

Stabilitätsverhalten kollektiver Elektronen-
Ionen Dipol-Schwingungen im Elektronenring-
Beschleuniger bei endlichen Feldindizes, in
Abhängigkeit vom azimuthalen Magnetfeld

W. Dommaschk

IPP 0/19

Dezember 1973

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK GARCHING BEI MÜNCHEN

Stabilitätsverhalten kollektiver Elektronen-
Ionen Dipol-Schwingungen im Elektronenring-
Beschleuniger bei endlichen Feldindices, in
Abhängigkeit vom azimuthalen Magnetfeld

W. Dommaschk

IPP 0/19

Dezember 1973

Abstract

The instability of collective electron-ion dipole oscillations is operationally investigated. The treatment of the corresponding dispersion relation, which up to now has been given in a restricted parameter region, is extended for even finite field indices and finite azimuthal magnetic fields. Without an azimuthal field the dispersion relation shows instability at the end of the compression cycle in a limited region of the magnetic field index. It is shown, that instability can be shifted away from experimentally relevant parameter regions by a finite azimuthal magnetic field.

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

Stabilitätsverhalten kollektiver Elektronen-Ionen Dipol-Schwingungen im Elektronenring-Beschleuniger bei endlichen Feldindizes, in Abhängigkeit vom azimutalen Magnetfeld

(Stability behavior of collective electron-ion dipole oscillations in the electron ring accelerator with finite field indices, as a function of the azimuthal magnetic field)

Abstract

The instability of collective electron-ion dipole oscillations is computationally investigated. The treatment of the corresponding dispersion equation, which up to now has been given in a restricted parameter range, is extended for both finite field indices and finite azimuthal magnetic fields. Without an azimuthal field the dispersion equation yields an instability at the end of the compression cycle in a limited region of the magnetic field index. As is shown, this instability can be shifted away from experimentally relevant parameter regions by a finite azimuthal magnetic field.

Inhaltsübersicht:

Seite

1. Einleitung	1
2. Bewegungsgleichungen und Dispersionsrelation	3
3. Radiale Dipol-Instabilität ohne Azimutalfeld	6
3.1 Auswertung der Dispersionsgleichung	6
3.2 Anschauliche Deutung	8
3.3 Einfluß von Störeffekten	10
4. Stabilisierung durch das azimutale Magnetfeld	13
5. Literatur	15
6. Anhang	17

Abstract

The instability of collective electron-ion dipole oscillations is computationally investigated. The treatment of the corresponding dispersion equation, which up to now has been given in a restricted parameter range, is extended for both finite field in-dices and finite azimuthal magnetic fields. Without an azimuthal field the dispersion equation yields an instability at the end of the compression cycle in a limited region of the magnetic field index. As is shown, this instability can be shifted away from experimentally relevant parameter regions by a finite azimuthal magnetic field.

1. Einleitung

Die Untersuchung der transversalen kollektiven Elektronen-Ionen-Schwingungen geht von folgender Modellvorstellung aus. Gegeben sei ein magnetisches Spiegelfeld mit eventuell überlagertem azimuthalem Magnetfeld. Letzteres wird im Experiment durch einen auf die Feldachse zentrierten stromführenden Metallstab erzeugt. In diesem Feld wird zunächst ein Ringgleichgewicht vorausgesetzt, das aus azimuthal mit relativistischer Geschwindigkeit umlaufenden Elektronen und z.B. durch Gasionisation im Ring erzeugten langsamen Ionen besteht. Langsame Elektronen bleiben nicht im Ring, da beim Elektronenring-Beschleuniger die Zahl positiver Ladungen stets kleiner ist als die Zahl relativistischer Elektronen. Im Gleichgewichtsfall sind die Ladungen gleichmäßig um den mittleren großen Ringumfang, den Sollkreis, verteilt. Die Lage des negativen und positiven Ladungsschwerpunktes in einer Meridianhalbebene des Spiegelfelds, gebildet mit den der Ebene momentan benachbarten Ladungen ist dann vom Azimut unabhängig. Treten nun infolge einer kollektiven Störung kleine eventuell vom Azimut abhängige zum Sollkreis transversale Versetzungen der bisherigen beiden Schwerpunktslagen voneinander und vom Sollkreis auf, so erscheinen in erster Näherung in diesen Versetzungen lineare rücktreibende Zusatzkräfte auf die Einzelladungen. Sind diese Zusatzkräfte außer von den Versetzungen nicht merklich von anderen Parametern abhängig, wie z.B. von der Einzelteilchenenergie, so können sie zu effektiven den Versetzungen proportionalen Kräften auf die beiden Ladungsschwerpunkte zusammengefaßt werden. Dies wird hier vorausgesetzt und führt dann zu einem System linearer Differentialgleichungen für die Schwerpunktsversetzungen. Die Behandlung dieses Gleichungssystems erfolgt in bekannter Weise. Durch einen periodischen Fourier-Exponential-Ansatz für die Abhängigkeit der Versetzungen vom Azimut und der Zeit erhält man ein lineares Gleichungssystem für die Versetzungsamplituden. Aus der Bedingung, daß für nicht-verschwindende Lösungen dieses Systems dessen Determinante verschwinden muß, erhält man die Dispersionsrelation.

In dem beschriebenen Modell bleibt die Landau-Dämpfung unberücksichtigt. Sie kommt in Wirklichkeit z.B. durch Streuung in der Gyrationfrequenz der Elektronen als Folge ihrer Energiestreuung zustande. Die dabei eintretende Phasenmischung wirkt bei einigermaßen realistischen Verteilungsfunktionen stabilisierend. Die wirklichen Anwachsrate dürften daher eher kleiner als die aus dem Modell berechneten sein.

Transversale kollektive Elektronen-Ionen Schwingungen wurden ursprünglich für gerade raumladungskompensierte Elektronenstrahlen untersucht [1-2]. Durch Behandlung der Wechselwirkung zwischen Elektronen und Ionen wie beim geraden Strahl, Berücksichtigung magnetischer Zusatzkräfte und Diskretisierung der Wellenzahl wurden entsprechende Überlegungen später auch auf Elektronenringe in Magnetfeldern übertragen [3-9]. Zwei Wege zur Vermeidung von Instabilitäten können dabei unterschieden werden. Erstens die Landau-Dämpfung [4], zweitens die Verkopplung radialer und axialer Schwingungen durch ein azimutales Magnetfeld [5]. Im zweiten Fall, der hier interessiert, verschiebt das Azimutalfeld den Instabilitätsbereich in Richtung höherer Teilchenzahlen aus dem experimentell relevanten Parameterbereich heraus. Einige Instabilitäten anderer Art können dabei ebenfalls gemieden werden [10].

Im vorliegenden Bericht werden Gleichungen kollektiver Transversalschwingungen für den noch nicht behandelten Fall eines endlichen Azimutalfeldes bei endlichem Feldindex verallgemeinert und ausgewertet. Mit einem in [4] angegebenen Spezialfall dieser Gleichungen wird zunächst eine radial transversale Instabilität genauer dargestellt, die eventuell im Zusammenhang mit experimentellen Beobachtungen stehen könnte. Mit dem allgemeinen Satz der Gleichungen wird dann gezeigt, daß diese Instabilität durch ein azimutales Magnetfeld bereits ohne Landau-Dämpfung ausreichend gemieden werden kann. Für ein Experiment mit Azimutalfeld werden dazu einige charakteristische Wertepaare des Feldindex und des Azimutalfeldes ausgewählt, die dem voraussichtlichen Kompressionsverlauf entsprechen. Die Stabilisierung wird an Hand berechneter Stabilitätsgebiete erläutert.

2. Bewegungsgleichungen und Dispersionsrelation

Bei der Aufstellung dieser Gleichungen wird der in [4] für Dipol-Schwingungen ohne Landau-Dämpfung angegebene Spezialfall (endlicher Feldindex, Azimutalfeld=0) mit dem in [5] behandelten Fall (endliches Azimutalfeld, Feldindex=0) verallgemeinernd zusammengefaßt. Die Wechselwirkung zwischen Elektronen und Ionen wird wie in [4] angesetzt. Damit ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\ddot{x}_e + \omega_{ce}^2 \nu_r^2 x_e + \omega_{ce}^2 Q_1^2 (x_e - x_i) - \alpha \omega_{ce} \dot{z}_e = 0 \quad (1)$$

$$x_i'' + \omega_{ce}^2 Q_1^2 (x_i - x_e) = 0 \quad (2)$$

$$\ddot{z}_e + \omega_{ce}^2 \nu_z^2 z_e + \omega_{ce}^2 \eta Q_1^2 (z_e - z_i) + \alpha \omega_{ce} \dot{x}_e = 0 \quad (3)$$

$$z_i'' + \omega_{ce}^2 \eta Q_1^2 (z_i - z_e) = 0 \quad (4)$$

Dabei sind x_e bzw. x_i die vom Azimut und der Zeit abhängigen radialen Schwerpunktsversetzungen der Elektronen bzw. Ionen aus der Gleichgewichtslage und z_e bzw. z_i die entsprechenden axialen Schwerpunktsversetzungen. Punkte bedeuten hierbei die totale Zeitableitung $d/dt = \partial/\partial t + \omega_{ce} \partial/\partial \varphi$ für die azimutal bewegten Elektronen, Striche die partielle Zeitableitung $\partial/\partial t$ für die als azimutal ortsfest vorausgesetzten Ionen. Dabei ist $\omega_{ce} = -eB_z/m_e \gamma c/R$ die Winkelgeschwindigkeit der relativistischen Elektronen, $e/m_e < 0$ die spezifische Ladung der Elektronen, B_z die Axialkomponente des Magnetfeldes auf dem Sollkreis, γ der relativistische Faktor der Elektronen, c die Lichtgeschwindigkeit, R der große Ring- bzw. Sollkreisradius, $\nu_r = (1-n)^{1/2}$ bzw. $\nu_z = n^{1/2}$ sind die radialen und axialen Betatron-Tunes der Elektronen¹⁾, $n = -(R/B_z) \partial B_z / \partial R$ ist der magnetische Feldindex, $\alpha = B_\varphi / B_z$ das Verhältnis des azimutalen Magnetfeldes B_φ zum axialen Feld am Sollkreis und η das Verhältnis der radialen zu den axialen kleinen Ringdimensionen.

¹⁾ Diese Beziehungen gelten genau nur für Moden mit $m = 1$ (Bedeutung von m , vgl. Text vor Gl.7) und bei kleinen Auslenkungen. Andernfalls werden sie durch die toroidalen Ringfelder modifiziert.

Die Wechselwirkungskoeffizienten Q_1 , Q_1 zwischen Elektronen und Ionen sind bei Annahme nur einer Sorte von Ionen ähnlich wie bei [4] gegeben durch:

$$Q_1^2 = k_1 N_e ZR / Aa(a+b) \quad (5)$$

$$Q_1^2 = k_1 N_i ZR / \gamma a(a+b) \quad (6)$$

Dabei ist $k_1 = 2r_e / (1836\tilde{m}) = 9.78 \times 10^{-17}$ cm, $k_1 = 2r_e / \tilde{m} = 1.80 \times 10^{-13}$ cm, $r_e = 2.82 \times 10^{-13}$ cm der klassische Elektronenradius, N_e bzw. N_i die gesamte Elektronen bzw. Ionenzahl im Ring, A das Atom- bzw. Molekulargewicht der Ionen und Z ihre Ladungszahl. Die Größen a und b , wobei $a/b = \gamma$, bedeuten sowohl in der Formel für Q_1 als auch in der Formel für Q_1 die Halbachsen des elliptisch vorausgesetzten kleinen Ringquerschnittes für die stärker um den Sollkreis gestreute Teilchenart (Elektronen bzw. Ionen). Diese von [4] abweichende Definition von Q_1 bzw. Q_1 ergibt sich aus dem Reaktionsprinzip für die Wechselwirkungskräfte zwischen Elektronen und Ionen wie folgt: Die stärker gestreute Teilchenart erzeugt zunächst ein (hier parabolisch vorausgesetztes) Raumladungspotential, in dem sich die weniger gestreuten Teilchen aufhalten. Daraus folgt zunächst aus der entsprechenden Gleichung (5) bzw. (6) der Wert für Q_1 bzw. Q_1 wie bei [4]. Für den Wert des anderen Wechselwirkungskoeffizienten gilt dann aber infolge des Reaktionsprinzips $m_e N_e Q_1^2 = m_i N_i Q_1^2$, was zu der zweiten oben angegebenen Gleichung (mit gleichem a und b) führt. Da Q_1 und Q_1 quasistatisch berechnet wurden, gelten die Gleichungen (1) bis (4) nur bei genügend langsamen zeitlichen Änderungen. Die mit α multiplizierten Terme in den Gleichungen (1) und (3) stammen von $\omega \times \mathcal{E}$ -Kräften aufgrund der transversalen Elektronenbewegung im Azimutalfeld. Ähnliche Kräfte auf die Ionen wurden wie bei [4] und [5] weggelassen²⁾. Ihre Auswirkung wird innerhalb von Abschnitt 3.3 genauer betrachtet.

2) Der Wirkung des Magnetfeldes auf die Ionen entsprechen additive Terme $-\omega_{ci} y_1' - \alpha \omega_{ci} z_1'$ auf der linken Seite von Gl.(2) und $\omega_{ci} x_1'$ auf der linken Seite von Gl.(4). Dabei ist $\omega_{ci} = -\omega_{ce} Z / 1836A$ die Zyklotronfrequenz der Ionen (für $\alpha = 0$) und y_1 ist die azimutale Auslenkung der Ionen. Diese Auslenkung genügt der zusätzlichen Differentialgleichung $y_1 = \omega_{ci} x_1'$.

Lösungen für kollektive Schwingungen erhält man aus den Gleichungen (1) bis (4), indem man die vier Auslenkungen in der Form $C_k \exp(i(m\varphi - \omega t))$ mit $k=1,2,..,4$ ansetzt. Die C_k sind konstant, i ist die imaginäre Einheit, m die Modenzahl, d.h. die (wegen der Eindeutigkeit) ganze Zahl von Wellenlängen auf dem Sollkreisumfang, φ ist der Ringazimut, ω die von einem ruhenden Beobachter bzw. für $\varphi = \text{const.}$ festzustellende Schwingungsfrequenz und t ist die Zeit. Die der azimuthalen Phasengeschwindigkeit der Wellen entsprechende Winkelgeschwindigkeit ist ω/m , da für $\varphi = (\omega/m)t$ die Phase $m\varphi - \omega t$ zeitlich konstant bleibt. Bei der Bildung der Zeitableitungen in Gln. (2) und (4) blieb der Einfluß einer systematischen azimuthalen Ionendrift außer Ansatz. Dieser Drift-Effekt wird innerhalb von Abschnitt 3.3 näher betrachtet. Mit dem angegebenen Ansatz für die Auslenkungen erhält man aus Gln. (1) bis (4) ein lineares Gleichungssystem für die Schwerpunktsamplituden C_k . Nichtverschwindende Lösungen sind nur möglich, wenn die Determinante verschwindet. Das ergibt für $v = \omega/\omega_{ce}$ die Dispersionsgleichung:

$$\begin{vmatrix}
 \overbrace{\left[\begin{array}{cc} (v-m)^2 - v_r^2 - Q_1^2 & Q_1^2 \\ Q_1^2 & v^2 - Q_1^2 \end{array} \right]}^{D_r} & -i\alpha(v-m) & 0 \\
 i\alpha(v-m) & 0 & \overbrace{\left[\begin{array}{cc} (v-m)^2 - v_z^2 - \eta Q_1^2 & \eta Q_1^2 \\ \eta Q_1^2 & v^2 - \eta Q_1^2 \end{array} \right]}^{D_z}
 \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

Die beiden mit D_r und D_z gekennzeichneten Unterdeterminanten entsprechen den radialen bzw. axialen Schwingungsanteilen. Die mit i multiplizierten Koeffizienten bewirken deren Kopplung. Dies wird durch Ausrechnen der Determinante deutlicher. Aus Gl.(7) folgt dann:

$$D_r D_z - \alpha^2 (v-m)^2 (v^2 - Q_1^2) (v^2 - \eta Q_1^2) = 0 \quad (8)$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist ein reelles Polynom 8. Grades in v . Komplexe Wurzeln treten daher als konjugiert komplexe Paare auf. Eine Vorzeichenvertauschung von v und m ändert die Gleichung nicht. Da die azimutale Phasengeschwindigkeit der kollektiven Schwingungen bzw. Wellen durch $R\omega_{ce}v/m$ gegeben ist, sind positive und negative m -Werte physikalisch gleichwertig. Ohne Azimutalfeld, also für $\alpha=0$ folgt $D_r(v)=0$ bzw. $D_z(v)=0$, d.h. die Dispersionsgleichung zerfällt dann in zwei unabhängige Gleichungen für den radialen bzw. axialen Schwingungsanteil. Dabei entspricht $D_r(v)=0$ der in [4] für radiale Dipolschwingungen angegebenen Dispersionsgleichung (vgl. dort Eq. (14) für $p=1$). Setzt man in Gl. (8) $\nu_r=1$ und $\nu_z=0$, so erhält man die in [5] für verschwindenden Feldindex bzw. für ein homogenes Magnetfeld angegebene Dispersionsgleichung.

Der Spezialfall $D_r(v)=0$ liefert die in der Einleitung erwähnte Instabilität, die im nächsten Abschnitt genauer behandelt wird. Wie man aus Gl. (7) erkennt, ist die Dispersionsgleichung $D_z(v)=0$ formal wie $D_r(v)=0$ aufgebaut und muß daher eine ähnliche Instabilität liefern. Da zum Zeitpunkt der Ionenbeladung jedoch $\nu_z \ll \nu_r$ gilt, bleibt man hier außerhalb des instabilen Parameterbereiches.

3. Radiale Dipol-Instabilität ohne Azimutalfeld

3.1 Auswertung der Dispersionsgleichung

Mit der Bedeutung von D_r nach Gl. (7) folgt explizit die in [4] für radiale Dipolschwingungen angegebene Dispersionsgleichung:

$$((v-m)^2 - \nu_r^2 - Q_1^2)(v^2 - Q_1^2) = Q_1^2 Q_1^2 \quad (9)$$

Für $m=0$ sind alle vier Wurzeln dieser Gleichung reell. Für $m \geq 1$ treten instabile Bereiche auf. Ihre Begrenzungen in der $Q_1 - Q_1$ -Parameterebene wurden in [4,6] für $\nu_r=1$ und $\nu_r \leq 0.8$ angegeben. Für das Experiment ist hauptsächlich der Bereich $0.9 < \nu_r < 1$ wichtig, wo die Ionenbeladung des Ringes stattfindet. Gl. (9) liefert hier für $m=1$ die schon erwähnte instabile Schwingung bei der Frequenz

$\omega \approx \omega_{ce} (1 - \nu_r)$. Radiale Schwingungen dieser Frequenz wurden auch experimentell beobachtet [11]. Da sie eventuell im Zusammenhang mit dieser Instabilität stehen könnten, wird anschließend die Parameterabhängigkeit der betreffenden Wurzel von Gl. (9) genauer dargestellt. Dazu werden drei Hilfsgrößen u , q_i und q_1 definiert durch:

$$v = u(1 - \nu_r) \quad (10)$$

$$Q_i = q_i(1 - \nu_r) \quad (11)$$

$$Q_1 = q_1 \nu_r^{1/2} (1 - \nu_r)^{1/2} \quad (12)$$

Durch Einsetzen in Gl. (9) und Umformung erhält man:

$$\left\{ \left[\frac{(u-1)(1-\nu_r)}{\nu_r} - 2 \right] \cdot (u-1) - q_1^2 \right\} \cdot (u^2 - q_1^2) = q_i^2 q_1^2 \quad (13)$$

Im interessierenden Parameterbereich ist $|u-1| \lesssim 1$ und $1 - \nu_r \ll 1$. Auf der linken Seite von Gl. (13) gilt dann $|u-1| \cdot (1 - \nu_r) / \nu_r \ll 2$. Statt von drei Parametern ν_r , q_i , q_1 hängt u dann näherungsweise nur von q_i und q_1 ab. Auswertungen zeigen, daß dies im interessierenden Bereich $1 \lesssim \nu_r \lesssim 0.9$, $0.4 \lesssim \omega_r / \omega_{ce} (1 - \nu_r) \lesssim 1.6$ und besonders für $\omega_i / \omega_r \lesssim 1$ sehr genau zutrifft. Dabei ist ω_r der Realteil und ω_i der Imaginärteil von $\omega = v \omega_{ce}$. Zur vollständigen Darstellung der Parameterabhängigkeit von ω genügt dann das Diagramm in Fig. 2. Es zeigt die Kurven $\omega_r / \omega_{ce} (1 - \nu_r) = \text{const}$ (gestrichelt) und $\omega_i / \omega_r = \text{const}$ (ausgezogen) mit $q_i = Q_i / (1 - \nu_r)$ als Abszisse und $q_1^2 / q_i = Q_1^2 / \nu_r Q_i$ als Ordinate. Wie man aus Fig. 2 ersieht, ist die Instabilität auf einen endlichen ν_r -Bereich unterhalb von $\nu_r = 1$ beschränkt. Die Breite dieses Instabilitätsbandes geht mit abnehmender Ionenbeladung ($Q_i \rightarrow 0$) gegen Null. Für die Bandmitte gilt dann $v = 1 - \nu_r = Q_i$, wie auch in [4] angegeben.

Der Weg, auf dem das Instabilitätsgebiet in Fig. 2 im Verlauf der Kompression und der Ionenbeladung durchlaufen wird, kann an Hand eines Zahlenbeispiels verfolgt werden. Es sei $Z=A=1$ und $N_e = 5 \times 10^{12}$ konstant. Während der Beladung mit Ionen sei $R=3$ cm,

$a = b = 4\text{mm}$, $\eta = 1$, $\nu_r = 0.99$ und $\gamma = 20$. Nach der Beladung sei $N_i = 10^{11}$. Aus Gln. (5,6) erhält man unmittelbar nach der Beladung $Q_1 = 0.068$, $Q_1 = 0.092$, als Abszisse im Diagramm $Q_1 / (1 - \nu_r) = 6.8$ und als Ordinate $Q_1^2 / \nu_r Q_1 = 0.13$. Unmittelbar vor der Beladung ist die Abszisse grob angenähert etwa dieselbe wie nachher, die Ordinate dagegen kleiner, jedoch > 0 wegen der Restgasionisation. Während der Kompression steigt die Abszisse größenordnungsmäßig etwa um den Faktor 100, die Ordinate nimmt ebenfalls insgesamt zu, da N_i durch Restgasionisation von Null ausgehend ansteigt. Bei dem an die Entladung anschließenden Roll-out ist die anfängliche Änderungstendenz der Abszisse grob angenähert wie bei der Kompression. Das ergibt grob schematisch den in Fig. 1 strichpunktiert eingezeichneten Weg. Dabei bezeichnet die Ziffer 1 die Kompression, 2 die Beladung und 3 den Roll-out. Man sieht, daß das Instabilitätsgebiet immer durchlaufen werden muß, da bei Beginn der Kompression Q_1 stets kleiner, gegen Ende und spätestens beim Spill-out dagegen größer ist als $1 - \nu_r$. Es ist daher vorteilhaft, die Beladung des Ringes erst nach dem Durchlaufen des Instabilitätsbandes vorzunehmen, wie in Fig. 2 dargestellt, damit der Durchgang durch dieses Gebiet möglichst schnell und bei kleinen Anstiegsraten erfolgen kann. Stabilisierende Effekte und Maßnahmen sollten dann leichter wirksam werden.

3.2 Anschauliche Deutung

Bei verschwindend kleiner Ionenzahl ($Q_1 \rightarrow 0$) und für $m=1$ hat Gl.(9) die vier Wurzeln $v_{1,2} = \pm Q_1$ und $v_{3,4} = 1 \pm \nu_r$. Die ersten beiden Wurzeln entsprechen den zwei Möglichkeiten $x_{1,e} \sim \exp(i(\varphi + \omega_{ce} Q_1 t))$ für kollektive radiale Ionenschwingungen um den im Grenzfall $Q_1 = 0$ ungestörten Elektronenring. Die anderen beiden Wurzeln entsprechen den zwei Möglichkeiten $x_{e,1} \sim \exp(i(\varphi - \omega_{ce} (1 \pm \nu_r) t))$ für kollektive radiale Elektronenschwingungen im magnetischen Spiegelfeld. Bei endlicher aber im Vergleich zu den Elektronen geringer Ionenzahl werden diese Wurzelwerte durch die zusätzliche Rückwirkung der Ionen auf die Elektronen etwas modifiziert. Ihre Bedeutung bleibt im wesentlichen erhalten. Die jeweils vorherrschende Kollektivschwingung wird, abgesehen von verschiedenen Amplituden und Schwingungsphasen, allen Teilchenarten aufgeprägt. Bei kleinen

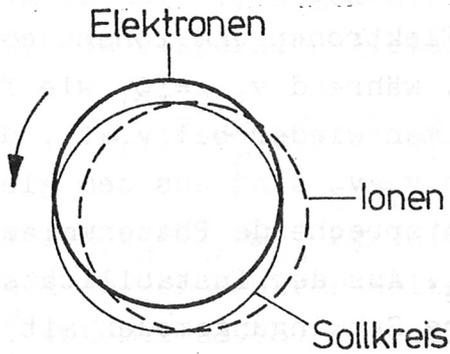


Fig. 1

Zur Veranschaulichung der radialen kollektiven Elektronen-Ionen-Resonanz.

Amplituden entsprechen diese Kollektivschwingungen gegen den Sollkreis versetzten Kreisen, die mit einer der vier Winkelgeschwindigkeiten $\omega = v_k \omega_{ce}$ um den Sollkreis präzessionieren. Dabei ist $k=4$ für die hier zu betrachtende Schwingung. Hier erfolgt die Präzessionsbewegung in gleicher Richtung, aber langsamer als der Elektronenumlauf. Stellt sich dabei aus Trägheitsgründen eine Phasennacheilung der Ionen gegenüber den Elektronen von

etwa 90° ein, wie in Fig. 1 schematisch und als Momentanbild gezeichnet, so läßt sich die Instabilität unschwer erkennen. Da die Elektronen schneller umlaufen als die kollektive Störung, wird ihre Betatron-Schwingung hauptsächlich während der Null-Durchgänge durch das elektrische Feld der dort radial versetzten Ionen verstärkt. Umgekehrt wird auch die Ionenschwingung am Ort ihrer beiden Nulldurchgänge durch das elektrische Feld der dort radial versetzten Elektronen verstärkt. Letzteres, zusammen mit der 90° -Phasennacheilung der Ionen, gilt besonders im Fall $v_1 \approx v_4$, d.h., wenn die Schwingungsfrequenz der Ionen um die Elektronen mit der kollektiven Elektronenschwingung im Magnetfeld übereinstimmt. Dies entspricht genau der schon erwähnten Bedingung $1 - \nu_r = Q_1$ für die Lage des Instabilitätsbereiches im Falle $Q_1 \rightarrow 0$. Die ebenfalls denkbare Resonanz $v_1 \approx v_3$ ergibt keine Instabilität, da die kollektive Störung hier schneller umläuft als die Elektronen. Die Radialschwingung der Elektronen wird dann nach Fig. 2 vom elektrischen Feld der Ionen gebremst. Der Aufbau der Instabilität bei $v_1 \approx v_4$ erfolgt auf Kosten der azimuthalen Bewegungsenergie der Elektronen. Der Mechanismus dieser Energieübertragung ist aus Fig. 1 allerdings nicht ohne weiteres ersichtlich.

Die durchgeführten Überlegungen lassen sich auch auf höhere Modenzahlen mit $m \geq 2$ übertragen. Dabei erhöht sich die Zahl der Knotenstellen gegenüber Fig. 1 für Elektronen und Ionen jeweils auf $2m$. Hier ist $v_{3,4} = m \pm \nu_r$ für $Q_1 \rightarrow 0$, während $v_{1,2} = \pm Q_1$ wie früher gilt. Instabile Schwingungen erhält man wieder bei $v_1 \approx v_4$, d.h. bei $m - \nu_r = Q_1$ für $Q_1 \rightarrow 0$. Die Resonanzen $v_1 \approx v_3$ sind aus dem gleichen Grund wie bei $m=1$ stabil, da ihre entsprechende Phasenumlauffrequenz $\omega_{ce}(m + \nu_r)/m$ größer ist als ω_{ce} . Aus der Instabilitätsbedingung $m - \nu_r = Q_1$ wird klar, daß höhere Schwingungsmoden mit $m \geq 2$ bei den experimentell gegebenen Bedingungen nicht auftreten können. Da die praktisch vorkommenden Q_1 -Werte in der Größenordnung von 10^{-1} oder darunter liegen, kann die Instabilitätsbedingung nur für die Grundmode mit $m=1$ und auch hier nur für nahe bei 1 liegende ν_r -Werte erfüllt werden. Die nächsthöhere Mode würde demgegenüber mindestens 10 mal größere Q_1 -Werte erfordern und bei mindestens 10 mal höheren Frequenzen in Erscheinung treten. Höhere Moden axialer Schwingungen sind aus ganz entsprechenden Gründen nicht zu erwarten. Der Grund für die Stabilität der axialen Grundmode wurde am Ende von Abschnitt 2 angegeben. Rotationssymmetrische Moden mit $m=0$, wobei vom Azimut unabhängige radiale oder axiale Schwingungen stattfinden, sind in dem vorausgesetzten quasi-statischen Modell stabil, da den Elektronen dann keine azimutale Bewegungsenergie entzogen werden kann. Bei der Betrachtung zugrunde liegenden Ringmodell und bei den experimentell gegebenen Bedingungen ist daher nur die Schwingungsmode mit $\omega \approx \omega_{ce}(1 - \nu_r)$ instabil.

3.3 Einfluß von Störeffekten

Abgesehen von der Landau-Dämpfung und den elektrodynamischen Wechselwirkungen, die in diesem Bericht nicht untersucht werden, blieb bei der Ableitung von Gl.(9) die Wirkung des Magnetfeldes auf die Ionen und eine systematische azimutale Driftbewegung der Ionen außer Ansatz. Letztere könnte z.B. durch magnetische Flußänderungen im Ring oder durch Ionisation tangential zum Ring eingeschossener Neutralteilchen erzeugt werden. Beide Effekte ändern die ν_r -Position des Instabilitätsbandes.

Berücksichtigt man die Wirkung des Magnetfeldes auf die Ionen, wie in Fußnote 1) angedeutet, dann erhält man anstelle von Gl.(9) die Dispersionsgleichung:

$$((1-v)^2 - v_r^2 - Q_1^2)(v^2 - Q_1^2 - Q_c^2) = Q_1^2 Q_c^2 \quad (14)$$

Dabei ist $Q_c = |\omega_{ce}/\omega_{ci}| = Z\gamma/1836A$ für $\omega_{ce} \approx c/R$. Dasselbe Ergebnis wurde auch von anderer Seite mitgeteilt [12]. Das Verhältnis Q_c^2/Q_1^2 ist mit Gl.(5) gegeben durch:

$$Q_c^2/Q_1^2 = k_c Z \gamma^2 a(a+b)/AR N_e \quad (15)$$

wobei $k_c = \sqrt{2} \times 1836 r_e = 3.0 \times 10^9 \text{ cm}^{-1}$. Bei den gegebenen experimentellen Bedingungen ist dieses Verhältnis meist kleiner als 10^{-1} . Der Einfluß von Q_c läßt sich durch Umnormieren abschätzen. Dazu werden folgende Größen definiert:

$$Q_i^* = Q_1 (1 + Q_c^2/Q_1^2)^{1/2} \quad (16)$$

$$Q_1^* = Q_1 (1 + Q_c^2/Q_1^2)^{-1/2} \quad (17)$$

$$v_r^* = v_r \left(1 + \left(\frac{Q_c}{Q_1} \right)^2 \cdot \frac{Q_1^2}{v_r^2 (1 + Q_c^2/Q_1^2)} \right)^{1/2} \quad (18)$$

Damit entsteht aus Gl.(14) die mit Gl.(9) formal identische Dispersionsrelation:

$$((1-v)^2 - v_r^{*2} - Q_1^{*2})(v^2 - Q_1^{*2}) = Q_1^{*2} Q_c^{*2} \quad (19)$$

Aus Gl.(9) erhaltene Ergebnisse, insbesondere das Diagramm in Fig.2 gelten dann sinngemäß auch für Gl.(19). Für die Lage des Instabilitätsbandes gilt also $1 - v_r^* = Q_1^*$ für $Q_1^* \rightarrow 0$, woraus mit Gln.(16) bis (18) die neue Bedingung $(1 - v_r)^2 = Q_1^2 + Q_c^2$ für $Q_1 \rightarrow 0$ folgt. Wegen $Q_c^2/Q_1^2 \rightarrow 1$ wird das Instabilitätsband durch Q_c nur um einen kleinen Bruchteil von $1 - v_r$ verschoben. Entsprechend klein

und innerhalb der natürlichen Fehlergrenzen sind auch die Unterschiede $Q_1^* - Q_1$, $Q_1^* - Q_1$ und $v_r^* - v_r$. Dies rechtfertigt bei den gegebenen Bedingungen die Vernachlässigung von Q_c bzw. der Wirkung des Magnetfeldes auf die Ionen.

Führen die Ionen eine einheitliche Driftbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit ω_d aus, so erhält man anstelle von Gl.(9) und mit $Q_c=0$ die Dispersionsgleichung:

$$((1-v)^2 - v_r^2 - Q_1^2)((v-v_d)^2 - Q_1^2) = Q_1^2 Q_1^2 \quad (20)$$

Dabei ist $v_d = \omega_d / \omega_{ce}$. Der Einfluß von v_d läßt sich ebenfalls durch Umnormieren bestimmen. Dazu werden folgende Größen definiert:

$$\bar{Q}_1 = Q_1 / (1 - v_d) \quad (21)$$

$$\bar{Q}_1 = Q_1 / (1 - v_d) \quad (22)$$

$$\bar{v}_r = v_r / (1 - v_d) \quad (23)$$

$$\bar{v} = (v - v_d) / (1 - v_d) \quad (24)$$

Damit geht Gl.(20) über in die Dispersionsgleichung:

$$((1-\bar{v})^2 - \bar{v}_r^2 - \bar{Q}_1^2)(\bar{v}^2 - \bar{Q}_1^2) = \bar{Q}_1^2 \bar{Q}_1^2 \quad (25)$$

Als Gleichung für \bar{v} hat Gl.(25) wieder die Form von Gl.(9). Die neue Lage des Instabilitätsbandes ergibt sich also aus der Bedingung $\bar{Q}_1 = 1 - \bar{v}_r$ für $\bar{Q}_1 \rightarrow 0$, woraus $Q_1 + v_d = 1 - v_r$ für $Q_1 \rightarrow 0$ folgt. Ist $v_d > 0$, so wird die Instabilität während der Ringkompression früher durchlaufen, bei $v_d < 0$ später. Für $v_d < 0$ wird die von der Ionendrift verursachte Zentrifugalkraft durch $\omega \times \psi$ -Kräfte teilweise kompensiert. Volle Kompensation erfolgt bei $v_d = \omega_{ci} / \omega_{ce} = -Q_c$. Da bei den gegebenen Bedingungen $Q_c < Q_1$ gilt, kann aber durch eine absichtlich erzeugte Ionendrift der Instabilitätsbereich nicht entscheidend verschoben werden, ohne daß man die Haltekräfte des Ringes merklich beansprucht.

4. Stabilisierung durch das azimutale Magnetfeld

Bei endlichem Azimutalfeld ($\alpha \neq 0$) muß die allgemeine Dispersionsgleichung (8) numerisch nach v aufgelöst werden. Wegen der Kompliziertheit dieser Gleichung scheint eine Reduktion der Parameterzahl durch sinnvolle Normierung nicht möglich zu sein. Bei der Auswertung wurde für Wertepaare n, α auf der in Fig. 3 gezeigten "Kompressionskurve" [13] eines Elektronenringkompressors mit azimutalem Magnetfeld jeweils die Wurzel v mit dem größten Imaginärteil bestimmt. Dies wurde durchgeführt für jeweils 31×31 Q_1 - Q_1 -Kombinationen im Bereich $10^{-3} \leq Q_1 \leq 10$ und $10^{-2} \leq Q_1 \leq 10$ bei jeweils festen Werten von m, η, n und α . Das Ergebnis ist, jeweils auf getrennten Blättern für den Real- und Imaginärteil von v und für verschiedene Parametersätze von m, η, n , und α , in Fig. 4A bis Fig. 7B in Form von Zahlenfeldern in der Q_1 - Q_1 -Ebene dargestellt. Für den Spezialfall $n=0$ wurden ähnliche Darstellungen bereits früher ermittelt [14]. Bei den hier gegebenen Darstellungen ist sowohl die Abszisse Q_1 , als auch die Ordinate Q_1 logarithmisch geteilt. Die Zahlenfelder enthalten sowohl für den Real- als auch den Imaginärteil die Ziffer 0, falls alle 8 Wurzeln von Gl.(8) für die betreffende Q_1 - Q_1 -Kombination reell sind. Dadurch ist das stabile Gebiet gekennzeichnet. Andernfalls enthält das Zahlenfeld von Null verschiedene ganze Zahlen, die für die Wurzel mit dem größten Imaginärteil den Real- bzw. Imaginärteil von v in Dezibel (bezogen auf 10^{-10}) angeben. So bedeutet z.B. die Zahl 87, daß der betreffende Real- bzw. Imaginärteil von $v = \omega / \omega_{ce}$ den Betrag $10^{8.7-10} \approx 0.05$ besitzt. In den maschinengedruckten Bildunterschriften bezeichnen XMIN bis YMAX die Bereichsgrenzen von $\log_{10}(Q_1)$ und $\log_{10}(Q_1)$, DX und DY die logarithmischen Rasterschrittweiten und ZMD= m , ETA= η , FND= n , ALF= α die jeweils festen Parameter, deren Bedeutung im Anschluß an Gl.(4) erklärt wurde.

Die Auswertung ergab im betrachteten Q_1 - Q_1 -Bereich keine Instabilität für $m=0$, wie zu erwarten, für $m=2$ schwächere Instabilität als für $m=1$, ferner eine nur unwesentliche Abhängigkeit

von η . Es wurden daher nur Fälle mit $m=1$ und $\eta=1$ dargestellt. (Weitere Auswertungsergebnisse sind in dem nur als Einzel exemplar vorhandenen Bericht IPP O/19A zusammengestellt.) Im Experiment hat man größenordnungsmäßig $Q_{\perp} \lesssim 10^{-1}$ und $Q_{\parallel} \lesssim 10^{-1}$. Die berechneten Instabilitätsbereiche entlang der Kompressionskurve liegen außerhalb dieses Gebietes. Der Bereich der kollektiven Elektronen-Ionen Dipol-Instabilität kann demnach durch das azimutale Magnetfeld ausreichend verschoben werden, was das durch Gln.(1) bis (6) beschriebene Ringmodell anbelangt.

Für nützliche Diskussionen und interessante Hinweise danke ich neben anderen Kollegen Dr. P. Merkel, Dr. U. Schumacher, Dr. I. Hofmann und Dr. W. Ott. Herrn Dr. C. Andelfinger und Dr. P. Merkel bin ich darüber hinaus für ihre kritische Stellungnahme dankbar.

5. Literatur

- 1 Budker G.I., Relativistic Stabilized Electron Beam, Sov.Atomic Energy 1, 673, (1956).
- 2 Chirikov B.V., Stability of a Partially Compensated Electron Beam, Sov.Atomic Energy 19, 1149, (1965).
- 3 Symp.on Electron Ring Accelerators, held at LBL Berkeley (1968), p.383-388 (C. Pellegrini), 448-456 (F.E. Mills), 457-462 (K. Fowler).
- 4 Koshkarev D.G., Zenkevich P.R., Resonance of Coupled Transverse Oscillations in Two Circular Beams, Part. Accel. 3, 1, (1972).
- 5 Bonch-Osmolovsky A.G., Reshetnikova K.A., On Stabilization of the Kink-Instability of a Two-Component Relativistic Ring by an Azimuthal Magnetic Field, JINR P9-6136, Dubna (1971), UCRL-Trans-1474, ERAC-183.
- 6 Laslett L.J., Numerical Work Relating to Stability of Electron-Ion Collective Motion, LBL ERAN-181, Berkeley (1971).
- 7 LeVine D.M., Envelope Instabilities in Relativistic Electron Rings, Dep.El.Eng.Univ. Maryland, ERAC-226.
- 8 Zenkevich P.R., Koshkarev D.G., Perelstein E.A., Instability of Axial Oscillations in an Electron Ring Accelerator, Sov.Atomic Energy, 33, 656, (1972).
- 9 Zenkevich P.R., The Process of Establishing Transverse Dipole Oscillations in a Linear Beam of Charged Particles, Moscow (1972), URCL-Trans-1504, ERAC-237.

- 10 Merkel P., On B_{φ} -Stabilization in the Electron Ring Accelerator, Proc. of the 4. Work Meeting on ERA, IPP 0/3 Garching, 138 (1971).
- 11 Andelfinger C., Herrmann W., Jacobi D., Luccio A.U., Ott W., Schumacher U., Ulrich M., The New Garching Fast ERA Experiment, IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-20, 276 (1973).
- 12 Ott W., private Mitteilung.
- 13 Schumacher U., private Mitteilung.
- 14 Merkel P., private Mitteilung.

6. Anhang

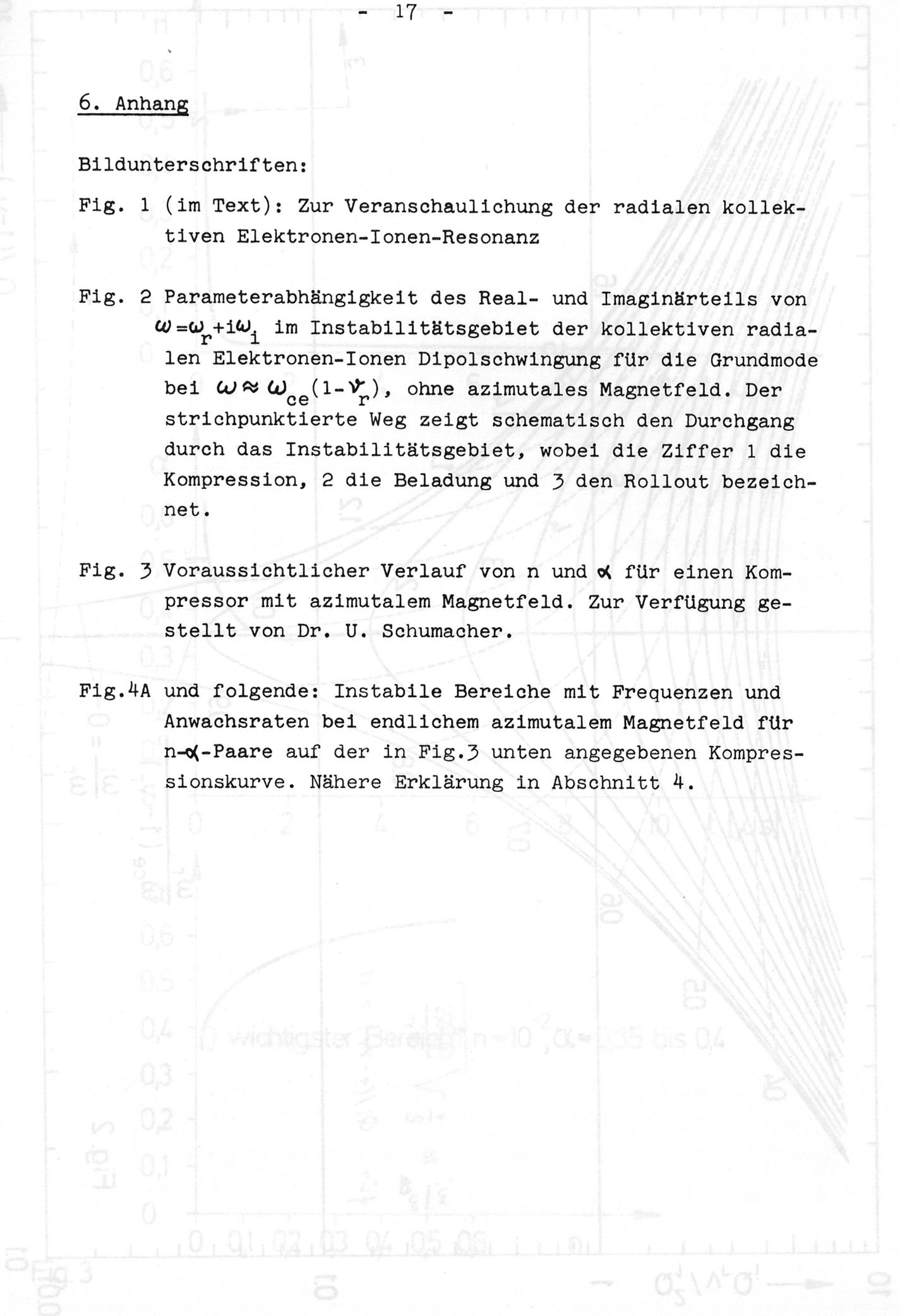
Bildunterschriften:

Fig. 1 (im Text): Zur Veranschaulichung der radialen kollektiven Elektronen-Ionen-Resonanz

Fig. 2 Parameterabhängigkeit des Real- und Imaginärteils von $\omega = \omega_r + i\omega_i$ im Instabilitätsgebiet der kollektiven radialen Elektronen-Ionen Dipolschwingung für die Grundmode bei $\omega \approx \omega_{ce}(1 - \nu_r)$, ohne azimuthales Magnetfeld. Der strichpunktierte Weg zeigt schematisch den Durchgang durch das Instabilitätsgebiet, wobei die Ziffer 1 die Kompression, 2 die Beladung und 3 den Rollout bezeichnet.

Fig. 3 Voraussichtlicher Verlauf von n und α für einen Kompressor mit azimuthalem Magnetfeld. Zur Verfügung gestellt von Dr. U. Schumacher.

Fig. 4A und folgende: Instabile Bereiche mit Frequenzen und Anwachsrate bei endlichem azimuthalem Magnetfeld für n - α -Paare auf der in Fig. 3 unten angegebenen Kompressionskurve. Nähere Erklärung in Abschnitt 4.



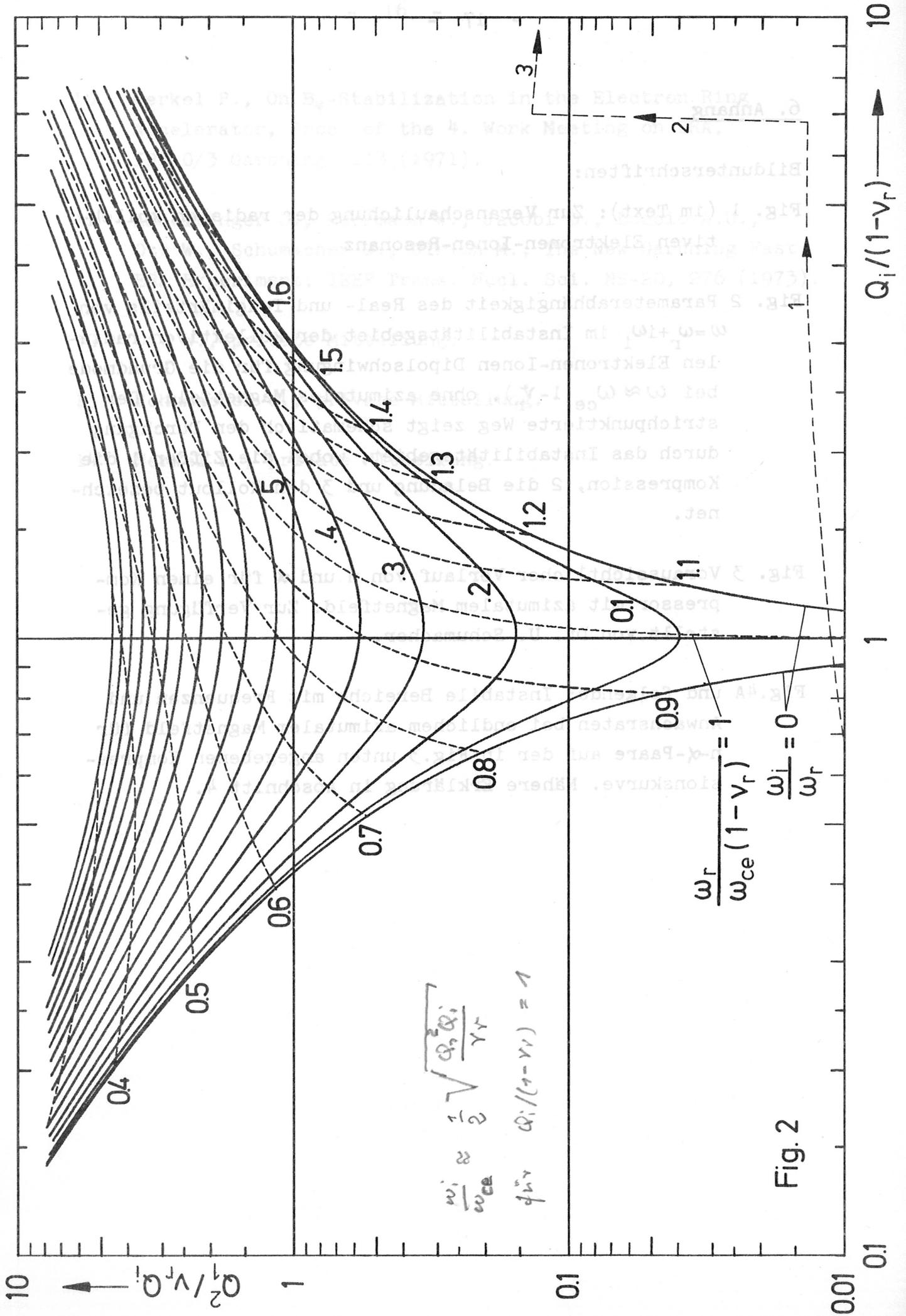


Fig. 2

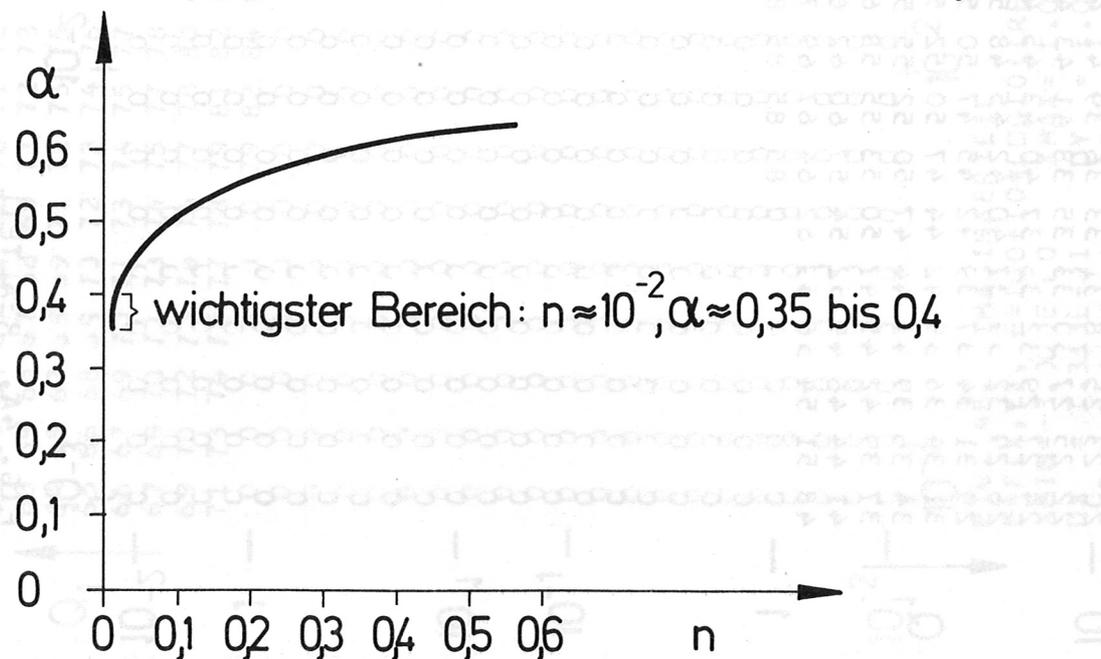
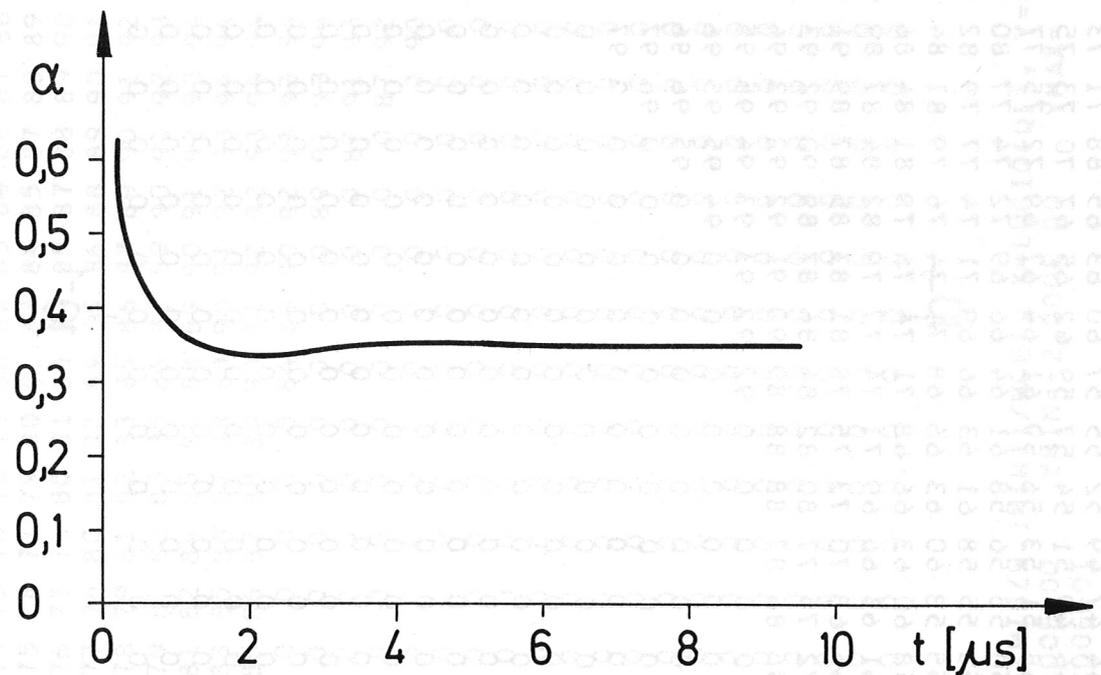
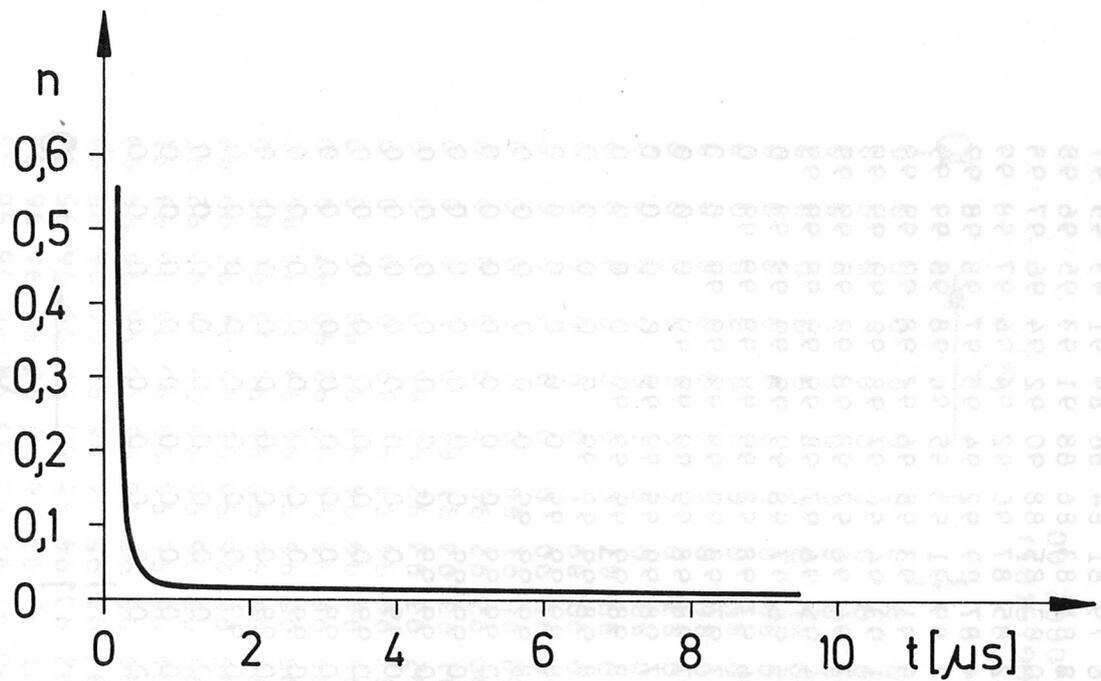


Fig. 3

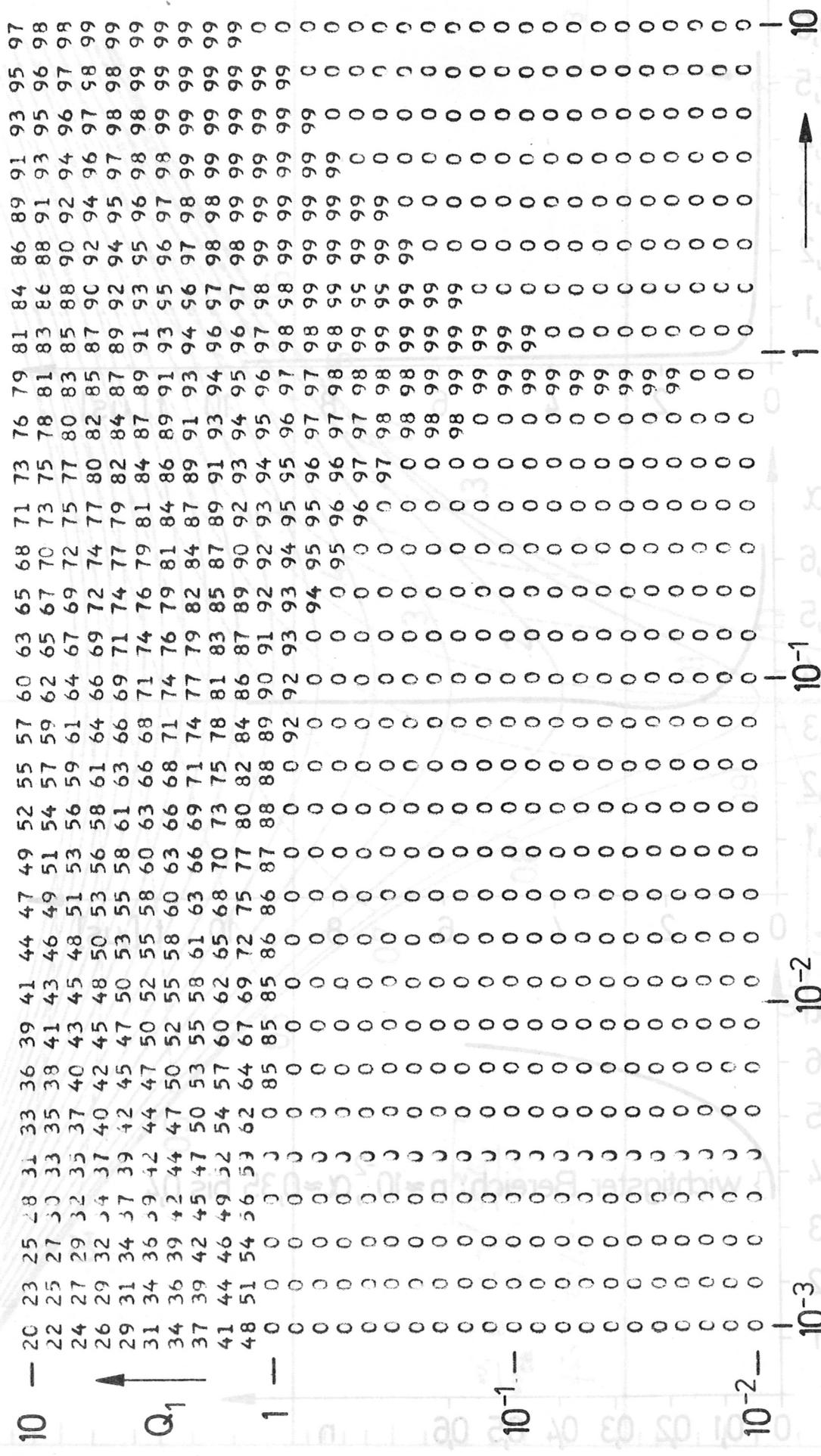


FIG. 4A, REALTEIL
 $F = F(X, Y)$, $F = 100 + 10 * \text{LOG}10((\text{RE}(W) \text{BZW. IM}(W)) / \text{WCE})$, $X = \text{LOG}10(Q1)$, $Y = \text{LOG}10(Q1)$
 $X_{\text{MIN}} = -3.000E-01$ $X_{\text{MAX}} = 1.000E-00$ $Y_{\text{MIN}} = -2.000E-00$ $Y_{\text{MAX}} = 1.000E-00$
 $DX = 1.333E-01$ $DY = 1.000E-01$
 $ZMC = 1.000E-00$ $ETA = 1.000E-00$ $FND = 1.100D-02$ $ALF = 3.500D-01$

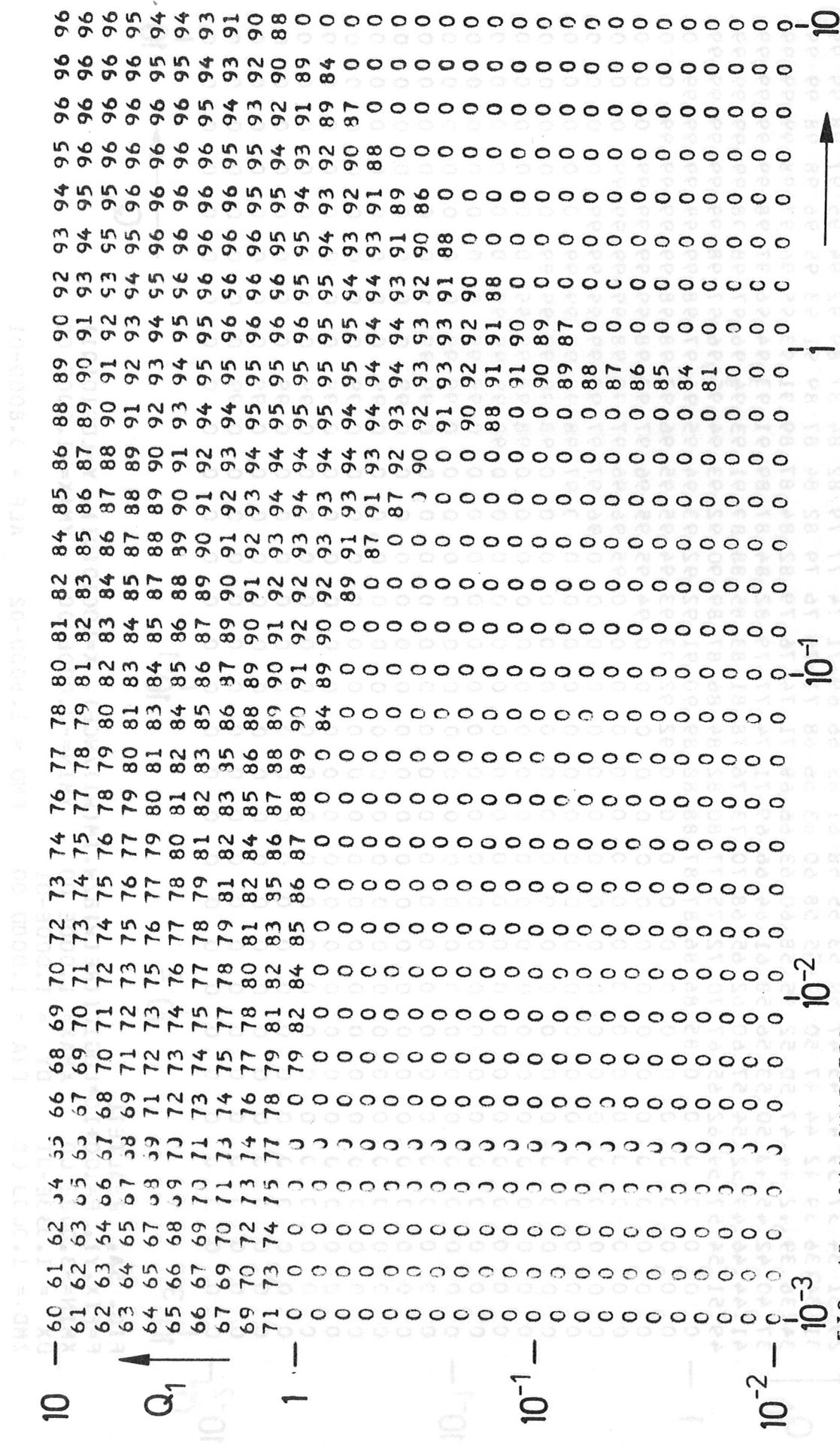


FIG. 4B, IMA, INAERTEIL
 $F = F(X, Y), F = 100 + 10 \cdot \text{LOG}_{10}((\text{RE}(W) \cdot \text{BZW} \cdot \text{IM}(W)) / \text{WCE}), X = \text{LOG}_{10}(Q1), Y = \text{LOG}_{10}(Q1)$
 $X_{\text{MIN}} = -3.000000, X_{\text{MAX}} = 1.000000, Y_{\text{MIN}} = -2.000000, Y_{\text{MAX}} = 1.000000$
 $DX = 1.333333, DY = 1.000000$
 $ZMD = 1.000000, ETA = 1.000000, FND = 1.100000, ALF = 3.500000$

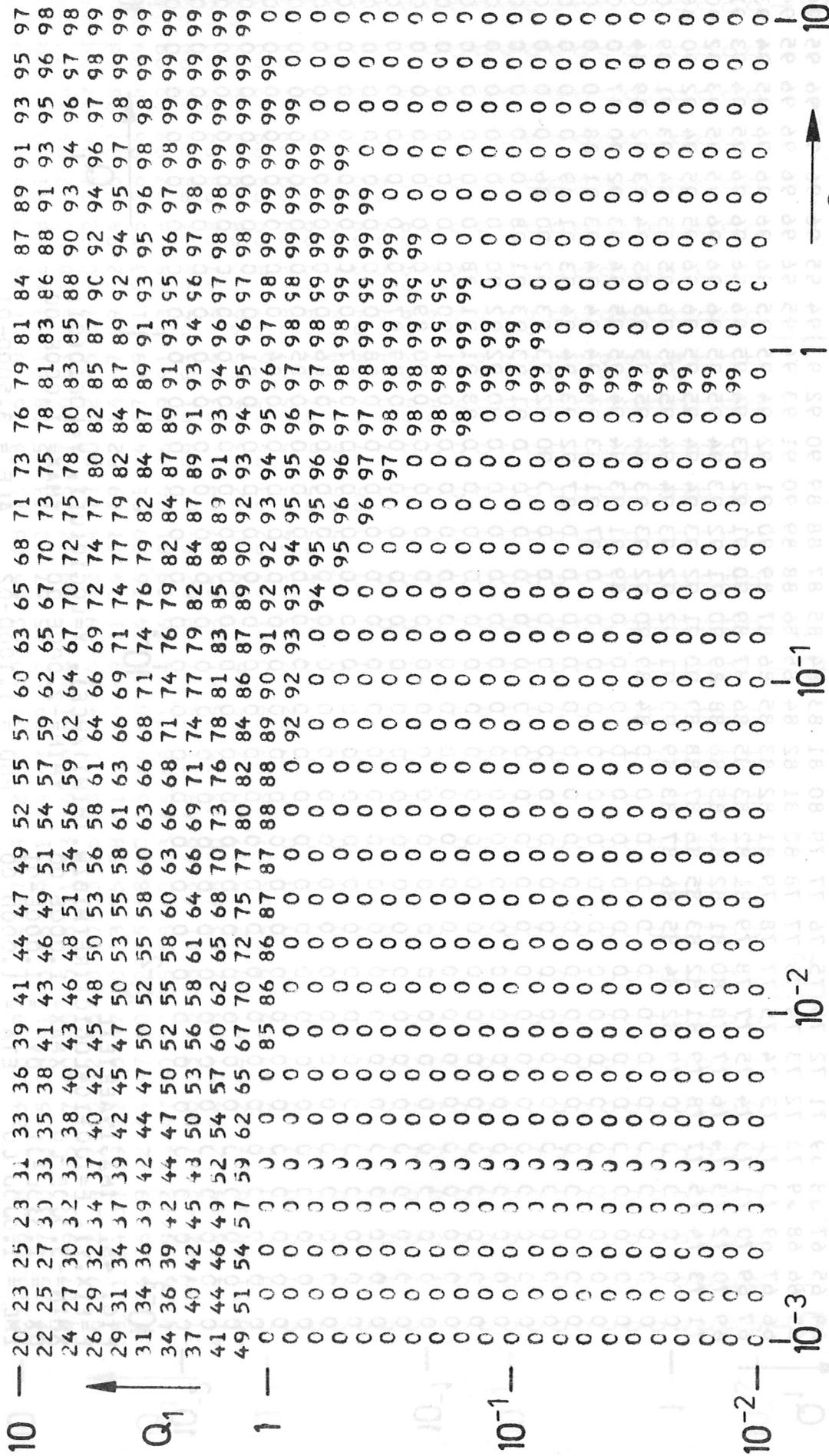


FIG. 5A, REALTEIL
 $F = F(X, Y)$, $F = 100 + 10 * \text{LOG}10((RE(W)BZW.IM(W))/WCE)$, $X = \text{LOG}10(Q1)$, $Y = \text{LOG}10(QI)$
 $XMIN = -3.000E-00$ $XMAX = 1.000E-00$ $YMIN = -2.000E-00$ $YMAX = 1.000E-00$
 $DX = 1.333E-01$ $DY = 1.000E-01$ $FND = 1.500D-02$ $ALF = 3.800D-01$
 $ZMD = 1.000D-00$ $ETA = 1.000D-00$

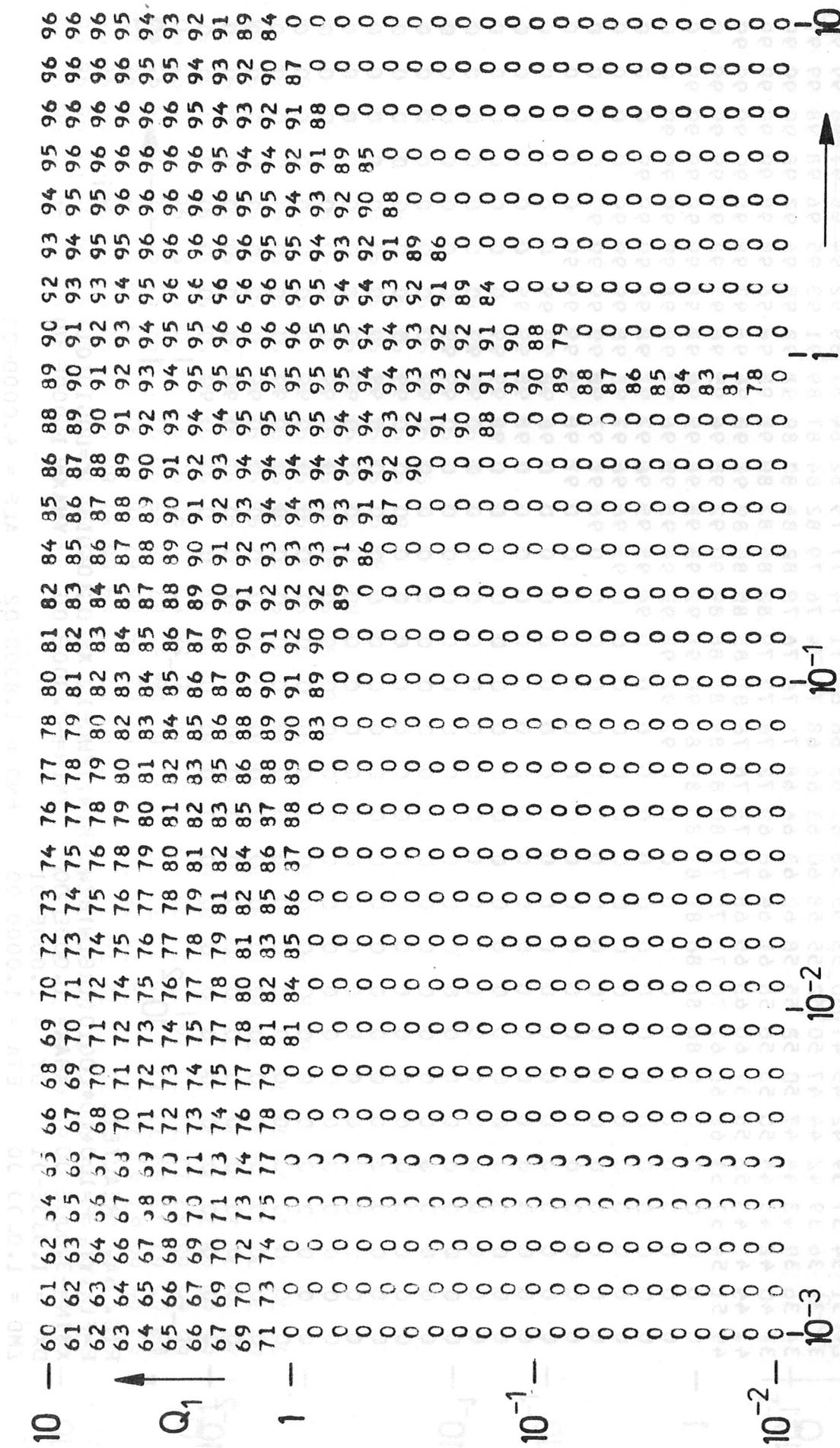


FIG. 5B: IMAGINAERTEIL
 $F=F(X,Y)$, $F=100+10*\text{LOG}10((\text{RE}(W)\text{BZW}.\text{IM}(W))/\text{WCE})$, $X=\text{LOG}10(Q1)$, $Y=\text{LOG}10(Q1)$
 $X\text{MIN}=-3.000\text{E}00$ $X\text{MAX}=1.000\text{E}00$ $Y\text{MIN}=-2.000\text{E}00$ $Y\text{MAX}=1.000\text{E}00$
 $DX=1.353\text{E}-01$ $DY=1.000\text{E}-01$ $\text{FND}=1.500\text{D}-02$ $\text{ALF}=3.800\text{D}-01$
 $Z\text{MD}=1.000\text{D}00$ $\text{ETA}=1.000\text{D}00$

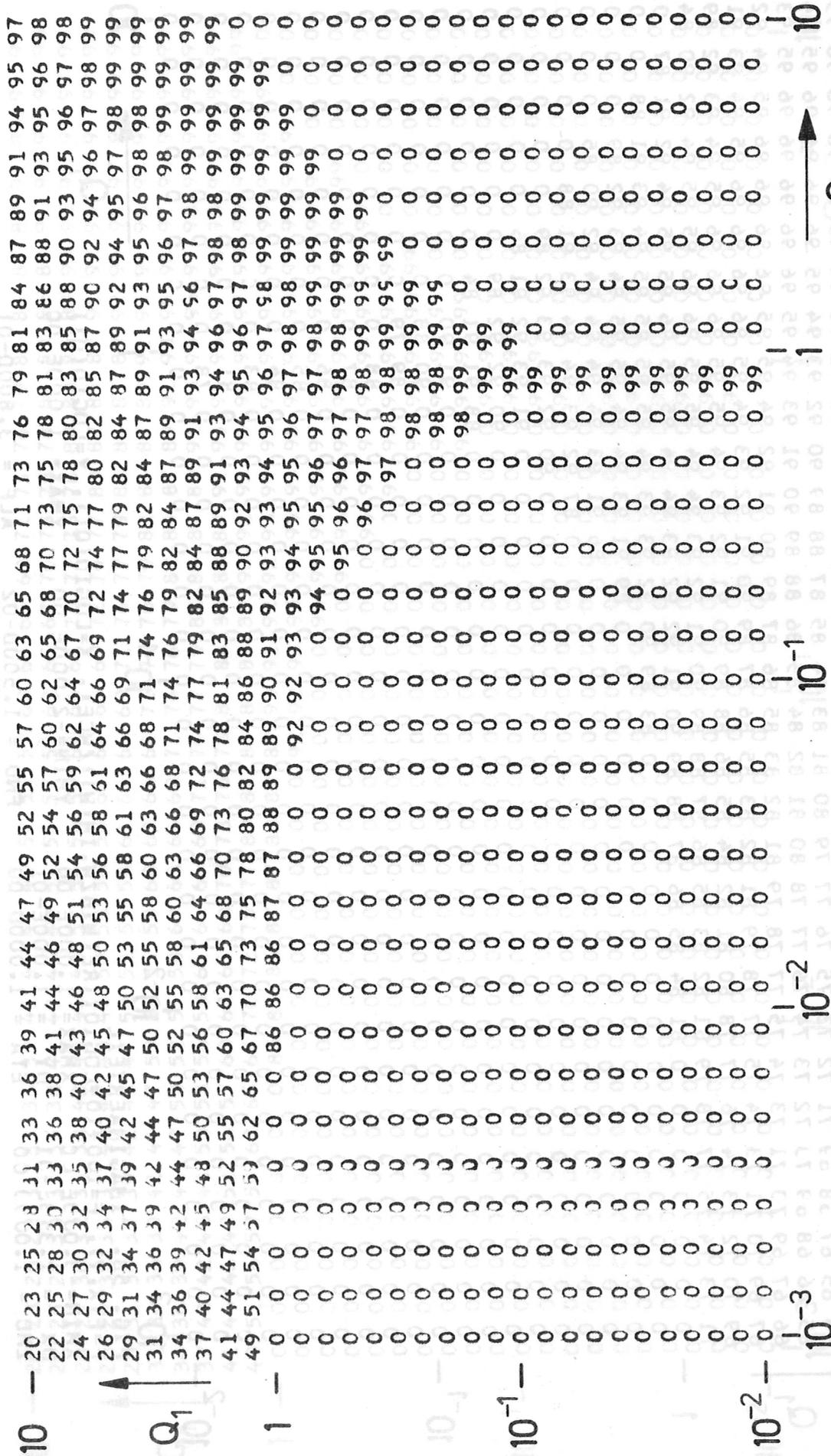


FIG. 6A, REALTEIL
 $F = F(X, Y)$, $F = 100 + 10 * \text{LOG}10((\text{RE}(W) \text{BZM} \cdot \text{IM}(W)) / \text{WCE})$, $X = \text{LOG}10(Q1)$, $Y = \text{LDG}10(Q1)$
 $X_{\text{MIN}} = -3.000E-00$ $X_{\text{MAX}} = 1.000E-00$ $Y_{\text{MIN}} = -2.000E-00$ $Y_{\text{MAX}} = 1.000E-00$
 $DX = 1.333E-01$ $DY = 1.000E-01$
 $ZMD = 1.000E-00$ $ETA = 1.000E-00$ $FND = 1.800D-02$ $ALF = 4.000D-01$

YTB = 1.000E-01

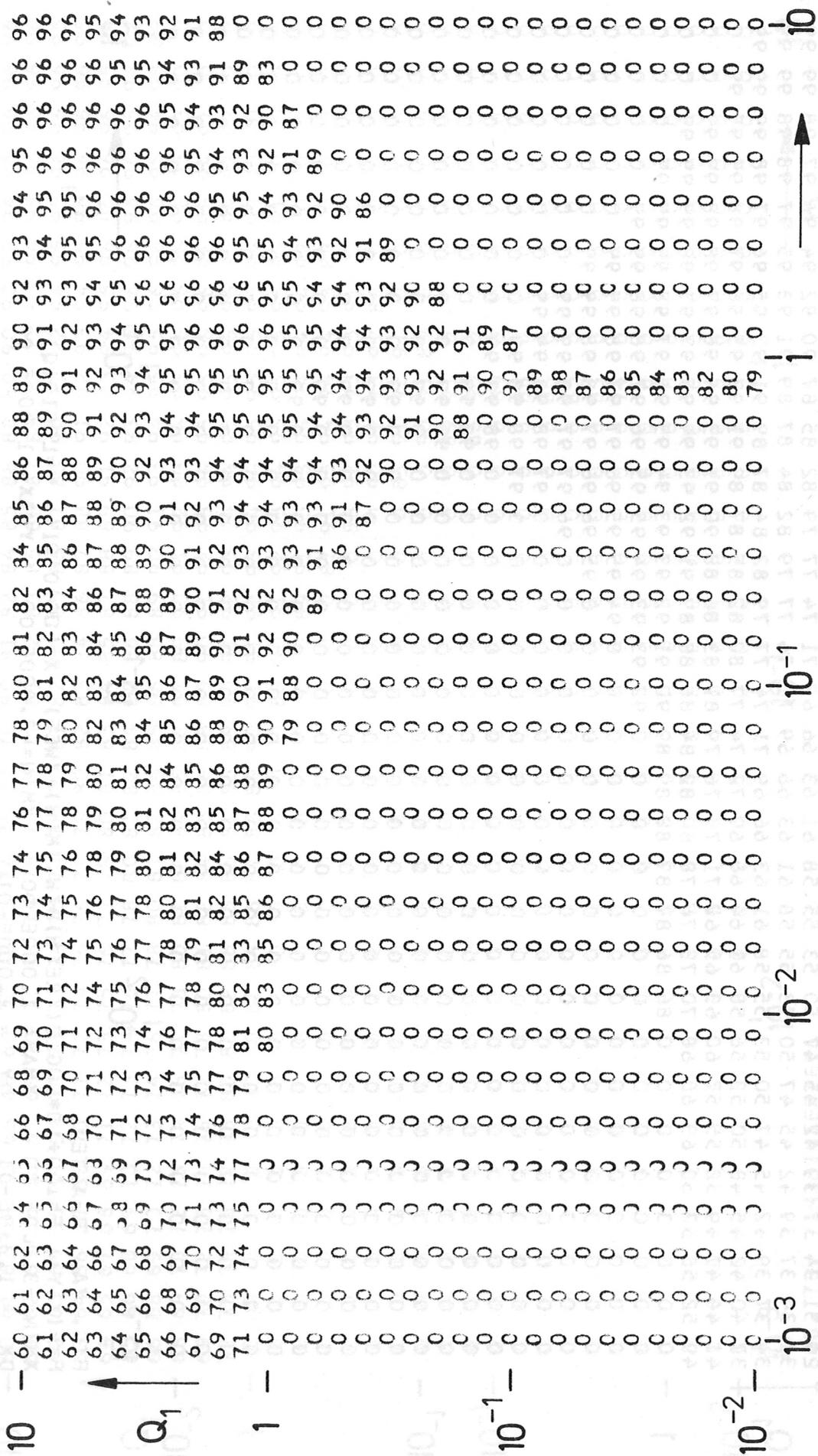


FIG. 6B, IMAGINAERTEIL
 $F = F(X, Y)$, $F = 100 + 10 * \text{LOG}_{10}((RE(W)BZW \cdot IM(W))/WCE)$, $X = \text{LOG}_{10}(Q1)$, $Y = \text{LOG}_{10}(Q1)$
 $XMIN = -3.000E 00$ $XMAX = 1.000E 00$ $YMIN = -2.000E 00$ $YMAX = 1.000E 00$
 $DX = 1.333E -01$ $DY = 1.000E -01$
 $ZMD = 1.000E 00$ $ETA = 1.000E 00$ $FND = 1.800D -02$ $ALF = 4.000D -01$

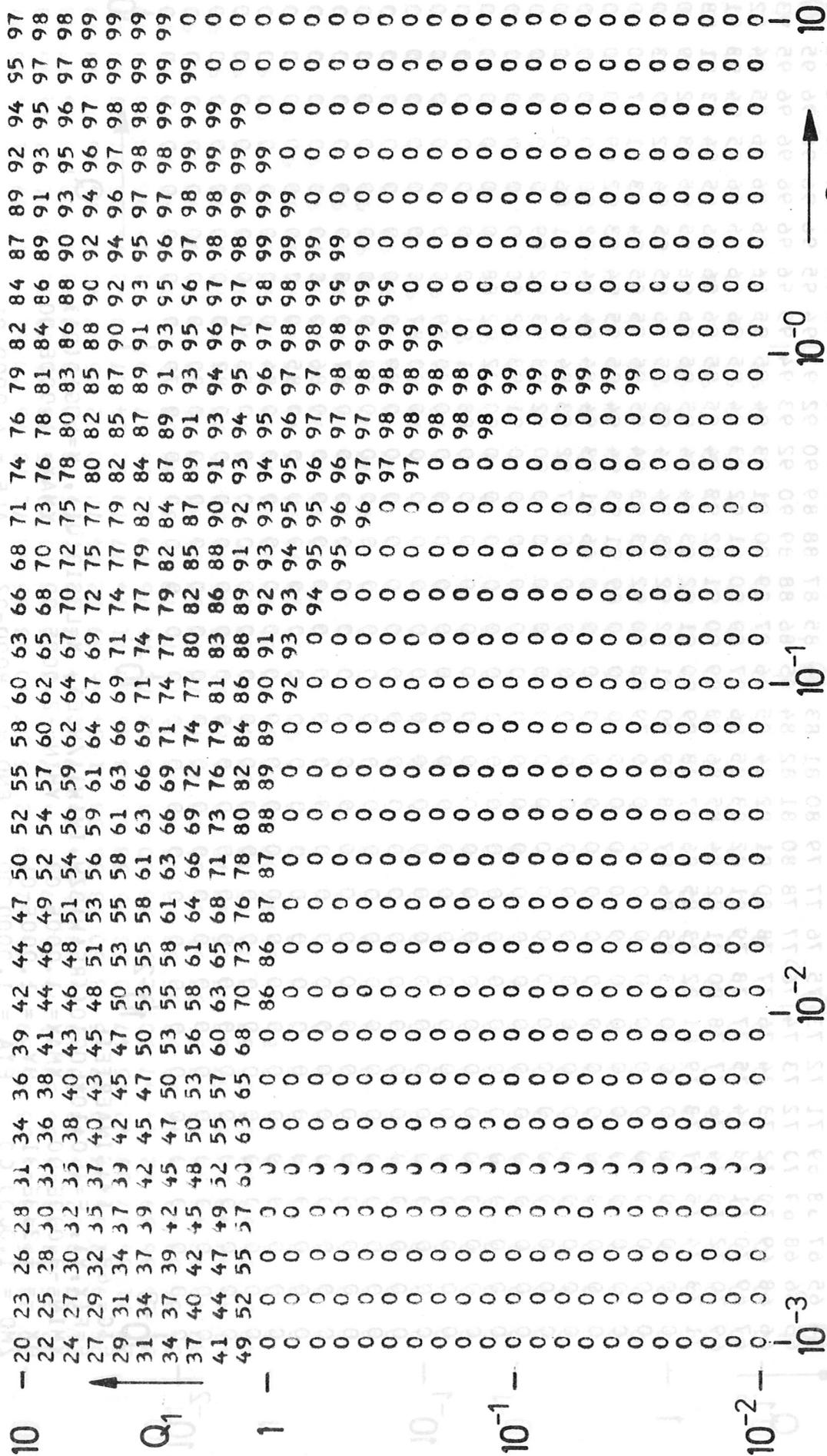


FIG. 7A, REALTEIL
 $F = F(X, Y)$, $F = 100 + 10 * \text{LOG}10((\text{RE}(W) \text{BZH} \cdot \text{IM}(W)) / \text{WCE})$, $X = \text{LOG}10(Q_i)$, $Y = \text{LOG}10(Q_1)$
 $X_{\text{MIN}} = -3.000E-00$ $X_{\text{MAX}} = 1.000E-00$ $Y_{\text{MIN}} = -2.000E-00$ $Y_{\text{MAX}} = 1.000E-00$
 $DX = 1.333E-01$ $DY = 1.000E-01$
 $ZMD = 1.0000-00$ $ETA = 1.0000-00$ $FND = 5.0000-02$ $ALF = 4.6000-01$

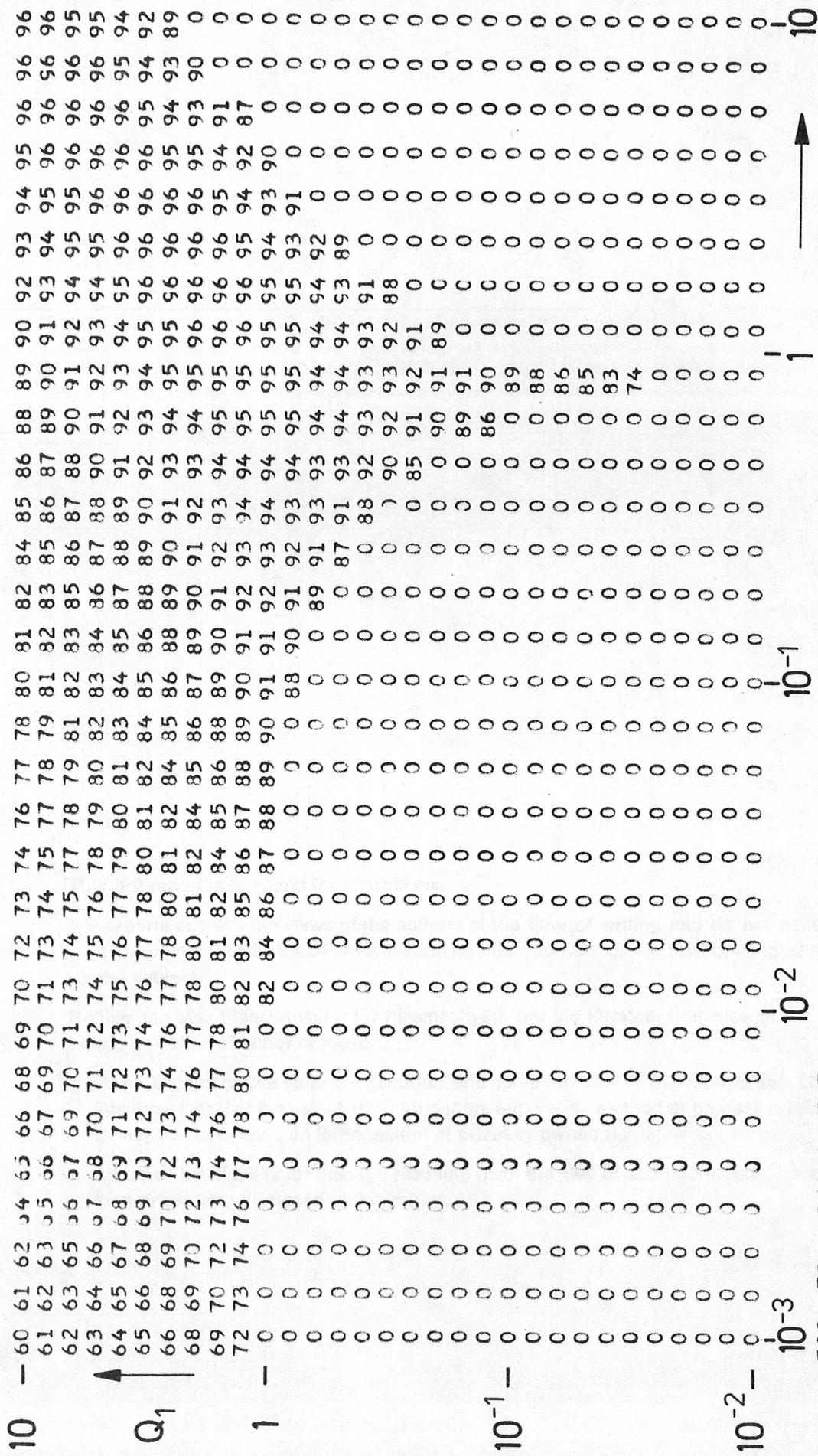


FIG. 7B, IMAGINAERTEIL
 $F = F(X, Y)$, $F = 100 + 10 * \text{LOG} 10((\text{RE}(W)BZW \cdot \text{IM}(W)) / WCE)$, $X = \text{LOG} 10(QI)$, $Y = \text{LOG} 10(Q1)$
 $X_{\text{MIN}} = -3.000E 00$ $X_{\text{MAX}} = 1.000E 00$ $Y_{\text{MIN}} = -2.000E 00$ $Y_{\text{MAX}} = 1.000E 00$
 $DX = 1.353E -01$ $DY = 1.000E -01$
 $ZMD = 1.000D 00$ $ETA = 1.000D 00$ $FND = 5.000D -02$ $ALF = 4.600D -01$