M^{(1)}$

$$\begin{aligned} Sp(\not{\epsilon}\not{A}'\not{p}\not{A}) &= 4p^0 a^2 \cos \eta \cos \eta' \\ Sp(\not{\alpha}\not{A}'\not{p}\not{A}) &= -4p_x a^2 \cos \eta \cos \eta' \\ Sp(\not{\beta}\not{A}'\not{p}\not{A}) &= 4p_y a^2 \cos \eta \cos \eta' \\ Sp(\not{\delta}\not{A}'\not{p}\not{A}) &= 4p_z a^2 \cos \eta \cos \eta' \\ Sp(\not{\epsilon}\not{A}'\not{p}\not{k}) &= -4p_x \omega a \cos \eta' \\ Sp(\not{\alpha}\not{A}'\not{p}\not{k}) &= 4(p^0 - p_z) \omega a \cos \eta' \\ Sp(\not{\beta}\not{A}'\not{p}\not{k}) &= 0 \\ Sp(\not{\delta}\not{A}'\not{p}\not{k}) &= -4p_x \omega a \cos \eta' \\ Sp(\not{\epsilon}\not{k}\not{p}\not{A}) &= -4p_x \omega a \cos \eta \\ Sp(\not{\alpha}\not{k}\not{p}\not{A}) &= 4(p^0 - p_z) \omega a \cos \eta \\ Sp(\not{\beta}\not{k}\not{p}\not{A}) &= 0 \\ Sp(\not{\delta}\not{k}\not{p}\not{A}) &= -4p_x \omega a \cos \eta \\ Sp(\not{\epsilon}(kp)\not{k}) &= 4\omega^2 (p^0 - p_z) \\ Sp(\not{\alpha}(kp)\not{k}) &= 0 \\ Sp(\not{\beta}(kp)\not{k}) &= 0 \\ Sp(\not{\delta}(kp)\not{k}) &= 4\omega^2 (p^0 - p_z) \end{aligned} \quad (2.43)$$

- Terme mit $M^{(3)}$

$$\begin{aligned}
Sp \left(\not\epsilon \not\alpha \not\beta \not{A}' \not{p} \not{k} \right) &= -4p_y \omega a \cos \eta' \\
Sp \left(\not\epsilon \not\alpha \not{\delta} \not{A}' \not{p} \not{k} \right) &= 4(p^0 - p_z) \omega a \cos \eta' \\
Sp \left(\not\epsilon \not\alpha \not{\beta} \not{k} \not{p} \not{A} \right) &= 4p_y \omega a \cos \eta \\
Sp \left(\not\epsilon \not\alpha \not{\delta} \not{k} \not{p} \not{A} \right) &= -4(p^0 - p_z) \omega a \cos \eta
\end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned}
Sp \left(\not\alpha \not{\beta} \not{\delta} \not{A}' \not{p} \not{k} \right) &= -4a \cos \eta' p_y \omega \\
Sp \left(\not\alpha \not{\beta} \not{\delta} \not{k} \not{p} \not{A} \right) &= 4a \cos \eta p_y \omega
\end{aligned}$$

Alle anderen Spuren verschwinden.

Gesamtspinsumme. Die Gesamtspinsumme \mathcal{T} kann man nun mit der Kenntnis der Matrix M (Gl. 2.31), der Koeffizienten c_{xyz} (Gl. 2.32) und der Spuren (vorangehende Rechnung) durch Gleichung 2.33 berechnen.

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &= 4a^2 \cos \eta \cos \eta' [\tilde{c}m + c_0 p^0 - c_1 p_x + c_2 p_y + c_3 p_z] \\
&+ 4 \frac{\nu}{e} a \omega \cos \eta \cos \eta' \left[\begin{aligned} &(c_{01} - c_{13}) m (\cos \eta' - \cos \eta) - (c_0 + c_3) p_x (\cos \eta + \cos \eta') \\ &+ c_1 (p^0 - p_z) (\cos \eta + \cos \eta') + c_{012} p_y (\cos \eta' - \cos \eta) \\ &- c_{013} (p^0 - p_z) (\cos \eta' - \cos \eta) + c_{123} p_y (\cos \eta' - \cos \eta) \end{aligned} \right] \\
&+ 8 \frac{\nu^2}{e^2} \omega^2 \cos^2 \eta \cos^2 \eta' (p^0 - p_z) [c_0 + c_3] \\
&\equiv \mathcal{T}_A + \mathcal{T}_B + \mathcal{T}_C
\end{aligned} \tag{2.45}$$

\mathcal{T} zerfällt in drei Teile A,B,C.

2.2.6 Phasenfaktor und generalisierte Besselfunktionen

Der im Integranden von Gl. 2.25 auftretende Phasenfaktor lautet:

$$\Phi = \exp\{-iS^{(+)}(x) + iS^{(+)}(x') - iE_{1s}(t - t')\}, \tag{2.46}$$

wobei $S^{(+)}$ in Abschnitt 2.20 definiert wurde als:

$$S^{(+)} = qx + e \frac{(pa_0)}{(kp)} \sin \eta + \frac{e^2 a^2}{8 (kp)} \sin 2\eta,$$

mit $q = p + \frac{e^2 a^2}{4(kp)}k$ und $\eta = k \cdot x$.

Definition:

$$\alpha_1 \equiv -e \frac{(pa_0)}{(kp)} \quad \alpha_2 \equiv -\frac{e^2 a^2}{8(kp)} \quad (2.47)$$

Damit lässt sich der Phasenfaktor schreiben als:

$$\begin{aligned} \Phi &= \exp\{-i(qx - \alpha_1 \sin \eta - \alpha_2 \sin 2\eta - qx' + \alpha_1 \sin \eta' + \alpha_2 \sin 2\eta' + E_{1s}(t - t'))\} \\ &= e^{-iq(x-x')} e^{-iE_{1s}(t-t')} e^{i\alpha_1 \sin \eta} e^{i\alpha_2 \sin 2\eta} e^{-i\alpha_1 \sin \eta'} e^{-i\alpha_2 \sin 2\eta'} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Besselfunktionen. Im Phasenfaktor Φ kommt das Produkt der folgenden Exponentialfunktionen vor

$$\mathcal{F}(\eta) \equiv e^{i\alpha_1 \sin \eta} e^{i\alpha_2 \sin 2\eta} \quad (2.49)$$

Für jede dieser Exponentialfunktionen können wir eine Fourierentwicklung durchführen [Abr68]:

$$e^{i\alpha \sin \eta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha) e^{in\eta} \quad (2.50)$$

Die $J_n(\alpha)$ sind hierbei die gewöhnlichen Besselfunktionen. Also gilt für das Produkt der beiden Exponentialfunktionen:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\eta) &= e^{i\alpha_1 \sin \eta} e^{i\alpha_2 \sin 2\eta} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_l(\alpha_1) e^{il\eta} J_m(\alpha_2) e^{i2m\eta} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_l(\alpha_1) J_m(\alpha_2) e^{i(l+2m)\eta} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{n-2m}(\alpha_1) J_m(\alpha_2) \right) e^{in\eta} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_n(\alpha_1, \alpha_2) e^{in\eta} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Im vorletzten Schritt wurde der neue Summationsindex $n = l + 2m$ eingeführt. Im letzten Schritt werden die generalisierten Besselfunktionen definiert:

$$\tilde{J}_n(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{n-2m}(\alpha_1) J_m(\alpha_2) \quad (2.52)$$

Eine analoge Rechnung führt für die anderen Exponentialterme in Gl. 2.48 zu:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^*(\eta') &= e^{-i\alpha_1 \sin \eta'} e^{-i\alpha_2 \sin 2\eta'} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_n(\alpha_1, \alpha_2) e^{-inn\eta'} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Ferner gelten die folgenden Rechenregeln (siehe Anhang D):

$$\begin{aligned} \cos \eta \mathcal{F}(\eta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left[\tilde{J}_{n-1}(\alpha_1, \alpha_2) + \tilde{J}_{n+1}(\alpha_1, \alpha_2) \right] e^{inn} \\ \cos^2 \eta \mathcal{F}(\eta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} \left[\tilde{J}_{n-2}(\alpha_1, \alpha_2) + 2\tilde{J}_n(\alpha_1, \alpha_2) + \tilde{J}_{n+2}(\alpha_1, \alpha_2) \right] e^{inn} \end{aligned} \quad (2.54)$$

2.2.7 Amplitudenquadrat

Als Amplitudenquadrat \mathcal{J} definieren wir die Spinsumme über das Betragsquadrat der Amplitude. Benutzen wir nun noch die in Gln. 2.45 und 2.48 eingeführten Größen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &\equiv \sum_{s_+, s_-} |S_{post}^{SFA}|^2 \\ &= \frac{e^2}{4q_0} \int d^4x \int d^4x' g(r) g(r') (\mathcal{T}_A + \mathcal{T}_B + \mathcal{T}_C) \\ &\quad e^{-iq(x-x')} e^{-iE_1s(t-t')} e^{i\alpha_1 \sin \eta} e^{i\alpha_2 \sin 2\eta} e^{-i\alpha_1 \sin \eta'} e^{-i\alpha_2 \sin 2\eta'} \\ &\equiv \mathcal{J}_A + \mathcal{J}_B + \mathcal{J}_C \end{aligned} \quad (2.55)$$

Analog zerfällt \mathcal{J} in drei Teile. Für die Berechnung der einzelnen J_I benötigen wir die konkrete Form der einzelnen T_I (siehe Gl. 2.45) sowie die Entwicklung des Phasenfaktors nach Besselfunktionen (siehe Gl. 2.51).

Berechnung von \mathcal{J}_A .

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_A &= \frac{e^2}{4q_0} \int d^4x \int d^4x' g(r) g(r') \\
&\quad 4a^2 \cos \eta \cos \eta' [\tilde{c}m + c_0 p^0 - c_1 p_x + c_2 p_y + c_3 p_z] \\
&\quad e^{-iq(x-x')} e^{-iE_{1s}(t-t')} e^{i\alpha_1 \sin \eta} e^{i\alpha_2 \sin 2\eta} e^{-i\alpha_1 \sin \eta'} e^{-i\alpha_2 \sin 2\eta'} \\
&= \frac{e^2 a^2}{q_0} \int d^4x \int d^4x' g(r) g(r') e^{-iq(x-x')} e^{-iE_{1s}(t-t')} \cos \eta \mathcal{F}(\eta) \cos \eta' \mathcal{F}^*(\eta') \\
&\quad [\tilde{c}m + c_0 p^0 - c_1 p_x + c_2 p_y + c_3 p_z] \\
&= \frac{e^2 a^2}{4q_0} \cdot \sum_n \sum_m \left(\tilde{J}_{n-1} \tilde{J}_{m-1} + \tilde{J}_{n-1} \tilde{J}_{m+1} + \tilde{J}_{n+1} \tilde{J}_{m-1} + \tilde{J}_{n+1} \tilde{J}_{m+1} \right) \\
&\quad \int dt e^{-i(E_{1s} + E_q - n\omega)t} \int dt' e^{i(E_{1s} + E_q - m\omega)t'} \\
&\quad \int d^3x \int d^3x' g(r) g(r') e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} e^{-in\mathbf{k}\mathbf{x}} e^{im\mathbf{k}\mathbf{x}'} [\tilde{c}m + c_0 p^0 - c_1 p_x + c_2 p_y + c_3 p_z] \\
&= \frac{e^2 a^2}{4q_0} \sum_n \left(\tilde{J}_{n-1}^2 + 2\tilde{J}_{n-1} \tilde{J}_{n+1} + \tilde{J}_{n+1}^2 \right) 2\pi\delta(E_{1s} + E_q - n\omega) 2\pi\delta(0) \\
&\quad \int d^3x \int d^3x' g(r) g(r') e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} e^{-in\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} [\tilde{c}m + c_0 p^0 - c_1 p_x + c_2 p_y + c_3 p_z]
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Im letzten Schritt erhält man die beiden δ -Funktionen aus den Integralen über dt und dt' (Fourierdarstellung der δ -Funktion), welche einerseits die Gleichheit der beiden Summationsindizes und andererseits die Energieerhaltung sicherstellen. $\tilde{J}_n = \tilde{J}_n(\alpha_1, \alpha_2)$ sind die generalisierten Besselfunktionen mit zwei Argumenten des vorigen Abschnittes. Der Übersicht halber wurden die Argumente an dieser Stelle weggelassen. Der Term $2\pi\delta(0) = T$ ist die Wechselwirkungsdauer [BD64].

Berechnung von \mathcal{J}_B . Zunächst kann man \mathcal{T}_B noch einmal umschreiben:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_B &= 4 \frac{\nu}{e} a \omega \cos \eta \cos \eta' \left[\begin{aligned} &(c_{01} - c_{13}) m (\cos \eta' - \cos \eta) - (c_0 + c_3) p_x (\cos \eta + \cos \eta') \\ &+ c_1 (p^0 - p_z) (\cos \eta + \cos \eta') + c_{012} p_y (\cos \eta' - \cos \eta) \\ &- c_{013} (p^0 - p_z) (\cos \eta' - \cos \eta) + c_{123} p_y (\cos \eta' - \cos \eta) \end{aligned} \right] \\
&= 4 \frac{\nu}{e} a \omega \cos^2 \eta \cos \eta' \left[- (c_{01} - c_{13}) m - (c_0 + c_3) p_x + c_1 (p^0 - p_z) \right. \\
&\quad \left. - c_{012} p_y + c_{013} (p^0 - p_z) - c_{123} p_y \right] \\
&\quad + 4 \frac{\nu}{e} a \omega \cos \eta \cos^2 \eta' \left[(c_{01} - c_{13}) m - (c_0 + c_3) p_x + c_1 (p^0 - p_z) \right. \\
&\quad \left. + c_{012} p_y - c_{013} (p^0 - p_z) + c_{123} p_y \right] \\
&= 4 \frac{\nu}{e} a \omega (\Lambda_1 \cos^2 \eta \cos \eta' + \Lambda_2 \cos \eta \cos^2 \eta') = \mathcal{T}_{B_1} + \mathcal{T}_{B_2}
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Entsprechend lautet \mathcal{J}_B :

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_B &= \frac{e^2}{4q_0} \int d^4 x \int d^4 x' g(r) g(r') (\mathcal{T}_{B_1} + \mathcal{T}_{B_2}) \\
&\quad e^{-iq(x-x')} e^{-iE_{1s}(t-t')} e^{i\alpha_1 \sin \eta} e^{i\alpha_2 \sin 2\eta} e^{-i\alpha_1 \sin \eta'} e^{-i\alpha_2 \sin 2\eta'} \\
&\equiv \mathcal{J}_{B_1} + \mathcal{J}_{B_2}
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Berechnung von \mathcal{J}_{B_1} :

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{B_1} &= \frac{ea\nu\omega}{q^0} \int d^4x \int d^4x' g(r) g(r') \Lambda_1 \\
&\quad e^{-iq(x-x')} e^{-iE_{1s}(t-t')} \cos^2 \eta \mathcal{F}(\eta) \cos \eta' \mathcal{F}^*(\eta') \\
&= \frac{ea\nu\omega}{8q^0} \sum_n \sum_m \left(\tilde{J}_{n-2} + 2\tilde{J}_n + \tilde{J}_{n+2} \right) \left(\tilde{J}_{m-1} + \tilde{J}_{m+1} \right) \\
&\quad \int dt e^{-i(E_{1s}+E_q-n\omega)t} \int dt' e^{i(E_{1s}+E_q-m\omega)t'} \\
&\quad \int d^3x \int d^3x' g(r) g(r') e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} e^{-i\mathbf{nk}\mathbf{x}} e^{i\mathbf{mk}\mathbf{x}'} \Lambda_1 \\
&= \frac{ea\nu\omega}{8q^0} \sum_n 2\pi\delta(E_{1s} + E_q - n\omega) 2\pi\delta(0) \\
&\quad \left(\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n-1} + \tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n+1} + 2\tilde{J}_n\tilde{J}_{n-1} + 2\tilde{J}_n\tilde{J}_{n+1} + \tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n-1} + \tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n+1} \right) \\
&\quad \int d^3x \int d^3x' g(r) g(r') e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} e^{-i\mathbf{nk}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \Lambda_1
\end{aligned} \tag{2.59}$$

\mathcal{J}_{B_2} ist identisch \mathcal{J}_{B_1} mit der Ersetzung $\Lambda_1 \leftrightarrow \Lambda_2$

Also mit $\Lambda_1 + \Lambda_2 = -2(c_0 + c_3)p_x + 2c_1(p^0 - p_z)$ lautet \mathcal{J}_B :

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_B &= \mathcal{J}_{B_1} + \mathcal{J}_{B_2} \\
&= \frac{ea\nu\omega}{4q^0} \sum_n 2\pi\delta(E_{1s} + E_q - n\omega) 2\pi\delta(0) \\
&\quad \left(\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n-1} + \tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n+1} + 2\tilde{J}_n\tilde{J}_{n-1} + 2\tilde{J}_n\tilde{J}_{n+1} + \tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n-1} + \tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n+1} \right) \\
&\quad \int d^3x \int d^3x' g(r) g(r') e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} e^{-i\mathbf{nk}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \left(-(c_0 + c_3)p_x + c_1(p^0 - p_z) \right)
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Berechnung von \mathcal{J}_C .

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_C &= \frac{e^2}{4q_0} \int d^4x \int d^4x' g(r) g(r') 8 \frac{\nu^2}{e^2} \omega^2 \cos^2 \eta \cos^2 \eta' (p^0 - p_z) [c_0 + c_3] \\
&\quad e^{-iq(x-x')} e^{-iE_{1s}(t-t')} e^{i\alpha_1 \sin \eta} e^{i\alpha_2 \sin 2\eta} e^{-i\alpha_1 \sin \eta'} e^{-i\alpha_2 \sin 2\eta'} \\
&= \frac{2\nu^2 \omega^2}{q_0} (p^0 - p_z) \int d^4x \int d^4x' g(r) g(r') [c_0 + c_3] \\
&\quad e^{-iq(x-x')} e^{-iE_{1s}(t-t')} \cos^2 \eta \mathcal{F}(\eta) \cos^2 \eta' \mathcal{F}^*(\eta') \\
&= \frac{\nu^2 \omega^2}{8q_0} (p^0 - p_z) \sum_n \sum_m [\tilde{J}_{n-2} + 2\tilde{J}_n + \tilde{J}_{n+2}] [\tilde{J}_{m-2} + 2\tilde{J}_m + \tilde{J}_{m+2}] \\
&\quad \int dt e^{-i(E_{1s} + E_q - n\omega)t} \int dt' e^{i(E_{1s} + E_q - m\omega)t'} \tag{2.61} \\
&\quad \int d^3x \int d^3x' g(r) g(r') e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} e^{-in\mathbf{k}\mathbf{x}} e^{im\mathbf{k}\mathbf{x}'} [c_0 + c_3] \\
&= \frac{\nu^2 \omega^2}{8q_0} (p^0 - p_z) \sum_n 2\pi\delta(E_{1s} + E_q - n\omega) 2\pi\delta(0) \\
&\quad [\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n-2} + 4\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_n + 2\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n+2} + 4\tilde{J}_n\tilde{J}_n + 4\tilde{J}_n\tilde{J}_{n+2} + \tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n+2}] \\
&\quad \int d^3x \int d^3x' g(r) g(r') e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} e^{-in\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} [c_0 + c_3]
\end{aligned}$$

2.2.8 Ortsintegration

Im vorangehenden Abschnitt wurden bereits die Zeitanteile der Raum-Zeit-Integrale d^4x gelöst. Es verbleiben also jeweils die Ortsintegrale d^3x und d^3x' . Der Integrand besteht aus drei Teilen:

- den radialen Wellenfunktionen $g(r)$ (Gl. 2.16)
- dem ortsabhängigen Teil des Phasenfaktors (Gl. 2.48)
- ϑ - und φ - Termen aus den Koeffizienten c_{xyz} (Gl. 2.32)

Zunächst ist eine Umformung in Kugelkoordinaten hilfreich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3x = \int_0^{\infty} dr \int_{-1}^1 d\cos\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2$$

Ferner wird die neue Größe $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{q} - n\mathbf{k} = \mathbf{p} - b\mathbf{k}$ eingeführt, mit $b = n - \frac{1}{2}\nu$. Betrachtet man die Koeffizienten (Gl. 2.32) treten die folgenden Integrale auf:

$$\begin{aligned}
R &\equiv \int d^3x g(r) e^{i\rho\mathbf{x}} \\
R_1 &\equiv \int d^3x g(r) e^{i\rho\mathbf{x}} \cos\vartheta \\
R_2 &\equiv \int d^3x g(r) e^{i\rho\mathbf{x}} \sin\vartheta \cos\varphi \\
R_3 &\equiv \int d^3x g(r) e^{i\rho\mathbf{x}} \sin\vartheta \sin\varphi
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Die Integration über die Variablen x und x' lässt sich dabei einfach separieren. Die Integrale werden im Anhang C berechnet. Die Ergebnisse der Integrale lauten:

$$\begin{aligned}
R &= \sigma \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right) \rho \mathcal{M} \mathcal{R} \\
R_1 &= i(p_z - bk_z) \mathcal{V} \mathcal{R} \\
R_2 &= ip_x \mathcal{V} \mathcal{R} \\
R_3 &= ip_y \mathcal{V} \mathcal{R}
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Zudem treten die komplex-konjugierten Integrale von Gl. 2.62 auf. Deren Ergebnisse lauten:

$$R^* = R \quad R_1^* = -R_1 \quad R_2^* = -R_2 \quad R_3^* = -R_3 \tag{2.64}$$

Dabei werden die folgenden neuen Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= \frac{N_{1s} 2^{\sigma+1} \pi \Gamma(\sigma)}{\rho^3 Z / a_B \left[1 + (a_B \rho / Z)^2 \right]^{1+\sigma/2}} \\
\mathcal{U} &= \sin \mathcal{X} + \frac{a_B \rho}{Z} \cos \mathcal{X} \\
\mathcal{V} &= -\sigma \frac{a_B \rho}{Z} \cos \mathcal{X} + \left[1 + (1 + \sigma) \left(\frac{a_B \rho}{Z} \right)^2 \right] \sin \mathcal{X} \\
\mathcal{X} &= \sigma \arctan \left(\frac{a_B \rho}{Z} \right) \\
\mathcal{P} &= \frac{(1 + \sigma) (\Gamma(\sigma))^2 2^{2(\sigma-1)} \left[1 + \left(\frac{a_B \rho}{Z} \right)^2 \right]^{2-\sigma}}{\Gamma(1 + 2\sigma) \left(\frac{a_B \rho}{Z} \right)^6} \\
&= \frac{(Z/a_B)^5}{16\pi} \left[1 + \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right)^2 \right]^4 \mathcal{R}^2
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Integrale über die Koeffizienten. In den Integralen in (2.56), (2.60) und (2.61) kommen nur die Koeffizienten \tilde{c} , c_0 , c_1 , c_2 sowie c_3 vor. Alle anderen Koeffizienten aus Gl. 2.32 tragen in der Rechnung nicht bei! Im Folgenden werden die Integrale dieser Koeffizienten berechnet:

$$\begin{aligned} \int \tilde{c} &= RR^* - \tau^2 [R_1 R_1^* + R_2 R_2^* + R_3 R_3^*] \\ &= \sigma^2 \left(\frac{\rho^{a_B}}{Z} \right)^2 \rho^2 \mathcal{U}^2 \mathcal{R}^2 - \tau^2 (p_x^2 + p_y^2 + (p_z - bk_z)^2) \mathcal{V}^2 \mathcal{R}^2 \\ &= \sigma^2 \left(\frac{\rho^{a_B}}{Z} \right)^2 \rho^2 \mathcal{U}^2 \mathcal{R}^2 - \tau^2 \rho^2 \mathcal{V}^2 \mathcal{R}^2 \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} \int c_0 &= RR^* + \tau^2 [R_1 R_1^* + R_2 R_2^* + R_3 R_3^*] \\ &= \sigma^2 \left(\frac{\rho^{a_B}}{Z} \right)^2 \rho^2 \mathcal{U}^2 \mathcal{R}^2 + \tau^2 \rho^2 \mathcal{V}^2 \mathcal{R}^2 \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \int c_1 &= i\tau [-R_2 R^* + RR_2^*] \\ &= -2i\tau R_2 R \\ &= 2p_x \sigma \tau \rho \left(\frac{\rho^{a_B}}{Z} \right) \mathcal{U} \mathcal{V} \mathcal{R}^2 \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} \int c_2 &= i\tau [-R_3 R^* + RR_3^*] \\ &= -2i\tau R_3 R \\ &= 2p_y \sigma \tau \rho \left(\frac{\rho^{a_B}}{Z} \right) \mathcal{U} \mathcal{V} \mathcal{R}^2 \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} \int c_3 &= i\tau [-R_1 R^* + RR_1^*] \\ &= -2i\tau R_1 R \\ &= 2(p_z - bk_z) \sigma \tau \rho \left(\frac{\rho^{a_B}}{Z} \right) \mathcal{U} \mathcal{V} \mathcal{R}^2 \end{aligned} \quad (2.70)$$

Hier steht $\int \tilde{c}$ abkürzend für $\int d^3x d^3x' g(r) g(r') e^{i\rho(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \tilde{c}$.

Dabei wurde $p_x^2 + p_y^2 + (p_z - bk_z)^2 = \rho^2$ benutzt.

Mit der Kenntnis der Ortsintegrale können nun die im Abschnitt 2.2.7 auftretenden Integrale ausgeführt werden. Zudem wird die konkrete Form der Normierungskonstanten eingesetzt und es werden die neuen Abkürzungen \mathcal{R} bzw. \mathcal{P} benutzt.

Ergebnis für \mathcal{J}_A .

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_A &= \frac{e^2 a^2}{4q_0} \sum_n 2\pi\delta(E_{1s} + E_q - n\omega) 2\pi\delta(0) \left(\tilde{J}_{n-1}^2 + 2\tilde{J}_{n-1}\tilde{J}_{n+1} + \tilde{J}_{n+1}^2 \right) \\
&\quad \times \int d^3x \int d^3x' g(r) g(r') e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \\
&\quad \times [\tilde{c}m + c_0 p^0 - c_1 p_x + c_2 p_y + c_3 p_z] \\
&= \frac{e^2 a^2}{4q_0} \sum_n 2\pi\delta(E_{1s} + E_q - n\omega) 2\pi\delta(0) \left(\tilde{J}_{n-1}^2 + 2\tilde{J}_{n-1}\tilde{J}_{n+1} + \tilde{J}_{n+1}^2 \right) \\
&\quad \times \left[(p_0 + m) \sigma^2 \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right)^2 \rho^2 \mathcal{U}^2 \mathcal{R}^2 + (p_0 - m) \tau^2 \rho^2 \mathcal{V}^2 \mathcal{R}^2 \right. \\
&\quad \quad - 2p_x^2 \sigma \tau \rho \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right) \mathcal{U} \mathcal{V} \mathcal{R}^2 + 2p_y^2 \sigma \tau \rho \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right) \mathcal{U} \mathcal{V} \mathcal{R}^2 \\
&\quad \quad \left. + 2p_z (p_z - b k_z) \sigma \tau \rho \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right) \mathcal{U} \mathcal{V} \mathcal{R}^2 \right] \\
&= \frac{e^2 a^2}{4q_0} \sum_n 2\pi\delta(E_{1s} + E_q - n\omega) 2\pi\delta(0) \left(\tilde{J}_{n-1}^2 + 2\tilde{J}_{n-1}\tilde{J}_{n+1} + \tilde{J}_{n+1}^2 \right) \mathcal{R}^2 \\
&\quad \times \left[(p_0 + m) \sigma^2 \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right)^2 \rho^2 \mathcal{U}^2 + (p_0 - m) \tau^2 \rho^2 \mathcal{V}^2 \right. \\
&\quad \quad \left. + 2\sigma \tau \rho \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right) \mathcal{U} \mathcal{V} (-p_x^2 + p_y^2 + p_z (p_z - b k_z)) \right] \\
&= \frac{8\pi^2 e^2 a^2}{q_0 (Z/a_B)^3} \sum_n \frac{\delta(E_{1s} + E_q - n\omega)}{\left[1 + \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right)^2 \right]^4} 2\pi\delta(0) \left(\tilde{J}_{n-1}^2 + 2\tilde{J}_{n-1}\tilde{J}_{n+1} + \tilde{J}_{n+1}^2 \right) \mathcal{P} \\
&\quad \times \left[(p_0 + m) \sigma^2 \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right)^4 \mathcal{U}^2 + (p_0 - m) \tau^2 \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right)^2 \mathcal{V}^2 \right. \\
&\quad \quad \left. + 2\sigma \tau \frac{a_B}{Z} \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right)^2 \mathcal{U} \mathcal{V} (-p_x^2 + p_y^2 + p_z (p_z - b k_z)) \right] \\
&= \frac{8\pi^2}{q_0 (Z/a_B)^3} T \sum_n \frac{\delta(E_{1s} + E_q - n\omega)}{\left[1 + \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right)^2 \right]^4} u_A,
\end{aligned} \tag{2.71}$$

mit $T = 2\pi\delta(0)$ und u_A gegeben durch Gl. 2.74 weiter unten.

Ergebnis für \mathcal{J}_B .

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_B &= \frac{e a \nu \omega}{4 q^0} \sum_n 2\pi \delta(E_{1s} + E_q - n\omega) 2\pi \delta(0) \\
&\quad \times \left(\tilde{J}_{n-2} \tilde{J}_{n-1} + \tilde{J}_{n-2} \tilde{J}_{n+1} + 2\tilde{J}_n \tilde{J}_{n-1} + 2\tilde{J}_n \tilde{J}_{n+1} + \tilde{J}_{n+2} \tilde{J}_{n-1} + \tilde{J}_{n+2} \tilde{J}_{n+1} \right) \\
&\quad \times \int d^3x \int d^3x' g(r) g(r') e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} e^{-i\mathbf{n}\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \left(-(c_0 + c_3) p_x + c_1 (p^0 - p_z) \right) \\
&= \frac{e a \nu \omega}{4 q^0} \sum_n 2\pi \delta(E_{1s} + E_q - n\omega) 2\pi \delta(0) \\
&\quad \times \left(\tilde{J}_{n-2} \tilde{J}_{n-1} + \tilde{J}_{n-2} \tilde{J}_{n+1} + 2\tilde{J}_n \tilde{J}_{n-1} + 2\tilde{J}_n \tilde{J}_{n+1} + \tilde{J}_{n+2} \tilde{J}_{n-1} + \tilde{J}_{n+2} \tilde{J}_{n+1} \right) \\
&\quad \times \left[-p_x \sigma^2 \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right)^2 \rho^2 \mathcal{U}^2 \mathcal{R}^2 - p_x \tau^2 \rho^2 \mathcal{V}^2 \mathcal{R}^2 \right. \\
&\quad \quad \left. - 2p_x (p_z - b k_z) \sigma \tau \rho \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right) \mathcal{U} \mathcal{V} \mathcal{R}^2 + 2(p^0 - p_z) p_x \sigma \tau \rho \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right) \mathcal{U} \mathcal{V} \mathcal{R}^2 \right] \\
&= \frac{e a \nu \omega}{4 q^0} \sum_n 2\pi \delta(E_{1s} + E_q - n\omega) 2\pi \delta(0) \mathcal{R}^2 \\
&\quad \times \left(\tilde{J}_{n-2} \tilde{J}_{n-1} + \tilde{J}_{n-2} \tilde{J}_{n+1} + 2\tilde{J}_n \tilde{J}_{n-1} + 2\tilde{J}_n \tilde{J}_{n+1} + \tilde{J}_{n+2} \tilde{J}_{n-1} + \tilde{J}_{n+2} \tilde{J}_{n+1} \right) \\
&\quad \times \left[-p_x \sigma^2 \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right)^2 \rho^2 \mathcal{U}^2 - p_x \tau^2 \rho^2 \mathcal{V}^2 + 2p_x (p^0 - 2p_z + b k_z) \sigma \tau \rho \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right) \mathcal{U} \mathcal{V} \right] \\
&= \frac{8\pi^2 e a \nu \omega}{q^0 (Z/a_B)^3} \sum_n \frac{\delta(E_{1s} + E_q - n\omega)}{\left[1 + \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right)^2 \right]^4} 2\pi \delta(0) \mathcal{P} \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right)^2 \\
&\quad \times \left(\tilde{J}_{n-2} \tilde{J}_{n-1} + \tilde{J}_{n-2} \tilde{J}_{n+1} + 2\tilde{J}_n \tilde{J}_{n-1} + 2\tilde{J}_n \tilde{J}_{n+1} + \tilde{J}_{n+2} \tilde{J}_{n-1} + \tilde{J}_{n+2} \tilde{J}_{n+1} \right) \\
&\quad \times \left[-p_x \sigma^2 \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right)^2 \mathcal{U}^2 - p_x \tau^2 \mathcal{V}^2 + 2p_x (p^0 - 2p_z + b k_z) \sigma \tau \frac{a_B}{Z} \mathcal{U} \mathcal{V} \right] \\
&= \frac{8\pi^2}{q^0 (Z/a_B)^3} T \sum_n \frac{\delta(E_{1s} + E_q - n\omega)}{\left[1 + \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right)^2 \right]^4} u_B,
\end{aligned} \tag{2.72}$$

mit u_B siehe unten (Gl. 2.75).

Ergebnis für \mathcal{J}_C .

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_C &= \frac{\nu^2 \omega^2}{8q_0} (p^0 - p_z) \sum_n 2\pi\delta(E_{1s} + E_q - n\omega) 2\pi\delta(0) \\
&\quad \times \left[\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n-2} + 4\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_n + 2\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n+2} + 4\tilde{J}_n\tilde{J}_n + 4\tilde{J}_n\tilde{J}_{n+2} + \tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n+2} \right] \\
&\quad \times \int d^3x \int d^3x' g(r) g(r') e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} e^{-in\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} [c_0 + c_3] \\
&= \frac{\nu^2 \omega^2}{8q_0} (p^0 - p_z) \sum_n 2\pi\delta(E_{1s} + E_q - n\omega) 2\pi\delta(0) \\
&\quad \times \left[\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n-2} + 4\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_n + 2\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n+2} + 4\tilde{J}_n\tilde{J}_n + 4\tilde{J}_n\tilde{J}_{n+2} + \tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n+2} \right] \\
&\quad \times \left[\sigma^2 \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right)^2 \rho^2 \mathcal{U}^2 \mathcal{R}^2 + \tau^2 \rho^2 \mathcal{V}^2 \mathcal{R}^2 + 2(p_z - bk_z) \sigma\tau\rho \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right) \mathcal{U}\mathcal{V}\mathcal{R}^2 \right] \\
&= \frac{4\pi^2 \nu^2 \omega^2}{q_0 (Z/a_B)^3} (p^0 - p_z) \sum_n \frac{\delta(E_{1s} + E_q - n\omega)}{\left[1 + \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right)^2 \right]^4} 2\pi\delta(0) \mathcal{P} \\
&\quad \times \left[\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n-2} + 4\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_n + 2\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n+2} + 4\tilde{J}_n\tilde{J}_n + 4\tilde{J}_n\tilde{J}_{n+2} + \tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n+2} \right] \\
&\quad \times \left[\sigma^2 \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right)^4 \mathcal{U}^2 + \tau^2 \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right)^2 \mathcal{V}^2 + 2(p_z - bk_z) \sigma\tau \frac{a_B}{Z} \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right)^2 \mathcal{U}\mathcal{V} \right] \\
&= \frac{8\pi^2}{q_0 (Z/a_B)^3} T \sum_n \frac{\delta(E_{1s} + E_q - n\omega)}{\left[1 + \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right)^2 \right]^4} u_C,
\end{aligned} \tag{2.73}$$

mit u_C siehe unten (Gl. 2.76).

Abkürzungen u_A , u_B und u_C .

$$\begin{aligned}
u_A &= e^2 a^2 \mathcal{P} \left(\tilde{J}_{n-1}^2 + 2\tilde{J}_{n-1}\tilde{J}_{n+1} + \tilde{J}_{n+1}^2 \right) \\
&\quad \times \left[(p_0 + m) \sigma^2 \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right)^4 \mathcal{U}^2 + (p_0 - m) \tau^2 \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right)^2 \mathcal{V}^2 \right. \\
&\quad \left. + 2\sigma\tau \frac{a_B}{Z} \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right)^2 \mathcal{U}\mathcal{V} (-p_x^2 + p_y^2 + p_z(p_z - bk_z)) \right]
\end{aligned} \tag{2.74}$$

$$\begin{aligned}
u_B = e a \nu \omega \mathcal{P} & \left(\tilde{J}_{n-2} \tilde{J}_{n-1} + \tilde{J}_{n-2} \tilde{J}_{n+1} + 2 \tilde{J}_n \tilde{J}_{n-1} + 2 \tilde{J}_n \tilde{J}_{n+1} + \tilde{J}_{n+2} \tilde{J}_{n-1} + \tilde{J}_{n+2} \tilde{J}_{n+1} \right) \\
& \times \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right)^2 \left[-p_x \sigma^2 \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right)^2 \mathcal{U}^2 - p_x \tau^2 \mathcal{V}^2 + 2 p_x (p^0 - 2 p_z + b k_z) \sigma \tau \frac{a_B}{Z} \mathcal{U} \mathcal{V} \right]
\end{aligned} \tag{2.75}$$

$$\begin{aligned}
u_C = \frac{1}{2} \nu^2 \omega^2 \mathcal{P} & (p^0 - p_z) \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right)^2 \left[\sigma^2 \left(\frac{\rho a_B}{Z} \right)^2 \mathcal{U}^2 + \tau^2 \mathcal{V}^2 + 2 (p_z - b k_z) \sigma \tau \frac{a_B}{Z} \mathcal{U} \mathcal{V} \right] \\
& \times \left[\tilde{J}_{n-2} \tilde{J}_{n-2} + 4 \tilde{J}_{n-2} \tilde{J}_n + 2 \tilde{J}_{n-2} \tilde{J}_{n+2} + 4 \tilde{J}_n \tilde{J}_n + 4 \tilde{J}_n \tilde{J}_{n+2} + \tilde{J}_{n+2} \tilde{J}_{n+2} \right]
\end{aligned} \tag{2.76}$$

2.2.9 Endergebnis

Das analytische Endergebnis kann nun aus den einzelnen Termen \mathcal{J}_A , \mathcal{J}_B und \mathcal{J}_C zusammengesetzt werden:

$$\mathcal{J} = \frac{8\pi^2}{E_q (Z/a_B)^3} T \sum_{n \geq n_0} \frac{\delta(E_{1s} + E_q - n\omega)}{[1 + (\rho a_B/Z)^2]^4} [u_A + u_B + u_C] , \tag{2.77}$$

mit u_A, u_B, u_C definiert in (2.74), (2.75) und (2.76). Hierbei ist n_0 die minimal erforderliche Anzahl an Photonen für die gebunden-freie Paarerzeugung. Die Energieerhaltung fordert $n_0 \geq (E_{1s} + m_*)/\omega$; es werden also n_0 Photonen der Energie ω benötigt, um die Energie für die Ruhmassen des erzeugten Elektrons - abzüglich seiner Bindungsenergie - und des Positrons - zuzüglich seiner ponderomotiven Bewegungsenergie - zur Verfügung zu stellen.

Differentielle Rate. Das Amplitudenquadrat selbst ist noch keine physikalisch messbare Größe. Von Interesse ist zum Beispiel die Häufigkeit der Ereignisse, also die Paarproduktionsrate. Die differentielle Rate ist das Integral über den gesamten Phasenraum der freien Teilchen. Der Volumenfaktor d^3x bzw. V ist bereits durch die Wahl der Normierung der Volkov-Wellenfunktionen integriert. Im Prinzip würde in der Definition der Normierung der Volkov-Zustände in Abschnitt 2.2.2 ein Volumenterm V im Nenner stehen. Dieser würde sich dann durch die Integration über den ganzen Ortsraum wieder rauskürzen. Dies wurde bei der Normierung a priori berücksichtigt. Im vorliegenden Fall mit Einfang des Elektrons

erhält man die differentielle Rate durch das Integral über die drei Raumrichtungen des Positronimpulses. Ferner kommt die Phasenraumnormierung $\frac{1}{(2\pi)^3}$ sowie der Zeitfaktor $1/T$ hinzu:

$$d^3R = \frac{\mathcal{J}}{T} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \quad (2.78)$$

Hier wird über das Phasenraumvolumen d^3q der effektiven Impulse integriert, da in der vorangegangenen Rechnung a priori die δ -Bewegung des Positrons berücksichtigt wurde. Dies wurde ebenfalls durch die Wahl der Normierung der Volkov-Zustände ($N_p = \sqrt{\frac{m}{q^0}}$) bewirkt. Die Wahl dieser Norm ist günstig aufgrund des Auftretens der effektiven Energie in der energieerhaltenden δ -Funktion. Zunächst formen wir d^3q in Kugelkoordinaten um:

$$d^3q = |\mathbf{q}|^2 d|\mathbf{q}| d\cos\vartheta_q d\varphi_q, \quad (2.79)$$

mit

$$\mathbf{q} = |\mathbf{q}| \begin{pmatrix} \sin\vartheta_q \cos\varphi_q \\ \sin\vartheta_q \sin\varphi_q \\ \cos\vartheta_q \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

Substituiert man nun $d|\mathbf{q}|$ mit $dE_q = \frac{|\mathbf{q}|}{E_q} d|\mathbf{q}|$ kann man die Delta-Funktion ausführen und erhält die winkeldifferentielle Rate:

$$\frac{dR}{d\Omega_q} = \frac{1}{\pi (Z/a_B)^3} \sum_{n \geq n_0} |\mathbf{q}| \frac{u_A + u_B + u_C}{[1 + (a_B \rho / Z)^2]^4} \Big|_{E_q = n\omega - E_{1s}, |\mathbf{q}| = \sqrt{E_q^2 - m_*^2}}, \quad (2.81)$$

mit $d\Omega_q = d\varphi_q d\cos\vartheta_q$. Die Integration über die Winkel stellt sich als weitaus schwieriger heraus, eine Abhängigkeit von ϑ_q und φ_q liegt sowohl in den verallgemeinerten Besselfunktionen als auch in den Parametern \mathcal{U} und \mathcal{V} vor. Diese Integration kann nur noch numerisch durchgeführt werden.

Zur weiteren Berechnung müssen die Variablen p_x, p_y, p^0, p_z sowie alle anderen Größen, welche Impulse enthalten, mittels $q = p + \frac{e^2 a^2}{4(kp)} k$ in den q-Raum transformiert werden. Dies wird im Anhang B vollzogen.

2.3 Analytische Rechnung für die L-Schale

In diesem Abschnitt wird die Rechnung des Abschnittes 2.2 wiederholt. Anstelle eines Einfangs des Elektrons in die K-Schale wird nun der Einfang in die L-Schale, genauer in den $2s$ - und $2p_{1/2}$ -Zustand, untersucht. Die wesentliche Änderung sind die Wasserstoffwellenfunktionen ϕ . Für angeregte Zustände haben sie kompliziertere Strukturen. Entsprechend ändern sich im Vergleich zum Grundzustand auch die Elektronenspinsumme, die Ortsintegration und das Amplitudenquadrat. Die Positron-Volkov Zustände (Abschn. 2.2.2), die Form der S-Matrix (Abschn. 2.2.3), die Positronenspinsumme (Abschn. 2.2.5) und die Entwicklung des Phasenfaktors nach generalisierten Besselfunktionen (Abschn. 2.2.6) bleiben dagegen unberührt. Daher werden diese Schritte an dieser Stelle nicht mehr wiederholt.

Zunächst wird die Rechnung für den Einfang in den $2s$ - und anschließend für den $2p_{1/2}$ -Zustand durchgeführt. Die beiden Zustände sind in der Dirac-Theorie (energie-)entartet, daher treten in der Rechnung teilweise große Ähnlichkeiten auf. Dennoch ist darauf zu achten, dass trotz der ähnlichen Nomenklatur Unterschiede in einigen Größen wie z.B. der Normierung bestehen.

2.3.1 Einfang in den $2s$ -Zustand

Zunächst müssen, der komplizierteren Struktur der angeregten Zustände Rechnung tragend, einige neue Abkürzungen getroffen werden:

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(r) &= \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 r & \mathfrak{J}_1 &= 2E & \mathfrak{J}_2 &= -\frac{2\zeta}{2E-1} \\ \mathfrak{K} &= \sqrt{\frac{1-E}{1+E}} & \sigma &= \sqrt{1-(\alpha Z)^2} & & (2.82) \\ \zeta &= m\sqrt{\frac{1-\sigma}{2}} & E &= \sqrt{\frac{1+\sigma}{2}} & E_{2s} &= m\sqrt{\frac{1+\sigma}{2}}, \end{aligned}$$

sowie $w = [1 + (\rho/\zeta)^2]^{-1}$.

Wellenfunktionen

Die zum $2s$ -Zustand zugehörigen Wellenfunktionen erhält man ebenfalls aus der dem H-Atom zugrunde liegenden Dirac-Gleichung (siehe Gl. 2.14). Radialteil und Spinorteil sind nun nicht mehr so einfach zu trennen. Die Wellenfunktion lautet [EM95]:

$$\phi_{2s}^s = g(r) \chi_{2s}^s e^{-iE_{2s}t} \quad (2.83)$$

mit dem separierbaren Teil des Radialteils der Wellenfunktion:

$$g(r) = N_{2s} r^{\sigma-1} e^{-\zeta r} \quad (2.84)$$

Der Spinoranteil χ^s enthält nun ebenfalls r -abhängige Terme:

$$\chi_{2s}^\uparrow = \left[\mathfrak{J}(r) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i\aleph \cos \vartheta \\ i\aleph \sin \vartheta e^{i\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i\aleph \cos \vartheta \\ 2i\aleph \sin \vartheta e^{i\varphi} \end{pmatrix} \right] \quad (2.85)$$

$$\chi_{2s}^\downarrow = \left[\mathfrak{J}(r) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i\aleph \sin \vartheta e^{-i\varphi} \\ -i\aleph \cos \vartheta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i\aleph \sin \vartheta e^{-i\varphi} \\ -2i\aleph \cos \vartheta \end{pmatrix} \right] \quad (2.86)$$

Dabei ist die Normierung für den $2s$ -Zustand:

$$N_{2s} = \frac{(2\zeta)^{\sigma+1/2}}{4} \sqrt{\frac{(1+E)(2E-1)}{2\pi E \Gamma(2\sigma+1)}} \quad (2.87)$$

Für $2s$ spielt ζ eine ähnliche Rolle wie Z/a_B zuvor.

Elektronenspinsumme.

Wie bereits im Abschnitt 2.2.4 wird über alle Spineinstellungen des Elektrons summiert. Das Ergebnis ist die Matrix M :

$$M = M^{(2s)} = \sum \chi_{2s} \bar{\chi}'_{2s} = \chi_{2s}^\uparrow(r) \bar{\chi}_{2s}^{\uparrow}(r') + \chi_{2s}^\downarrow(r) \bar{\chi}_{2s}^{\downarrow}(r') \quad (2.88)$$

Die Matrixelemente von M lauten:

$$\begin{aligned}
M_{11} &= \mathfrak{J}\mathfrak{J}' \\
M_{12} &= 0 \\
M_{13} &= i\aleph\mathfrak{J}(\mathfrak{J}' + 2) \cos \vartheta' \\
M_{14} &= i\aleph\mathfrak{J}(\mathfrak{J}' + 2) e^{-i\varphi'} \sin \vartheta' \\
M_{21} &= 0 \\
M_{22} &= \mathfrak{J}\mathfrak{J}' \\
M_{23} &= i\aleph\mathfrak{J}(\mathfrak{J}' + 2) e^{i\varphi'} \sin \vartheta' \\
M_{24} &= -i\aleph\mathfrak{J}(\mathfrak{J}' + 2) \cos \vartheta' \\
M_{31} &= i\aleph(\mathfrak{J} + 2) \mathfrak{J}' \cos \vartheta \\
M_{32} &= i\aleph(\mathfrak{J} + 2) \mathfrak{J}' e^{-i\varphi} \sin \vartheta \\
M_{33} &= -\aleph^2(\mathfrak{J} + 2)(\mathfrak{J}' + 2) \left[\cos \vartheta \cos \vartheta' + e^{i(\varphi' - \varphi)} \sin \vartheta \sin \vartheta' \right] \\
M_{34} &= \aleph^2(\mathfrak{J} + 2)(\mathfrak{J}' + 2) \left[e^{-i\varphi} \sin \vartheta \cos \vartheta' - e^{-i\varphi'} \cos \vartheta \sin \vartheta' \right] \\
M_{41} &= i\aleph(\mathfrak{J} + 2) \mathfrak{J}' e^{i\varphi} \sin \vartheta \\
M_{42} &= -i\aleph(\mathfrak{J} + 2) \mathfrak{J}' \cos \vartheta \\
M_{43} &= -\aleph^2(\mathfrak{J} + 2)(\mathfrak{J}' + 2) \left[e^{i\varphi} \sin \vartheta \cos \vartheta' - e^{i\varphi'} \sin \vartheta' \cos \vartheta \right] \\
M_{44} &= -\aleph^2(\mathfrak{J} + 2)(\mathfrak{J}' + 2) \left[\cos \vartheta \cos \vartheta' + e^{i(\varphi - \varphi')} \sin \vartheta \sin \vartheta' \right]
\end{aligned} \tag{2.89}$$

Zerlegung von M in Produkte von γ -Matrizen. Analog zu oben wird die Matrix M in Produkte von γ -Matrizen zerlegt.

$$M = \frac{1}{2} (M^{(0)} + M^{(1)} + M^{(2)} + M^{(3)} + M^{(4)}) \tag{2.90}$$

$$\begin{aligned}
M^{(0)} &= \tilde{d}\mathbf{1} \\
M^{(1)} &= d_0\gamma^0 + d_1\gamma^1 + d_2\gamma^2 + d_3\gamma^3 \\
M^{(2)} &= d_{01}\gamma^0\gamma^1 + d_{02}\gamma^0\gamma^2 + d_{03}\gamma^0\gamma^3 + d_{12}\gamma^1\gamma^2 + d_{13}\gamma^1\gamma^3 + d_{23}\gamma^2\gamma^3 \\
M^{(3)} &= d_{012}\gamma^0\gamma^1\gamma^2 + d_{013}\gamma^0\gamma^1\gamma^3 + d_{023}\gamma^0\gamma^2\gamma^3 + d_{123}\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\
M^{(4)} &= d_{0123}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3
\end{aligned} \tag{2.91}$$

Koeffizienten. Die der Zerlegung entsprechenden Koeffizienten lauten:

$$\begin{aligned}
\tilde{d} &= \mathfrak{J}\mathfrak{J}' - \aleph^2 (2 + \mathfrak{J})(2 + \mathfrak{J}') [\cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' (\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi')] \\
d_0 &= \mathfrak{J}\mathfrak{J}' + \aleph^2 (2 + \mathfrak{J})(2 + \mathfrak{J}') [\cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' (\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi')] \\
d_1 &= -i\aleph \{(2 + \mathfrak{J})\mathfrak{J}' \cos \varphi \sin \vartheta - \mathfrak{J}(2 + \mathfrak{J}') \cos \varphi' \sin \vartheta'\} \\
d_2 &= -i\aleph \{(2 + \mathfrak{J})\mathfrak{J}' \sin \varphi \sin \vartheta - \mathfrak{J}(2 + \mathfrak{J}') \sin \varphi' \sin \vartheta'\} \\
d_3 &= -i\aleph \{(2 + \mathfrak{J})\mathfrak{J}' \cos \vartheta - \mathfrak{J}(2 + \mathfrak{J}') \cos \vartheta'\}
\end{aligned} \tag{2.92}$$

Dabei sind hier nur die Koeffizienten \tilde{d} bis d_3 aufgeführt. In Abschnitt 2.2.5 haben wir gesehen, dass die anderen Koeffizienten nicht zum Amplitudenquadrat beitragen.

Ortsintegration

Auftretende Integrale. Wie in Abschnitt 2.2.8 müssen entsprechend den Koeffizienten d_i verschiedene Ortsintegrale gelöst werden. Man geht analog zu vorher vor, das heißt man formt die Integrale in Kugelkoordinaten um und führt die Größe $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{q} - n\mathbf{k}$ ein. Ein Teil der Integrale sind identisch wie zuvor, die Ergebnisse werden mit der anderen Nomenklatur nochmals wiedergegeben:

$$\begin{aligned}
R &= \sigma \rho^2 \zeta^{-1} \mathcal{UR} \\
R_1 &= i(p_z - bk_z) \mathcal{VR} \\
R_2 &= ip_x \mathcal{VR} \\
R_3 &= ip_y \mathcal{VR}
\end{aligned} \tag{2.93}$$

Für die komplex-konjugierten Integrale gilt wiederum

$$R^* = R \quad R_1^* = -R_1 \quad R_2^* = -R_2 \quad R_3^* = -R_3 \tag{2.94}$$

Dabei sind die folgenden Abkürzungen definiert:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= \frac{N_{2s} 4\pi \Gamma(\sigma)}{\rho^3 \zeta^\sigma [1 + (\rho/\zeta)^2]^{1+\sigma/2}} \\
\mathcal{U} &= \sin \mathcal{X} + \frac{\rho}{\zeta} \cos \mathcal{X} \\
\mathcal{V} &= -\sigma \frac{\rho}{\zeta} \cos \mathcal{X} + \left[1 + (1 + \sigma) \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^2 \right] \sin \mathcal{X} \\
\mathcal{X} &= \sigma \arctan \left(\frac{\rho}{\zeta} \right) \\
\mathcal{P} &= \frac{(\Gamma(\sigma))^2 2^{2(\sigma-2)}}{\Gamma(1+2\sigma)} \left[1 + \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^2 \right]^{2-\sigma} \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^{-6} \frac{(1+E)(2E-1)}{E} \\
&= \frac{(\zeta)^5}{16\pi} \left[1 + \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^2 \right]^4 \mathcal{R}^2
\end{aligned} \tag{2.95}$$

Zudem treten neue Integrale mit einem zusätzlichen Faktor r auf. Diese sind mit ${}_r R$ gekennzeichnet.

$$\begin{aligned}
{}_r R &\equiv N_{2s} \int \int \int r^2 dr d\vartheta d\varphi e^{i\rho\mathbf{x}} r^{\sigma-1} e^{-\zeta r} r \\
{}_r R_1 &\equiv N_{2s} \int \int \int r^2 dr d\vartheta d\varphi e^{i\rho\mathbf{x}} r^{\sigma-1} e^{-\zeta r} r \cos \vartheta \\
{}_r R_2 &\equiv N_{2s} \int \int \int r^2 dr d\vartheta d\varphi e^{i\rho\mathbf{x}} r^{\sigma-1} e^{-\zeta r} r \sin \vartheta \cos \varphi \\
{}_r R_3 &\equiv N_{2s} \int \int \int r^2 dr d\vartheta d\varphi e^{i\rho\mathbf{x}} r^{\sigma-1} e^{-\zeta r} r \sin \vartheta \sin \varphi
\end{aligned} \tag{2.96}$$

Die Berechnung erfolgt im Anhang C. Die Ergebnisse lauten:

$$\begin{aligned}
{}_r R &= \sigma(\sigma+1) \rho^2 \zeta^{-2} {}_r \mathcal{U} \mathcal{R} \\
{}_r R_1 &= i(p_z - bk_z) \zeta^{-1} {}_r \mathcal{V} \mathcal{R} \\
{}_r R_2 &= ip_x \zeta^{-1} {}_r \mathcal{V} \mathcal{R} \\
{}_r R_3 &= ip_y \zeta^{-1} {}_r \mathcal{V} \mathcal{R}
\end{aligned} \tag{2.97}$$

mit den neuen Abkürzungen ${}_r \mathcal{U}$ und ${}_r \mathcal{V}$:

$${}_r \mathcal{U} = \left(1 - \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^2 \right) w \sin \mathcal{X} + 2 \frac{\rho}{\zeta} w \cos \mathcal{X} \tag{2.98}$$

$${}_r\mathcal{V} = \sigma \left(\frac{-2(\sigma+1)}{1 + \left(\frac{\rho}{\zeta}\right)^2} + 3 + 2\sigma \right) \sin \mathcal{X} - \sigma \left(2(\sigma+1) \left(\frac{\rho}{\zeta}\right) w - (\sigma+2) \left(\frac{\rho}{\zeta}\right) \right) \cos \mathcal{X} \quad (2.99)$$

Integrale über die Koeffizienten. In der abkürzenden Schreibweise werden im Folgenden die Ortsintegrale über die verschiedenen Koeffizienten (inklusive Radialwellenfunktion und Phase) berechnet:

$$\begin{aligned} \int \tilde{d} &= \int \mathfrak{J}\mathfrak{J}' - \aleph^2 (2 + \mathfrak{J}) (2 + \mathfrak{J}') [\cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' (\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi')] \\ &= \mathfrak{J}_1^2 R R^* + \mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2 R_r R^* + \mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_{2r} R R^* + \mathfrak{J}_{2r}^2 R_r R^* \\ &\quad - \aleph^2 [(\mathfrak{J}_1 + 2)^2 [R_1 R_1^* + R_2 R_2^* + R_3 R_3^*] + (\mathfrak{J}_1 + 2) \mathfrak{J}_2 [R_{1r} R_1^* + R_{2r} R_2^* + R_{3r} R_3^*] \\ &\quad + (\mathfrak{J}_1 + 2) \mathfrak{J}_2 [{}_r R_1 R_1^* + {}_r R_2 R_2^* + {}_r R_3 R_3^*] + \mathfrak{J}_2^2 [{}_r R_{1r} R_1^* + {}_r R_{2r} R_2^* + {}_r R_{3r} R_3^*]] \\ &= (\mathfrak{J}_1 R + \mathfrak{J}_{2r} R)^2 + \aleph^2 \left\{ ((\mathfrak{J}_1 + 2) R_1 + \mathfrak{J}_{2r} R_1)^2 \right. \\ &\quad \left. + ((\mathfrak{J}_1 + 2) R_2 + \mathfrak{J}_{2r} R_2)^2 + ((\mathfrak{J}_1 + 2) R_3 + \mathfrak{J}_{2r} R_3)^2 \right\} \\ &= \mathcal{R}^2 \sigma^2 \rho^4 \zeta^{-2} (\mathfrak{J}_1 \mathcal{U} + \mathfrak{J}_2 (\sigma + 1) \zeta^{-1} {}_r \mathcal{U})^2 \\ &\quad - \aleph^2 \mathcal{R}^2 ((p_z - b k_z)^2 + p_x^2 + p_y^2) ((\mathfrak{J}_1 + 2) \mathcal{V} + \mathfrak{J}_2 \zeta^{-1} {}_r \mathcal{V})^2 \\ &= \mathcal{R}^2 \sigma^2 \rho^4 \zeta^{-2} (\mathfrak{J}_1 \mathcal{U} + \mathfrak{J}_2 (\sigma + 1) \zeta^{-1} {}_r \mathcal{U})^2 - \aleph^2 \mathcal{R}^2 \rho^2 ((\mathfrak{J}_1 + 2) \mathcal{V} + \mathfrak{J}_2 \zeta^{-1} {}_r \mathcal{V})^2 \\ &= \sigma^2 \rho^4 \zeta^{-2} \mathcal{R}^2 \mathcal{W}_1 - \aleph^2 \rho^2 \mathcal{R}^2 \mathcal{W}_2 \end{aligned} \quad (2.100)$$

$$\begin{aligned} \int d_0 &= \int \mathfrak{J}\mathfrak{J}' + \aleph^2 (2 + \mathfrak{J}) (2 + \mathfrak{J}') [\cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' (\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi')] \\ &= \sigma^2 \rho^4 \zeta^{-2} \mathcal{R}^2 \mathcal{W}_1 + \aleph^2 \rho^2 \mathcal{R}^2 \mathcal{W}_2 \quad (\text{analog zu } \tilde{d}) \end{aligned} \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned}
\int d_1 &= -i\aleph \int \{(2 + \mathfrak{J}) \mathfrak{J}' \cos \varphi \sin \vartheta - \mathfrak{J} (2 + \mathfrak{J}') \cos \varphi' \sin \vartheta'\} \\
&= -i\aleph \{ (\mathfrak{J}_1 + 2) \mathfrak{J}_1 [R_2 R^* - R R_2^*] + (\mathfrak{J}_1 + 2) \mathfrak{J}_2 [R_{2r} R^* - {}_r R R_2^*] \\
&\quad + \mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2 [{}_r R_2 R^* - R_r R_2^*] + \mathfrak{J}_2^2 [{}_r R_{2r} R^* - {}_r R_r R_2^*] \} \\
&= -2i\aleph \{ (\mathfrak{J}_1 + 2) \mathfrak{J}_1 [R R_2] + (\mathfrak{J}_1 + 2) \mathfrak{J}_2 [{}_r R R_2] \\
&\quad + \mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2 [R_r R_2] + \mathfrak{J}_2^2 [{}_r R_r R_2] \} \\
&= -2i\aleph \left\{ (\mathfrak{J}_1 + 2) \mathfrak{J}_1 i \sigma \rho^2 \zeta^{-1} p_x \mathcal{R}^2 \mathcal{U} \mathcal{V} + (\mathfrak{J}_1 + 2) \mathfrak{J}_2 i \sigma (\sigma + 1) \rho^2 \zeta^{-2} p_x \mathcal{R}^2 {}_r \mathcal{U} \mathcal{V} \right. \\
&\quad \left. + \mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2 i \sigma \rho^2 \zeta^{-1} p_x \zeta^{-1} \mathcal{R}^2 \mathcal{U}_r \mathcal{V} + \mathfrak{J}_2^2 i \sigma (\sigma + 1) \rho^2 \zeta^{-2} p_x \zeta^{-1} \mathcal{R}^2 {}_r \mathcal{U}_r \mathcal{V} \right\} \\
&= 2\aleph \sigma \rho^2 \zeta^{-1} \mathcal{R}^2 p_x \left\{ (\mathfrak{J}_1 + 2) \mathfrak{J}_1 \mathcal{U} \mathcal{V} + (\mathfrak{J}_1 + 2) \mathfrak{J}_2 (\sigma + 1) \zeta^{-1} {}_r \mathcal{U} \mathcal{V} \right. \\
&\quad \left. + \mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2 \zeta^{-1} \mathcal{U}_r \mathcal{V} + \mathfrak{J}_2^2 (\sigma + 1) \zeta^{-2} {}_r \mathcal{U}_r \mathcal{V} \right\} \\
&= 2\aleph \sigma \rho^2 \zeta^{-1} \mathcal{R}^2 \mathcal{W}_3 p_x
\end{aligned} \tag{2.102}$$

$$\begin{aligned}
\int d_2 &= -i\aleph \int \{(2 + \mathfrak{J}) \mathfrak{J}' \sin \varphi \sin \vartheta - \mathfrak{J} (2 + \mathfrak{J}') \sin \varphi' \sin \vartheta'\} \\
&= 2\aleph \sigma \rho^2 \zeta^{-1} \mathcal{R}^2 \mathcal{W}_3 p_y \quad (\text{analog zu } d_1)
\end{aligned} \tag{2.103}$$

$$\begin{aligned}
\int d_3 &= -i\aleph \int \{(2 + \mathfrak{J}) \mathfrak{J}' \cos \vartheta - \mathfrak{J} (2 + \mathfrak{J}') \cos \vartheta'\} \\
&= 2\aleph \sigma \rho^2 \zeta^{-1} \mathcal{R}^2 \mathcal{W}_3 (p_z - b k_z) \quad (\text{analog zu } d_1)
\end{aligned} \tag{2.104}$$

Wiederum bedeutet z.B. $\int \tilde{d} = \int d^3 x d^3 x' g(r) g(r') e^{i\rho(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \tilde{d}$ und wurde als abkürzende Schreibweise verwendet.

Hierbei wurden die folgenden neuen Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_1 &= (\mathfrak{J}_1 \mathcal{U} + \mathfrak{J}_2 \zeta^{-1} (\sigma + 1) {}_r \mathcal{U})^2 \\
 \mathcal{W}_2 &= ((\mathfrak{J}_1 + 2) \mathcal{V} + \mathfrak{J}_2 \zeta^{-1} {}_r \mathcal{V})^2 \\
 \mathcal{W}_3 &= (\mathfrak{J}_1 + 2) \mathfrak{J}_1 \mathcal{U} \mathcal{V} + (\mathfrak{J}_1 + 2) \mathfrak{J}_2 \zeta^{-1} (\sigma + 1) {}_r \mathcal{U} \mathcal{V} \\
 &\quad + \mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2 \zeta^{-1} {}_r \mathcal{U} \mathcal{V} + \mathfrak{J}_2^2 \zeta^{-2} (\sigma + 1) {}_r \mathcal{U} {}_r \mathcal{V}
 \end{aligned} \tag{2.105}$$

Die Entwicklung des Phasenfaktors nach Besselfunktionen ist analog zu Abschnitt 2.2.6, auch die \mathcal{J}_I haben die gleiche Form wie in (2.56), (2.60) und (2.61) mit dem Unterschied, dass E_{1s} durch E_{2s} ersetzt wurde.

Berechnung von \mathcal{J}_A .

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_A &= \frac{e^2 a^2}{4q_0} \sum_n \left(\tilde{J}_{n-1}^2 + 2\tilde{J}_{n-1}\tilde{J}_{n+1} + \tilde{J}_{n+1}^2 \right) 2\pi\delta(E_{2s} + E_q - n\omega) 2\pi\delta(0) \\
&\quad \times \int d^3x \int d^3x' g(r) g(r') e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} e^{-in\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \left[\tilde{d}m + d_0 p^0 - d_1 p_x + d_2 p_y + d_3 p_z \right] \\
&= \frac{e^2 a^2}{4q_0} \sum_n 2\pi\delta(E_{2s} + E_q - n\omega) 2\pi\delta(0) \left(\tilde{J}_{n-1}^2 + 2\tilde{J}_{n-1}\tilde{J}_{n+1} + \tilde{J}_{n+1}^2 \right) \\
&\quad \times \left[(m + p^0) \mathcal{R}^2 \sigma^2 \rho^4 \zeta^{-2} \mathcal{W}_1 - (m - p^0) \aleph^2 \mathcal{R}^2 \rho^2 \mathcal{W}_2 \right. \\
&\quad \left. + 2\aleph \sigma \rho^2 \zeta^{-1} \mathcal{R}^2 \mathcal{W}_3 (-p_x^2 + p_y^2 + p_z(p_z - bk_z)) \right] \\
&= \frac{8\pi^2 e^2 a^2}{q_0 \zeta^3} \sum_n \frac{\delta(E_{2s} + E_q - n\omega)}{\left[1 + \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^2 \right]^4} 2\pi\delta(0) \left(\tilde{J}_{n-1}^2 + 2\tilde{J}_{n-1}\tilde{J}_{n+1} + \tilde{J}_{n+1}^2 \right) \\
&\quad \times \mathcal{P} \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^2 \left\{ (m + p^0) \sigma^2 \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^2 \mathcal{W}_1 - (m - p^0) \aleph^2 \mathcal{W}_2 \right. \\
&\quad \left. + (-p_x^2 + p_y^2 + p_z(p_z - bk_z)) 2\aleph \sigma \zeta^{-1} \mathcal{W}_3 \right\} \\
&= \frac{8\pi^2}{q_0 \zeta^3} T \sum_n \frac{\delta(E_{2s} + E_q - n\omega)}{\left[1 + \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^2 \right]^4} u_A,
\end{aligned} \tag{2.106}$$

mit

$$\begin{aligned}
u_A &= e^2 a^2 \mathcal{P} \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^2 \left(\tilde{J}_{n-1}^2 + 2\tilde{J}_{n-1}\tilde{J}_{n+1} + \tilde{J}_{n+1}^2 \right) \\
&\quad \times \left\{ (m + p^0) \sigma^2 \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^2 \mathcal{W}_1 - (m - p^0) \aleph^2 \mathcal{W}_2 \right. \\
&\quad \left. + (-p_x^2 + p_y^2 + p_z(p_z - bk_z)) 2\aleph \sigma \zeta^{-1} \mathcal{W}_3 \right\}
\end{aligned} \tag{2.107}$$

Berechnung von \mathcal{J}_B .

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_B &= \frac{eav\omega}{4q^0} \sum_n 2\pi\delta(E_{2s} + E_q - n\omega) 2\pi\delta(0) \\
&\quad \times \left(\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n-1} + \tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n+1} + 2\tilde{J}_n\tilde{J}_{n-1} + 2\tilde{J}_n\tilde{J}_{n+1} + \tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n-1} + \tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n+1} \right) \\
&\quad \times \int d^3x \int d^3x' g(r) g(r') e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} e^{-ink(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \left(-(d_0 + d_3)p_x + d_1(p^0 - p_z) \right) \\
&= \frac{eav\omega}{4q^0} \sum_n 2\pi\delta(E_{2s} + E_q - n\omega) 2\pi\delta(0) \\
&\quad \times \left(\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n-1} + \tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n+1} + 2\tilde{J}_n\tilde{J}_{n-1} + 2\tilde{J}_n\tilde{J}_{n+1} + \tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n-1} + \tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n+1} \right) \\
&\quad \times \left\{ (p^0 - p_z) [2\aleph\sigma\rho^2\zeta^{-1}\mathcal{R}^2\mathcal{W}_3p_x] \right. \\
&\quad \quad \left. - p_x [\sigma^2\rho^4\zeta^{-2}\mathcal{R}^2\mathcal{W}_1 + \aleph^2\mathcal{R}^2\rho^2\mathcal{W}_2 + 2\aleph\sigma\rho^2\zeta^{-1}\mathcal{R}^2\mathcal{W}_3(p_z - bk_z)] \right\} \\
&= \frac{8\pi^2 eav\omega}{q_0\zeta^3} \sum_n \frac{\delta(E_{2s} + E_q - n\omega)}{\left[1 + \left(\frac{\rho}{\zeta}\right)^2\right]^4} 2\pi\delta(0) \mathcal{P}\left(\frac{\rho}{\zeta}\right)^2 \\
&\quad \times \left(\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n-1} + \tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n+1} + 2\tilde{J}_n\tilde{J}_{n-1} + 2\tilde{J}_n\tilde{J}_{n+1} + \tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n-1} + \tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n+1} \right) \\
&\quad \times \left\{ (p^0 - p_z) 2\aleph\sigma\zeta^{-1}\mathcal{W}_3p_x \right. \\
&\quad \quad \left. - p_x \left[\sigma^2 \left(\frac{\rho}{\zeta}\right)^2 \mathcal{W}_1 + \aleph^2\mathcal{W}_2 + 2\aleph\sigma\zeta^{-1}\mathcal{W}_3(p_z - bk_z) \right] \right\} \\
&= \frac{8\pi^2}{q_0\zeta^3} T \sum_n \frac{\delta(E_{2s} + E_q - n\omega)}{\left[1 + \left(\frac{\rho}{\zeta}\right)^2\right]^4} u_B,
\end{aligned} \tag{2.108}$$

mit

$$\begin{aligned}
u_B = eav\omega\mathcal{P}\left(\frac{\rho}{\zeta}\right)^2 & \left\{ (p^0 - p_z) 2\aleph\sigma\zeta^{-1}\mathcal{W}_3 p_x \right. \\
& \left. - p_x \left[\sigma^2 \left(\frac{\rho}{\zeta}\right)^2 \mathcal{W}_1 + \aleph^2\mathcal{W}_2 + 2\aleph\sigma\zeta^{-1}\mathcal{W}_3 (p_z - bk_z) \right] \right\} \\
& \times \left(\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n-1} + \tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n+1} + 2\tilde{J}_n\tilde{J}_{n-1} + 2\tilde{J}_n\tilde{J}_{n+1} + \tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n-1} + \tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n+1} \right)
\end{aligned} \tag{2.109}$$

Berechnung von \mathcal{J}_C .

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_C &= \frac{\nu^2\omega^2}{8q_0} (p^0 - p_z) \sum_n 2\pi\delta(E_{2s} + E_q - n\omega) 2\pi\delta(0) \\
& \times \left[\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n-2} + 4\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_n + 2\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n+2} + 4\tilde{J}_n\tilde{J}_n + 4\tilde{J}_n\tilde{J}_{n+2} + \tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n+2} \right] \\
& \times \int d^3x \int d^3x' g(r) g(r') e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} e^{-i\mathbf{n}\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} [d_0 + d_3] \\
&= \frac{\nu^2\omega^2}{8q_0} (p^0 - p_z) \sum_n 2\pi\delta(E_{2s} + E_q - n\omega) 2\pi\delta(0) \\
& \times \left[\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n-2} + 4\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_n + 2\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n+2} + 4\tilde{J}_n\tilde{J}_n + 4\tilde{J}_n\tilde{J}_{n+2} + \tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n+2} \right] \\
& \times (p^0 - p_z) \left[\sigma^2 \rho^4 \zeta^{-2} \mathcal{R}^2 \mathcal{W}_1 + \aleph^2 \mathcal{R}^2 \rho^2 \mathcal{W}_2 + 2\aleph\sigma\rho^2 \zeta^{-1} \mathcal{R}^2 \mathcal{W}_3 (p_z - bk_z) \right] \\
&= \frac{4\pi^2\nu^2\omega^2}{q_0\zeta^3} \sum_n \frac{\delta(E_{2s} + E_q - n\omega)}{\left[1 + \left(\frac{\rho}{\zeta}\right)^2\right]^4} 2\pi\delta(0) \mathcal{P}\left(\frac{\rho}{\zeta}\right)^2 \\
& \times \left[\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n-2} + 4\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_n + 2\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n+2} + 4\tilde{J}_n\tilde{J}_n + 4\tilde{J}_n\tilde{J}_{n+2} + \tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n+2} \right] \\
& \times (p^0 - p_z) \left\{ \sigma^2 \left(\frac{\rho}{\zeta}\right)^2 \mathcal{W}_1 + \aleph^2\mathcal{W}_2 + 2\aleph\sigma\zeta^{-1}\mathcal{W}_3 (p_z - bk_z) \right\} \\
&= \frac{8\pi^2}{q_0\zeta^3} T \sum_n \frac{\delta(E_{2s} + E_q - n\omega)}{\left[1 + \left(\frac{\rho}{\zeta}\right)^2\right]^4} u_C,
\end{aligned} \tag{2.110}$$

mit

$$u_C = \frac{1}{2} \nu^2 \omega^2 (p^0 - p_z) \mathcal{P} \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^2 \left\{ \sigma^2 \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^2 \mathcal{W}_1 + \aleph^2 \mathcal{W}_2 + 2\aleph \sigma \zeta^{-1} \mathcal{W}_3 (p_z - bk_z) \right\} \\ \times \left[\tilde{J}_{n-2} \tilde{J}_{n-2} + 4\tilde{J}_{n-2} \tilde{J}_n + 2\tilde{J}_{n-2} \tilde{J}_{n+2} + 4\tilde{J}_n \tilde{J}_n + 4\tilde{J}_n \tilde{J}_{n+2} + \tilde{J}_{n+2} \tilde{J}_{n+2} \right] \quad (2.111)$$

Endergebnis.

Das analytische Endergebnis für den Einfang in den $2s$ -Zustand lautet:

$$\mathcal{J} = \frac{8\pi^2}{E_q \zeta^3} T \sum_{n \geq n_0} \frac{\delta(E_{2s} + E_q - n\omega)}{[1 + (\rho/\zeta)^2]^4} [u_A + u_B + u_C] , \quad (2.112)$$

mit den Abkürzungen u_A, u_B, u_C definiert in (2.107), (2.109) und (2.111).

Die minimale Photonenzahl $n_0 \geq (E_{2s} + m_*)/\omega$ ist leicht verändert zu der Bedingung für den Grundzustand.

Der Zusammenhang des Amplitudenquadrates mit der differentiellen Rate ist wie in Gln. 2.78 und 2.81 mit den Ersetzungen $E_{1s} \leftrightarrow E_{2s}$ und $Z/a_B \leftrightarrow \zeta$:

$$\frac{dR}{d\Omega} = \frac{1}{\pi \zeta^3} \sum_{n \geq n_0} |\mathbf{q}| \frac{u_A + u_B + u_C}{[1 + (\rho/\zeta)^2]^4} \Big|_{E_q = n\omega - E_{2s}, |\mathbf{q}| = \sqrt{E_q^2 - m_*^2}} \quad (2.113)$$

2.3.2 Einfang in den $2p_{1/2}$ -Zustand

Die Abkürzungen sind wie für den $2s$ -Zustand mit einem Vorzeichenunterschied in \mathfrak{J}_2 .

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(r) &= \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 r & \mathfrak{J}_1 &= 2E & \mathfrak{J}_2 &= -\frac{2\zeta}{2E+1} \\ \mathfrak{K} &= \sqrt{\frac{1-E}{1+E}} & \sigma &= \sqrt{1-(\alpha Z)^2} \\ \zeta &= m\sqrt{\frac{1-\sigma}{2}} & E &= \sqrt{\frac{1+\sigma}{2}} & E_{2p_{1/2}} &= m\sqrt{\frac{1+\sigma}{2}}, \end{aligned} \quad (2.114)$$

sowie $w = [1 + (\rho/\zeta)^2]^{-1}$.

Da $E_{2p_{1/2}}$, $N_{2p_{1/2}}$, usw. mitunter etwas kompliziert erscheint, verwenden wir häufig lieber E_{2p} bzw. N_{2p} , solange keine Verwechslungsgefahr mit $2p_{3/2}$ besteht. Da letzteres in dieser Arbeit nicht ausgiebig behandelt wird, sollte dies zu keinen Problemen führen.

Wellenfunktionen

Die Wellenfunktion für den $2p_{1/2}$ -Zustand lautet

$$\phi_{2p}^s = g(r) \chi_{2p}^s e^{-iE_{2p}t}, \quad (2.115)$$

mit dem separierbaren Teil des Radialteils der Wellenfunktion:

$$g(r) = N_{2p} r^{\sigma-1} e^{-\zeta r}. \quad (2.116)$$

Der Spinoranteil χ^s enthält nun ebenfalls r -abhängige Terme:

$$\chi_{2p}^\uparrow = \left[\mathfrak{J}(r) \begin{pmatrix} -\cos \vartheta \\ -\sin \vartheta e^{i\varphi} \\ -i\mathfrak{K} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\cos \vartheta \\ 2\sin \vartheta e^{i\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (2.117)$$

$$\chi_{2p}^\downarrow = \left[\mathfrak{J}(r) \begin{pmatrix} -\sin \vartheta e^{-i\varphi} \\ \cos \vartheta \\ 0 \\ -i\mathfrak{K} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sin \vartheta e^{-i\varphi} \\ -2\cos \vartheta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (2.118)$$

Die Normierung für den $2p_{1/2}$ -Zustand ist:

$$N_{2p} = \frac{(2\zeta)^{\sigma+1/2}}{4} \sqrt{\frac{(1+E)(2E+1)}{2\pi E \Gamma(2\sigma+1)}} \quad (2.119)$$

Dabei ist zu beachten, dass sie sich zum $2s$ -Zustand um ein Vorzeichen unterscheiden!

Elektronenspinsumme

Wie bereits im Abschnitt 2.2.4 wird über alle Spineinstellungen des Elektrons summiert. Das Ergebnis ist die Matrix M :

$$M = M^{(2p)} = \sum \chi_{2p} \bar{\chi}'_{2p} = \chi_{2p}^{\uparrow}(r) \bar{\chi}_{2p}^{\uparrow}(r') + \chi_{2p}^{\downarrow}(r) \bar{\chi}_{2p}^{\downarrow}(r') \quad (2.120)$$

Zerlegung von M in Produkte von γ -Matrizen. Analog zu vorher wird die Matrix M in Produkte von γ -Matrizen zerlegt:

$$M = \frac{1}{2} (M^{(0)} + M^{(1)} + M^{(2)} + M^{(3)} + M^{(4)}) \quad (2.121)$$

mit

$$\begin{aligned} M^{(0)} &= \tilde{h} \mathbf{1} \\ M^{(1)} &= h_0 \gamma^0 + h_1 \gamma^1 + h_2 \gamma^2 + h_3 \gamma^3 \\ M^{(2)} &= h_{01} \gamma^0 \gamma^1 + h_{02} \gamma^0 \gamma^2 + h_{03} \gamma^0 \gamma^3 + h_{12} \gamma^1 \gamma^2 + h_{13} \gamma^1 \gamma^3 + h_{23} \gamma^2 \gamma^3 \\ M^{(3)} &= h_{012} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 + h_{013} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^3 + h_{023} \gamma^0 \gamma^2 \gamma^3 + h_{123} \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \\ M^{(4)} &= h_{0123} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \end{aligned} \quad (2.122)$$

Koeffizienten. Die Koeffizienten lauten:

$$\begin{aligned} \tilde{h} &= -\aleph^2 \mathfrak{J} \mathfrak{J}' + (\mathfrak{J} - 2) (\mathfrak{J}' - 2) [\cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' (\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi')] \\ h_0 &= \aleph^2 \mathfrak{J} \mathfrak{J}' + (\mathfrak{J} - 2) (\mathfrak{J}' - 2) [\cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' (\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi')] \\ h_1 &= i \aleph [(\mathfrak{J} - 2) \mathfrak{J}' \sin \vartheta \cos \varphi - \mathfrak{J} (\mathfrak{J}' - 2) \sin \vartheta' \cos \varphi'] \\ h_2 &= i \aleph [(\mathfrak{J} - 2) \mathfrak{J}' \sin \vartheta \sin \varphi - \mathfrak{J} (\mathfrak{J}' - 2) \sin \vartheta' \sin \varphi'] \\ h_3 &= i \aleph [(\mathfrak{J} - 2) \mathfrak{J}' \cos \vartheta - \mathfrak{J} (\mathfrak{J}' - 2) \cos \vartheta'] \end{aligned} \quad (2.123)$$

Alle anderen Koeffizienten sind wiederum nicht relevant, da sie nicht zum Amplitudenquadrat beitragen.

Ortsintegration

Auftretende Integrale. Es treten die gleichen Integrale wie für den Einfang in den $2s$ -Zustand auf. Einziger Unterschied ist die leicht verschiedene Normierung \mathcal{P} sowie die verschiedene Definition von \mathfrak{J}_2 .

$$\begin{aligned}
R &= \sigma \rho^2 \zeta^{-1} \mathcal{U} \mathcal{R} \\
R_1 &= i(p_z - bk_z) \mathcal{V} \mathcal{R} \\
R_2 &= ip_x \mathcal{V} \mathcal{R} \\
R_3 &= ip_y \mathcal{V} \mathcal{R}
\end{aligned} \tag{2.124}$$

Für die komplex-konjugierten Integrale gilt

$$R^* = R \quad R_1^* = -R_1 \quad R_2^* = -R_2 \quad R_3^* = -R_3 \tag{2.125}$$

Integrale mit zusätzlichem Faktor r

$$\begin{aligned}
{}_r R &= \sigma(\sigma + 1) \rho^2 \zeta^{-2} {}_r \mathcal{U} \mathcal{R} \\
{}_r R_1 &= i(p_z - bk_z) \zeta^{-1} {}_r \mathcal{V} \mathcal{R} \\
{}_r R_2 &= ip_x \zeta^{-1} {}_r \mathcal{V} \mathcal{R} \\
{}_r R_3 &= ip_y \zeta^{-1} {}_r \mathcal{V} \mathcal{R}
\end{aligned} \tag{2.126}$$

Integrale über die Koeffizienten. In der abkürzenden Schreibweise werden im Folgenden die Ortsintegrale über die verschiedenen Koeffizienten (inklusive Radialwellenfunktion und Phase) berechnet:

$$\begin{aligned}
\int \tilde{h} &= \int -\aleph^2 \mathfrak{J} \mathfrak{J}' + (\mathfrak{J} - 2) (\mathfrak{J}' - 2) [\cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' (\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi')] \\
&= -\aleph^2 [\mathfrak{J}_1^2 R R^* + \mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2 (R_r R^* + {}_r R R^*) + \mathfrak{J}_{2r}^2 R_r R^*] \\
&\quad + (\mathfrak{J}_1 - 2)^2 \{R_1 R_1^* + R_2 R_2^* + R_3 R_3^*\} + (\mathfrak{J}_1 - 2) \mathfrak{J}_2 \{R_{1r} R_1^* + R_{2r} R_2^* + R_{3r} R_3^*\} \\
&\quad + (\mathfrak{J}_1 - 2) \mathfrak{J}_2 \{{}_r R_1 R_1^* + {}_r R_2 R_2^* + {}_r R_3 R_3^*\} + \mathfrak{J}_2^2 \{{}_r R_{1r} R_1^* + {}_r R_{2r} R_2^* + {}_r R_{3r} R_3^*\} \\
&= -\aleph^2 (\mathfrak{J}_1 R + \mathfrak{J}_{2r} R)^2 - ((\mathfrak{J}_1 - 2) R_1 + \mathfrak{J}_{2r} R_1)^2 \\
&\quad - ((\mathfrak{J}_1 - 2) R_2 + \mathfrak{J}_{2r} R_2)^2 - ((\mathfrak{J}_1 - 2) R_3 + \mathfrak{J}_{2r} R_3)^2 \\
&= -\aleph^2 \sigma^2 \rho^4 \zeta^{-2} \mathcal{R}^2 (\mathfrak{J}_1 \mathcal{U} + \mathfrak{J}_2 (\sigma + 1) \zeta^{-1} {}_r \mathcal{U})^2 \\
&\quad + \mathcal{R}^2 [p_x^2 + p_y^2 + (p_z - bk_z)^2] ((\mathfrak{J}_1 - 2) \mathcal{V} + \mathfrak{J}_2 \zeta^{-1} {}_r \mathcal{V})^2 \\
&= -\aleph^2 \sigma^2 \rho^4 \zeta^{-2} \mathcal{R}^2 \mathcal{W}_1 + \rho^2 \mathcal{R}^2 \mathcal{W}_2
\end{aligned} \tag{2.127}$$

$$\begin{aligned}
\int h_0 &= \int \aleph^2 \mathfrak{J} \mathfrak{J}' + (\mathfrak{J} - 2) (\mathfrak{J}' - 2) [\cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' (\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi')] \\
&= \aleph^2 \sigma^2 \rho^4 \zeta^{-2} \mathcal{R}^2 \mathcal{W}_1 + \rho^2 \mathcal{R}^2 \mathcal{W}_2 \quad (\text{analog zu } \tilde{h})
\end{aligned} \tag{2.128}$$

$$\begin{aligned}
\int h_1 &= i \aleph \int [(\mathfrak{J} - 2) \mathfrak{J}' \sin \vartheta \cos \varphi - \mathfrak{J} (\mathfrak{J}' - 2) \sin \vartheta' \cos \varphi'] \\
&= i \aleph \left\{ (\mathfrak{J}_1 - 2) \mathfrak{J}_1 [R_2 R^* - R R_2^*] + (\mathfrak{J}_1 - 2) \mathfrak{J}_2 [R_{2r} R^* - R_r R_2^*] \right. \\
&\quad \left. + \mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2 [{}_r R_2 R^* - {}_r R R_2^*] + \mathfrak{J}_2^2 [{}_r R_{2r} R^* - {}_r R_r R_2^*] \right\} \\
&= 2i \aleph \left\{ (\mathfrak{J}_1 - 2) \mathfrak{J}_1 \sigma \rho^2 \zeta^{-1} \mathcal{U} i p_x \mathcal{V} \mathcal{R}^2 + (\mathfrak{J}_1 - 2) \mathfrak{J}_2 \sigma (\sigma + 1) \rho^2 \zeta^{-2} {}_r \mathcal{U} i p_x \mathcal{V} \mathcal{R}^2 \right. \\
&\quad \left. + \mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2 \sigma \rho^2 \zeta^{-1} \mathcal{U} i p_x \zeta^{-1} {}_r \mathcal{V} \mathcal{R}^2 + \mathfrak{J}_2^2 \sigma (\sigma + 1) \rho^2 \zeta^{-2} {}_r \mathcal{U} i p_x \zeta^{-1} {}_r \mathcal{V} \mathcal{R}^2 \right\} \\
&= -2 \aleph \sigma \rho^2 \zeta^{-1} p_x \mathcal{R}^2 \left\{ (\mathfrak{J}_1 - 2) \mathfrak{J}_1 \mathcal{U} \mathcal{V} + (\mathfrak{J}_1 - 2) \mathfrak{J}_2 \zeta^{-1} (\sigma + 1) {}_r \mathcal{U} \mathcal{V} \right. \\
&\quad \left. + \mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2 \zeta^{-1} \mathcal{U}_r \mathcal{V} + \mathfrak{J}_2^2 \zeta^{-2} (\sigma + 1) {}_r \mathcal{U}_r \mathcal{V} \right\} \\
&= -2 \aleph \sigma \rho^2 \zeta^{-1} p_x \mathcal{R}^2 \mathcal{W}_3
\end{aligned} \tag{2.129}$$

$$\begin{aligned}
\int h_2 &= i \aleph \int [(\mathfrak{J} - 2) \mathfrak{J}' \sin \vartheta \sin \varphi - \mathfrak{J} (\mathfrak{J}' - 2) \sin \vartheta' \sin \varphi'] \\
&= -2 \aleph \sigma \rho^2 \zeta^{-1} p_y \mathcal{R}^2 \mathcal{W}_3 \quad (\text{analog zu } h_1)
\end{aligned} \tag{2.130}$$

$$\begin{aligned}
\int h_3 &= i \aleph \int [(\mathfrak{J} - 2) \mathfrak{J}' \cos \vartheta - \mathfrak{J} (\mathfrak{J}' - 2) \cos \vartheta'] \\
&= -2 \aleph \sigma \rho^2 \zeta^{-1} (p_z - b k_z) \mathcal{R}^2 \mathcal{W}_3 \quad (\text{analog zu } h_1)
\end{aligned} \tag{2.131}$$

Wiederum bedeutet $\int \tilde{h} = \int d^3x d^3x' g(r) g(r') e^{i\rho(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\tilde{h}}$ und wurde als abkürzende Schreibweise verwendet. Wie oben werden die Abkürzungen \mathcal{W}_i eingeführt:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_1 &= (\mathfrak{J}_1 \mathcal{U} + \mathfrak{J}_2 \zeta^{-1} (\sigma + 1) {}_r \mathcal{U})^2 \\ \mathcal{W}_2 &= ((\mathfrak{J}_1 - 2) \mathcal{V} + \mathfrak{J}_2 \zeta^{-1} {}_r \mathcal{V})^2\end{aligned}\tag{2.132}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_3 &= (\mathfrak{J}_1 - 2) \mathfrak{J}_1 \mathcal{U} \mathcal{V} + (\mathfrak{J}_1 - 2) \mathfrak{J}_2 \zeta^{-1} (\sigma + 1) {}_r \mathcal{U} \mathcal{V} \\ &\quad + \mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2 \zeta^{-1} \mathcal{U}_r \mathcal{V} + \mathfrak{J}_2^2 \zeta^{-2} (\sigma + 1) {}_r \mathcal{U}_r \mathcal{V}\end{aligned}$$

\mathcal{W}_2 und \mathcal{W}_3 sind anders definiert als für $2s$ in Abschnitt 2.3.1.

Man beachte, dass ebenso \mathcal{P} anders als bei $2s$ definiert ist:

$$\begin{aligned}\mathcal{P} = \mathcal{P}_{2p} &= \frac{(\Gamma(\sigma))^2 2^{2(\sigma-2)}}{\Gamma(1+2\sigma)} \left[1 + \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^2 \right]^{2-\sigma} \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^{-6} \frac{(1+E)(2E+1)}{E} \\ &= \frac{(\zeta)^5}{16\pi} \left[1 + \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^2 \right]^4 \mathcal{R}^2\end{aligned}\tag{2.133}$$

Die Entwicklung des Phasenfaktors nach Besselfunktionen ist analog zu Abschnitt 2.2.6, auch die \mathcal{J}_I haben die gleiche Form wie in (2.56), (2.60) und (2.61) mit dem Unterschied, dass E_{1s} durch E_{2p} ersetzt wurde.

Berechnung von \mathcal{J}_A .

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_A &= \frac{e^2 a^2}{4q_0} \sum_n \left(\tilde{J}_{n-1}^2 + 2\tilde{J}_{n-1}\tilde{J}_{n+1} + \tilde{J}_{n+1}^2 \right) 2\pi\delta(E_{2s} + E_q - n\omega) 2\pi\delta(0) \\
&\quad \times \int d^3x \int d^3x' g(r) g(r') e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} e^{-i\mathbf{n}\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \\
&\quad \times \left[\tilde{h}m + h_0 p^0 - h_1 p_x + h_2 p_y + h_3 p_z \right] \\
&= \frac{e^2 a^2}{4q_0} \sum_n 2\pi\delta(E_{2s} + E_q - n\omega) 2\pi\delta(0) \left(\tilde{J}_{n-1}^2 + 2\tilde{J}_{n-1}\tilde{J}_{n+1} + \tilde{J}_{n+1}^2 \right) \\
&\quad \times \left[(m + p^0) \mathcal{R}^2 \rho^2 \mathcal{W}_2 - (m - p^0) \aleph^2 \sigma^2 \mathcal{R}^2 \rho^4 \zeta^{-2} \mathcal{W}_1 \right. \\
&\quad \left. - 2\aleph \sigma \rho^2 \zeta^{-1} \mathcal{R}^2 \mathcal{W}_3 (-p_x^2 + p_y^2 + p_z(p_z - bk_z)) \right] \\
&= \frac{8\pi^2 e^2 a^2}{q_0 (\zeta)^3} \sum_n \frac{\delta(E_{2s} + E_q - n\omega)}{\left[1 + \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^2 \right]^4} 2\pi\delta(0) \left(\tilde{J}_{n-1}^2 + 2\tilde{J}_{n-1}\tilde{J}_{n+1} + \tilde{J}_{n+1}^2 \right) \mathcal{P} \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^2 \\
&\quad \times \left\{ (m + p^0) \mathcal{W}_2 - (m - p^0) \aleph^2 \sigma^2 \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^2 \mathcal{W}_1 \right. \\
&\quad \left. - (-p_x^2 + p_y^2 + p_z(p_z - bk_z)) 2\aleph \sigma \zeta^{-1} \mathcal{W}_3 \right\} \\
&= \frac{8\pi^2}{q_0 (\zeta)^3} T \sum_n \frac{\delta(E_{2s} + E_q - n\omega)}{\left[1 + \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^2 \right]^4} u_A,
\end{aligned} \tag{2.134}$$

mit

$$\begin{aligned}
u_A &= e^2 a^2 \mathcal{P} \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^2 \left(\tilde{J}_{n-1}^2 + 2\tilde{J}_{n-1}\tilde{J}_{n+1} + \tilde{J}_{n+1}^2 \right) \\
&\quad \times \left\{ (m + p^0) \mathcal{W}_2 - (m - p^0) \aleph^2 \sigma^2 \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^2 \mathcal{W}_1 \right. \\
&\quad \left. - 2\aleph \sigma \zeta^{-1} \mathcal{W}_3 [-p_x^2 + p_y^2 + p_z(p_z - bk_z)] \right\}
\end{aligned} \tag{2.135}$$

Berechnung von \mathcal{J}_B .

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_B &= \frac{eav\omega}{4q^0} \sum_n 2\pi\delta(E_{2s} + E_q - n\omega) 2\pi\delta(0) \\
&\quad \times \left(\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n-1} + \tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n+1} + 2\tilde{J}_n\tilde{J}_{n-1} + 2\tilde{J}_n\tilde{J}_{n+1} + \tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n-1} + \tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n+1} \right) \\
&\quad \times \int d^3x \int d^3x' g(r) g(r') e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} e^{-in\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \left(-(h_0 + h_3)p_x + h_1(p^0 - p_z) \right) \\
&= \frac{eav\omega}{4q^0} \sum_n 2\pi\delta(E_{2s} + E_q - n\omega) 2\pi\delta(0) \\
&\quad \times \left(\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n-1} + \tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n+1} + 2\tilde{J}_n\tilde{J}_{n-1} + 2\tilde{J}_n\tilde{J}_{n+1} + \tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n-1} + \tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n+1} \right) \\
&\quad \times \left\{ (p^0 - p_z) \left[-2\aleph\sigma\rho^2\zeta^{-1}\mathcal{R}^2\mathcal{W}_3p_x \right] \right. \\
&\quad \quad \left. - p_x \left[\aleph^2\sigma^2\rho^4\zeta^{-2}\mathcal{R}^2\mathcal{W}_1 + \mathcal{R}^2\rho^2\mathcal{W}_2 - 2\aleph\sigma\rho^2\zeta^{-1}\mathcal{R}^2\mathcal{W}_3(p_z - bk_z) \right] \right\} \\
&= \frac{8\pi^2eav\omega}{q_0(\zeta)^3} \sum_n \frac{\delta(E_{2s} + E_q - n\omega)}{\left[1 + \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^2 \right]^4} 2\pi\delta(0) \mathcal{P} \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^2 \\
&\quad \times \left(\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n-1} + \tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n+1} + 2\tilde{J}_n\tilde{J}_{n-1} + 2\tilde{J}_n\tilde{J}_{n+1} + \tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n-1} + \tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n+1} \right) \\
&\quad \times \left\{ - (p^0 - p_z) 2\aleph\sigma\zeta^{-1}\mathcal{W}_3p_x \right. \\
&\quad \quad \left. - p_x \left[\aleph^2\sigma^2 \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^2 \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 - 2\aleph\sigma\zeta^{-1}\mathcal{W}_3(p_z - bk_z) \right] \right\} \\
&= \frac{8\pi^2}{q_0(\zeta)^3} T \sum_n \frac{\delta(E_{2s} + E_q - n\omega)}{\left[1 + \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^2 \right]^4} u_B,
\end{aligned} \tag{2.136}$$

mit

$$\begin{aligned}
u_B = eav\omega\mathcal{P}\left(\frac{\rho}{\zeta}\right)^2 & \left\{ - (p^0 - p_z) 2\aleph\sigma\zeta^{-1}p_x\mathcal{W}_3 \right. \\
& \left. - p_x \left[\aleph^2\sigma^2\left(\frac{\rho}{\zeta}\right)^2 \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 - 2\aleph\sigma\zeta^{-1}(p_z - bk_z)\mathcal{W}_3 \right] \right\} \\
& \times \left(\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n-1} + \tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n+1} + 2\tilde{J}_n\tilde{J}_{n-1} + 2\tilde{J}_n\tilde{J}_{n+1} + \tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n-1} + \tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n+1} \right)
\end{aligned} \tag{2.137}$$

Berechnung von \mathcal{J}_C .

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_C &= \frac{\nu^2\omega^2}{8q_0} (p^0 - p_z) \sum_n 2\pi\delta(E_{2s} + E_q - n\omega) 2\pi\delta(0) \\
& \times \left[\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n-2} + 4\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_n + 2\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n+2} + 4\tilde{J}_n\tilde{J}_n + 4\tilde{J}_n\tilde{J}_{n+2} + \tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n+2} \right] \\
& \times \int d^3x \int d^3x' g(r) g(r') e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} e^{-in\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} [h_0 + h_3] \\
&= \frac{\nu^2\omega^2}{8q_0} (p^0 - p_z) \sum_n 2\pi\delta(E_{2s} + E_q - n\omega) 2\pi\delta(0) \\
& \times \left[\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n-2} + 4\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_n + 2\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n+2} + 4\tilde{J}_n\tilde{J}_n + 4\tilde{J}_n\tilde{J}_{n+2} + \tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n+2} \right] \\
& \times (p^0 - p_z) \left[\aleph^2\sigma^2\rho^4\zeta^{-2}\mathcal{R}^2\mathcal{W}_1 + \mathcal{R}^2\rho^2\mathcal{W}_2 - 2\aleph\sigma\rho^2\zeta^{-1}\mathcal{R}^2\mathcal{W}_3(p_z - bk_z) \right] \\
&= \frac{4\pi^2\nu^2\omega^2}{q_0(\zeta)^3} \sum_n \frac{\delta(E_{2s} + E_q - n\omega)}{\left[1 + \left(\frac{\rho}{\zeta}\right)^2\right]^4} 2\pi\delta(0) \mathcal{P}\left(\frac{\rho}{\zeta}\right)^2 \\
& \times \left[\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n-2} + 4\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_n + 2\tilde{J}_{n-2}\tilde{J}_{n+2} + 4\tilde{J}_n\tilde{J}_n + 4\tilde{J}_n\tilde{J}_{n+2} + \tilde{J}_{n+2}\tilde{J}_{n+2} \right] \\
& \times (p^0 - p_z) \left\{ \aleph^2\sigma^2\left(\frac{\rho}{\zeta}\right)^2 \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 - 2\aleph\sigma\zeta^{-1}\mathcal{W}_3(p_z - bk_z) \right\} \\
&= \frac{8\pi^2}{q_0(\zeta)^3} T \sum_n \frac{\delta(E_{2s} + E_q - n\omega)}{\left[1 + \left(\frac{\rho}{\zeta}\right)^2\right]^4} u_C,
\end{aligned} \tag{2.138}$$

mit

$$\begin{aligned}
u_C = & \frac{1}{2} \nu^2 \omega^2 (p^0 - p_z) \mathcal{P} \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^2 \\
& \times \left[\tilde{J}_{n-2} \tilde{J}_{n-2} + 4 \tilde{J}_{n-2} \tilde{J}_n + 2 \tilde{J}_{n-2} \tilde{J}_{n+2} + 4 \tilde{J}_n \tilde{J}_n + 4 \tilde{J}_n \tilde{J}_{n+2} + \tilde{J}_{n+2} \tilde{J}_{n+2} \right] \\
& \left\{ \aleph^2 \sigma^2 \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^2 \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 - 2 \aleph \sigma \zeta^{-1} (p_z - b k_z) \mathcal{W}_3 \right\}
\end{aligned} \tag{2.139}$$

Endergebnis

Das analytische Endergebnis für den Einfang in den $2p_{1/2}$ -Zustand lautet:

$$\mathcal{J} = \frac{8\pi^2}{E_q (\zeta)^3} T \sum_{n \geq n_0} \frac{\delta(E_{2s} + E_q - n\omega)}{[1 + (\rho/\zeta)^2]^4} [u_A + u_B + u_C] , \tag{2.140}$$

mit den Abkürzungen u_A, u_B, u_C definiert in (2.135), (2.137) und (2.139).

Die minimale Photonenzahl lautet $n_0 \geq (E_{2p} + m_*) / \omega$.

Der Zusammenhang von Amplitudenquadrat mit differentieller Rate ist wie in Gl. 2.113. E_{2s} und $E_{2p_{1/2}}$ sind entartet.

$$\frac{dR}{d\Omega} = \frac{1}{\pi \zeta^3} \sum_{n \geq n_0} |\mathbf{q}| \frac{u_A + u_B + u_C}{[1 + (\rho/\zeta)^2]^4} \Big|_{E_q = n\omega - E_{2p}, |\mathbf{q}| = \sqrt{E_q^2 - m_*^2}} \tag{2.141}$$

2.4 Transformation ins Laborsystem

Für eine mögliche experimentelle Untersuchung des berechneten Prozesses ist es notwendig, neben der totalen Rate auch die differentiellen Raten im Laborsystem zu betrachten. Während die totale Rate aufgrund der Zeitdilatation einfach mit $R = R'/\gamma$ transformiert, ist es für die differentiellen Raten komplizierter. Die gestrichenen Größen beziehen sich nun immer auf das Kernsystem, während die ungestrichenen Größen dem Laborsystem entsprechen.

Das Atom bewegt sich in negativer z-Richtung. Entsprechend lauten die Lorentz Transformationsgesetze für Energie und Impuls des freien Positrons:

$$\begin{aligned} E_q &= \gamma (E'_q - \beta |q'| \cos \vartheta') \\ |q| \cos \vartheta &= \gamma (|q'| \cos \vartheta' - \beta E'_q) \\ |q| \sin \vartheta &= |q'| \sin \vartheta' \end{aligned} \quad (2.142)$$

Entsprechend lautet die Rücktransformation:

$$\begin{aligned} E'_q &= \gamma (E_q + \beta |q| \cos \vartheta) \\ |q'| \cos \vartheta' &= \gamma (|q| \cos \vartheta + \beta E_q) \\ |q'| \sin \vartheta' &= |q| \sin \vartheta \end{aligned} \quad (2.143)$$

Ferner ist $\varphi = \varphi'$ sowie $d\varphi = d\varphi'$. Der Azimutwinkel φ ist also in beiden Lorentzsystemen gleich.

Für die relativistische Geschwindigkeit des erzeugten (freien) Positrons β_+ gelten die folgenden Beziehungen:

$$\beta'_+ = \frac{1}{\gamma_+} \frac{|p'|}{m} = \frac{|p'|}{E'_p} \approx \frac{|q'|}{E'_q} \quad \text{für } \xi \ll 1 \quad \text{mit } \gamma_+ = \frac{E'_p}{m} \quad (2.144)$$

p und q sind dabei der Impuls bzw. effektive Impuls des Positrons. Aus Gleichung 2.142 folgt:

$$\tan \vartheta = \frac{\sin \vartheta'}{\cos \vartheta' - \beta/\beta'_+} \quad (2.145)$$

Daraus folgt wiederum:

$$\frac{d \cos \vartheta'}{d \cos \vartheta} = \left(\frac{d \cos \vartheta'}{d \cos \vartheta} \right)^{-1} = \gamma^2 \frac{\left[(\cos \vartheta' - g)^2 + \frac{1}{\gamma^2} \sin^2 \vartheta' \right]^{3/2}}{1 - g \cos \vartheta'} , \quad (2.146)$$

mit $g = \beta/\beta'_+$.

Transformation der winkeldifferentiellen Rate. Die winkeldifferentielle Rate $\frac{dR}{d\vartheta}$ transformiert sich zwischen dem Kern- und dem Laborsystem wie folgt:

$$\begin{aligned}\frac{dR}{d\vartheta} &= \frac{dR}{d \cos \vartheta} \sin \vartheta \\ &= \frac{1}{\gamma} \frac{dR'}{d \cos \vartheta'} \left| \frac{d \cos \vartheta'}{d \cos \vartheta} \right| \sin \vartheta\end{aligned}\quad (2.147)$$

mit der Jacobi-Determinanten $\left| \frac{d \cos \vartheta'}{d \cos \vartheta} \right|$ aus Gl. 2.146.

Für den Azimuthwinkel gilt die einfache Beziehung:

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{1}{\gamma} \frac{dR'}{d\varphi'} \quad (2.148)$$

Transformation der energiedifferentiellen Rate. Die zweifach differentielle Rate lautet:

$$\frac{d^2 R'}{dE'_q d \cos \vartheta'} = \sum_n \frac{dR'}{d \cos \vartheta'} \delta(E'_q + E_{1s} - n\omega')$$

Für jedes n gilt:

$$\begin{aligned}\frac{dR(E)}{dE} &= \int d \cos \vartheta \frac{d^2 R}{dE d \cos \vartheta} \\ &= \frac{1}{\gamma} \int d \cos \vartheta \frac{|q|}{|q'|} \frac{d^2 R'}{dE' d \cos \vartheta'} \\ &= \frac{1}{\gamma} \int d \cos \vartheta \frac{|q|}{|q'|} \frac{dR'}{d \cos \vartheta'} \delta(E' + E_{1s} - n\omega') \\ &= \frac{1}{\gamma} \int d \cos \vartheta \delta(\cos \vartheta - \alpha) \frac{|q|}{|q'|} \frac{1}{\gamma\beta|q|} \frac{dR'}{d \cos \vartheta'} \\ &= \frac{1}{\gamma} \frac{1}{\gamma\beta|q'|} \frac{dR'}{d \cos \vartheta'} \Bigg|_{\cos \vartheta = \kappa}\end{aligned}\quad (2.149)$$

Hierbei ist $\frac{|q|}{|q'|}$ die Jacobi Determinante und es wurde $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$ benutzt, wobei x_i die Nullstellen von $f(x)$ sind. Daraus folgt:

$$\delta(E' + E_{1s} - n\omega') = \delta(\gamma E + \gamma\beta|q| \cos \vartheta + E_{1s} - n\omega') = \frac{\delta(\cos \vartheta - \alpha)}{\gamma\beta|q|}$$

Hier gilt $\kappa \equiv (n\omega' - \gamma E - E_{1s}) / (\gamma\beta|q|)$ und entsprechendes für die L-Schale mit $E_{2s}, E_{2p_{1/2}}$.

Kapitel 3

Ergebnisse

Der Aufbau des Kapitels gestaltet sich wie folgt: Zunächst wird die für dieses Kapitel verwendete numerische Methode vorgestellt (Abschn. 3.1). Anschließend werden in den folgenden Unterkapiteln mit Hilfe dieser Methode gewonnene Resultate für die numerische Auswertung des analytischen Endergebnisses (Gl. 2.78) aus dem vorigen Kapitels präsentiert. Zunächst werden für den Einphotonenprozess die hier gefundenen Ergebnisse mit anderen Arbeiten verglichen (Abschn. 3.2). Für den verbleibenden Teil wird ausschließlich der nichtlineare Fall, also die simultane Absorption mehrerer Photonen, behandelt. Zunächst wird die Abhängigkeit der totalen Raten von den physikalischen Parametern analysiert (Abschn. 3.3). Anschließend werden die differentiellen Raten im Kernsystem betrachtet (Abschn. 3.4) und mit zirkularer Polarisation verglichen. Daraufhin werden diese Ergebnisse in das Laborsystem transformiert und mit dem konkurrierenden Prozess, der freien Paarerzeugung, verglichen (Abschn. 3.5). In Abschnitt 3.6 wird der Prozess bei Vorhandensein sehr hoher Intensitäten betrachtet. Anschließend werden bisher gewonnene Ergebnisse für den Einfang in die K-Schale für die L-Schale wiederholt und verglichen (Abschn. 3.7). Im vorletzten Abschnitt (3.8) wird die mögliche Erzeugung von Myonenpaaren kurz diskutiert und in Abschnitt 3.9 mögliche Modifikationen für die Einbeziehung realer Lasereigenschaften erwogen.

3.1 Numerische Methode und Parameter

Die Integration des analytischen Endergebnisses (Gln. 2.81, 2.113 bzw. 2.141) über die Winkel ϑ und φ ist nicht mehr analytisch durchführbar. Um zu quantitativen Ergebnissen differentieller und totaler Raten zu gelangen, ist eine numerische Integration erforderlich. Es gibt eine Vielzahl von Quadraturverfahren (siehe z.B. [Bä07]), welche sich in der Effizienz der Berechnung und Berücksichtigung besonderer Eigenschaften der zu integrierenden Funktion unterscheiden. Für die hier

zu berechnenden Raten erwarten wir einen glatten und stetigen Kurvenverlauf, auf adaptive Verfahren, welche z.B. Polstellen berücksichtigen, muss also nicht zurückgegriffen werden.

Das hier angewandte Quadraturverfahren ist das sogenannte Gauß-Kronrod Verfahren [PDKUK83]. Die Gauß-Quadratur benutzt optimale Stützstellen bei der Auswertung einer Funktion, so dass die Interpolation der Funktion durch Polynome möglichst hohen Grades erfolgt. Die Erweiterung zum Gauß-Kronrod Verfahren liegt darin, dass bei der Erhöhung der Stützstellen von 10 auf 21, 43 und 87 Stellen zuvor ausgewertete Stützstellen wiederbenutzt werden und sich damit der Rechenaufwand verringert.

Eine numerische Routine basierend auf dem Gauß-Kronrod Verfahren ist in der *Gnu scientific library* (GSL, [GSL]) enthalten welche auf dem Algorithmus *QUADPACK* [PDKUK83] aufbaut. Somit kann es problemlos in ein C-Programm integriert werden. Bei der Ausführung der Routine ist eine Präzision vorzugeben und durch Fehlerabschätzung (nach oben) entscheidet die Routine, wie viele Stützpunkte ausgewertet werden sollen. Die Fehlerabschätzung basiert auf dem Unterschied zwischen der Auswertung der Integration in einem kleinen Bereich für verschiedene Anzahl von Stützstellen. Zumeist mussten 21 Stellen ausgewertet werden, um eine Präzision von 10^{-10} zu erlangen. Ausgegeben wird auch ein Überschlag des Fehlers, welcher aber nur eine Abschätzung nach oben darstellt.

Zur Demonstration soll hier das folgende Integral berechnet werden, für welches nach (6.699.10) in [GR] eine analytische Lösung existiert:

$$I_\nu(a) = \int_0^1 dx x^\nu \cos(ax) J_\nu(ax) = \frac{1}{2\nu+1} [\cos(a) J_\nu(a) + \sin(a) J_{\nu+1}(a)] \quad (3.1)$$

Abbildung 3.1 zeigt, dass das Resultat der numerischen Integration mit dem analytischen Ergebnis perfekt übereinstimmt.

In den Ausdrücken für das analytische Endergebnis kommen die sogenannten generalisierten Besselfunktionen vor:

$$\tilde{J}_n(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{n-2m}(\alpha_1) J_m(\alpha_2) \approx \sum_{m=-K}^K J_{n-2m}(\alpha_1) J_m(\alpha_2) \quad (3.2)$$

Sie sind definiert als unendliche Summe über die gewöhnlichen Besselfunktionen. Um diese numerisch zu implementieren, muss man die Summe bei einem bestimmten K abschneiden. Dass dies für die vorliegenden Parameter schon bereits bei kleinen K möglich ist, wird in Anhang D diskutiert.

Labor- und Kernsystem. In den nachfolgenden Abbildungen werden Ergebnisse für das Labor- und für das Kernsystem gezeigt. Gestrichene Größen beziehen

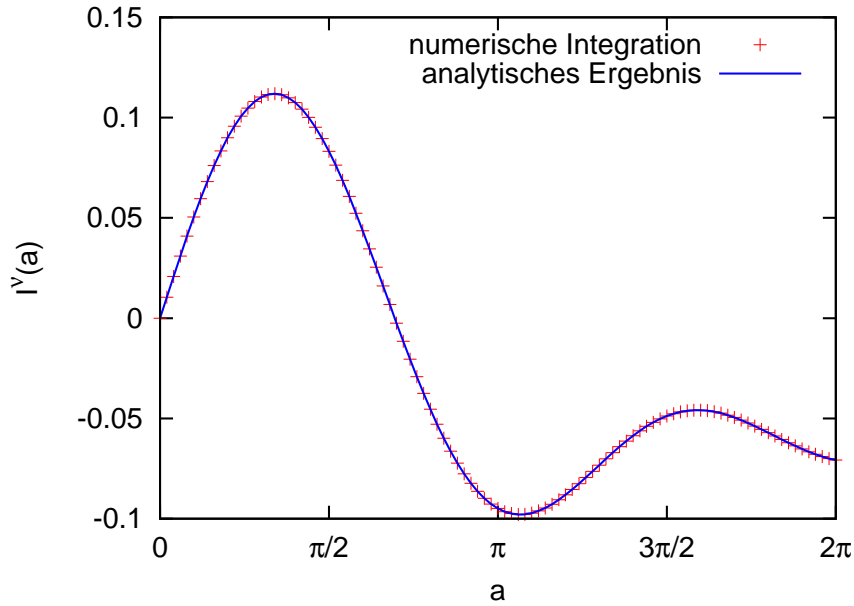


Abbildung 3.1: Numerische Integration von Gl. 3.1 im Vergleich zum analytischen Ergebnis mit $\nu = 1$ und in Abhängigkeit von a .

sich dabei wie in Abschnitt 2.4 auf Größen im Kernsystem, ungestrichene auf das Laborsystem. Generell wird die Transformation zwischen den beiden Systemen in Abschnitt 2.4 diskutiert. Hier sei nochmal daran erinnert, dass für die totalen Raten die einfache Beziehung $R = R'/\gamma$ gilt. Ferner gilt $\omega' = \gamma(1 + \beta)\omega$, ξ und Z sind Lorentz-invariante Größen. Für die Azimutwinkel gilt $\varphi = \varphi'$ und $d\varphi = d\varphi'$, daher transformieren sich die entsprechenden differentiellen Raten so wie die totalen Raten.

Parameter. Wie bereits zuvor besprochen, gibt es die folgenden unabhängigen Parameter: ξ , Z und ω (bzw. γ). Sofern nicht anders angegeben, werden in diesem Kapitel folgende Werte angenommen:

$$\xi = 10^{-4}, \quad Z = 50, \quad \omega = 9\text{keV}, \quad \gamma = 50 \quad (3.3)$$

Die Laserparameter entsprechen dabei ungefähr den Vorhersagen für den Röntgen-Freien-Elektronen-Laser bei DESY.

3.2 Einphotonenprozess

In Abb. 3.2 wird die Abhängigkeit der totalen Paarproduktionsrate von der Photonenfrequenz für die Absorption eines einzelnen Photons gezeigt (hier $Z = 1$). Für

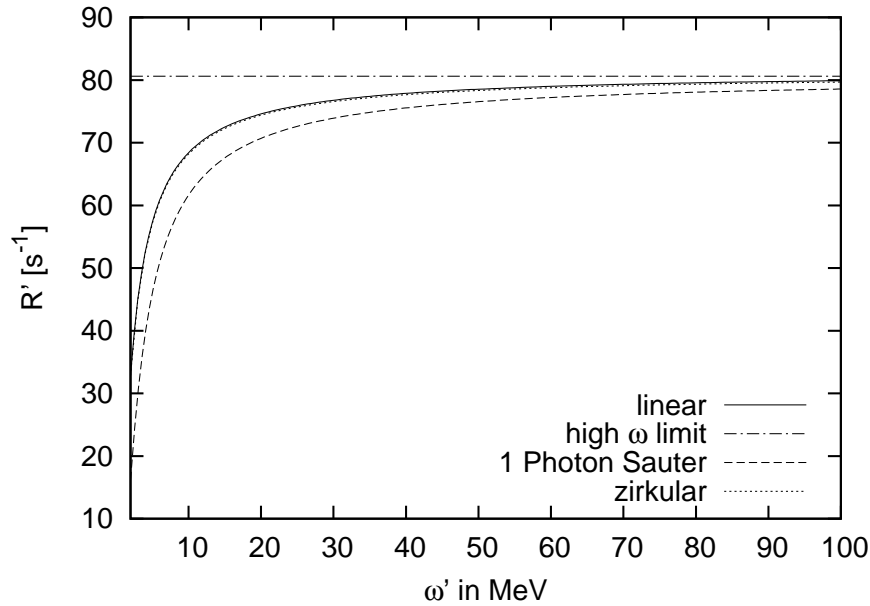


Abbildung 3.2: Vergleich der Skalierung der totalen Raten mit der Frequenz ω für die Absorption von einem Photon für verschiedene Rechnungen (hier $\xi = 10^{-4}$, $Z = 1$, $\gamma = 50$).

diesen linearen Prozess werden Ergebnisse verschiedener Rechnungen verglichen. Zunächst sind die Raten für lineare und zirkuläre Laserpolarisation aufgetragen. Für den Einphotonenprozess gibt es keinen Polarisationsunterschied. Die numerischen Ergebnisse bestätigen dies: So wird die aktuelle Rechnung sowie die numerische Methode durch eine frühere Rechnung für zirkuläre Polarisation [MVG03a] unterstützt. Zudem ist eine Rechnung nach Sauter [Sau31, BLP91] aufgetragen, welche an Stelle der Strong-Field-Approximation die Born-Approximation benutzt ($\alpha Z \ll 1$); das Positron wird dabei durch eine Lösung der freien Dirac-Gleichung beschrieben. Es sind die Frequenzabhängigkeit sowie ein Hochfrequenzlimit abgebildet. Die in dieser Arbeit gefundenen Ergebnisse haben den selben Hochfrequenzgrenzwert, die Frequenzabhängigkeit ist zudem sehr ähnlich (sie hat die gleiche Struktur). Die kleinen Unterschiede sind durch die verschiedenen Approximationen begründet. Ist die Rechnung nach Sauter für kleine Z sehr gut (Born-Approximation), werden bei der vorliegenden SFA-Rechnung für geringe Z Abweichungen erwartet. Formal weisen Rechnungen in Born-Approximation und die vorliegende SFA-Rechnung für die Absorption *eines* Photons und bei geringen Intensitäten große Ähnlichkeiten auf, da für diesen Fall die Volkov-Zustände freien Wellen ähneln.

Die nachstehende Tabelle 3.1 sowie Abbildung 3.3 vergleichen Werte der Verhält-

$2s/1s$	$2p_{1/2}/1s$	$2s/1s^A$	$2p_{1/2}/1s^A$	$2s/1s^P$	$2p_{1/2}/1s^P$	Z
0.125	5.0×10^{-6}	0.125	1.25×10^{-6}	0.125	1.24×10^{-6}	1
0.136	5.02×10^{-2}	0.128	3.85×10^{-2}	0.128	3.74×10^{-2}	82
0.134	7.41×10^{-2}	0.129	5.98×10^{-2}	0.130	5.76×10^{-2}	92

Tabelle 3.1: Vergleich der Raten verschiedener Rechnungen für den Einfang in verschiedene atomare Zustände im Limes hoher Frequenzen.

nisse für Raten verschiedener Zustände für unterschiedliche Rechnungen im Limes hoher Photonenenergien. Agger ([AS97], mit ^A markiert) betrachtet die volle Coulomb-Wechselwirkung, indem er eine Entwicklung nach Partialwellen der Coulomb-Dirac-Wellenfunktion des Positrons macht. Für hohe Energien ist diese Rechnung nicht vorteilhaft, da dann sehr viele Partialwellen beitragen. Pratt ([Pra60a, Pra60b, PRT73], mit ^P abgekürzt) benutzt einen Ansatz mit modifizierten ebenen Wellen, welche im Hochenergielimes ebenfalls die Coulomb-Dirac Wellenfunktionen wiedergeben. Die Rechnung von Pratt ist nicht geeignet, $Z = 1$ zu berechnen. Daher wird hier das Ergebnis von Gavrilin in Born-Approximation verwendet [Gav61].

Aus Tabelle 3.1 geht hervor, dass insgesamt eine gute bis sehr gute Übereinstimmung zwischen den verschiedenen Rechnungen besteht.

Die Verhältnisse $2s/1s$ und $2p_{1/2}/1s$ charakterisieren die Z -Abhängigkeiten und damit den Einfluss der Coulomb-Effekte der verschiedenen Rechnungen. Im Hochenergielimes ergibt die Born-Approximation eine Z -Abhängigkeit von Z^5 für die $1s$ - und $2s$ -Zustände sowie von Z^7 für den $2p_{1/2}$ -Zustand [EM95]. Die Rechnung von [AS97] zeigt indes, dass Coulomb-Korrekturen die totale Rate gegenüber der Born-Approximation reduzieren. Eine Reduktion der Z -Abhängigkeit bei vollständiger Berücksichtigung der Coulombwechselwirkung ist auch aus anderen Rechnungen (z.B. für den linearen Bethe-Heitler-Prozess in [BLP91]) bekannt.

Abbildung 3.3 zeigt, dass alle drei wiedergegebenen Rechnungen Abweichungen von der Born-Approximation aufweisen. Für letztere wäre das Verhältnis $2s/1s$ unabhängig von Z , also konstant. Bei $Z = 1$ ergeben die Rechnungen die gleichen Raten, mit zunehmender Kernladungszahl sind Abweichungen zwischen den Rechnungen von Agger und Pratt und der Rechnung der vorliegenden Arbeit erkennbar. Letztere überschätzt das Verhältnis der Zustände $2s/1s$ leicht gegenüber den anderen Rechnungen. Dies liegt nun daran, dass bei unserer Rechnung die Coulomb-Effekte auf das Positron vernachlässigt worden sind, was für hohe Z nicht mehr gerechtfertigt ist.

Abbildung 3.2 und Tabelle 3.1 vergleichen die Rechnung dieser Arbeit mit vorgehenden für den Fall, dass nur ein Photon absorbiert wird. Entsprechend der verschiedenen Ansätze stimmen die Ergebnisse gut überein, Unterschiede lassen

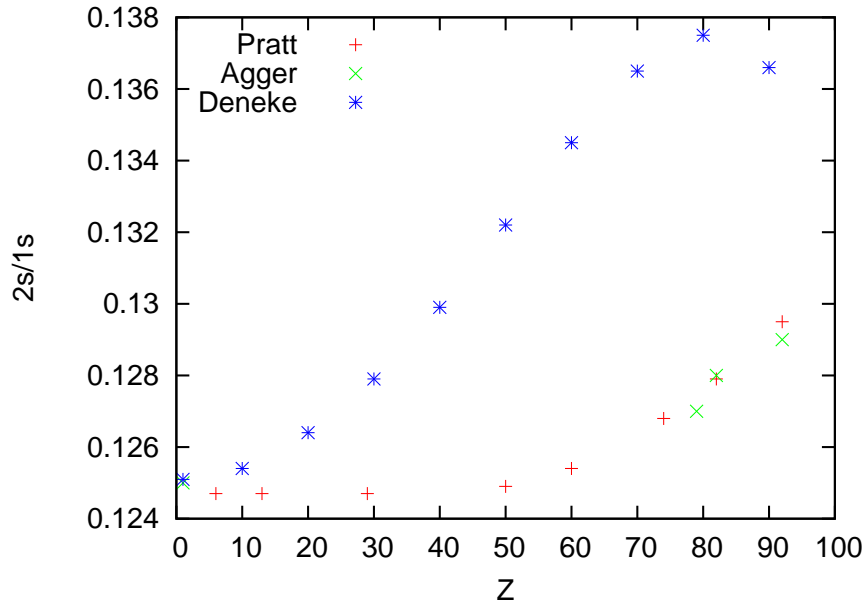


Abbildung 3.3: Vergleich der Raten für den Einfang in den $2s$ - und $1s$ -Zustand für verschiedene Rechnungen und Kernladungszahlen Z im Hochenergielimes.

sich durch die verschiedenen Näherungen erklären. Die in dieser Arbeit angewandte analytischen (SFA) sowie numerischen Methoden werden durch diese Vergleiche sehr gut unterstützt. Ziel dieser Arbeit ist aber die Betrachtung des nichtlinearen Bethe-Heitler Prozesses, für welchen keine vergleichenden Ergebnisse vorliegen.

3.3 Totale Raten im Kernsystem

In diesem Abschnitt werden die totalen Raten für den Einfang in die K-Schale und den nichtlinearen Bethe-Heitler-Prozess betrachtet.

Abhängigkeit von ξ . Die Skalierung der totalen Rate mit dem Intensitätsparameter ξ ist in Abb. 3.4 dargestellt. Für den hier abgebildeten Zweiphotonenprozess geht die Rate mit ξ^4 , generell mit ξ^{2n} . Dies ist ein exakter Zusammenhang, der sich bereits in der Gleichung für das Endergebnis erkennen lässt. Höhere Photonennordnungen sind also bei den hier als klein angenommenen Werten von $\xi = 10^{-4}$ stark unterdrückt. Daher wird in der Folge, sofern nicht explizit anders erwähnt, nur der Zweiphotonenprozess, also die Absorption zweier Photonen, betrachtet. Der Beitrag von höheren Photonennordnungen ist um den Faktor 10^{-8} unterdrückt.

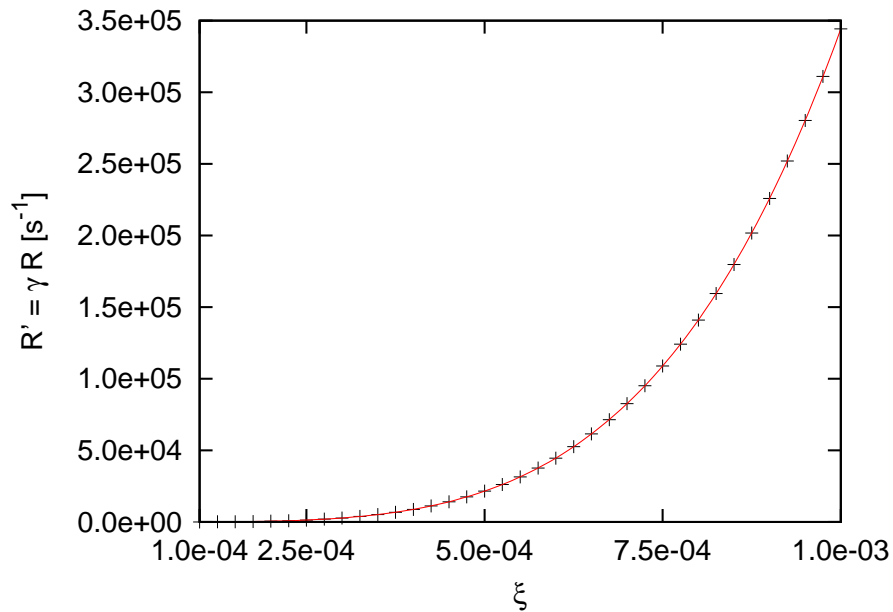


Abbildung 3.4: Skalierung der totalen Rate mit dem Intensitätsparameter ξ für die Absorption von 2 Photonen (hier $\hbar\omega = 9$ keV, $Z = 50$, $\gamma = 50$). Die schwarzen Kreuze sind numerische Ergebnisse und die rote Linie ein Fit über die Daten.

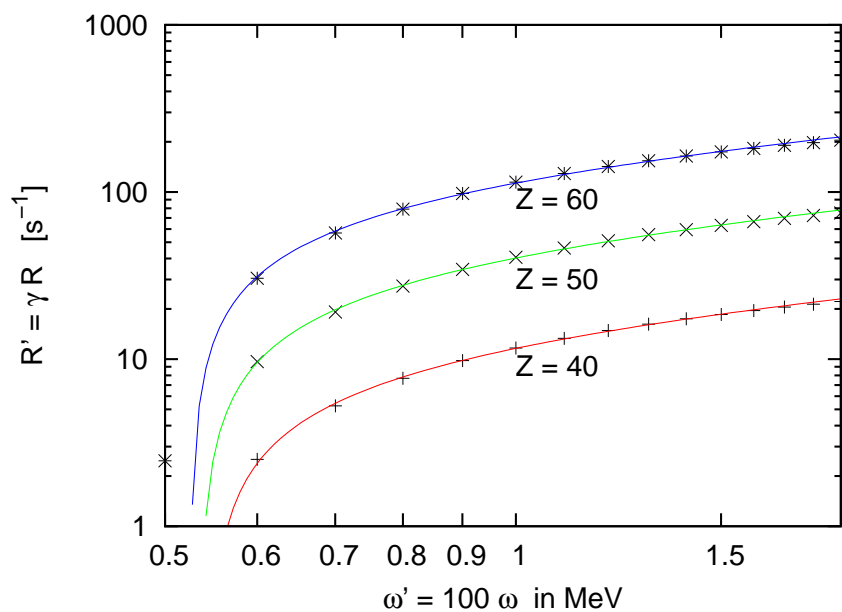


Abbildung 3.5: Abhängigkeit der totalen Rate für gebunden-freie Paarproduktion von der Laserfrequenz ω (hier $\xi = 10^{-4}$, $\gamma = 50$, $n = 2$). Die farbigen Linien sind Fits über die schwarzen Datenpunkte.

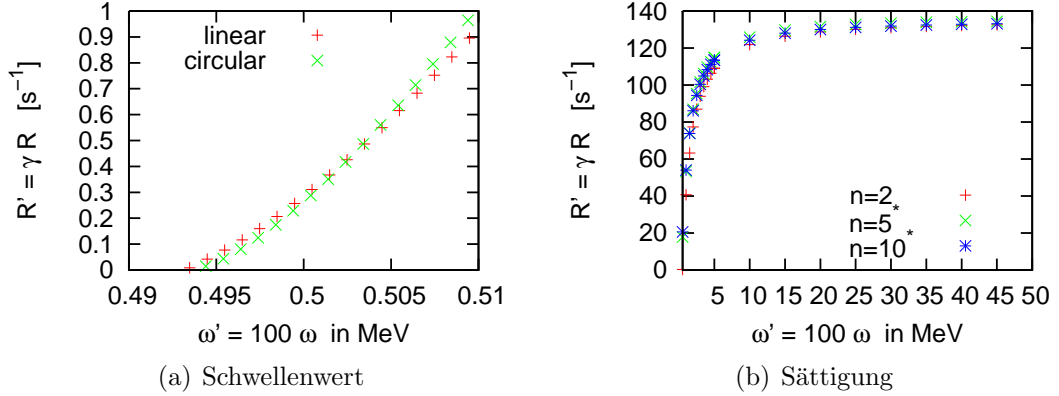


Abbildung 3.6: Skalierung der Rate mit der Frequenz für kleine Frequenzen nahe der Schwellenfrequenz und für hohe Frequenzen. Die Schwellenfrequenz ist durch die Energieerhaltung bestimmt: $\omega'_{min} = (E_{1s} + m^*)/2 \approx 0.49$ MeV.

Abhängigkeit von ω . Abbildung 3.5 zeigt die Skalierung der totalen Rate mit der Frequenz. Generell steigt die Rate mit zunehmender Frequenz, da sich der Phasenraum für die Paarproduktion vergrößert. Im Frequenzbereich von $6 \text{ keV} < \hbar\omega < 15 \text{ keV}$ steigt die Rate mit $(\omega - \omega_{min})^{1/2}$, also mit der Quadratwurzel der Frequenz. Dies ist qualitativ verschieden zum Fall von zirkularer Laserpolarisierung, wo die Rate linear mit der Frequenz steigt. Für geringere Frequenzen, also bei einer Photonenenergie nahe dem Schwellenwert ω_{min} ist die Skalierung verschieden (siehe Abb. 3.6(a)), folgt aber ebenso einem Potenzgesetz. Gleiches gilt für zirkulare Polarisierung. Für hingegen sehr hohe Frequenzen steigt die Rate nicht immer weiter an, sondern sättigt. Abb. 3.6(b) zeigt, dass dies für verschiedene Photonenordnungen bei der gleichen Frequenz eintritt. Der Grund liegt darin, dass der verfügbare Phasenraum konstant wird.

Abhängigkeit von Z . Abbildung 3.7 zeigt die Abhängigkeit der totalen Rate von der Kernladungszahl Z . Man sieht, dass die Rate einem Potenzgesetz folgt, für die gegebenen Parameter geht sie mit $\sim Z^{5.6}$. Für atomphysikalische Prozesse mit Einfang [EM95] erwartet man generell eine Z^5 Abhängigkeit. Für unsere Rechnung liegt sie leicht darüber und variiert leicht für verschiedene Frequenzen und Intensitäten. Außerdem sind Abweichungen vom Potenzgesetz für kleine Z vorhanden. Nun ist aber unsere Rechnung für kleinere Z nicht optimal und Abweichungen sind daher zu erwarten. Auch die Abweichung von der Z^5 -Skalierung ist mit der Vernachlässigung der Coulomb-Wechselwirkung auf das Positron erklärbar. In der Rechnung mit Born-Approximation [Sau31] findet man eine Potenz von 5 im Limes kleiner Z , bei Hinzunahme der Coulomb-Korrekturen reduziert sich diese Potenz leicht [AS97] (siehe Abschnitt 3.2).

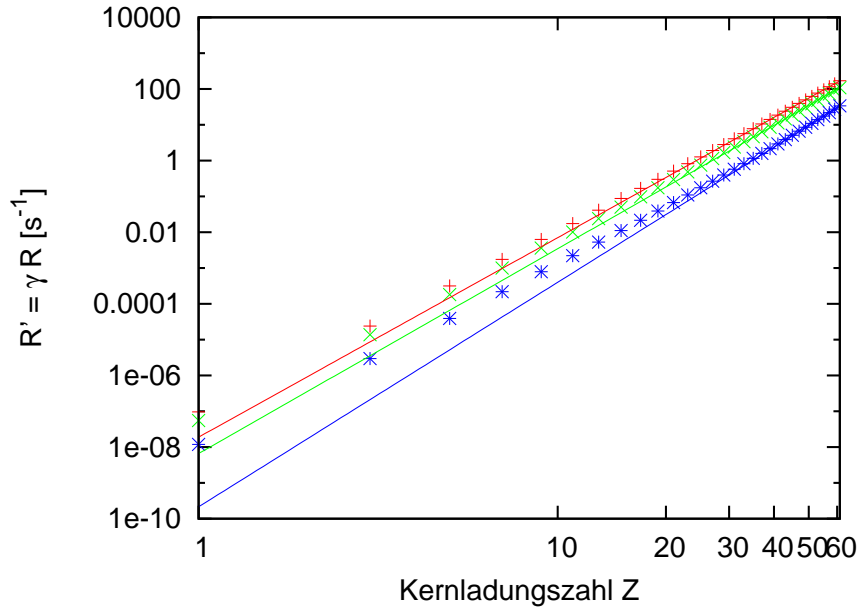


Abbildung 3.7: Skalierung der totalen Rate für gebunden-freie Paarproduktion mit der Kernladungszahl Z (hier $\hbar\omega = 6$ keV (blau), $\hbar\omega = 9$ keV (grün), $\hbar\omega = 13$ keV (rot), $\xi = 10^{-4}$, $\gamma = 50$, $n = 2$). Die Linien entsprechen Fits über die Datenpunkte.

Aus der Analyse der totalen Raten können wir im Bereich der hier betrachteten Parameter folgendes Skalierungsgesetz feststellen:

$$R = \gamma^{-1} \xi^{2n} Z^{5.6} (\omega - \omega_{min})^{1/2} \quad (3.4)$$

3.4 Differentielle Raten im Kernsystem

In diesem Abschnitt werden die differentiellen Raten im Kernsystem betrachtet. Das freie Positron ist im Kernsystem charakterisiert durch zwei Winkel und die Energie ist nach Gl. 2.78 fest. Der Winkel ϑ entspricht dabei dem Polarwinkel mit $\vartheta = 0$ in Ausbreitungsrichtung des Laserfeldes. Hingegen ist φ der Azimutwinkel, gemessen bezüglich der Polarisationsrichtung des Laserfeldes.

Winkeldifferentielle Rate für den Polarwinkel. Abbildung 3.8 zeigt die Abhängigkeit der Rate vom Polarwinkel ϑ . Unter $\vartheta = 0^\circ$ werden keine Positronen emittiert, was damit erklärt werden kann, dass das gebundene Elektron ebenfalls Impuls aufnimmt. Die Winkelverteilung hat eine Maximum bei einem relativ kleinen Winkel und fällt anschließend schnell ab. Für Winkel $\theta > 60^\circ$ gibt es keinen

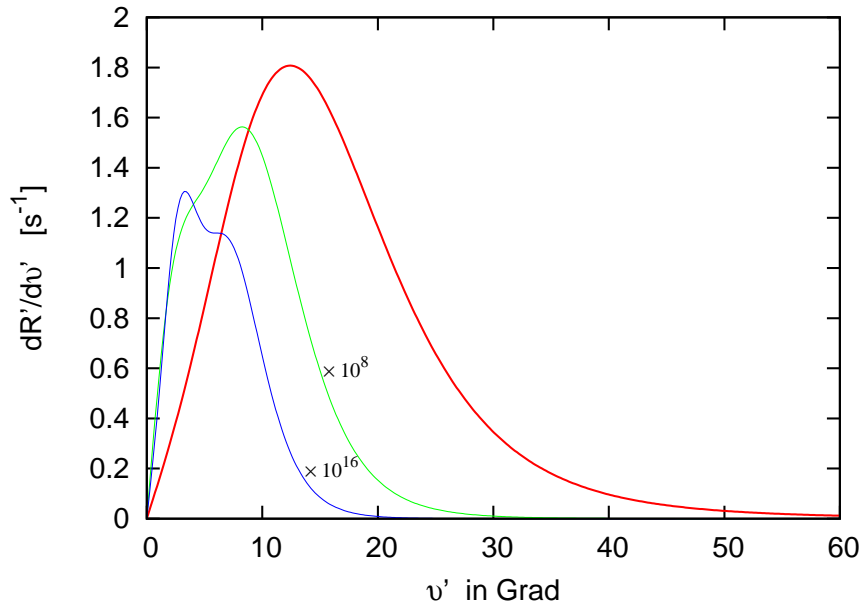


Abbildung 3.8: Winkeldifferentielle Rate für den Polarwinkel ϑ (hier $\hbar\omega = 9$ keV, $\xi = 10^{-4}$, $Z = 50$, $\gamma = 50$). Gezeigt ist die Verteilung für die Absorption von zwei (rot), drei (grün) und vier (blau) Photonen.

signifikanten Beitrag mehr zur Paarproduktionsrate. Die Form der Verteilung kann im Wesentlichen durch den Term $w^4 = [1 + (\rho a_B/Z)^2]^{-4}$ in der Gleichung für das Endergebnis (Gl. 2.77) erklärt werden. Dieser entspricht gerade dem Quadrat der Fouriertransformierten des gebundenen Coulomb-Zustands. In Abbildung 3.8 sind ebenfalls die (skalierten) Winkelverteilungen für die nächst höheren Photonennordnungen $n = 3, 4$ gezeigt. Der generelle Verlauf ist ähnlich, das Maximum ist aber zu kleineren Winkeln hin verschoben und es bilden sich Extra-Strukturen heraus. Diese lassen sich nicht mehr mit der Fouriertransformierten erklären, sondern sind Eigenschaften der generalisierten Besselfunktionen für höhere Photonennordnungen n , also Multiphotonenstrukturen.

Winkeldifferentielle Rate für den Azimutwinkel. Eine Struktur in der Verteilung des Azimutwinkels ist eine Eigenschaft der gewählten Polarisierung. Für zirkuläre Polarisierung wäre keine Struktur vorhanden, es gibt aufgrund der zirkulären Symmetrie keine bevorzugten Azimutwinkel. Abbildung 3.9 zeigt die Winkelverteilung für den Azimutwinkel φ für lineare Polarisierung. Man erkennt, dass Maxima in Richtung des elektrischen Feldstärkevektors des Laserfeldes vorliegen, Minima entsprechend in Richtung der magnetischen Feldrichtung. In den Minima verschwindet die Rate aber nicht vollständig, sondern ist nur unterdrückt.

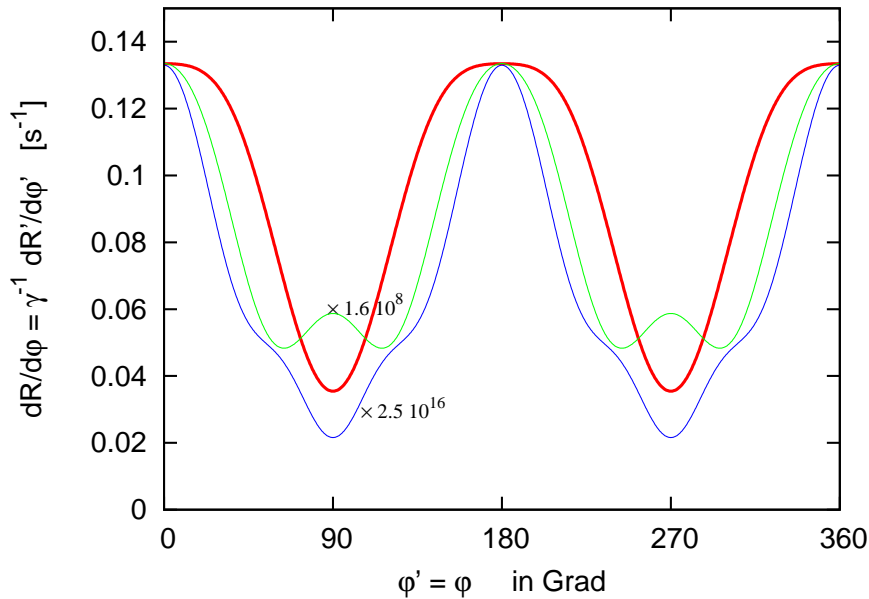


Abbildung 3.9: Winkeldifferentielle Rate für den Azimuthwinkel φ (hier $\hbar\omega = 9$ keV, $\xi = 10^{-4}$, $Z = 50$, $\gamma = 50$). Gezeigt ist die Verteilung für die Absorption von zwei (rot), drei (grün) und vier (blau) Photonen.

Für höhere Photonennordnungen erkennt man zusätzliche Wellenstrukturen, außerdem sind für ungerade Photonennordnungen die Minima verschoben und liegen nicht mehr in Richtung des Magnetfeldes. Ferner fallen die Verteilungen für höhere Photonennordnungen in der Nähe des Maximums schneller ab. Dies ist wiederum auf den Multiphotonencharakter zurückzuführen (s.o.). Im Laborsystem sieht die Verteilung gleich aus, die Raten sind aber um den Faktor $1/\gamma$ geringer.

Vergleich der winkeldifferentielle Raten für lineare und zirkulare Polarisation. Abbildung 3.10 vergleicht die (Polar-)Winkelverteilung der Rate für zirkulare und lineare Polarisation. Die grundsätzliche Struktur ist in beiden Fällen ähnlich und lässt sich durch das Quadrat der Fourier-Transformierten erklären. Die Rate für Paarproduktion für lineare Polarisation ist aber bei Betrachtung des gleichen Intensitätsparameters ξ (Abb. 3.10(a)) deutlich kleiner (um einen Faktor ~ 3). Dies liegt nun daran, dass das Laserfeld bei linearer Polarisation in der Amplitude oszilliert, das Feld geht *an und aus*. Für zirkulare Polarisation rotiert der Feldstärkevektor, bleibt aber vom Betrag konstant. Vergleicht man die beiden Polarisationen für die gleiche Intensität (Abb. 3.10(b)), wird dieser Effekt kompensiert. Nun ist die lineare Polarisation leicht favorisiert. Bei gleicher Intensität ist aber auch die Spitzenfeldstärke eines linear polarisierten Lasers um den Faktor

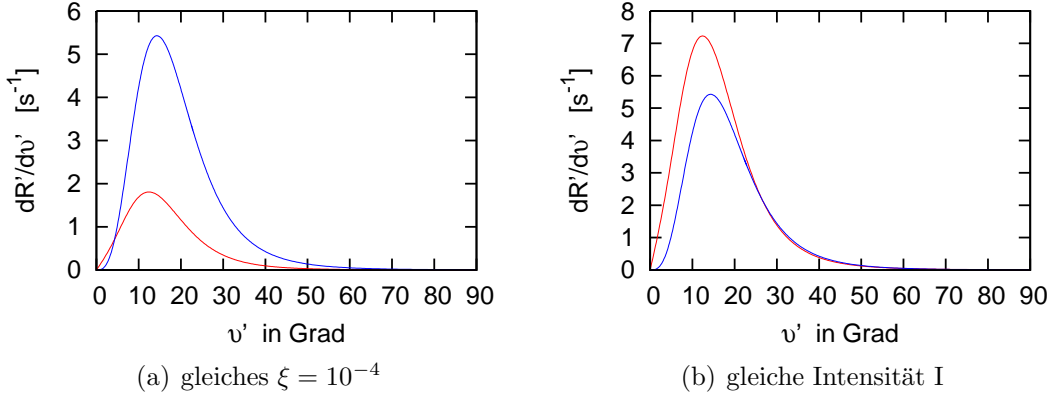


Abbildung 3.10: Vergleich der winkeldifferentiellen Raten über dem Polarwinkel für lineare (rot) und zirkulare (blau) Polarisation (hier $\hbar\omega = 9$ keV, $Z = 50$, $\gamma = 50$, $n = 2$).

$\sqrt{2}$ erhöht und die Rate wächst nichtlinear mit der Feldstärke (s.o.).

Ein Vergleich der Winkelverteilung für die Azimuthwinkel ist hier nicht besonders illustrativ, da wie bereits zuvor gesagt, für zirkulare Polarisation keine Struktur in der Verteilung vorliegt, diese also einfach konstant ist.

3.5 Differentielle Raten im Laborsystem

Für mögliche experimentelle Untersuchung des vorliegenden Problems ist eine Betrachtung im Laborsystem erforderlich. Die Transformation zwischen den beiden Lorentz-Systemen wurde in Abschnitt 2.4 besprochen.

Winkeldifferentielle Raten. Abbildung 3.11 zeigt die winkeldifferentielle Rate $dR/d\vartheta$ im Laborsystem. Zum Vergleich ist die Verteilung der Positronen auch für den konkurrierenden Prozess, die frei-freie Paarproduktion, gezeigt. Für gebunden-freie Paarproduktion werden fast alle Positronen unter dem Winkel $\vartheta = 177.26^\circ$ emittiert. $\vartheta = 180^\circ$ entspricht dabei der Propagationsrichtung des Ions. Unter geringeren Winkeln ist die Emission kinematisch verboten, für größere Winkel ist sie nahezu vollständig unterdrückt. Die beiden Bezugssysteme bewegen sich zueinander mit hochrelativistischer Geschwindigkeit, daher werden nahezu alle Positronen in einen Emissionswinkel *gedrückt*. Formal lässt sich dieser Sachverhalt aus der Jacobi-Determinanten (Gl. 2.146 in Abschnitt 2.4) erklären. Diese geht mit $J \propto 1/(1 - \beta/\beta'_+ \cos \vartheta')$, wobei $\beta = (1 - 1/\gamma^2)^{1/2} \sim 1$ die relativistische Geschwindigkeit des Ions und β'_+ die des erzeugten Positrons (im Kernsystem) ist. Letztere ist im Kernsystem fest und bei den gewählten Parametern (siehe Gl. 3.1)

$\beta'_+ \sim 0.92$. Also gilt $\beta/\beta'_+ > 1$ und für $\vartheta = 177.26^\circ$ wird die Jacobi-Determinante und daher die Rate formal singular. Es sei betont, dass diese rein kinematischer Natur ist, und angemerkt, dass es sich um eine integrable Singularität handelt, das heißt es gibt keine Schwierigkeiten bei einer möglichen experimentellen Messung durch die endliche Auflösung des Detektors.

Die Verteilung der Positronen aus dem frei-freien Prozess ist ebenfalls fast in Vorwärtsrichtung des Atoms, hat aber im Vergleich zum gebunden-freien Kanal eine deutlich breitere Verteilung. Diese hat ihre Ursache in einer breiteren Winkelverteilung im Kernsystem, die Transformation ist schließlich für beide Fälle gleich. Die beiden konkurrierenden Paarproduktionskanäle sind also gut unterscheidbar, die Positronen werden unter leicht verschiedenen Winkeln emittiert und unterscheiden sich auch deutlich in der Breite. Experimentell vorteilhaft ist zudem, dass die produzierten, freien Positronen nicht in den Laser gestreut werden.

Interessant ist, dass für die hier angenommenen Parameter die beiden konkurrierenden Prozesse ungefähr gleich häufig auftreten ($R_{ff} = 0.98s^{-1}$, $R_{gb} = 0.69s^{-1}$). Schließlich scheint der Phasenraum für die Produktion eines freien Elektrons größer (das ganze Kontinuum steht zur Verfügung) als für gebundene Elektronen. Die beiden Kanäle skalieren aber unterschiedlich mit der Frequenz ω und Kernladungszahl Z , so dass diese Vergleichbarkeit der totalen Raten nur für die hier angenommenen Parameter besteht. Zudem sind der Beitrag für den Einfang in höhere Schalen noch nicht berücksichtigt, der gebunden-freie Kanal ist dadurch nochmals um $\sim 15\%$ erhöht.

Energiedifferentielle Raten. Im Kernsystem haben die freien Positronen eine feste Energie. Dies wird durch die energieerhaltende δ -Funktion in Gl. 2.77 deutlich. Die Transformationsgesetze zwischen den beiden Bezugssystemen (Gl. 2.142) stellen aber eine Beziehung zwischen dem Kernwinkel ϑ' und den Laborgrößen ϑ sowie E_q her. Die Energie der Positronen im Laborsystem ist also keine feste Größe mehr. Abbildung 3.12 zeigt die energiedifferentielle Rate. Sie hat ein Maximum bei $E_q \sim 7$ MeV. Es existiert eine minimale Energie von ~ 5 MeV und eine maximale bei ~ 120 MeV. Diese korrespondieren einfach zum minimalen und maximalen Winkel ϑ' in der Transformationsgleichung für die Energie (2.4). Das Maximum der Verteilung entspricht dem Maximum der Winkelverteilung in Abbildung 3.8. Ebenso ist in Abbildung 3.12 die energiedifferentielle Rate des frei-freien Kanals enthalten. Diese ist wiederum breiter, das Maximum ist nicht so scharf. Wiederum ist dies auf die breitere Winkelverteilung im Kernsystem beim frei-freien Prozess zurückzuführen.

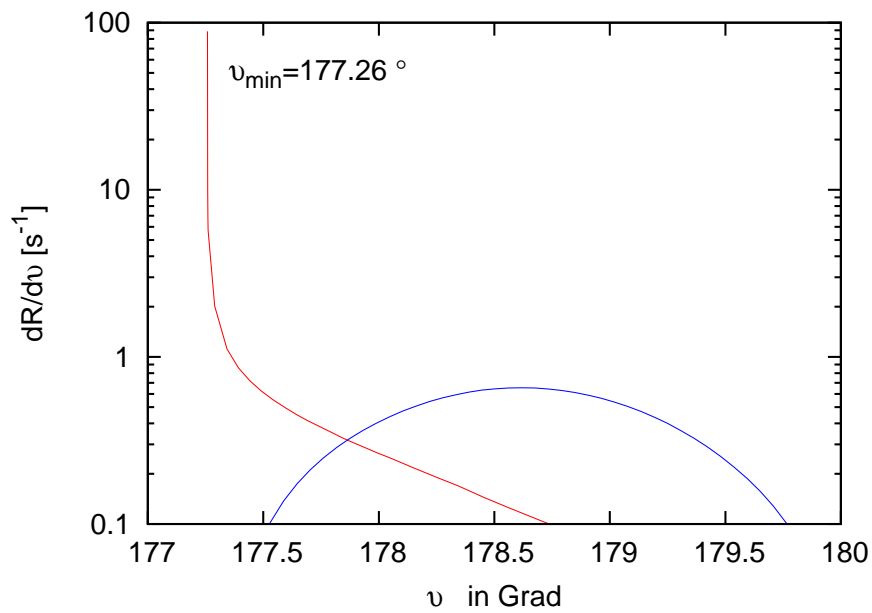


Abbildung 3.11: Vergleich der winkeldifferentiellen Raten für gebunden-freie (rot) und frei-freie (blau) Paarproduktion im Laborsystem (hier $\hbar\omega = 9$ keV, $\xi = 10^{-4}$, $Z = 50$, $\gamma = 50$).

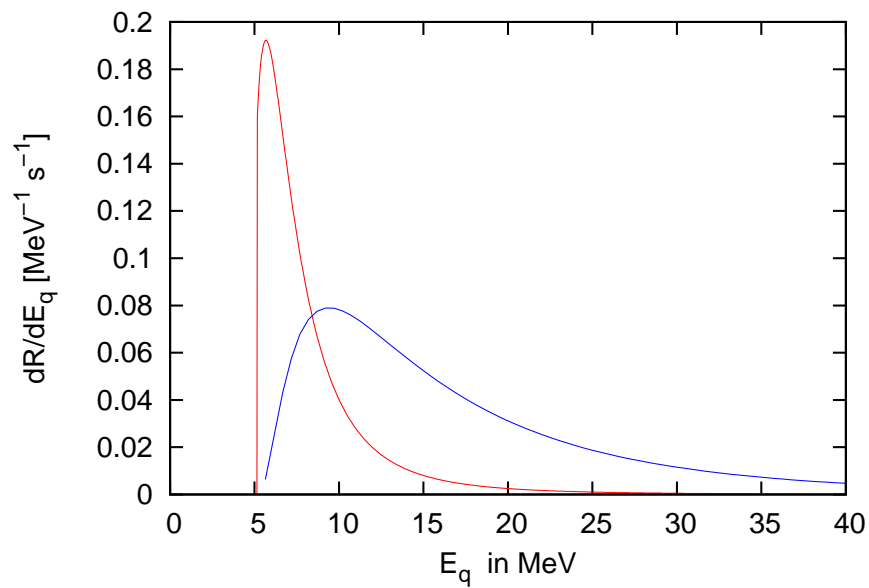


Abbildung 3.12: Vergleich der energiedifferentiellen Raten für gebunden-freie (rot) und frei-freie (blau) Paarproduktion im Laborsystem (hier $\hbar\omega = 9$ keV, $\xi = 10^{-4}$, $Z = 50$, $\gamma = 50$).

3.6 Grenzwert hoher Intensitäten

Bisher wurde nur eine relativ niedrige Intensität entsprechend einem Intensitätsparameter von $\xi = 10^{-4}$ betrachtet. Was passiert, wenn man ξ kontinuierlich erhöht? Zunächst einmal skaliert die Rate mit ξ^{2n} , sie wächst also sehr stark an. Für $\xi \ll 1$ sind höhere Photonennordnungen n stark unterdrückt. So lange $\xi \ll 1$, bleiben auch die Winkelverteilungen wie zuvor. Ab einem Intensitätsparameter von $\xi \gtrsim 0.5$ gewinnen aber auch die höheren Photonennordnungen an Bedeutung. Außerdem wächst der Zweiphotonenprozess langsamer als ξ^4 , erreicht ein Maximum und sinkt danach wieder. Ab einem bestimmten Intensitätsparameter $\xi_{max}^{(n)}$ kommt der Zweiphotonenprozess zum Erliegen und der niedrigste Prozess ist $n = 3$. Dieses *Aussterben* der niedrigen Photonennordnungen setzt sich für höhere Intensitäten fort. Die nachfolgende Tabelle zeigt Werte für $\xi_{max}^{(n)}$ für verschiedene n :

n	2	3	4	5	6
$\xi_{max}^{(n)}$	3.38	5.99	8.53	11.05	13.56

Die Erklärung für das sukzessive Verschwinden der niedrigen Photonennordnungen liegt darin, dass bei hohen Intensitäten die ponderomotive Energie der Positronen sehr groß wird. Die Positronen vollführen also eine sehr starke oszillatorische Bewegung im Laserfeld. Ab der maximalen Intensität (bzw. bei $\xi_{max}^{(n)}$) ist die Energie, die die Positronen für ihre Bewegung im Laserfeld aufbringen müssen, so groß, dass nicht mehr genügend Energie für die Paarerzeugung zu Verfügung steht (zur Erinnerung: $n\omega = E_b + E_q$). Dies folgt also einfach aus der Energieerhaltung. Dass die Raten zuvor schon weniger stark mit ξ anwachsen, folgt nun daraus, dass bereits ein großer Teil der zur Verfügung stehenden Energie in die oszillatorische Bewegung der Positronen geht und daher der Phasenraum für die Paarerzeugung sinkt.

In Abbildung 3.13 wird der Anteil verschiedener Photonennordnungen bei hohen Intensitäten gezeigt. Zudem wird eine Abschätzung für die totale Rate unter Einbeziehung *aller* Photonennordnungen unternommen. Obwohl die partiellen Raten teilweise sinken, nimmt die totale Rate R , also die Summe über alle Partialraten R_n , weiterhin zu.

Abschätzung aller Photonennordnungen. Für die Abschätzung der Summe $R = \sum_{n=2}^{\infty} R_n$ für $\xi \gtrsim 1$ gingen wir wie folgt vor: Zu einem festen ξ wurden die Partialraten R_n für $n = 2 - 9$ berechnet. Ein Beispiel ist in Abbildung 3.14 für $\xi = 2.5$ gegeben. In diesem logarithmischen Diagramm kann man (für $n > 2$) in guter Approximation einen linearen Abfall der Rate erkennen. Dies entspricht einem exponentiellen Abfall der Rate mit n (charakterisiert durch $a \cdot e^{-bn}$). Durch

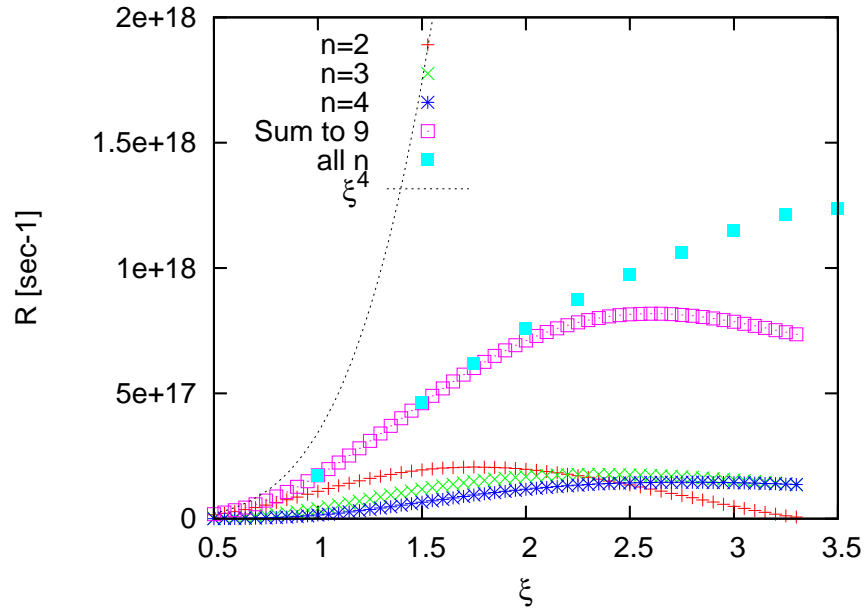


Abbildung 3.13: Produktionsraten für $\xi \sim 1$ für die Absorption von zwei (rot), drei (grün) und vier (blau) Photonen, die Summe bis $n = 9$ (magenta), eine Abschätzung aller Ordnungen (cyan) sowie der ξ^4 -Skalierung für $\xi \ll 1$ (gelb).

einen Fit kann man die Parameter a und b erhalten. Die Summe

$$R = \sum_{n=2}^{\infty} R_n = R_2 + a \sum_{n=3}^{\infty} e^{-bn} \quad (3.5)$$

ist konvergent und somit können wir eine Abschätzung für die totale Rate zu jedem ξ erhalten.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass nicht alle oben getroffenen Bedingungen für Intensitätsparameter der Größenordnung $\xi \sim 1$ zutreffen und daher die hier gemachten Aussagen mit einer gewissen Vorsicht zu betrachten sind. Insbesondere gilt nicht mehr $\mathcal{E}_K \gg \mathcal{E}'_{\text{Laser}}$, die Feldstärke des Coulombpotentials im Abstand eines Bohrradius übertrifft also nicht mehr die Laserfeldstärke.

3.7 L-Schale

In dieser Arbeit wurde zum ersten Mal für gebunden-freie Paarerzeugung in kombinierten Laser und Coulombfeldern der Einfang in die L-Schale betrachtet. Dies führt zu einer Erhöhung des Reaktionskanals der gebunden-freien gegenüber der frei-freien Paarerzeugung. Betrachtet werden der $2s$ -Zustand, welcher die größte

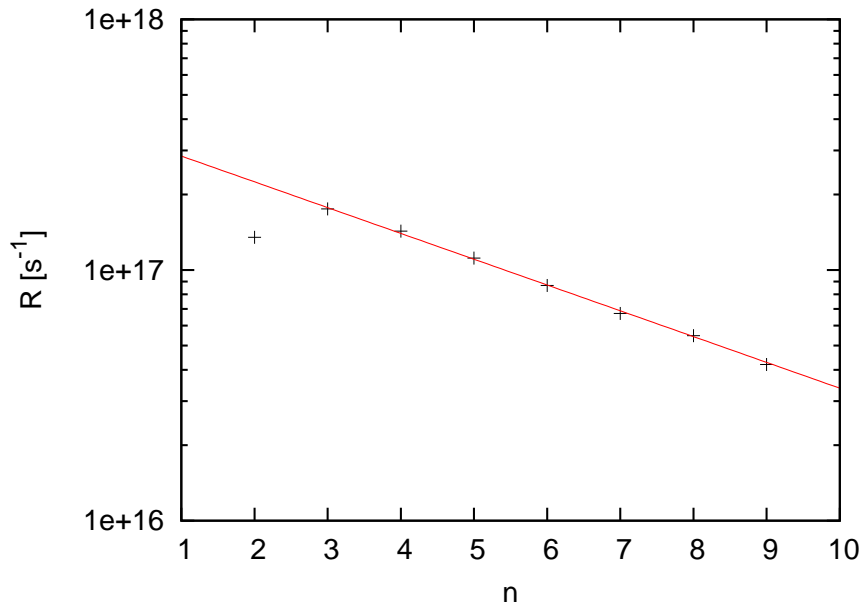


Abbildung 3.14: Abschätzung des Beitrags aller Photonenzahlen bei $\xi = 2.5$. Gezeigt sind die Raten für die Absorption von zwei bis neun Photonen sowie ein Fit über die Daten.

Einfangwahrscheinlichkeit in der L-Schale hat, sowie der $2p_{1/2}$ -Zustand, welcher sich in einem anderen Drehimpulseigenzustand als der Grundzustand befindet. Betrachtet werden wie zuvor die winkeldifferentiellen Raten im Kernsystem, anschließend werden die Unterschiede zwischen den verschiedenen Zuständen genauer untersucht und schließlich in Tabelle 3.2 einige exemplarische Raten dargelegt.

3.7.1 Differentielle Raten für den $2s$ und $2p_{1/2}$ -Zustand

Abbildung 3.15 zeigt die winkeldifferentielle Rate für den Polarwinkel für den Eingang in den $2s$ -Zustand. Es sind mehrere Photonenzahlen abgebildet. Die Struktur ist ähnlich zu der Verteilung für den $1s$ -Zustand. Sie ist wiederum maßgeblich durch den Term w^4 gegeben, welcher auch für $2s$ - und $2p_{1/2}$ aus dem Quadrat der Fouriertransformierten der gebundenen Coulomb-Wellenfunktionen entstammt. Die zusätzlichen Strukturen für höhere Ordnungen sind hier stärker ausgeprägt als beim $1s$ -Zustand. Insgesamt sind die Raten kleiner als bei $1s$, da in den höheren Zuständen die Ortsunschärfe deutlich größer und daher die Impulsunschärfe deutlich kleiner ist.

Auch die Verteilung für den Azimutwinkel (Abb. 3.16) ist ähnlich zum $1s$ -Zustand, sie ist direkt mit der Laserpolarisierung verknüpft. Daher werden auch keine si-

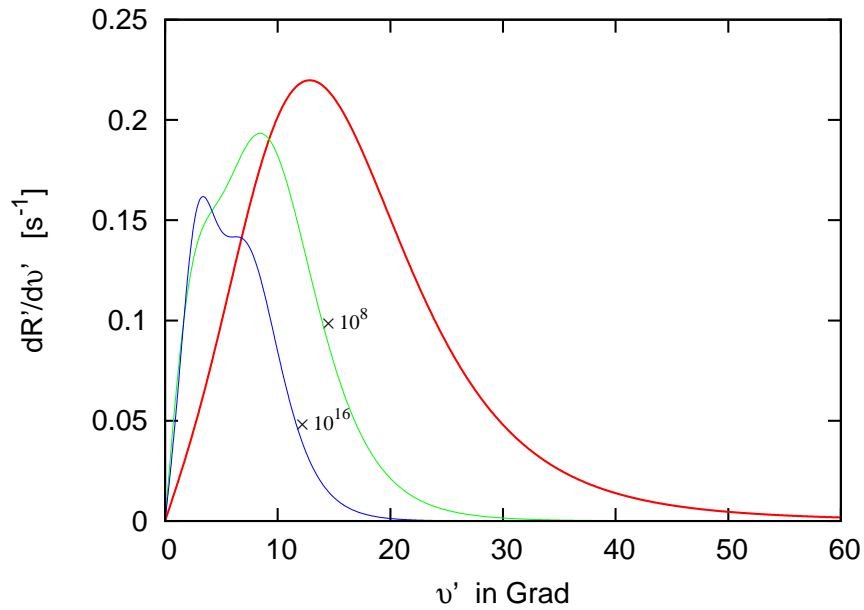


Abbildung 3.15: Winkeldifferentielle Rate des Polarwinkel ϑ für den Einfang in den $2s$ -Zustand (hier $\hbar\omega = 9 \text{ keV}$, $\xi = 10^{-4}$, $Z = 50$, $\gamma = 50$). Gezeigt ist die Verteilung für die Absorption von zwei (rot), drei (grün) und vier (blau) Photonen.

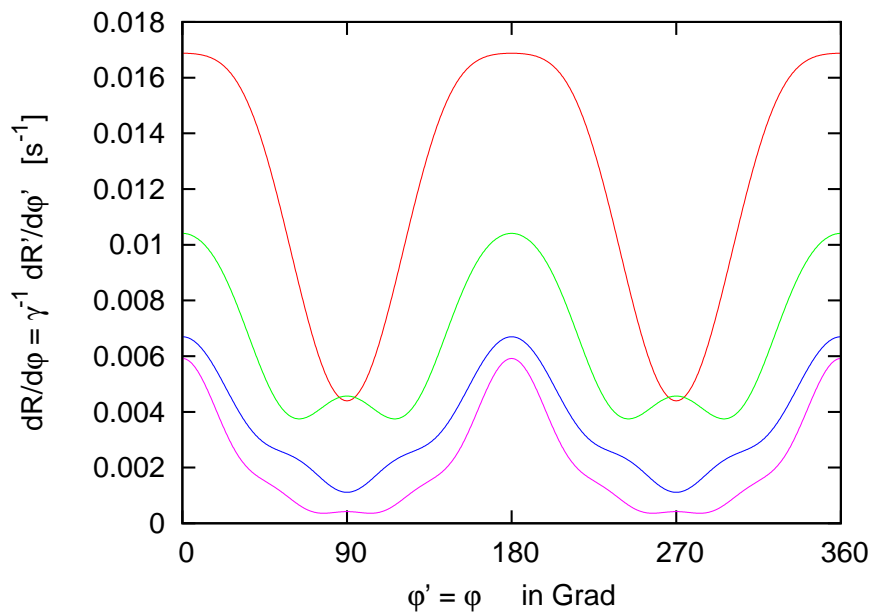


Abbildung 3.16: Winkeldifferentielle Rate des Azimuthwinkels φ für den Einfang in den $2s$ -Zustand. Gezeigt ist die (skalierte) Verteilung für die Absorption von zwei (rot), drei (grün), vier (blau) und fünf (magenta) Photonen.

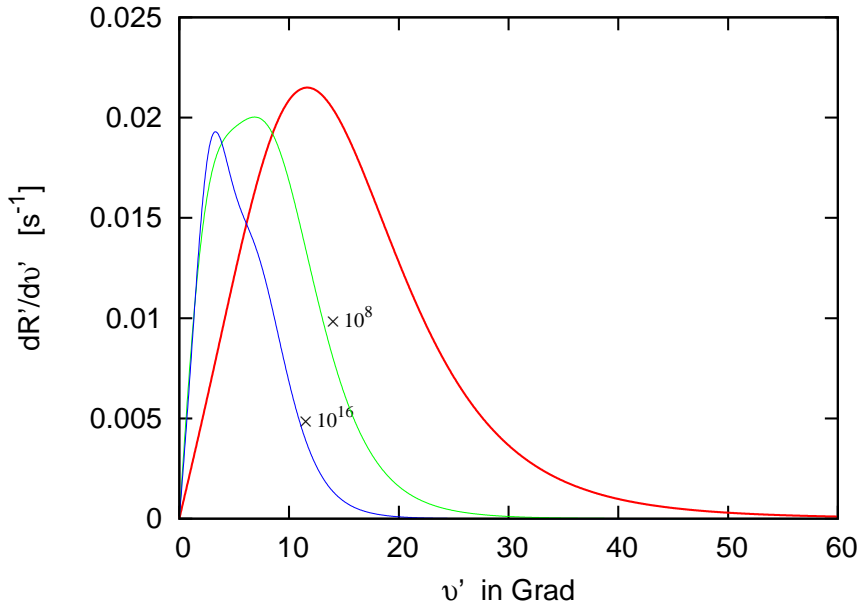


Abbildung 3.17: Winkeldifferentielle Rate des Polarwinkels ϑ für den Einfang in den $2p_{1/2}$ -Zustand (hier $\hbar\omega = 9$ keV, $\xi = 10^{-4}$, $Z = 50$, $\gamma = 50$). Gezeigt ist die Verteilung für die Absorption von zwei (rot), drei (grün) und vier (blau) Photonen.

gnifikanten Unterschiede erwartet. Auch hier treten zusätzliche Wellenstrukturen und die Verschiebung der Minima für höhere Photonennordnungen auf.

Auch die Winkelverteilungen für den $2p_{1/2}$ -Zustand (siehe Abb. 3.17 und 3.18) haben die gleiche generelle Form wie bei den anderen Zuständen.

3.7.2 Vergleich von K und L Schale

Die Paarproduktionsraten können für die verschiedenen Zustände $1s$, $2s$ und $2p_{1/2}$ explizit verglichen werden. Es gilt $R_{2p_{1/2}} \ll R_{2s} \ll R_{1s}$, der Einfang in den Grundzustand überwiegt also alle anderen Zustände.

Vergleicht man die Z -Abhängigkeit für den Einfang in die verschiedenen Zustände (siehe Abb. 3.19), sieht man, dass für $1s$ und $2s$ die Rate mit $\sim Z^{5.5-6}$ geht, für den $2p_{1/2}$ -Zustand aber steiler anwächst (mit $\sim Z^{7.5}$). Dies bedeutet nun, dass der Anteil des $2p_{1/2}$ -Zustandes stetig zunimmt und für hohe Z eine signifikante Rolle spielen kann. Dies wird in Abb. 3.20 verdeutlicht. Es sei aber nochmals darauf hingewiesen, dass für die vorliegende Rechnung keine guten Ergebnisse für sehr große Z zu erwarten sind.

Die Frequenzabhängigkeit ist dagegen für alle hier betrachteten Zustände gleich, die Rate skaliert mit $\sim (\omega - \omega_{min})^{1/2}$ für das hier betrachtete Frequenzintervall

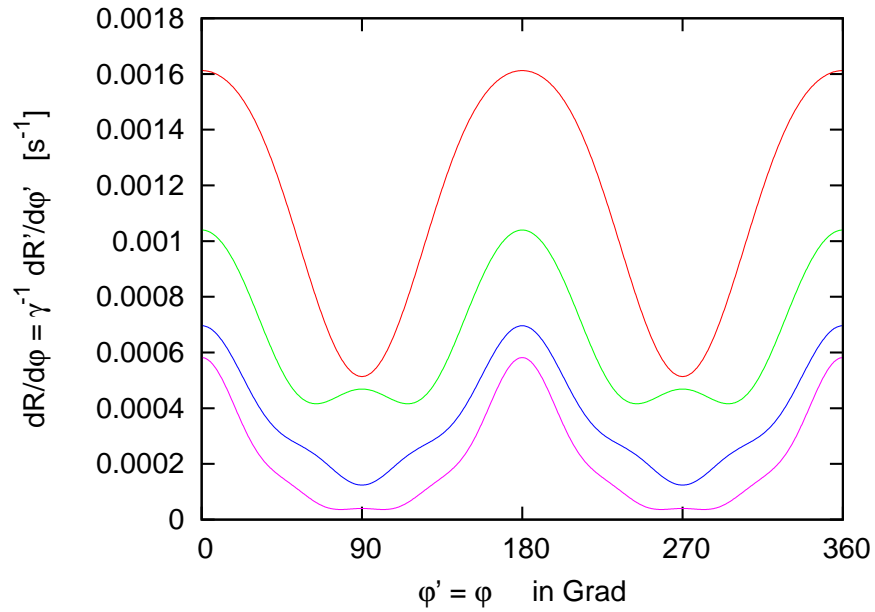


Abbildung 3.18: Winkeldifferentielle Rate des Azimuthwinkels φ für den Einfang in den $2p_{1/2}$ -Zustand. Gezeigt ist die (skalierte) Verteilung für die Absorption von zwei (rot), drei (grün), vier (blau) und fünf (magenta) Photonen.

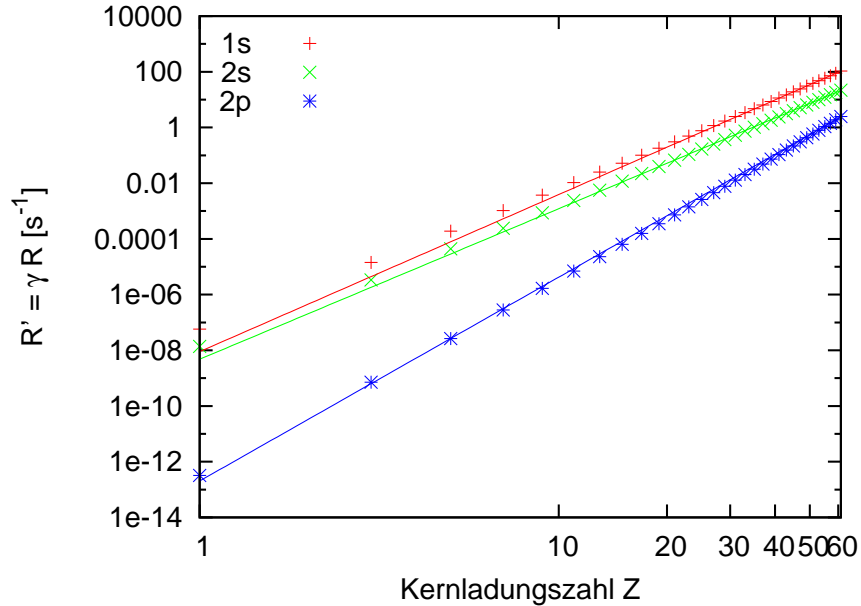


Abbildung 3.19: Vergleich der Z -Abhängigkeit für K- und L-Schale (hier $\hbar\omega = 9$ keV, $\xi = 10^{-4}$, $\gamma = 50$).

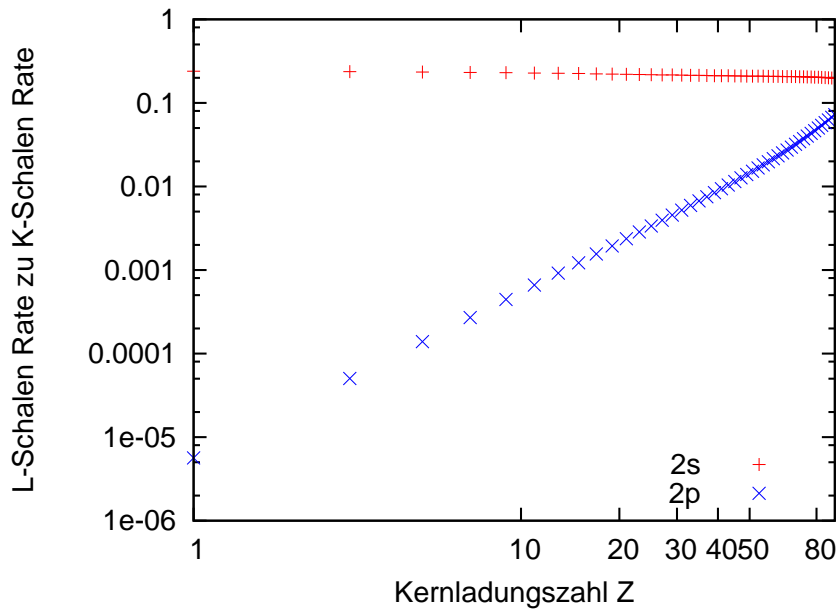


Abbildung 3.20: Anteil der höheren Zustände $2s$ (rot), $2p_{1/2}$ (blau) normiert auf den Grundzustand für verschiedene Z (hier $\hbar\omega = 9$ keV, $\xi = 10^{-4}$, $\gamma = 50$).

(s.o.).

Tabelle 3.2 gibt einen Überblick über die Raten für verschiedene Zustände und verschiedene Kernladungszahlen Z sowie Photonennordnungen n . Es werden exemplarisch für einige Parameter totale Raten gezeigt, desweiteren Verhältnisse von Raten für den Einfang in den $2s$ - und $2p_{1/2}$ -Zustand zum Einfang in den Grundzustand abgebildet. Die Verhältnisse sind für kleine Z sehr ähnlich (siehe auch Abschnitt 3.2), weichen zu unterschiedlichen Z aber voneinander ab. Dies liegt nun, wie schon bereits in Abschnitt 3.2 besprochen, an der unterschiedlichen Z -Skalierung der verschiedenen Zustände. Das Verhältnis der Raten ist für verschiedene Photonennordnungen n annähernd gleich.

3.8 Myonen

Neben der e^+e^- -Paarproduktion ist grundsätzlich auch die Produktion von $\mu^+\mu^-$ -Paaren vorstellbar. Hauptunterschied (neben der Lebensdauer) zwischen dem Elektron- und Myonensektor ist die Ruhemasse; das Verhältnis von Myon- zu Elektronenmasse beträgt $\rho \equiv m_\mu/m_e = 207$. Aufgrund der Energieerhaltung ist die Myonenproduktion also stark unterdrückt. Nimmt man aber Parameter des höchstfrequenten geplanten Lasers (XFEL bei DESY, s.o.) und den LHC von CERN als Ionenquelle ($\gamma = 7000$), ist die $\mu^+\mu^-$ -Paarproduktion für die in Kapitel 1 be-

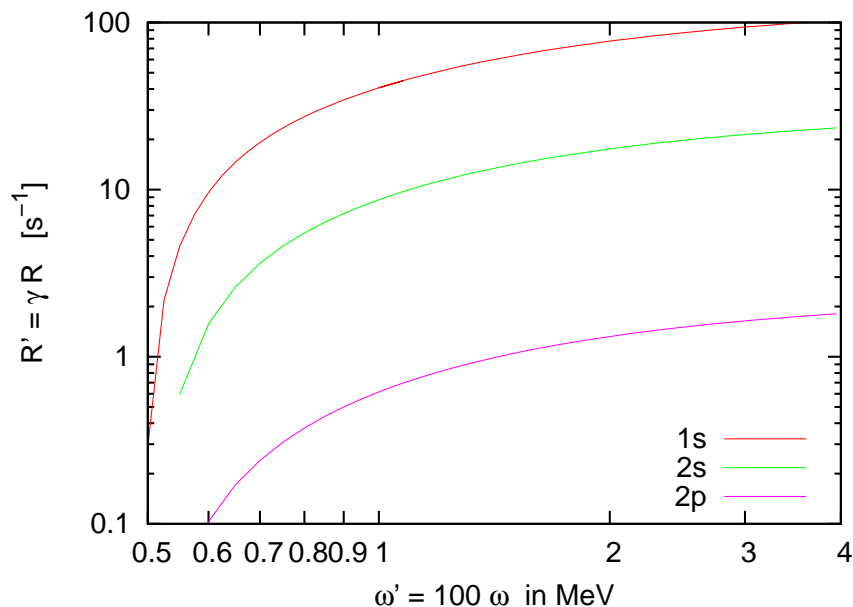


Abbildung 3.21: Vergleich der ω -Abhängigkeit für K- und L-Schale (hier $\xi = 10^{-4}$, $Z = 50$, $\gamma = 50$). Die Kurven zeigen Fits über berechnete Datenpunkte.

1s	2s	2p _{1/2}	2s/1s	2p _{1/2} /1s	Z	n
5.53×10^{-8}	6.91×10^{-9}	2.72×10^{-13}	1.25×10^{-1}	4.93×10^{-6}	1	
3.44×10^1	4.33×10^0	4.01×10^{-1}	1.26×10^{-1}	1.17×10^{-2}	50	2
5.24×10^2	6.41×10^1	1.88×10^1	1.22×10^{-1}	3.59×10^{-2}	80	
3.29×10^{-16}	4.11×10^{-17}	1.70×10^{-21}	1.25×10^{-1}	5.17×10^{-6}	1	
1.93×10^{-7}	2.44×10^{-8}	2.42×10^{-9}	1.26×10^{-1}	1.22×10^{-2}	50	3
2.76×10^{-6}	3.35×10^{-7}	1.08×10^{-7}	1.08×10^{-1}	3.90×10^{-2}	80	

Tabelle 3.2: Übersicht über totale Raten im Kernsystem (in s^{-1}) für verschiedene Zustände, Z und n (hier $\hbar\omega = 9$ keV, $\xi = 10^{-4}$, $\gamma = 50$).

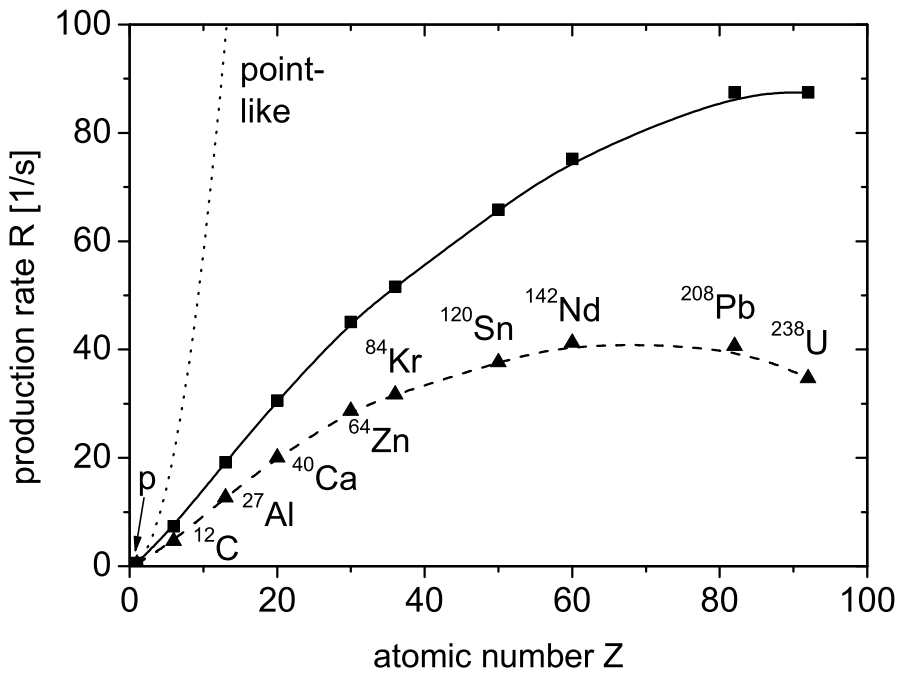


Abbildung 3.22: Totale Produktionsraten im Kernsystem von $\mu^+\mu^-$ -Paaren für verschiedene Projektile. Die Dreiecke zeigen den elastischen Anteil und die Quadrate die gesamte Rate, zusammengesetzt aus elastischem und inelastischen Teil.

beschriebene Stoßgeometrie im Multiphotonenregime energetisch möglich. Die Photonenenergie im Ruhesystem des Ions beträgt $\hbar\omega' \approx 2\gamma\hbar\omega = 168$ MeV. Für die Berechnung der Produktionswahrscheinlichkeit ist es aber nicht ausreichend, Frequenz und Laserfeldstärke mit dem Verhältnis der Massen ρ bzw. ρ^2 zu skalieren (siehe z.B. [SMS⁺07]), um die entsprechenden Raten zu erhalten. Schließlich ist die Compton-Wellenlänge von Myonen $\lambda_C^{(\mu)} \approx 1.86$ fm kleiner als der Radius der meisten Atomkerne. Der Atomkern kann also nicht mehr als punktförmig angenommen werden (im Gegensatz zu bisherigen Annahmen in dieser Arbeit, siehe Abschnitt 2.1). Seine Ausdehnung und Ladungsverteilung kann über einen nuklearen Formfaktor einbezogen werden [MDK08].

Nimmt man eine kugelsymmetrische Gaußverteilung für die Ladungsverteilung im Kern an, $\rho(r) = \frac{Ze}{(\sqrt{\pi}a)^3} e^{-r^2/a^2}$ ($a = \sqrt{2/3}r_{rms}$, wobei r_{rms} der mittlere Kernradius ist), kann man das Kernpotential in die analytische Rechnung einbinden. Leichte Kerne mit Massenzahlen $A \sim 10$ sind gut durch einen gaußförmigen Formfaktor beschrieben, schwerere Kerne dagegen durch eine Fermi-Verteilung. Nur Protonen haben eine exponentielle Ladungsverteilung [Pov06].

Ergebnisse von Rechnungen für frei-freie Paarerzeugung [MVG03a, KKE06] unter Einbeziehung des Formfaktors sind in Abbildung 3.22 dargestellt. Es werden totale

Myonpaarproduktionsraten für verschiedene Kerne als Projektil gezeigt. Verglichen mit der Skalierung von $\sim Z^2$ für punktförmige Kerne, sind die Produktionsraten stark reduziert. Desweiteren wachsen die Raten nicht monoton mit Z , sondern bei Kernladungszahlen von $\sim 60 - 70$ liegt ein Maximum vor mit anschließendem Rückgang der Produktionsraten. Dieser Verlauf spiegelt aber nur den elastischen Kanal wieder, d.h. wenn man keine Kernanregungen berücksichtigt. Nimmt man noch den inelastischen Kanal hinzu, also den Fall, dass der Kern durch Rückstoß angeregt wird, gibt es kein Maximum in der Rate, sondern die Rate sättigt für große Z . Die totale Paarproduktionsrate $R_{tot} = R_{el} + R_{inel}$ ist durch die Quadrate dargestellt.

Auch Myonen können atomar gebunden werden, aber wiederum gilt, dass der Bohrsche Radius um ρ kleiner ist, das gebundene Myon sich also mit endlicher Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Kern befindet. Für geringe Kernladungen Z kann dennoch ein punktförmiger Kern angenommen werden. Mit der Methode aus Kapitel 2 ergibt eine Abschätzung für den Anteil der gebunden-freien Paarproduktion, dass dieser etwa fünf Größenordnungen kleiner ist als der frei-freie Reaktionskanal. Der Effekt der größeren Myonenmassen auf die $\mu^+\mu^-$ -Paarproduktion ist also zweierlei. Zum einen erfordert die Energieerhaltung eine deutlich größere Dopplerverschiebung der Photonenfrequenz, um endliche Raten zu erhalten. Zum anderen führen nicht mehr vernachlässigbare Kerneffekte zu einer substantiellen Verminderung der Rate. Dies kann man andererseits aber prinzipiell als Werkzeug für die Bestimmung der nuklearen Formfaktoren nutzen.

3.9 Reale Laser

Wie bereits in Abschnitt (2.1.1) angekündigt, soll noch der Versuch gemacht werden, die Eigenschaften eines realen Lasers zu betrachten. Oben wurde bereits angemerkt, dass für eine solche Betrachtung die Pulsdauer τ_p , die Wiederholungsrate ν_r , die Anzahl der Pakete (*Bunches*) pro Zug N_{bun} sowie die Anzahl der Atome im Atomstrahl N_p berücksichtigt werden müssen. Genauer muss natürlich auch die Pulsform betrachtet werden. Man kann einen fokussierten Laserstrahl in die Berechnung der Vologov-Zustände integrieren, aber die Auswertung des S-Matrix (Gl. 2.25) wird sich als sehr kompliziert herausstellen. Insbesondere wird die Entwicklung nach Besselfunktionen (Abschnitt 2.2.6) nicht mehr möglich sein. Ein fokussierter *Laserstrahl* wird immer noch durch eine ebene Welle beschrieben, ein fokussierter *Laserpuls* aber nicht. Daher gibt es für letztere auch keine Vologov-Zustände mehr. Aufgrund der hochgradig nichtlinearen Abhängigkeit der Rate von der Feldstärke könnte man den Einfluss der Pulsform auf die Rate durch eine kleinere, effektive Pulsdauer berücksichtigen. Ferner werden in einem realen Atomstrahl auftretende Effekte wie Geschwindigkeits- und Winkelverteilung so-

wie spontane Paarproduktion durch Überlapp der Coulomb-Potentiale für diese Abschätzung nicht berücksichtigt.

Nehmen wir nun die vom geplanten XFEL bei DESY prognostizierten Werte für die Lasereigenschaften sowie eine mögliche Atomstrahlintensität an. Zudem setzen wir hier vollständigen Strahlüberlapp voraus:

$$\tau_p = 100\text{fs} , \quad \nu_r = 10\text{Hz} , \quad N_{bun} = 4000 , \quad N_p = 10^{10}$$

Die grobe Abschätzung für die Rate realer Laser R_{real} folgt dann aus dem Produkt der in dieser berechneten Rate R_{theo} und den hier besprochenen Größen:

$$R_{real} \approx R_{theo} \times \frac{\tau_p}{2} \times \nu_r \times N_{bun} \times N_p \approx 20R_{theo} \quad (3.6)$$

Die so ermittelte Abschätzung für eine Rate unter Berücksichtigung zusätzlicher Eigenschaften eines Lasers sind also etwa in der gleichen Größenordnung.

Kapitel 4

Zusammenfassung und Ausblick

4.1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde der Prozess der gebunden-freien Paarerzeugung in kombinierten Laser- und Coulombfeldern untersucht.

Eine Möglichkeit, mit heutigen experimentellen Anlagen die Paarerzeugung zu realisieren, besteht darin, einen Protonen- oder Ionenstrahl hoher (relativistischer) Geschwindigkeit mit einem starken und hochfrequenten Laser in Kollision zu bringen.

Hier wurde der Prozess der gebunden-freien Paarproduktion untersucht. Im Gegensatz zu früheren Arbeiten [MVG03c, MVG04], wurde lineare Polarisierung des Laserfeldes angenommen, was einerseits die übliche Polarisierung der geplanten Freielektronen-Laser ist, andererseits wegen der Nichtlinearität des Problems zu einer komplizierteren Rechnung als beispielsweise zirkuläre Polarisierung führt. Erstmals wurde für die Paarproduktion in starken Laserfeldern der Einfang des Elektrons in andere Zustände als der K-Schale betrachtet. Dies führt zu einer Erhöhung des gebunden-freien Reaktionskanals von bis zu 20%.

Es wurden in der relativistischen Dirac-Theorie Übergangsamplituden für die Paarproduktion auf analytische Weise gewonnen. Grundlegend dafür war die sogenannte Strong-Field-Approximation (SFA). Die SFA vernachlässigt den Einfluss des Coulombfeldes auf das freie Positron, für das Elektron ist die Coulombwechselwirkung allerdings vollständig (d.h. in allen Ordnungen) enthalten. Ebenso ist die Laserwechselwirkung in allen Ordnungen berücksichtigt. Die angewandte Methode entspricht also nicht einer gewöhnlichen Störungsentwicklung, welche nicht geeignet ist, starke Laserfelder zu beschreiben. Die Methode erlaubt die korrekte Beschreibung von relativistischen Ion-Laser Kollisionen für starke Laserfelder im Multiphotonenregime ($\xi < 1$) und für mittlere Kernladungszahlen Z .

In der vorliegenden Arbeit wurden sowohl totale als auch differentielle Produkti-

onsraten diskutiert. Neben dem Kernsystem wurde der Prozess auch im Laborsystem analysiert, was für experimentelle Untersuchungen das geeignete Bezugssystem darstellt. Verglichen wurden die Ergebnisse mit dem konkurrierenden Reaktionskanal der frei-freien Paarerzeugung, sowie mit zirkularer Polarisation. Für die totalen Raten gilt, dass die Paarproduktionswahrscheinlichkeit sehr stark mit der Kernladung Z und der Laserintensität ansteigt. Der Anstieg mit der Laserfrequenz ist dagegen geringer, unterscheidet sich aber vom Fall zirkularer Laserpolarisation. Sind die Intensitäten nicht zu hoch (z.B. für den XFEL bei DESY), tragen niedrigere Photonenordnungen deutlich stärker bei als höhere. Die niedrigste beitragende Photonenordnung ist durch die Energieerhaltung festgelegt und liegt für den XFEL und einen relativistischen γ -Faktor des Ions von $\gamma \sim 50$ bei zwei oder drei Photonen. Ist dagegen die Intensität hoch, tragen viel mehr Photonenordnungen signifikant bei. Für Laserparameter vergleichbar mit den geplanten XFEL-Anlagen kann man die Skalierung der Paarproduktionsrate mit den hier besprochenen Parametern für den Einfang in den Grundzustand zusammenfassen:

$$R_{gf}^{(lin)} \propto \gamma^{-1} \xi^{2n} Z^{5.6} (\omega - \omega_{min})^{1/2} \quad (4.1)$$

Die Paarproduktionsrate für den frei-freien Kanal lautet im Vergleich dazu:

$$R_{ff}^{(lin)} \propto \gamma^{-1} \xi^{2n} Z^2 (\omega - \omega_{min})^2 \quad (4.2)$$

Für größere Z gewinnt der gebunden-freie Kanal gegenüber dem frei-freien also zunehmend an Bedeutung und die Paarproduktionsrate erhöht sich erheblich. Für mittlere $Z \sim 50$, $\gamma \sim 50$ und Laserparameter von DESY sind die beiden Kanäle etwa gleich bedeutend ($R_{ff}^{(lin)} = 0.98s^{-1}$, $R_{gf}^{(lin)} = 0.69s^{-1}$). Bei gleicher Laserintensität ist lineare Polarisation gegenüber zirkularer Polarisation leicht favorisiert ($R_{gf}^{(lin)} = 0.69s^{-1}$ gegenüber $R_{gf}^{(zirk)} = 0.52s^{-1}$).

Bei der Betrachtung differentieller Raten wurde herausgefunden, dass die Positronen im Kernsystem in einer schmalen Winkelverteilung des Polarwinkels emittiert werden. Gab es für zirkulare Polarisation keine Struktur in der Azimutwinkelverteilung, ist dies für lineare Laserpolarisation der Fall. Die größte Anzahl wird in Richtung des elektrischen Feldstärkevektors emittiert, ein Minimum in Richtung des Magnetfeldes. Im Kernsystem ist die Energie der Positronen aufgrund der Energieerhaltung fest, im Laborsystem dagegen haben die Positronen eine charakteristische Energieverteilung. Infolge der relativistischen Beziehung zwischen den Bezugssystemen werden im Laborsystem fast alle Positronen unter einem Winkel von $\vartheta = 177.3^\circ$ emittiert, für den frei-freien Kanal ist die Verteilung dagegen breiter und leicht in Vorwärtsrichtung verschoben. Die beiden konkurrierenden Kanäle sind dadurch experimentell sehr gut unterscheidbar!

Die totalen Raten für den Einfang in höhere atomare Zustände sind geringer als für den Einfang in den Grundzustand. Für den $2s$ -Zustand beträgt die Rate $1/8$

der Rate für den Grundzustand, für $2p_{1/2}$ ist sie bei kleinen Kernladungszahlen Z noch geringer. Die p -Zustände skalieren aber stärker mit Z ($\sim Z^{7.5}$), so dass ihre Bedeutung mit wachsendem Z deutlich zunimmt. Der Anteil der L-Schale gegenüber der K-Schale macht zusammen $\sim 15\%$ aus. Im Prinzip kann der Einfang in noch höhere atomare Zustände betrachtet werden, aber die Paarproduktionswahrscheinlichkeit für den Einfang in die s -Zustände sinkt generell mit $1/n^3$, wobei n die Hauptquantenzahl ist. Für p -, d - und f -Orbitale sinken die Raten aufgrund des zusätzlichen Drehimpulses sogar noch schneller, so dass die Korrekturen durch die M-Schale bei $\sim 3\%$ liegen.

4.2 Ausblick

Im Hinblick auf die experimentelle Überprüfung der gewonnenen Resultate wurden in dieser Arbeit Parameter für das Laserfeld verwendet, welche den geplanten Röntgen-Freie-Elektronen-Laser in Hamburg und Stanford entsprechen. Diese sollen 2013 beziehungsweise 2009 in Betrieb gehen. Des Weiteren sind für die Beschleunigung der Ionen auf relativistische Geschwindigkeiten realistische Annahmen bestehender Ionenbeschleuniger getroffen worden. Für die experimentelle Untersuchung ist es natürlich notwendig, dass sowohl ein Ionenbeschleuniger als auch ein starker Röntgenlaser an einem Ort vorhanden sind. Bei DESY ist neben dem XFEL auch noch der Protonenbeschleuniger HERA vorhanden. Dort könnte der hier untersuchte Prozess durch Kollision eines relativistischen Protonenstrahls mit dem Röntgenlaser untersucht werden. Neben den beiden geplanten Röntgenlaseranlagen ist aber auch angedacht, eine solche Anlage bei der GSI in Darmstadt zu errichten. Diese soll mit Photonenenergien von ~ 100 eV aber deutlich kleinere Frequenzen haben. Es sei darauf hingewiesen, dass gebunden-freie Paarproduktion bei Ersetzung des Ionenstrahls durch Elektronen (wie beim Experiment E-144 am SLAC (s.o.)) ebenfalls auftreten kann. Die entstandenen Positronen können mit den Elektronen des Strahls einen gebundenen Zustand (Positronium) eingehen. Da für Elektronen aber $Z = 1$ gilt, ist dieser Prozess gegenüber der frei-freien Paarproduktion stark unterdrückt. Eine experimentelle Untersuchung der hier dargelegten Prozesse ist also in absehbarer Zukunft eine realistische Möglichkeit.

In jüngster Zeit besteht zudem großes Interesse an der Erzeugung von Antiwasserstoffatomen [KABa08]. Verwendet man anstelle von Protonen Antiprotonen, führt die gebunden-freie Paarproduktion zur Herstellung von Antiwasserstoff. Die Antiwasserstoffatome bewegen sich sehr schnell und würden in kurzer Zeit wieder ionisiert, aber auch durch andere experimentelle Methoden gibt es Schwierigkeiten, Antiwasserstoff herzustellen.

Eine experimentelle Überprüfung des hier dargestellten Prozesses würde zudem eine experimentelle Verifizierung der Strong-Field-Approximation ermöglichen. Die

Vernachlässigung des Coulombfeldes ist (insbesondere für hohe Z) der größte limitierende Faktor dieser Rechnung. Für eine Erweiterung der bestehenden Rechnung könnte man den Korrekturterm niedrigster Ordnung zur SFA betrachten. Alternativ gibt es Ansätze, die Coulombeffekte zu den Volkovfunktionen hinzuzufügen (Coulomb-Volkov-Zustände, [JT78]). Als Erweiterung zu der vorliegenden Rechnung könnte man außerdem Spineffekte betrachten [FB04, HK99]. In dieser Arbeit wurden die möglichen Spineinstellungen von Elektron und Positron summiert, dies entspricht einer spinunsensitiven experimentellen Detektion der erzeugten Teilchen. In einem möglichen Experiment den Spin zusätzlich aufzulösen, stellt allerdings eine große Herausforderung dar.

Anhang A

Verwendete Einheiten und Notation

In dieser Arbeit werden durchgehend (sofern nicht anders bemerkt) natürliche Einheiten verwendet. Es ist

$$\hbar = c = 1 \quad (\text{A.1})$$

und die Elementarladung hängt mit der Feinstrukturkonstanten folgendermaßen zusammen:

$$e = |e| = \sqrt{\alpha} \quad (\text{A.2})$$

Die Elektronenladung ist entsprechend $-e$.

Verwendet wird die Standarddarstellung der Diracmatrizen (mit $k = 1, 2, 3$)

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Die Dirac-Gleichung lautet

$$(i\cancel{\partial} + e\cancel{A} - m) \psi = 0, \quad (\text{A.4})$$

hierbei bedeutet $\cancel{Q} = \gamma_\mu Q^\mu$. $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ ist das Viererpotential aus der Elektrodynamik, m die Elektronenmasse.

Die hier verwendete Metrik lautet:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Somit ist das Viererprodukt definiert als:

$$(ab) = a_\mu b^\mu = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 \quad (\text{A.6})$$

Intensität und Intensitätsparameter Der Intensitätsparameter ξ lautet in SI-Einheiten:

$$\xi = \frac{ea}{mc} \quad (\text{A.7})$$

Dies gilt sowohl für lineare als auch für zirkulare Polarisation! Dabei ist a der Betrag des Viererpotentials A_μ und hängt mit der elektrischen (Spitzen-)Feldstärke \mathcal{E} in SI-Einheiten folgendermaßen zusammen:

$$\mathcal{E} = a\omega = \xi mc\omega/e \quad (\text{A.8})$$

Die Intensität in SI-Einheiten lautet

$$I = \varpi c \epsilon_0 \mathcal{E}^2 = \varpi c^3 \omega^2 m^2 \epsilon_0 \xi^2 / e^2, \quad (\text{A.9})$$

mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ_0 und

$$\varpi = \begin{cases} 1 & \text{zirkular} \\ 1/2 & \text{linear} . \end{cases}$$

Anhang B

Verwendete Abkürzungen

Allgemeine Abkürzungen. Nachfolgend wird eine Übersicht der hier verwendeten Abkürzungen gegeben:

a_B	$= 1/\alpha m$	Bohrradius
α	$= 1/137$	Feinstrukturkonstante
e	$= \sqrt{\alpha}$	Elementarladung
m		Elektronenmasse
p	$= (p^0, \mathbf{p})$	Viererimpuls des Positrons
E_q	$= q_0 = p_0 + \frac{e^2 a^2}{4(kp)} k_0$	effektive Energie des Positrons
q	$= p + \frac{e^2 a^2}{4(kp)} k$	effektiver Viererimpuls
a		Amplitude des Vektorpotentials
n		Photonenanzahl
ω, k_z		Laserfrequenz und -wellenzahl
\tilde{J}_n		verallgemeinerte Besselfunktion
α_1	$= -e \frac{(pa_0)}{(kp)} - e^2 a^2$	1. Argument der gen. Besselfunktionen
α_2	$= \frac{-e^2 a^2}{8(kp)}$	2. Argument der gen. Besselfunktionen
Z		Kernladung
ρ	$= \mathbf{q} - n\mathbf{k} = \mathbf{p} - b\mathbf{k}$	
b	$= n - \frac{1}{2}\nu$	
ν	$= \frac{e^2 a^2}{2(kp)}$	
τ	$= \frac{1-\sigma}{\alpha Z}$	
σ	$= \sqrt{1 - (\alpha Z)^2}$	

Transformation der Größen in effektive Impulse \mathbf{q} . Die Beziehung zwischen kanonischem und effektivem Viererimpuls lautet:

$$q = p + \frac{e^2 a^2}{4(kp)} k, \quad (\text{B.1})$$

wobei $k = \omega(1, 0, 0, 1)$.

Nachfolgend werden alle Größen auf effektive Impulse transformiert:

$$\begin{aligned} (kp) &= (kq) = \omega(E_q - |\mathbf{q}| \cos \vartheta_q) \\ \rho^2 &= |\mathbf{q}|^2 - 2n\omega|\mathbf{q}| \cos \vartheta_q + n^2\omega^2 \\ p_0 &= E_q - \frac{e^2 a^2}{4(E_q - |\mathbf{q}| \cos \vartheta_q)} \\ p_x &= q_x = |\mathbf{q}| \sin \vartheta_q \cos \varphi_q \\ p_y &= q_y = |\mathbf{q}| \sin \vartheta_q \sin \varphi_q \\ p_z &= q_z - \frac{e^2 a^2}{4(E_q - |\mathbf{q}| \cos \vartheta_q)} \\ \nu &= \frac{e^2 a^2}{2\omega(E_q - |\mathbf{q}| \cos \vartheta_q)} \\ \alpha_1 &= -e \frac{(qa_0)}{(kq)} = e \frac{a|\mathbf{q}| \sin \vartheta_q \cos \varphi_q}{\omega(E_q - |\mathbf{q}| \cos \vartheta_q)} \\ \alpha_2 &= \frac{-e^2 a^2}{8(kq)} = \frac{-e^2 a^2}{8\omega(E_q - |\mathbf{q}| \cos \vartheta_q)} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Abkürzungen für 1s. Normierungsfaktor

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \mathcal{P}^{(1s)} = \frac{(1 + \sigma)(\Gamma(\sigma))^2 2^{2(\sigma-1)}}{\Gamma(1 + 2\sigma)} \frac{\left[1 + \left(\frac{a_B \rho}{Z}\right)^2\right]^{2-\sigma}}{\left(\frac{a_B \rho}{Z}\right)^6} \\ &= \frac{(Z/a_B)^5}{16\pi} \left[1 + \left(\frac{\rho a_B}{Z}\right)^2\right]^4 \mathcal{R}^2 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Abkürzungen für 2s.

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(r) &= \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 r & \mathfrak{J}_1 &= 2E & \mathfrak{J}_2 &= -\frac{2\zeta}{2E-1} \\ \mathfrak{K} &= \sqrt{\frac{1-E}{1+E}} & \sigma &= \sqrt{1 - (\alpha Z)^2} \\ \zeta &= m\sqrt{\frac{1-\sigma}{2}} & E &= \sqrt{\frac{1+\sigma}{2}} & E_{2s} &= m\sqrt{\frac{1+\sigma}{2}} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Desweiteren ist $w = [1 + (\rho/\zeta)^2]^{-1}$.

Normierungsfaktor:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^{(2s)} = \frac{(\Gamma(\sigma))^2 2^{2(\sigma-2)}}{\Gamma(1+2\sigma)} \left[1 + \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^2 \right]^{2-\sigma} \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^{-6} \frac{(1+E)(2E-1)}{E} \quad (\text{B.5})$$

Weitere Abkürzungen:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= (\mathfrak{J}_1 \mathcal{U} + \mathfrak{J}_2 \zeta^{-1} (\sigma+1) {}_r \mathcal{U})^2 \\ \mathcal{W}_2 &= ((\mathfrak{J}_1 + 2) \mathcal{V} + \mathfrak{J}_2 \zeta^{-1} {}_r \mathcal{V})^2 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_3 &= (\mathfrak{J}_1 + 2) \mathfrak{J}_1 \mathcal{U} \mathcal{V} + (\mathfrak{J}_1 + 2) \mathfrak{J}_2 \zeta^{-1} (\sigma+1) {}_r \mathcal{U} \mathcal{V} \\ &\quad + \mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2 \zeta^{-1} {}_r \mathcal{U} \mathcal{V} + \mathfrak{J}_2^2 \zeta^{-2} (\sigma+1) {}_r \mathcal{U} \mathcal{V} \end{aligned}$$

Abkürzungen für $2p_{1/2}$. Die Abkürzungen sind wie für den $2s$ -Zustand mit einem Vorzeichenunterschied in \mathfrak{J}_2 .

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(r) &= \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 r & \mathfrak{J}_1 &= 2E & \mathfrak{J}_2 &= -\frac{2\zeta}{2E+1} \\ \mathfrak{K} &= \sqrt{\frac{1-E}{1+E}} & \sigma &= \sqrt{1 - (\alpha Z)^2} \\ \zeta &= m \sqrt{\frac{1-\sigma}{2}} & E &= \sqrt{\frac{1+\sigma}{2}} & E_{2p_{1/2}} &= m \sqrt{\frac{1+\sigma}{2}} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Normierungsfaktor:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_{2p} = \frac{(\Gamma(\sigma))^2 2^{2(\sigma-2)}}{\Gamma(1+2\sigma)} \left[1 + \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^2 \right]^{2-\sigma} \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^{-6} \frac{(1+E)(2E+1)}{E} \quad (\text{B.8})$$

Weitere Abkürzungen:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= (\mathfrak{J}_1 \mathcal{U} + \mathfrak{J}_2 p_0^{-1} (\sigma+1) {}_r \mathcal{U})^2 \\ \mathcal{W}_2 &= ((\mathfrak{J}_1 - 2) \mathcal{V} + \mathfrak{J}_2 p_0^{-1} {}_r \mathcal{V})^2 \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_3 &= (\mathfrak{J}_1 - 2) \mathfrak{J}_1 \mathcal{U} \mathcal{V} + (\mathfrak{J}_1 - 2) \mathfrak{J}_2 \zeta^{-1} (\sigma+1) {}_r \mathcal{U} \mathcal{V} \\ &\quad + \mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2 \zeta^{-1} {}_r \mathcal{U} \mathcal{V} + \mathfrak{J}_2^2 \zeta^{-2} (\sigma+1) {}_r \mathcal{U} \mathcal{V} \end{aligned}$$

Abkürzungen für Integrale. Für $1s$:

$$\begin{aligned}
 R &= \sigma \left(\frac{\rho^{a_B}}{Z} \right) \rho \mathcal{U} \mathcal{R} \\
 R_1 &= i(p_z - bk_z) \mathcal{V} \mathcal{R} \\
 R_2 &= ip_x \mathcal{V} \mathcal{R} \\
 R_3 &= ip_y \mathcal{V} \mathcal{R}
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

Dabei ist:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U} &= \sin \mathcal{X} + \frac{a_B \rho}{Z} \cos \mathcal{X} \\
 \mathcal{V} &= -\sigma \frac{a_B \rho}{Z} \cos \mathcal{X} + \left[1 + (1 + \sigma) \left(\frac{a_B \rho}{Z} \right)^2 \right] \sin \mathcal{X} \\
 \mathcal{X} &= \sigma \arctan \left(\frac{a_B \rho}{Z} \right)
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

Für $2s, 2p_{1/2}$:

$$\begin{aligned}
 R &= \sigma \rho^2 \zeta^{-1} \mathcal{U} \mathcal{R} \\
 R_1 &= i(p_z - bk_z) \mathcal{V} \mathcal{R} \\
 R_2 &= ip_x \mathcal{V} \mathcal{R} \\
 R_3 &= ip_y \mathcal{V} \mathcal{R}
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

$$\begin{aligned}
 {}_r R &= \sigma(\sigma + 1) \rho^2 \zeta^{-2} {}_r \mathcal{U} \mathcal{R} \\
 {}_r R_1 &= i(p_z - bk_z) \zeta^{-1} {}_r \mathcal{V} \mathcal{R} \\
 {}_r R_2 &= ip_x \zeta^{-1} {}_r \mathcal{V} \mathcal{R} \\
 {}_r R_3 &= ip_y \zeta^{-1} {}_r \mathcal{V} \mathcal{R}
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

Dabei ist:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \sin \mathcal{X} + \frac{\rho}{\zeta} \cos \mathcal{X} \\
\mathcal{V} &= -\sigma \frac{\rho}{\zeta} \cos \mathcal{X} + \left[1 + (1 + \sigma) \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^2 \right] \sin \mathcal{X} \\
\mathcal{X} &= \sigma \arctan \left(\frac{\rho}{\zeta} \right) \\
{}_r\mathcal{U} &= \left(1 - \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^2 \right) w \sin \mathcal{X} + 2 \frac{\rho}{\zeta} w \cos \mathcal{X} \\
{}_r\mathcal{V} &= \sigma \left(\frac{-2(\sigma + 1)}{1 + \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^2} + 3 + 2\sigma \right) \sin \mathcal{X} - \sigma \left(2(\sigma + 1) \left(\frac{\rho}{\zeta} \right) w - (\sigma + 2) \left(\frac{\rho}{\zeta} \right) \right) \cos \mathcal{X}
\end{aligned}
\tag{B.14}$$

Anhang C

Integrale

C.1 Integrale für K- und L-Schale

In den Abschnitten 2.2, 2.3.1 und 2.3.2 treten die folgenden Typen von Integralen auf:

$$\begin{aligned}R &\equiv \int d^3x g(r) e^{i\rho\mathbf{x}} \\R_1 &\equiv \int d^3x g(r) e^{i\rho\mathbf{x}} \cos \vartheta \\R_2 &\equiv \int d^3x g(r) e^{i\rho\mathbf{x}} \sin \vartheta \cos \varphi \\R_3 &\equiv \int d^3x g(r) e^{i\rho\mathbf{x}} \sin \vartheta \sin \varphi\end{aligned}$$

Ihre Berechnung soll hier dargelegt werden. Eine ausführlichere Behandlung kann auch in [Mül03] nachgelesen werden.

Bei den Größen \tilde{R} , \tilde{R}_1, \tilde{R}_2 sowie \tilde{R}_3 sind die Normierungskonstanten weggelassen, um die Übersicht einfacher zu machen.

$$\begin{aligned}
\tilde{R} &= \int dr \int d \cos \vartheta \int d\varphi r^{\sigma+1} e^{-\zeta r} e^{i\rho r \cos \vartheta} \\
&\stackrel{(1)}{=} 2\pi \int dr r^{\sigma+1} e^{-\zeta r} \left[\frac{e^{i\rho r \cos \vartheta}}{i\rho r} \right]_{-1}^{+1} \\
&\stackrel{(2)}{=} \frac{4\pi}{\rho} \int dr r^{\sigma} e^{-\zeta r} \sin(\rho r) \\
&\stackrel{(3)}{=} \frac{4\pi}{\rho} \frac{\Gamma(1+\sigma)}{(\zeta^2 + \rho^2)^{\frac{1+\sigma}{2}}} \sin[(\sigma+1) \arctan(\rho/\zeta)] \\
&\stackrel{(4)}{=} \frac{4\pi}{\rho} \frac{\Gamma(1+\sigma)}{(\zeta^2 + \rho^2)^{\frac{1+\sigma}{2}}} \frac{1}{(1 + \rho^2/\zeta^2)^{1/2}} \left[\sin(\sigma \arctan \rho/\zeta) + \frac{\rho}{\zeta} \cos(\sigma \arctan \rho/\zeta) \right] \\
&= \frac{4\pi}{\rho} \frac{\Gamma(1+\sigma)}{(\zeta^2 + \rho^2)^{\frac{1+\sigma}{2}}} \frac{1}{(1 + \rho^2/\zeta^2)^{1/2}} \mathcal{U},
\end{aligned}$$

wobei ζ wahlweise für Z/a_B oder für $\zeta = m\sqrt{\frac{1-\sigma}{2}}$ stehen kann.

In Schritt (1) und (2) wurden die φ - und $\cos \vartheta$ -Integrationen ausgeführt. Schritt (3) vollzieht die r -Integration mit Gl. 3.944.5 aus [GR]. Im letzten Schritt (4) wurden bekannte trigonometrische Relationen angewandt.

\mathcal{U} , \mathcal{X} sind folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \sin \mathcal{X} + \frac{\rho}{\zeta} \cos \mathcal{X} \\
\mathcal{X} &= \sigma \arctan \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)
\end{aligned}$$

Für die Integrale \tilde{R}_1, \tilde{R}_2 und \tilde{R}_3 muss man zunächst $\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{r}$ geeignet umformen:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{r} &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - b \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \\
&= p_{\perp} r \sin \vartheta (\cos \phi_p \cos \varphi + \sin \phi_p \sin \varphi) + p_z r \cos \vartheta - b k_z r \cos \vartheta \\
&= p_{\perp} r \sin \vartheta \cos(\varphi - \phi_p) + (p_z - b k_z) r \cos \vartheta
\end{aligned}$$

Nun kann das Integral \tilde{R}_1 berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_1 &= \int dr r^{\sigma+1} e^{-\zeta r} \int d \cos \vartheta \cos \vartheta e^{i(p_z - bk_z)r \cos \vartheta} \\
&\quad \times \int d\varphi e^{ip_\perp r \sin \vartheta \cos(\varphi - \phi_p)} \\
&\stackrel{(1)}{=} 2\pi \int dr r^{\sigma+1} e^{-\zeta r} \int d \cos \vartheta \cos \vartheta e^{i(p_z - bk_z)r \cos \vartheta} J_0(p_\perp r \sin \vartheta) \\
&\stackrel{(2)}{=} 4\pi i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{p_z - bk_z}{p_\perp^{3/2}} \left[1 + \left(\frac{p_z - bk_z}{p_\perp} \right)^2 \right]^{-3/4} \int dr r^{\sigma+1/2} e^{-\zeta r} J_{\frac{3}{2}}(\rho r) \\
&\stackrel{(3)}{=} 4\pi i \sqrt{\frac{\pi}{2}} (p_z - bk_z) \zeta^{-\sigma} (\zeta \rho)^{-3/2} [1 + (\rho/\zeta)^2]^{-\frac{1}{2}(\sigma + \frac{3}{2})} \Gamma(\sigma + 3) \\
&\quad \times P_{\sigma + \frac{1}{2}}^{-\frac{3}{2}} \left([1 + (\rho/\zeta)^2]^{-1/2} \right)
\end{aligned}$$

In Schritt (1) wurde die φ -Integration unter Verwendung von (9.1.21) in [Abr68] vollzogen. In Schritt (2) wurde die Symmetrie des Integrals sowie (6.738.1) in [GR] ausgenutzt. Die r -Integration in (3) wurde mit Hilfe von (6.621.1) in [GR] durchgeführt. $P_n^m(x)$ sind die zugeordneten Legendrepolynome. Unter Verwendung von (8.733.3), (8.754.2) und (8.754.3) in [GR] können diese folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
P_{\sigma + \frac{1}{2}}^{-\frac{3}{2}} \left([1 + (\rho/\zeta)^2]^{-1/2} \right) &= \frac{\sqrt{2/\pi}}{\sigma(\sigma+1)(\sigma+2)} [1 + (\rho/\zeta)^2]^{-1} [1 + (\zeta/\rho)^2]^{3/4} \\
&\times \left\{ -\sigma(\rho/\zeta) \cos [\sigma \arctan(\rho/\zeta)] + [1 + (1 + \sigma)(\rho/\zeta)^2] \sin [\sigma \arctan(\rho/\zeta)] \right\}
\end{aligned}$$

Damit lässt sich \tilde{R}_1 als

$$\tilde{R}_1 = 4\pi i (p_z - bk_z) Z^{-\sigma} \rho^{-3} [1 + (\rho/Z)^2]^{-(1 + \frac{\sigma}{2})} \Gamma(\sigma) \mathcal{V}$$

schreiben. Die Größe \mathcal{V} ist definiert durch:

$$\mathcal{V} = -\sigma \frac{\rho}{\zeta} \cos \mathcal{X} + \left[1 + (1 + \sigma) \left(\frac{\rho}{\zeta} \right)^2 \right] \sin \mathcal{X}$$

Die Berechnung von \tilde{R}_2 und \tilde{R}_3 ist im Prinzip ähnlich und soll hier nicht explizit gezeigt werden. Nimmt man nun noch die Normierungskonstanten hinzu, lauten die Ergebnisse für die Integrale

$$\begin{aligned}
R &= \sigma \rho^2 \zeta^{-1} \mathcal{UR} \\
R_1 &= i(p_z - bk_z) \mathcal{VR} \\
R_2 &= ip_x \mathcal{VR} \\
R_3 &= ip_y \mathcal{VR}
\end{aligned}$$

\mathcal{R} hängt dabei vom gewählten Zustand ($1s$, $2s$ oder $2p_{1/2}$) ab und ist in den jeweiligen Abschnitten explizit angegeben.

C.2 Integrale für die L-Schale

Bei der Berechnung für die L-Schale treten neue Integrale mit einem zusätzlichen Faktor r auf. Diese sind mit ${}_rR$ gekennzeichnet.

$$\begin{aligned}
{}_rR &\equiv N_{2s} \int \int \int r^2 dr d\vartheta d\varphi e^{i\rho\mathbf{x}} r^{\sigma-1} e^{-\zeta r} r \\
{}_rR_1 &\equiv N_{2s} \int \int \int r^2 dr d\vartheta d\varphi e^{i\rho\mathbf{x}} r^{\sigma-1} e^{-\zeta r} r \cos \vartheta \\
{}_rR_2 &\equiv N_{2s} \int \int \int r^2 dr d\vartheta d\varphi e^{i\rho\mathbf{x}} r^{\sigma-1} e^{-\zeta r} r \sin \vartheta \cos \varphi \\
{}_rR_3 &\equiv N_{2s} \int \int \int r^2 dr d\vartheta d\varphi e^{i\rho\mathbf{x}} r^{\sigma-1} e^{-\zeta r} r \sin \vartheta \sin \varphi
\end{aligned}$$

Der Unterschied zu den bekannten Integralen liegt im zusätzlichen Faktor r . Die ϑ und φ Integration ist also wie zuvor.

$$\begin{aligned}
{}_rR &= N_{2s} \frac{4\pi}{\rho} \int_0^\infty dr r^{\sigma+1} e^{-\zeta r} \sin(\rho r) \\
&= N_{2s} \frac{4\pi}{\rho} \frac{\Gamma(\sigma+2)}{(\zeta^2 + \rho^2)^{\frac{\sigma+2}{2}}} \sin\left((\sigma+2) \arctan \frac{\rho}{\zeta}\right) \\
&= \sigma(\sigma+1) \rho^2 \zeta^{-2} {}_r\mathcal{UR}
\end{aligned}$$

Das Integral wird in (3.9.445) in [GR] gelöst. In der zweiten Umformung werden bekannte trigonometrische Beziehungen benutzt, die Normierungskonstante N_{2s} eingesetzt und die Abkürzung ${}_r\mathcal{U}$ eingeführt.

$${}_r\mathcal{U} = \left(1 - \left(\frac{\rho}{\zeta}\right)^2\right) w \sin \mathcal{X} + 2\frac{\rho}{\zeta} w \cos \mathcal{X}$$

Die φ - und ϑ -Integration von ${}_rR_1$ verläuft analog wie für R_1 , die r -Integration lautet:

$$\begin{aligned}
{}_rR_1 &= 4\pi i \sqrt{\frac{\pi}{2}} (p_z - bk_z) \rho^{-3/2} N_{2s} \int_0^\infty dr r^{\sigma+3/2} e^{-\zeta r} J_{3/2}(\rho r) \\
&= 4\pi i \sqrt{\frac{\pi}{2}} (p_z - bk_z) \rho^{-3/2} N_{2s} (\zeta^2 + \rho^2)^{-\frac{1}{2}(\sigma+5/2)} \Gamma(s+4) P_{\sigma+3/2}^{-3/2} \left([1 + (\rho/\zeta)^2]^{-1/2} \right) \\
&= 4\pi i (p_z - bk_z) N_{2s} \rho^{-3} \zeta^{-(\sigma+1)} \Gamma(\sigma) [1 + (\rho/\zeta)^2]^{-(1+1/2\sigma)} {}_r\mathcal{V} \\
&= i (p_z - bk_z) \zeta^{-1} {}_r\mathcal{VR}
\end{aligned}$$

mit der Abkürzung

$${}_r\mathcal{V} = \sigma \left(\frac{-2(\sigma+1)}{1 + \left(\frac{\rho}{\zeta}\right)^2} + 3 + 2\sigma \right) \sin \mathcal{X} - \sigma \left(2(\sigma+1) \left(\frac{\rho}{\zeta}\right) w - (\sigma+2) \left(\frac{\rho}{\zeta}\right) \right) \cos \mathcal{X}$$

Das Integral wird in (6.621.1) in [GR] gelöst. Die $P_{\sigma+3/2}^{-3/2}(x)$ sind wiederum die zugeordneten Legendre-Polynome, welche mit (8.733.3), (8.754.2+3) in [GR] umgeformt werden können.

Die r -Integration von ${}_rR_2$ und ${}_rR_3$ sind analog zu ${}_rR_1$. Die neuen Integrale für die L-Schale lauten also:

$$\begin{aligned}
{}_rR &= \sigma(\sigma+1) \rho^2 \zeta^{-2} {}_r\mathcal{UR} \\
{}_rR_1 &= i (p_z - bk_z) \zeta^{-1} {}_r\mathcal{VR} \\
{}_rR_2 &= ip_x \zeta^{-1} {}_r\mathcal{VR} \\
{}_rR_3 &= ip_y \zeta^{-1} {}_r\mathcal{VR}
\end{aligned}$$

Anhang D

Generalisierte Besselfunktionen

Gewöhnliche Besselfunktionen. Die Besselsche Differentialgleichung (mit $n \in \mathbb{Z}$) lautet [Abr68]:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + z \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2) y = 0 \quad (\text{D.1})$$

Lösungen sind die Besselfunktionen erster Art, aber auch die Besselfunktionen zweiter (Weberfunktionen) und dritter Art (Hankelfunktionen).

Die Darstellung der Besselfunktionen (1. Art) lautet:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{\Gamma(n+k+1) k!} \quad (\text{D.2})$$

Die Erzeugendenfunktion der Besselfunktionen ist die folgende Exponentialfunktion:

$$e^{i\alpha \sin \eta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha) e^{in\eta} \quad (\text{D.3})$$

Sie kann alternativ zu Gl. D.1 als Definition der gewöhnlichen Besselfunktionen angesehen werden.

Für kleine x kann man die unendliche Summe in der Darstellung der gewöhnlichen Besselfunktionen (Gl. (D.2)) approximieren. Die niedrigsten Grade n lauten:

$$\begin{aligned}
J_0(x) &= 1 - \frac{1}{4}x^2 + \mathcal{O}(x^4) \\
J_1(x) &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}x^3 + \mathcal{O}(x^5) \\
J_2(x) &= \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + \mathcal{O}(x^6) \\
&\vdots \\
J_n(x) &= \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n + \mathcal{O}(x^{n+2})
\end{aligned} \tag{D.4}$$

Für kleine Argumente x sind die Besselfunktionen kleineren Grades n immer größer als die größeren Grades. Für $n = 1, 2$ ist das Verhältnis zu J_0 :

$$\begin{aligned}
\frac{J_1}{J_0} &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^3 + \mathcal{O}(x^5) \\
\frac{J_2}{J_0} &= \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{48}x^4 + \mathcal{O}(x^6)
\end{aligned} \tag{D.5}$$

Dieser Sachverhalt wird auch in Abbildung D.1 deutlich.

Die gewöhnlichen Besselfunktionen kommen typischerweise in Problemen mit zirkularer Polarisation des Laserfelds vor.

Generalisierte Besselfunktionen. Die generalisierten Besselfunktionen sind folgendermaßen definiert (siehe Gl. 2.51, [Rei80]):

$$\tilde{J}_n(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{n-2m}(x) J_m(y) \tag{D.6}$$

Die \tilde{J}_n sind Funktionen zweier Argumente und können als unendliche Summe zweier gewöhnlicher Besselfunktionen geschrieben werden.

Für die praktische Handhabung ist es oft vorteilhaft, diese auf die folgende Form umzuschreiben:

Für n gerade gilt:

$$\tilde{J}_n(x, y) = J_0(x) J_{n/2}(y) + \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x) [J_{k+n/2}(y) + J_{-k+n/2}(y)] \tag{D.7}$$

Für n ungerade gilt:

$$\tilde{J}_n(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(x) [J_{-k+(n+1)/2}(y) - J_{k+(n-1)/2}(y)] \tag{D.8}$$

Eigenschaften. Die generalisierten Besselfunktionen haben die folgenden allgemeinen Eigenschaften [Rei80]:

$$\tilde{J}_n(x, 0) = J_n(x) \quad (\text{D.9})$$

$$\tilde{J}_n(0, y) = \begin{cases} J_{n/2}(y) & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

$$\tilde{J}_n(-x, y) = (-1)^n \tilde{J}_n(x, y) \quad (\text{D.11})$$

$$\tilde{J}_n(x, -y) = (-1)^n \tilde{J}_{-n}(x, y) \quad (\text{D.12})$$

Rechenregeln. In Gl. 2.51 wurden die generalisierten Besselfunktionen hergeleitet. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\eta) &\equiv e^{i\alpha_1 \sin \eta} e^{i\alpha_2 \sin 2\eta} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_n(\alpha_1, \alpha_2) e^{in\eta} \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Für die \mathcal{F} gelten dabei die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \cos \eta \mathcal{F}(\eta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left[\tilde{J}_{n-1}(\alpha_1, \alpha_2) + \tilde{J}_{n+1}(\alpha_1, \alpha_2) \right] e^{in\eta} \\ \cos^2 \eta \mathcal{F}(\eta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} \left[\tilde{J}_{n-2}(\alpha_1, \alpha_2) + 2\tilde{J}_n(\alpha_1, \alpha_2) + \tilde{J}_{n+2}(\alpha_1, \alpha_2) \right] e^{in\eta} \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Dies ist ersichtlich, wenn man $\cos \eta$ in Exponentialfunktionen umschreibt und diese mit der Exponentialfunktion in Gl. D.13 multipliziert. Eine Verschiebung des Index führt dann zu den Beziehungen in Gl. D.14.

Grenzwert kleiner Argumente x, y . Sind beide Argumente klein und ferner $\mathcal{O}(|x|^2) \sim \mathcal{O}(|y|)$, kann man folgende Umschreibung durchführen [Rei80]¹:

$$x = z^{1/2} \tilde{x}, \quad y = z \tilde{y} \quad (\text{D.15})$$

¹In der vorliegenden Rechnung lauten die beiden Argumente $\alpha_1 = \frac{mp_x}{(kp)} \xi$ und $\alpha_2 = -\frac{m^2}{8(kp)} \xi^2$. Ist der Intensitätsparameter klein ($\xi \ll 1$), ist diese Forderung also gegeben.

$$\tilde{J}_n(x, y) = \tilde{J}_n(z^{1/2}\tilde{x}, z\tilde{y}) \quad (\text{D.16})$$

Benutzt man nun die Darstellung der gewöhnlichen Besselfunktionen und behält nur Terme bis zur Ordnung $\mathcal{O}(z^{n/2})$, kann man die generalisierten Besselfunktionen folgendermaßen approximieren:

n gerade:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \tilde{J}_n(z^{1/2}\tilde{x}, z\tilde{y}) &= \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ J_0(z^{1/2}\tilde{x}) J_{n/2}(z\tilde{y}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{n/2} J_{2k}(z^{1/2}\tilde{x}) J_{-k+n/2}(z\tilde{y}) \right\} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z\tilde{y}}{2} \right)^{n/2} \sum_{k=0}^{n/2} \frac{(\tilde{x}^2/2\tilde{y})^k}{(2k)! (n/2 - k)!} \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

n ungerade:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \tilde{J}_n(z^{1/2}\tilde{x}, z\tilde{y}) &= \sum_{k=1}^{(n+1)/2} J_{2k-1}(z^{1/2}\tilde{x}) J_{-k+(n+1)/2}(z\tilde{y}) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z\tilde{y}}{2} \right)^{n/2} \sum_{k=0}^{(n+1)/2} \frac{(\tilde{x}^2/2\tilde{y})^{k+1/2}}{(2k+1)! ((n-1)/2 - k)!} \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

Summanden mit $k > n/2$ geben Terme mit mindestens $\mathcal{O}(z^n)$ und werden vernachlässigt.

Die niedrigsten Besselfunktionen für den Grenzwert $z \rightarrow \infty$ lauten ²:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_0 &= 1 \\ \tilde{J}_1 &= \frac{1}{2}x \\ \tilde{J}_2 &= \frac{y}{2} \left(1 + \frac{x^2}{4y} \right) \\ \tilde{J}_3 &= \frac{xy}{4} \left(1 + \frac{x^2}{12y} \right) \\ \tilde{J}_{-1} &= -\frac{1}{2}x = -\tilde{J}_1 \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

²Für die Absorption eines Photons kommen in der Formel für das Endergebnis (Gl. 2.77) die gen. Besselfunktionen J_{-1} , J_0 , J_1 , J_2 sowie J_3 vor. Allgemein kommen für Photonordnung n die Besselfunktionen J_{n-2} , J_{n-1} , J_n , J_{n+1} sowie J_{n+2} vor

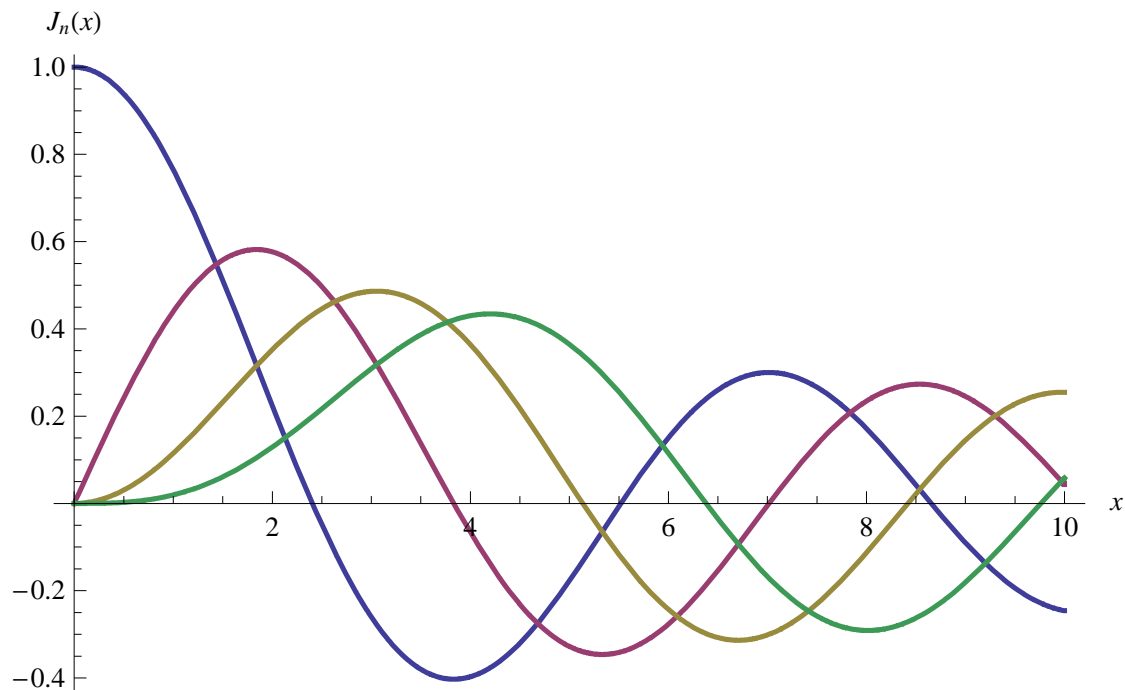


Abbildung D.1: Gewöhnliche Besselfunktionen $J_0(x)$ (blau), $J_1(x)$ (violett), $J_2(x)$ (gold) und $J_3(x)$ (grün) für Argumente $0 \leq x \leq 10$. Man sieht, dass für kleine Argumente ($x \lesssim 1$) $J_n(x) \gg J_{n+1}(x)$.

Für $z \ll 1$ gilt also $\tilde{J}_0 \gg \tilde{J}_1 \gg \tilde{J}_2 \gg \tilde{J}_3$.

Die generalisierten Besselfunktionen zweier Argumente $\tilde{J}_n(x, y)$ kommen typischerweise in Problemen mit linear polarisierten Laserfeldern vor.

Für Probleme elliptischer Polarisation gibt es zudem noch die generalisierte Besselfunktion dreier Argumente $\tilde{J}_n(x, y, z)$. Eine genauere Betrachtung soll an dieser Stelle nicht erfolgen [Dat90, Dat91].

D.1 Numerische Beispiele

Abbildung D.1 zeigt die gewöhnlichen Besselfunktionen $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$ und $J_3(x)$. Für kleine Argumente x gilt $J_n(x) \gg J_{n+1}(x)$, der Wert der Besselfunktion mit dem niedrigsten Grad n ist viel größer als der anderer Besselfunktionen.

Die generalisierten Besselfunktionen sind definiert als unendliche Summe über gewöhnliche Besselfunktionen. Numerisch muss die unendliche Summe durch geeignete Wahl einer oberen Grenze approximiert werden:

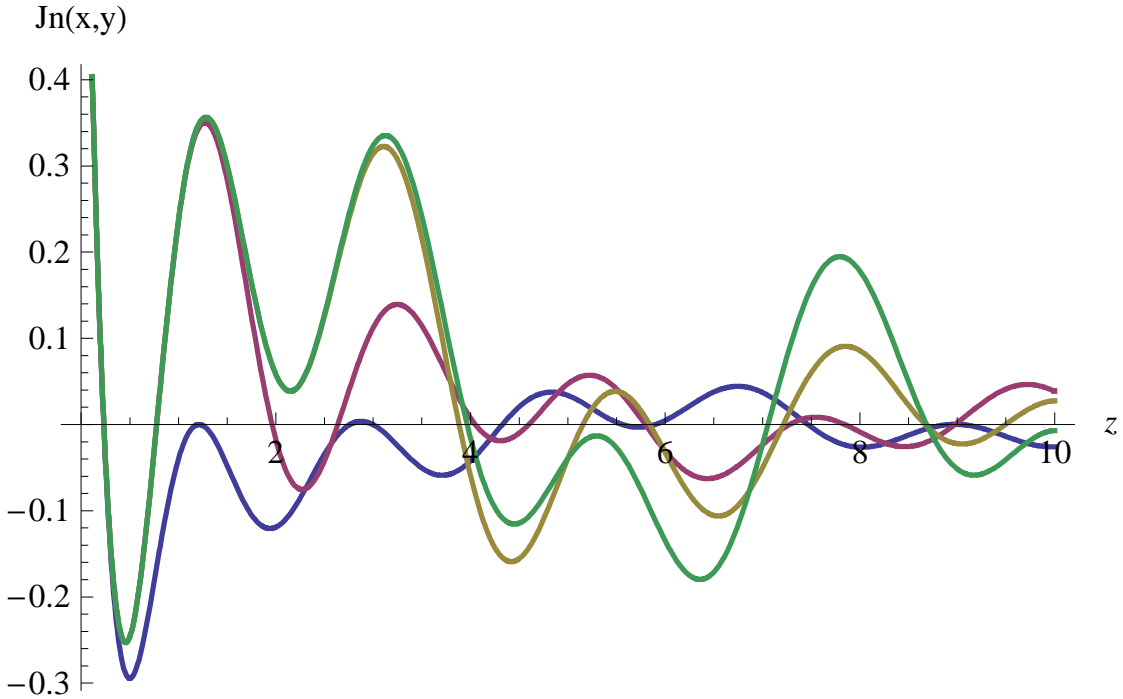


Abbildung D.2: Generalisierte Besselfunktionen \tilde{J}_0 für $0 \leq z \leq 10$ (hier $\tilde{x} = 5$, $\tilde{y} = -2$). Die verschiedenen Kurven repräsentieren verschiedene obere Grenzen K_{max} der Summe in Gl. (D.20). $K_{max} = 1$ (blau), $K_{max} = 2$ (violett), $K_{max} = 5$ (gold) sowie $K_{max} = 10$ (grün).

$$\tilde{J}_n(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{n-2m}(x) J_m(y) \approx \sum_{m=-K_{max}}^{K_{max}} J_{n-2m}(x) J_m(y) \quad (\text{D.20})$$

K_{max} ist hier der Wert, an der die unendliche Summe abgeschnitten wird. Abbildung D.2 zeigt den Verlauf der Funktion \tilde{J}_0 in Abhängigkeit von z für verschiedene K_{max} . Man sieht, dass zunächst die Kurve für $K_{max} = 1$ von den anderen abweicht, anschließend sukzessive $K_{max} = 2$, $K_{max} = 5$ sowie $K_{max} = 10$. Für $K_{max} \gtrsim 10$ sind keine Abweichungen im gewählten z -Bereich vorhanden. Für $z \lesssim 0.1$ sind alle Kurven (annähernd) gleich. Kurven für andere \tilde{J}_n sind prinzipiell ähnlich, so dass eine Approximation der unendlichen Summen in Gl. D.20 durch kleine K_{max} gerechtfertigt ist³.

Abbildung D.3 stellt die generalisierten Besselfunktionen \tilde{J}_n für verschiedene Ordnungen n in Abhängigkeit von z dar. Man kann erkennen, dass für $z \lesssim 0.05$

³In der vorliegenden Rechnung ist es bei Intensitätsparametern von $\xi \sim 10^{-4}$ ausreichend, ein K_{max} von 2 und für $\xi \sim 1$ ein K_{max} von 10 zu wählen

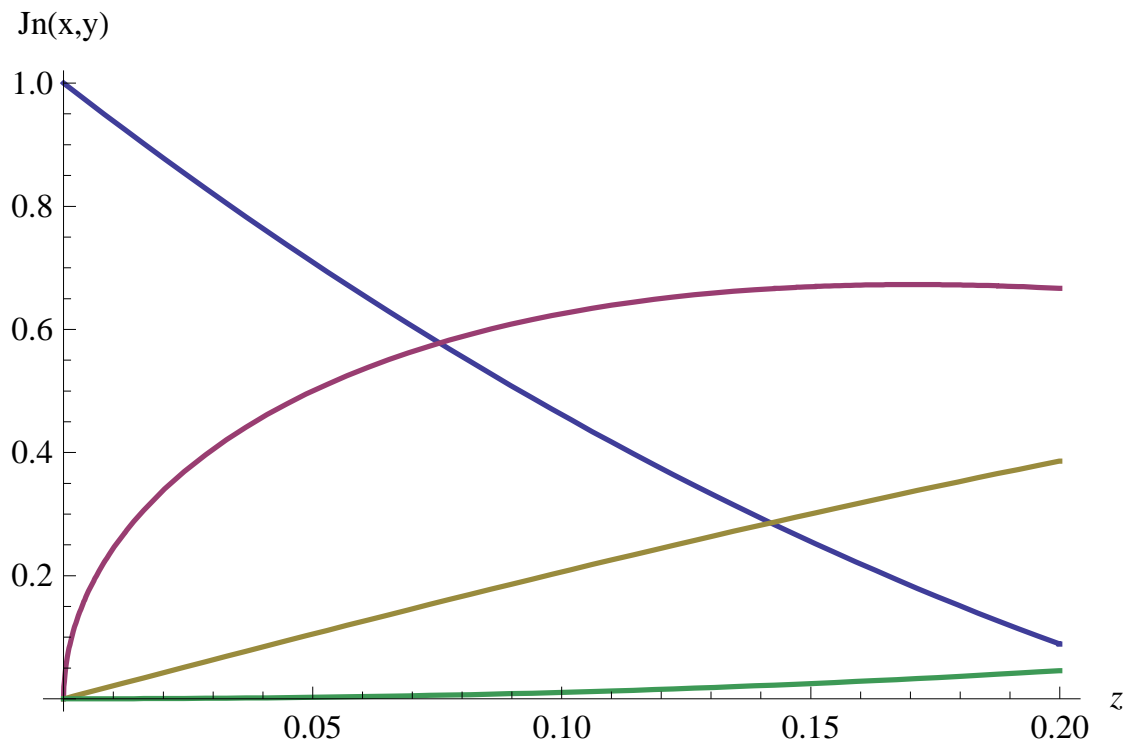


Abbildung D.3: Generalisierte Besselfunktionen \tilde{J}_n für verschiedene Argumente z . \tilde{J}_0 (blau), \tilde{J}_1 (violett), \tilde{J}_2 (gold) und \tilde{J}_3 (grün)

$\tilde{J}_0 \gg \tilde{J}_1 \gg \tilde{J}_2 \gg \tilde{J}_3$ gilt. Für $z \gtrsim 0.05$ ist keine allgemeine Aussage mehr über die Größenordnungen treffbar.

Literaturverzeichnis

- [Abr68] ABRAMOWITZ, Milton: *Handbook of mathematical functions*. New York : Dover Publ., 1968. – XIV, 1046 S. – ISBN 0-486-61272-4, 978-0-486-61272-0
- [Ack07] ACKERMANN, W.: Operation of a free-electron laser from the extreme ultraviolet to the water window. In: *Nature Photonics* 1 (2007), Nr. 6, S. 336–342. – ISSN 1749-4885
- [And33] ANDERSON, Carl D.: The Positive Electron. In: *Phys. Rev.* 43 (1933), Mar, Nr. 6, S. 491–494
- [AS97] AGGER, Carsten K. ; SØRENSEN, Allan H.: Pair creation with bound electron for photon impact on bare heavy nuclei. In: *Phys. Rev. A* 55 (1997), Jan, Nr. 1, S. 402–413
- [BBK⁺99] BAMBER, C. ; BOEGE, S. J. ; KOFFAS, T. ; KOTSEROGLOU, T. ; MELISSINOS, A. C. ; MEYERHOFER, D. D. ; REIS, D. A. ; RAGG, W. ; BULA, C. ; McDONALD, K. T. ; PREBYS, E. J. ; BURKE, D. L. ; FIELD, R. C. ; HORTON-SMITH, G. ; SPENCER, J. E. ; WALZ, D. ; BERRIDGE, S. C. ; BUGG, W. M. ; SHMAKOV, K. ; WEIDEMANN, A. W.: Studies of nonlinear QED in collisions of 46.6 GeV electrons with intense laser pulses. In: *Phys. Rev. D* 60 (1999), Oct, Nr. 9, S. 092004
- [BD64] BJORKEN, James D. ; DRELL, Sidney D.: *Relativistische Quantenmechanik*. Bibliogr. Inst., 1964 (BI-Hochschultaschenbücher ; 98/98a). – 312 S
- [BD67] BJORKEN, James D. ; DRELL, Sidney D.: *Relativistische Quantenfeldtheorie*. Bibliogr. Inst., 1967 (BI-Hochschultaschenbücher ; 101). – 409 S

- [Bec91] BECKER, W.: Quantum Electrodynamics in intense laser fields. In: *Laser and particle beams* 9 (1991), Nr. 2, S. 603–618. – ISSN 0263–0346
- [BFHS⁺97] BURKE, D. L. ; FIELD, R. C. ; HORTON-SMITH, G. ; SPENCER, J. E. ; WALZ, D. ; BERRIDGE, S. C. ; BUGG, W. M. ; SHMAKOV, K. ; WEIDEMANN, A. W. ; BULA, C. ; McDONALD, K. T. ; PREBYS, E. J. ; BAMBER, C. ; BOEGE, S. J. ; KOFFAS, T. ; KOTSEROGLU, T. ; MELISSINOS, A. C. ; MEYERHOFER, D. D. ; REIS, D. A. ; RAGG, W.: Positron Production in Multiphoton Light-by-Light Scattering. In: *Phys. Rev. Lett.* 79 (1997), Sep, Nr. 9, S. 1626–1629
- [BGF⁺93] BELKACEM, A. ; GOULD, Harvey ; FEINBERG, B. ; BOSSINGHAM, R. ; MEYERHOF, W. E.: Measurement of electron capture from electron-positron pair production in relativistic heavy ion collisions. In: *Phys. Rev. Lett.* 71 (1993), Sep, Nr. 10, S. 1514–1517
- [BGF⁺94] BELKACEM, A. ; GOULD, Harvey ; FEINBERG, B. ; BOSSINGHAM, R. ; MEYERHOF, W. E.: Projectile Energy and Atomic Number Dependence of Electron Capture from Pair Production in Relativistic Heavy Ion Collisions. In: *Phys. Rev. Lett.* 73 (1994), Oct, Nr. 18, S. 2432–2435
- [BI70] BREZIN, E. ; ITZYKSON, C.: Pair production in vacuum by an alternating field. In: *Physical review. D, Particles and fields* 2 (1970), Nr. 7, S. 1191–. – ISSN 0556–2821
- [BLP91] BERESTECKIJ, Vladimir B. ; LIFSIC, Evgenij M. ; PITAEVSKIJ, Lev P.: *Quantenelektrodynamik*. [Deutsch], 1991 (Lehrbuch der theoretischen Physik / L. D. Landau ; E. M. Lifschitz ; 4). – XV, 614 S. – ISBN 3–05–500068–4, 3–8171–1329–3, 978–3–8171–1329–3, 978–3–05–500068–3
- [Bul06] BULANOV, S.: Electron-positron pair production by electromagnetic pulses. In: *Journal of experimental and theoretical physics* 102 (2006), Nr. 1, S. 9–23. – ISSN 1063–7761
- [Bä07] BÄRWOLFF, Günter: *Numerik für Ingenieure, Physiker und Informatiker*. München ; Heidelberg : Elsevier, Spektrum Akademischer Verlag, 2007. – VIII, 287 S. – ISBN 3–8274–1689–2, 978–3–8274–1689–6
- [Dat90] DATTOLI, G.: Theory of generalized Bessel-functions. In: *Il Nuovo cimento. B* 105 (1990), Nr. 3, S. 327–348. – ISSN 0369–3554

- [Dat91] DATTOLI, G.: Theory of Generalized Bessel-functions II. In: *Il Nuovo cimento. B* 106 (1991), Nr. 1, S. 21–51. – ISSN 0369–3554
- [DES02] MATERLIK, G. (Hrsg.) ; TSCHENTSCHER, Th. (Hrsg.): TESLA XFEL, Technical Design Report, Part V: The X-Ray Free Electron Laser. 2002. – Forschungsbericht
- [Dir30] DIRAC, P.: A theory of electrons and protons. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character* 126 (1930), Nr. 801, S. 360–365. – ISSN 0950–1207
- [EM95] EICHLER, Jörg ; MEYERHOF, Walter E.: *Relativistic atomic collisions*. London : Academic Press, 1995. – 413 S. – ISBN 0–12–233675–5, 978–0–12–233675–1
- [FB04] FAISAL, F. H. M. ; BHATTACHARYYA, S.: Spin Asymmetry in an Intense-Field Ionization Process. In: *Physical Review Letters* 93 (2004), Nr. 5, S. 053002
- [Gav61] GAVRILA, Mihai: Relativistic *L*-Shell Photoeffect. In: *Phys. Rev.* 124 (1961), Nov, Nr. 4, S. 1132–1141
- [GM31] GÖPPERT-MAYER, M.: Über Elementarakte mit zwei Quantensprüngen. In: *Annalen der Physik* 401 (1931), S. 273–294
- [GR] GRADSTEJN, Izrail' S. ; RYZIK, Iosif M.: *Table of integrals, series, and products*. New York [u.a.] : Acad. Press
- [GR03] GREINER, Walter ; REINHARDT, Joachim: *Quantum electrodynamics*. Berlin [u.a.] : Springer, 2003. – XVI, 475 S. – ISBN 3–540–44029–1, 978–3–540–44029–1
- [GSL] *Gnu scientific library*. – <http://www.gnu.org/software/gsl>
- [HK99] HU, S. X. ; KEITEL, C. H.: Spin Signatures in Intense Laser-Ion Interaction. In: *Phys. Rev. Lett.* 83 (1999), Dec, Nr. 23, S. 4709–4712
- [JT78] JAIN, Manoj ; TZOAR, Narkis: Compton scattering in the presence of coherent electromagnetic radiation. In: *Phys. Rev. A* 18 (1978), Aug, Nr. 2, S. 538–545

- [KABa08] KELLERBAUER, A. ; AMORETTI, M. ; BELOV, A.S. ; ET. AL.: Proposed antimatter gravity measurement with an antihydrogen beam. In: *Nuclear instruments and methods in physics research. Section B, Beam interactions with materials and atoms* 266 (2008), Nr. 3, S. 351–. – ISSN 0168–583X
- [KKE06] KAMINSKI, J. Z. ; KRAJEWSKA, K. ; EHLOTZKY, F.: Monte Carlo analysis of electron-positron pair creation by powerful laser-ion impact. In: *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)* 74 (2006), Nr. 3, S. 033402
- [Kou98] KOUVELIOTOU, C.: An x-ray pulsar with a superstrong magnetic field in the soft gamma-ray repeater SGR1806-20. In: *Nature* 393 (1998), Nr. 6682, S. 235–237. – ISSN 0028–0836
- [LJK] LÖTSTEDT, E. ; JENTSCHURA, U. ; KEITEL, C. H.: In: *eingereicht*
- [Mat05] MATVEEV, V.: Inelastic processes in the interaction of an atom with an ultrashort electromagnetic pulse. In: *Journal of experimental and theoretical physics* 100 (2005), Nr. 6, S. 1043–1049. – ISSN 1063–7761
- [MDK08] MÜLLER, C. ; DENEKE, C. ; KEITEL, C. H.: Muon pair creation by two x-ray laser photons in the field of an atomic nucleus. In: *arXiv:0803.3512 [atom-ph]* (2008)
- [Mit75] MITTER, H.: Quantum Electrodynamics in Laser Fields. In: *Acta Phys. Austriaca* 14 (1975), S. 397–468. – Electromagnetic interactions and field theory proceedings of the 14th international university week for nuclear physics
- [Mit82] MITTLEMAN, Marvin H.: *Introduction to the theory of laser-atom interactions*. New York [u.a.] : Plenum Pr., 1982. – 198 S. – ISBN 0–306–41049–4, 978–0–306–41049–9
- [MJF⁺07] MOSHAMMER, R. ; JIANG, Y. H. ; FOUCAR, L. ; RUDENKO, A. ; ERGLER, Th. ; SCHROTER, C. D. ; LUDEMANN, S. ; ZROST, K. ; FISCHER, D. ; TITZE, J. ; JAHNKE, T. ; SCHOFFLER, M. ; WEBER, T. ; DORNER, R. ; ZOUROS, T. J. M. ; DORN, A. ; FERGER, T. ; KUHNEL, K. U. ; DUSTERER, S. ; TREUSCH, R. ; RADCLIFFE, P. ; PLONJES, E. ; ULLRICH, J.: Few-Photon Multiple Ionization of Ne and Ar by Strong Free-Electron-Laser Pulses. In: *Physical Review Letters* 98 (2007), Nr. 20, S. 203001
- [MK] MAYER-KUCKUK, T.: *Kernphysik*. Stuttgart : Teubner

- [Mül03] MÜLLER, Carsten: *Nichtlineare Paarerzeugung beim Stoß eines relativistischen Kerns mit einem intensiven Laserstrahl*, Justus-Liebig-Universität, Gießen, Diss., 2003
- [MVG03a] MÜLLER, C. ; VOITKIV, A. B. ; GRÜN, N.: Differential rates for multiphoton pair production by an ultrarelativistic nucleus colliding with an intense laser beam. In: *Phys. Rev. A* 67 (2003), Jun, Nr. 6, S. 063407
- [MVG03b] MÜLLER, C. ; VOITKIV, A. B. ; GRÜN, N.: Multiphoton pair production by a highly charged ion in an intense laser field. In: *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms* 205 (2003), May, S. 306–309. – 11th International Conference on the Physics of Highly Charged Ions
- [MVG03c] MÜLLER, C. ; VOITKIV, A. B. ; GRÜN, N.: Nonlinear Bound-Free Pair Creation in the Strong Electromagnetic Fields of a Heavy Nucleus and an Intense X-Ray Laser. In: *Phys. Rev. Lett.* 91 (2003), Nov, Nr. 22, S. 223601
- [MVG04] MÜLLER, C. ; VOITKIV, A. B. ; GRÜN, N.: Few-photon electron-positron pair creation in the collision of a relativistic nucleus and an intense x-ray laser beam. In: *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)* 70 (2004), Nr. 2, S. 023412
- [NR64] NIKISHOV, A. ; RITUS, V.: Quantum processes in the field of a plane electromagnetic wave and in a constant field 1. In: *Soviet physics, JETP* 19 (1964), Nr. 2, S. 529–541. – ISSN 0038–5646
- [PDKUK83] PIESSENS, R. ; DE DONCKER-KAPENGA, E. ; UBERHUBER, C.W. ; KAHANER, D.K.: *Quadpack: A subroutine package for automatic integration*. Springer Verlag, 1983
- [Pom40] POMERANCHUK, I.: Maximum energy which the primary electrons of cosmic rays can have on the earth's surface due to radiation in the earth's magnetic field. In: *Journal of Physics (USSR)* 2 (1940), Nr. 65. – ISSN 0368
- [Pov06] POVH, Bogdan: *Teilchen und Kerne*. Berlin ; Heidelberg [u.a.] : Springer, 2006. – XII, 417 S. – ISBN 3–540–36685–7, 978–3–540–36685–0
- [Pra60a] PRATT, R. H.: Atomic Photoelectric Effect at High Energies. In: *Phys. Rev.* 117 (1960), Feb, Nr. 4, S. 1017–1028

- [Pra60b] PRATT, R. H.: Photoeffect from the L Shell. In: *Phys. Rev.* 119 (1960), Sep, Nr. 5, S. 1619–1626
- [PRT73] PRATT, R. H. ; RON, A. ; TSENG, H. K.: Atomic Photoelectric Effect Above 10 keV. In: *Rev. Mod. Phys.* 45 (1973), Apr, Nr. 2, S. 273–325
- [PS95] PESKIN, Michael E. ; SCHROEDER, Daniel V.: *An introduction to quantum field theory*. Reading, Ma [u.a.] : Addison-Wesley, 1995. – XXII, 842 S. – ISBN 0–201–50397–2, 978–0–201–50397–5
- [Rei80] REISS, H. R.: Effect of an intense electromagnetic field on a weakly bound system. In: *Phys. Rev. A* 22 (1980), Nov, Nr. 5, S. 1786–1813
- [Rei90] REISS, H.R.: Relativistic Strong-field photoionization. In: *Journal of the optical society of America B-optical physics* 7 (1990), Nr. 4, S. 574–586
- [Rei92] REISS, H.R.: Theoretical methods in Quantum optics - S-matrix and Keldysh techniques for Strong-field processes. In: *Progress in Quantum electronics* 16 (1992), Nr. 1, S. 1–71
- [Rit72] RITUS, V.: Vacuum polarization correction to elastic electron and muon scattering in an intense field and pair electroproduction and muoproduction. In: *Nuclear physics. B* B-44 (1972), Nr. 1, S. 236–. – ISSN 0550–3213
- [RMM⁺] RUF, M. ; MOCKEN, G. R. ; MÜLLER, C. ; HATSAGORTSYAN, K. Z. ; KEITEL, C. H.: In: *in Vorbereitung*
- [Sak87] SAKURAI, Jun J.: *Advanced quantum mechanics*. Redwood City, Calif. [u.a.] : Addison-Wesley, 1987. – XII, 336 S. – ISBN 0–201–06710–2, 978–0–201–06710–1
- [Sau31] SAUTER, F.: The atomical photo effect in the K-Shell according to the relative wave mechanics of Dirac. In: *Annalen der Physik* 11 (1931), Nr. 4, S. 454–488. – ISSN 0003–3804
- [SBF⁺07] SOROKIN, A. A. ; BOBASHEV, S. V. ; FEIGL, T. ; TIEDTKE, K. ; WABNITZ, H. ; RICHTER, M.: Photoelectric Effect at Ultrahigh Intensities. In: *Physical Review Letters* 99 (2007), Nr. 21, S. 213002
- [Sch51] SCHWINGER, Julian: On Gauge Invariance and Vacuum Polarization. In: *Phys. Rev.* 82 (1951), Jun, Nr. 5, S. 664–679

- [SMS⁺07] SHAHBAZ, A. ; MÜLLER, C. ; STAUDT, A. ; BÜRVENICH, T. J. ; KEITEL, C. H.: Nuclear Signatures in High-Order Harmonic Generation from Laser-Driven Muonic Atoms. In: *Physical Review Letters* 98 (2007), Nr. 26, S. 263901
- [SSJ00] SALDIN, Evgenij L. ; SCHNEIDMILLER, Evgenij A. ; JURKOV, Michail V.: *The physics of free electron lasers*. Berlin ; Heidelberg [u.a.] : Springer, 2000. – X, 464 S. – ISBN 3-540-66266-9, 978-3-540-66266-2
- [Vol35] VOLKOV, D.: Exact solution to Dirac's equation for a planar wave of known frequency. In: *Doklady Akademii nauk SSSR* 6 (1935), S. 605-610. – ISSN 0002-3264

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit nutzen, meinen Dank für die Unterstützung dieser Arbeit auszusprechen:

Danke.

Zunächst einmal vielen Dank an Christoph Keitel für die Aufnahme in die Arbeitsgruppe und für das Ermöglichen der interessanten Arbeit.

An Carsten Müller für die hervorragende Betreuung, stets präsent, um Fragen zu beantworten und zu diskutieren.

An Vera und Peter, dafür, dass sie da sind und jederzeit unterstützend mitwirken.

An Erik für interessante Diskussionen und Atif für die vielen kleinen Fragen.

An die ganze Gruppe, die mich sympathisch aufnahm und an deren Mitglieder, mit denen man viele interessante Themen innerhalb und außerhalb der Physik erörtern konnte.

An die Lektoren Benedikt, Moritz und Lena.

Natürlich auch einen besonderen Dank an meine Eltern, Geschwister, Freunde und an Lena - dafür, dass sie da sind.