

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Umrechnung von Strahlungsintensitäten
in Temperatur und Elektronendichte
bei Wasserstoffplasmen

Werner Lünow

IPP/6/25

August 1964

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

1107

An W.
und Inhaltsverzeichnis

die

wie

er

er

v.

2.

	Seite
Allgemeine Bemerkungen	1
Ausgangsgleichungen	2
Zur Lösbarkeit des Problems	4
Rechenverfahren	6
Interpolation	11
Literatur	13

Allgemeine Bemerkungen

An Wasserstoffplasmen gemessene Strahlungsintensitäten (Zeit und Ort sind vorgegeben) sollen in Temperatur und Elektronendichte umgerechnet werden. Durch das hier angegebene Verfahren wird in erster Linie die Dauer der maschinellen Auswertung entsprechender Meßdaten reduziert. Es ist auf die einschlägigen Gleichungen des Laborberichtes - TABELLEN ZUR AUSWERTUNG VON INTENSITÄTSMESSUNGEN AN WASSERSTOFFPLASMEN, A. Eberhagen / W. Lünow, IPP/1/23, IPP/6/20, Juni 1964 - zurückgegriffen.

Ausgangsgleichungen

Die Strahlungsintensität des Gesamtkontinuums eines Wasserstoffplasmas läßt sich als Funktion der Temperatur T , der Elektronendichte N_e und der Wellenlänge λ darstellen

$$I_K = I_K(T; N_e; \lambda) \quad 1)$$

Die Wellenlänge λ fungiert als Parameter.

Die Strahlungsintensität einer Linie des Wasserstoffplasmas ist als Funktion der Temperatur T und der Elektronendichte N_e darstellbar

$$I_L = I_L(T; N_e) \quad 2)$$

Dabei sind die Gleichungen 1) und 2) folgendermaßen strukturiert

$$I_K = N_e^2 e^{-\frac{\Delta\chi_i}{kT}} A(B + CN_e) \quad 3)$$

$$I_L = N_e^2 e^{-\frac{\Delta\chi_i}{kT}} D \quad 4)$$

mit

$$A = \frac{a}{\lambda^2} e^{-\frac{b}{\lambda kT}} \quad 5)$$

$$B = \frac{c}{\sqrt{kT}} \left[\varepsilon_{ff} e^{\frac{d}{kT}} + \frac{f}{kT} \sum_{n=n^*}^5 \frac{\varepsilon_{fb}}{n^3} e^{\frac{g}{n^2 kT}} \right] \quad 6)$$

$$C = \frac{h}{\lambda^3 (kT)^3} \sigma_{H^-} e^{\frac{i}{kT}} \quad 7)$$

$$D = \frac{j}{(kT)^{3/2}} e^{\frac{m}{kT}} \quad 8)$$

$\Delta\chi_i(T;N_e)$ - Erniedrigung der Ionisierungsarbeit

k - Planck-Boltzmann-Konstante

$\epsilon_{ff}(T;\lambda)$ - Gaunt-Faktor (frei/frei)

$\epsilon_{fb}(\lambda;n)$ - Gaunt-Faktor (frei/gebunden)

$\sigma_{H^-}(T;\lambda)$ - Gesamtabsorptionsquerschnitt

$(a;b;c;d;f;g;h;i;j;m)$ - Konstanten

Die Funktionen A, B, C und D sind, vom Parameter λ abgesehen, reine Temperaturfunktionen.

Zur Lösbarkeit des Problems

Liegt eine gemessene Strahlungsintensität I_K oder I_L vor, so folgt sinngemäß aus Gleichung 1) oder 2)

$$I(T;N_e) = \text{const.} \quad 9)$$

Einer Intensität I sind demnach im allgemeinen unendlich viele Wertepaare $(T;N_e)$ zugeordnet; d.h. die Beziehung 9) ist für sich vom hier eingenommenen Standpunkt aus nicht eindeutig lösbar. Letztlich soll das "gerade physikalisch gültige" Wertepaar $(T;N_e)$ gefunden werden.

Generell ist eine Einschränkung der möglichen Lösungen $(T;N_e)$ dadurch zu erreichen, daß nicht nur eine, sondern mehrere Intensitätsmessungen zur Ermittlung von $(T;N_e)$ dienen. Die Messungen sind am physikalisch gleichen Plasma mit verschiedenen Meßparametern durchzuführen.

Es bleibt von vornherein offen, wie viele Intensitäten im gegebenen Fall tatsächlich benötigt werden, um die Lösung eindeutig zu machen. Das hängt von der Verteilung der einzelnen konstanten Intensitäten im Rechenbereich der $T-N_e$ -Ebene ab. Rein analytisch ist diese Verteilung nicht ohne weiteres abzuschätzen, da die ϵ_{ff} , ϵ_{fb} und σ_H -komplizierte Abhängigkeiten von T , λ und n besitzen und außerdem in den Gleichungen 1), 2), 3), 4) und 6) Unstetigkeiten auftreten, die auf physikalisch bedingten Änderungen der genannten Beziehungen im Rechenbereich der $T-N_e$ -Ebene beruhen.

Die Zahl der Intensitätsmessungen ist von der Praxis her ohnehin beschränkt. Dem vorliegenden Sachverhalt kommt deshalb nur insofern Bedeutung zu, als prinzipiell im Rechenbereich der $T-N_e$ -Ebene aus einer bestimmten Anzahl von Intensitäten mehrere mathematisch richtige Wertepaare $(T;N_e)$ folgen können.

Die physikalisch sinnvolle letzte Auswahl aus verschiedenen

für einen Zeit- und Ortspunkt eventuell sich ergebenden mathematisch richtigen Wertepaaren $(T;N_e)$ kann lediglich durch Betrachten und Abschätzen der Gesamtheit aller T - und N_e -Werte an sämtlichen Ortspunkten (zu fester Zeit), sowie durch Hinzuziehen von außerhalb dieser Betrachtung liegenden Gesichtspunkten getroffen werden.

Die geübte Praxis in der Auswertung von zur Zeit anfallenden Meßdaten und damit das folgende Rechenverfahren basieren auf drei Intensitätsmessungen. Die Wahrscheinlichkeit, für jede Zeitpunkt-Ortspunkt-Kombination nur ein Wertepaar $(T;N_e)$ zu finden, wird dann bereits relativ groß, da die drei Kurven konstanter Intensität bloß in besonders ungünstigen Fällen in mehr als einem Punkt der $T-N_e$ -Ebene übereinstimmen dürften.

Hier soll der Einfluß von Meßfehlern auf die Ergebnisse der Werteumrechnung nicht unerwähnt bleiben. Sie können das Bild so weit verfälschen, daß im Rechenbereich der $T-N_e$ -Ebene überhaupt keine Wertepaare $(T;N_e)$ mehr gefunden werden, obwohl deren Existenz mit Sicherheit anzunehmen ist.

Rechenverfahren

Der Rechenbereich der T-N_e-Ebene ist wegen der numerischen und deshalb zwangsläufig diskreten Behandlung des Problems mit einer Matrix von zu jeweils einem Wertepaar (T;N_e) gehörenden Intensitätswerten überdeckt.

Zunächst läge es nahe, die einzelnen gemessenen Intensitäten I mit der gesamten Matrix zu vergleichen und Übereinstimmungen einmal in den Meß- und Matrixintensitäten, sodann in den für die Einzelintensitäten I gefundenen Wertepaaren (T;N_e) aufzusuchen. Ein derartiges Vorgehen hat zwei wesentliche Nachteile. Die Zahl der T-Vergleichswerte sei m, die der N_e-Vergleichswerte n. Als Mindestzahl von Vergleichsschritten folgt

$$ZV = mn + m \quad 10)$$

d.h. die gesamte Matrix muß wenigstens einmal durchlaufen werden, was bei genügend vielen Zeit- und Ortspunkten relativ große Rechenzeiten erfordern wird. Zudem ist die Abfrage der Übereinstimmung von Vergleichswerten bzw. Vergleichswertepaaren und die Interpolation innerhalb der Matrix unverhältnismäßig kompliziert. Aus diesen Gründen wurde ein anderer Weg gewählt.

Die drei gemessenen Intensitäten seien der Reihe nach durchnumeriert - I₁, I₂, I₃. Im Weiteren soll I₁ nur eine Intensität des Gesamtkontinuums sein, ebenso I₃. I₂ hingegen kann sowohl eine Linienintensität (H-Alpha;H-Beta;H-Gamma;H-Delta) wie auch die Intensität des Gesamtkontinuums sein. Als Quotient aus I₁ und I₂ ergibt sich

$$QK = \frac{A_1(B_1 + C_1 N_e)}{A_2(B_2 + C_2 N_e)} \quad 11)$$

wenn $I_2 = I_2(\text{Gesamtkontinuum})$ und

$$QL = \frac{A_1(B_1 + C_1 N_e)}{D} \quad 12)$$

wenn $I_2 = I_2(\text{Linie})$.

Damit folgt aus 11)

$$N_e = \frac{A_2 B_2^{QK} - A_1 B_1}{A_1 C_1 - A_2 C_2^{QK}} \quad 13)$$

und aus 12)

$$N_e = \frac{D \cdot QL - A_1 B_1}{A_1 C_1} \quad 14)$$

Die rechten Seiten von 13) und 14) sind reine Temperaturfunktionen.

Mit 3) wird

$$T = F(T; N_e) = \frac{T}{I_3} N_e^2 e^{-\frac{\Delta\chi_i}{kT}} A_3 (B_3 + C_3 N_e) \quad 15)$$

Gleichung 15) dient nunmehr zur Ermittlung der möglichen Temperaturwerte. Dies geschieht in der Weise, daß im Rechenbereich der T-Koordinate Schnittpunkte der Funktionen

$$T = T \quad 16) \quad \text{und}$$

$$T = F(T;N_e) \quad 17)$$

gesucht werden.

Zur Bestimmung der zu den Such- und Schnittpunktstemperaturen gehörenden N_e wird Gleichung 13) bzw. 14) benutzt.

Es ergibt sich eine beträchtliche Reduzierung der Rechenzeit, da jetzt für jede Zeitpunkt-Ortspunkt-Kombination nur noch m Vergleichsschritte notwendig sind.

In die Beziehung 13) bzw. 14) gehen die Intensitäten I_1 und I_2 nicht direkt ein, sondern in Form eines Quotienten. Von den gewonnenen Wertepaaren $(T;N_e)$ sind deshalb nur solche brauchbar, bei denen außer dem Quotienten noch die Einzelintensitäten I_1 und I_2 mit dem entsprechenden $(T;N_e)$ korrespondieren. Zur Nachprüfung der Korrespondenz genügt die Berechnung von I_1 mit $(T;N_e)$ - Gleichung 3) - und der Vergleich von

$$I_1(\text{berechnet}) \stackrel{?}{=} I_1(\text{gemessen})$$

Bei Übereinstimmung muß zwangsläufig auch

$$I_2(\text{berechnet}) = I_2(\text{gemessen})$$

gelten.

Für höhere Temperaturen ($kT > 1,5$ eV) standen in der bisherigen Rechnung keine σ_H -Werte zur Verfügung. Zudem wird ab $kT = 1$ eV bei Abschätzung der Größen B und CN_e die Größe CN_e allmählich immer kleiner gegen B . Das folgt im wesentlichen aus den in B und CN_e enthaltenen Faktoren

$$\frac{1}{kT^{1/2}} (B) \longleftrightarrow \frac{1}{kT^{6/2}} (CN_e)$$

Aus dem Grund kann bei höheren Temperaturen schließlich CN_e gegen B vernachlässigt werden. Damit variiert sich dann auch das Rechenverfahren.

Gleichung 11) geht über in

$$QK = \frac{A_1 B_1}{A_2 B_2} \quad 18)$$

Gleichung 12) in

$$QL = \frac{A_1 B_1}{D} \quad 19)$$

oder entsprechend

$$T = G(T) = \frac{T}{QK} \frac{A_1 B_1}{A_2 B_2} \quad 20) \quad \text{und}$$

$$T = H(T) = \frac{T}{QL} \frac{A_1 B_1}{D} \quad 21)$$

Jetzt dient Gleichung 20) bzw. 21) zur Ermittlung der möglichen Temperaturwerte, und zwar wiederum durch Aufsuchen von Schnittpunkten im Rechenbereich der T-Koordinate der Funktionen

$$T = T \quad 22) \quad \text{und}$$

$$T = G(T) \quad 23) \quad \text{bzw.}$$

$$T = H(T) \quad 24)$$

Mit Hilfe der Beziehung

$$I_3 = N_e^2 e^{-\frac{\Delta\chi_i}{kT}} A_3 B_3 \quad 25) \quad \text{oder}$$

$$N_e = K(T; N_e) = \frac{I_3}{N_e A_3 B_3} e^{\frac{\Delta\chi_i}{kT}} \quad 26)$$

ergeben sich hier die zu den Schnittpunktstemperaturen gehörenden N_e -Werte. Dies geschieht ebenfalls durch Aufsuchen von Schnittpunkten im Rechenbereich der N_e -Koordinate der Funktionen

$$N_e = N_e \quad 27) \quad \text{und}$$

$$N_e = K(T; N_e) \quad 28)$$

Allerdings sind dabei im ungünstigsten Fall für jede Zeitpunkt-Ortspunkt-Kombination $(m + n)$ Vergleichsschritte erforderlich.

Zur Nachprüfung der Korrespondenz von I_1 und I_2 mit dem entsprechenden $(T; N_e)$ beim variierten Rechenverfahren behält das diesbezüglich schon Gesagte seine Gültigkeit.

Es ist zu bemerken, daß die Beziehungen 13), 14) und 28) bei vorgegebenen Temperaturen T eindeutige Lösungen in den N_e liefern müssen, da sämtliche in ihnen auftretenden Wurzeln von der Physik her positiv zu nehmen sind.

Interpolation

Es seien zwei Funktionen

$$X_1 = X \quad 29) \quad \text{und}$$

$$X_2 = Y(X) \quad 30)$$

gegeben.

Ihre Schnittpunkte im Rechenbereich der X-Koordinate sind dadurch zu finden, daß zwischen zwei jeweils aufeinanderfolgenden X_1^n ; X_1^{n+1} und X_2^n ; X_2^{n+1} die Differenzen

$$\Delta X^n = X_2^n - X_1^n \quad 31) \quad \text{und}$$

$$\Delta X^{n+1} = X_2^{n+1} - X_1^{n+1} \quad 32)$$

gebildet werden. Bleibt das Produkt

$$P = \Delta X^n \cdot \Delta X^{n+1} \quad 33)$$

absolut größer als Null und nimmt es zudem ein negatives Vorzeichen an, dann liegt zwischen den Werten X^n und X^{n+1} ein Schnittpunkt der Funktionen 29) und 30).

Der für den Schnittpunkt gültige X-Wert ist durch Interpolation näherungsweise zu berechnen, sobald ein genügend kleiner Abstand zweier benachbarter X-Werte und damit ein fast linearer Verlauf von 30) im Intervall $(X^n; X^{n+1})$ vorausgesetzt wird.

In Form von Geradengleichungen wird

$$X_1 = X \quad 34)$$

$$X_2 = X_2^n + \operatorname{tg}\varnothing \cdot (X - X_1^n) \quad 35)$$

mit

$$\operatorname{tg}\varnothing = \frac{X_2^{n+1} - X_2^n}{X_1^{n+1} - X_1^n} \quad 36)$$

Aus der Bedingung

$$X_2 = X_1 \quad 37)$$

folgt schließlich als Interpolationsformel

$$X = \frac{X_2^n - \operatorname{tg}\varnothing \cdot X_1^n}{1 - \operatorname{tg}\varnothing} \quad 38)$$

Literatur

- 1) H. Griem, PLASMA SPECTROSCOPY, Mc Graw-Hill, 1964
- 2) W.J. Karzas, R. Latter, Astrophys. J. Suppl. 6,
No. 55, 167, 1961
- 3) A. Eberhagen, W. Lünow, TABELLEN ZUR AUSWERTUNG VON
INTENSITÄTSMESSUNGEN AN WASSERSTOFFPLASMEN, IPP/1/23,
IPP/6/20, Juni 1964 (Laborbericht / Institut für
Plasmaphysik, Garching)