

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK
GARCHING BEI MÜNCHEN

Zyklotronstrahlung aus heißen Plasmen
(Cyclotron Radiation from Hot Plasmas)

F. Pohl, J. Henning, D. Düchs

IPP 6/132

November 1975

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

IPP 6/132

F. Pohl
J. Henning
D. Düchs

Cyclotron Radiation from
Hot Plasmas

November, 1975 (in German)

Abstract

In calculating the energy transport and losses due to cyclotron radiation there are two major requirements: the absorption coefficient has to be known and the proper geometry of the plasma has to be taken into account.

In this report TRUBNIKOV's integral formulae / 4 / for the absorption coefficient have been evaluated numerically and compared with the approximative formulas of previous authors.

Deviations by a factor of 2-10 in various frequency regimes are not unusual.

With these coefficients the rate of change of the energy density due to cyclotron radiation in a plasma as well as the radiation density at a plasma surface are computed for plasma slab and plasma cylinder.

Sometimes considerable differences to the results of previous papers can be found.

Many simple formulae interpolating the numerical results are given in the text, and the FORTRAN computer programs have been reproduced in the appendices.

Inhalt

- § 1 Einleitung
- § 2 Definition des Absorptionskoeffizienten und der Emissivität
- § 3 Die Theorie des Absorptionskoeffizienten für kleine Dichten
- § 4 Integralformeln für den dimensionslosen Absorptionskoeffizienten A
- § 5 Näherungsformeln
- § 6 Energiebilanz
- § 7 Homogenes Plasma
- § 8 Plasma-Platte und Plasma-Zylinder
- § 9 Fusionsenergie, Bremsstrahlung und kritische Länge
- § 10 FORTRAN-Programm zur Berechnung von A nach Gl. (4.9)
- § 11 FORTRAN-Programm zur Berechnung von I nach Gl. (7.6-7.8)
- § 12 Einfluß von reflektierenden Wänden

Einleitung

In Experimenten zum Plasmaeinschluß mit zunehmend höheren Magnetfeldern (Alcator-Reihe, Frascati-Tokamak) bis hin zum Fusionsreaktorplasma gewinnt die Zyklotronstrahlung immer mehr an Bedeutung für Energietransport und Energieverlust. Seit den Arbeiten von TRUBNIKOV und ROSENBLUTH haben sich zahlreiche Autoren mit der Zyklotronstrahlung beschäftigt (/1/ - /8/, /14/). Die meisten dieser Rechnungen behandeln die Plasma-Platte (z.B. /1/). Für Zylinder oder Torus liegen unseres Wissens bisher nur Abschätzungen vor. (z.B. /11/). Ferner erfordern derartige Rechnungen die Kenntnis von Emissions- und Absorptionskoeffizienten. Eine kritische Durchsicht der Literatur ergab, daß bei der Zyklotron-Strahlung für diese Koeffizienten nur eine vereinfachte Theorie existiert. Selbst deren Formeln wurden immer nur näherungsweise ausgewertet, wobei der Anwendungsbereich derartiger Näherungen nur schwer abschätzbar ist.

Die Vereinfachung beruht auf der Annahme, daß sich die Elektronen, die Zyklotronstrahlung emittieren, unkorreliert bewegen und strahlen. Der Emissionskoeffizient des Plasmas wird dann durch Summation über Einteilchen-Emissivitäten für relativistische MAXWELL-Verteilung der Plasmaelektronen berechnet und wird dadurch proportional zur Elektronendichte. Der Absorptionskoeffizient wird sodann mit Hilfe des KIRCHHOFF'schen Gesetzes aus der Emissivität bestimmt, s. § 2. Die Linearität des Absorptionskoeffizienten in der Elektronendichte ermöglicht die Einführung eines dimensionslosen Absorptionskoeffizienten, welcher von nur 3 Parametern abhängt, s. § 3.

In diesem Bericht wird der Absorptionskoeffizient aus den "exakten" Formeln (Ref. /4/, Anhang) numerisch berechnet und mit den Näherungen anderer Autoren verglichen, s. § 4 und § 5. Ferner geben wir Integralformeln an für die zeitliche Abnahme der Plasma-Energiedichte infolge Zyklotronstrahlung sowie für die Strahlungsintensität an der Plasmaoberfläche, s. § 6. Diese Formeln wenden wir an für Platten- und Zylindergeometrie; die numerischen Resultate werden in Form von Kurven, Tabellen und Näherungsformeln dargestellt, s. § 8. Die Zyklotronstrahlungsverluste wachsen nicht so stark mit der Plasma-Ausdehnung, wie die Fusionsenergie-Erzeugung; folglich gibt es eine "kritische Plasmatdicke", bei welcher Energieerzeugung und Verlust sich gerade kompensieren. Die hier in § 9 angegebenen kritischen Plasma-Dimensionen sind teilweise sehr viel größer (bis zu 1000 mal), als die aus ROSENBLUTH's Arbeit /1/ bekannten Werte.

Der Anhang enthält die FORTRAN-Programme, welche zu den numerischen Rechnungen benutzt wurden (§ 10 und § 11) sowie eine Abschätzung des Einflusses von reflektierenden Wänden (§ 12). In einem nachfolgenden Bericht wird die Zyklotronstrahlung in Torusgeometrie behandelt.

§ 2 Definition des Absorptionskoeffizienten und der Emissivität

Zur Einführung der wichtigsten Bezeichnungen werden die Definitionen des Absorptions- und des Emissionskoeffizienten hier wiederholt.

Der Absorptionskoeffizient α beschreibt, welcher Anteil einer einfallenden Strahlungsenergie beim Durchgang durch Materie absorbiert wird.

Abb. 1 zeigt eine von links nach rechts gehende Strahlung beschrieben durch die Energiestromdichte u .

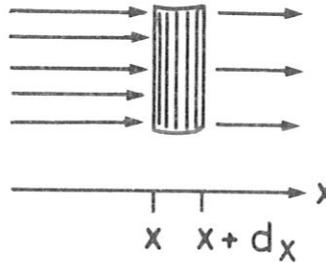


Abb. 1

Dann ist

$$u(x+dx) = u(x) + du$$

mit $du = -\alpha u dx$

(2.1)

Die Emissivität η oder Strahlungsleistung pro Volumenelement und pro Frequenzintervall (erg/cm^3) ist im Gleichgewichtsfall mit dem Absorptionskoeffizienten α durch KIRCHHOFF's Gesetz verknüpft:

$$\eta = \alpha \cdot J \quad (2.2)$$

wobei in RAYLEIGH-JEANS-Näherung

$$J = \frac{\omega^2 k T_e}{8\pi^3 c^2} \quad (2.3)$$

T_e = Elektronentemperatur

c = Lichtgeschwindigkeit

k = BOLTZMANN-Konstante

ω = Frequenz der einfallenden
bzw. emittierten Strahlung

Die Annahme, daß thermisches Gleichgewicht vorliegt, ist bei den meisten Plasma-Experimenten eine gute Näherung, da die Lebensdauer des Plasmas groß ist verglichen mit der Relaxationszeit der Elektronen.

§3 Die Theorie des Absorptionskoeffizienten für kleine Dichten

Wie schon in der Einleitung erwähnt, existiert eine Theorie für die Absorption der Zyklotronstrahlung in Plasmen, siehe z.B. /4/, /12/, die einige vereinfachende Annahmen macht. Diese Theorie setzt für die Emissivität

$$\eta = \int I \, dn_e \quad (3.1)$$

an, wobei

I = Strahlungsintensität des einzelnen
gyrierenden Elektrons im Vakuum; s.Gl.(3.8);

dn_e = Beitrag des Impulsraum-Elements d^3p
zur Elektronendichte; s.Gl.(3.5).

Bei einem derartigen Ansatz ist

$$\eta \propto n_e \quad , \quad (3.2)$$

η also eine lineare Funktion der Elektronendichte.

Dies ist eine Konsequenz aus der Voraussetzung, daß I die Strahlungsintensität des einzelnen Elektrons im **V a k u u m** sein soll. Diese Voraussetzung ist bei reellen Plasmen sicher nicht erfüllt: die Elektronen stören einander, und dies um so merklicher, je höher die Dichte ist. Nun haben DRUMMOND und ROSENBLUTH /1/ gezeigt, daß sich die Elektronen im Plasma so verhalten, als seien sie im Vakuum, sobald die

Bedingung $\omega \gg \omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n_e e^2}{m}}$ (3.3)

erfüllt ist. Man sieht dies auch an der Formel für I, welche die Dielektrizitätskonstante des Vakuums enthält, welche in den hier benutzten GAUSS-Einheiten = 1 ist. Ersetzt man die Dielektrizitätskonstante des Vakuums durch die des Plasmas, so erhält man

$$I_{\text{Plasma}} = I \frac{1}{\epsilon_{\text{Plasma}}}$$

ϵ_{Plasma} hat Tensorcharakter; die Abweichung vom Einheitstensor hat qualitativ die Form (vgl. z.B. Ref. /7/)

$$\epsilon_{\text{Plasma}} - 1 \approx \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(T_e)}{\frac{\omega}{\omega_H} - n} \quad (3.4)$$

wobei die Funktion f_n für jede Komponente des Tensors anders sein kann. Wenn die Theorie anwendbar sein soll, muß

$$\epsilon_{\text{Plasma}} \approx 1$$

sein. Dafür ist Bedingung (3.3) notwendig, aber nicht hinreichend. Denn in der Umgebung der Resonanzstellen

$$\omega = n \omega_H$$

existiert ein Intervall der Länge

$$\Delta\omega \approx \frac{\omega_p^2}{n\omega_H} \quad (3.4a)$$

in welchem ϵ_{Plasma} wesentlich von 1 verschieden sein kann - auch wenn (3.3) erfüllt ist. Die Bedingung, daß $\Delta\omega$ genügend klein sein soll, führt dann neben (3.3) zu einer weiteren Einengung des Gültigkeits-

bereiches der Theorie.

Wir gehen hierauf nicht weiter ein, sondern beschränken uns wie die anderen Autoren auf den Gültigkeitsbereich der Annahmen.

Wir nehmen nun an, daß die Elektronen eine relativistische MAXWELL-Verteilung haben:

$$dn_e = n_e c_0 \exp \left[-\mu \sqrt{1+p^2} \right] d^3p \quad (3.5)$$

wobei \vec{p} = Elektronenimpuls in Einheiten mc

$$\mu = \frac{mc^2}{kT_e} \quad (3.6)$$

m = Elektronenmasse

c_0 ist definiert durch

$$\int dn_e = n_e$$

$$c_0 \int \exp \left[-\mu \sqrt{1+p^2} \right] d^3p = 1$$

woraus in guter Näherung folgt:

$$c_0 = e^\mu \left[\frac{\mu}{2\pi \left(1 + \frac{1.28}{\mu} \right)} \right]^{3/2} \quad (3.7)$$

Der Faktor $1 + \frac{1.28}{\mu}$ ist eine relativistische Korrektur; die exakte Formel ist in Ref. /10/ angegeben. DRUMMOND und ROSENBLUTH haben den Korrekturfaktor in ihrer Arbeit /1/ weggelassen. Die Strahlungsintensität eines einzelnen Elektrons im Vakuum /4/ beträgt

$$I = \frac{e^2 \omega^2}{2\pi c} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \delta \left(n \omega_{rel} - \omega (1 - \beta_{||} \cos \theta) \right) \quad (3.8)$$

mit

$$\vec{\beta} = \vec{p} / \sqrt{1+p^2} \quad , \quad \text{Geschwindigkeit in Einheiten der} \quad (3.9)$$
 Lichtgeschwindigkeit

Sei

$$\omega_{\text{rel}} = \frac{eH}{mc} / \sqrt{1+p^2} \quad , \quad \text{relativistische Gyrationfrequenz,} \quad (3.10)$$

da

$$\omega_H = \frac{eH}{mc} \quad , \quad \text{nicht-relativist. Gyrationfrequenz,}$$

Def

$$B_n = \left(\frac{\cos\theta - \beta_{||}}{\sin\theta} \right)^2 J_n^2 + \beta_{\perp}^2 J_n'^2 \quad , \quad (3.11)$$

Die
 J_n = BESSEL-Funktion; J_n' = Ableitung nach dem Argument.

Als Argument ist jeweils $\frac{\omega}{\omega_H} p_{\perp} \sin\theta$ einzusetzen. (3.12)

Außerdem bedeuten

H = Magnetfeldstärke in GAUSS

e = Elementarladung in el. stat. Einheiten

θ = Winkel zwischen dem Magnetfeld \vec{H} und dem
 Wellenvektor der emittierten Strahlung;
 s. Abb. 2.

Wir setzen nun (3.8) und (3.5) in (3.1) ein
 und dann (3.1) in (2.2) und erhalten

$$\alpha = \frac{\omega^2 p}{c\omega_H} A \quad (3.13)$$

$$A = \pi c_0 \mu \int \sum_{n=1}^{\infty} B_n w e^{-w|t|} \delta\left(n - \frac{\omega}{\omega_H} w(1 - \beta_{||} \cos\theta)\right) d^3 p \quad (3.14)$$

$$w \equiv \sqrt{1+p^2} \quad (3.15)$$

Wir nennen A den "dimensionslosen Absorptionskoeffizienten".
 A hängt ab von den 3 Parametern $\mu, \frac{\omega}{\omega_H}, \theta$;
 α hängt außerdem ab von der Dichte sowie vom Magnetfeld. Wir
 werden nun in §4 die Gl. (3.14) für A umformen und numerisch
 integrieren sowie mit verschiedenen Näherungsformeln vergleichen.

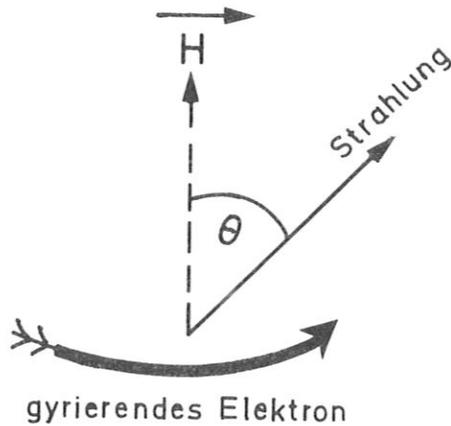


Abb. 2

§4 Integralformeln für den dimensionslosen Absorptionskoeffizienten A

Die Gleichung (3.14) für den dimensionslosen Absorptionskoeffizienten A findet sich in ähnlicher Form bei TRUBNIKOV (Ref. /4/). Es gibt nun zwei Möglichkeiten, aus (3.14) Integralformeln zu gewinnen, in welchen über nur eine Integrationsvariable integriert wird:

- 1) Man führt die Integration über dp_{\perp} in Gl. (3.8) mittels der δ -Funktion aus und erhält A als Integral über dp_{\parallel} .
- 2) Man folgt TRUBNIKOV bis zu dessen Gl. (A12), formt (A12) um und erhält A als Integral über $d\xi$ /4/. Wir werden beides durchführen.

Wenn man numerisch genau genug rechnet, liefern beide Verfahren dasselbe Resultat, womit zugleich die Zuverlässigkeit der numerischen

Rechnung sowie der TRUBNIKOV'schen Endformeln getestet ist. Wir beginnen mit der Integration über dp_{\perp} in Gl. (3.14).

\vec{p} kommt nur als p_{\perp} oder p_{\parallel} vor; folglich ist $d^3p = 2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dp_{\parallel}$

Setzen wir
$$q = p_{\perp}^2 \quad (4.1)$$

dann erhalten wir
$$d^3p = \pi dq dp_{\parallel} \quad (4.2)$$

Das Argument der δ -Funktion ist
$$g = n - \frac{\omega}{\omega_H} (w - p_{\parallel} \cos\theta) \quad (4.3)$$

mit
$$w = \sqrt{1+q+p_{\parallel}^2} \quad (4.4)$$

Die Integration über dq geht von 0 bis $+\infty$; in diesem Intervall

besitzt g genau eine Nullstelle
$$q_0 = (V+p_{\parallel} \cos\theta)^2 - 1 - p_{\parallel}^2 \quad (4.5)$$

wobei
$$V = \frac{n\omega_H}{\omega} \quad (4.6)$$

Daraus folgt
$$\delta(g) = 2 \frac{\omega_H}{\omega} w_0 \delta(q - q_0) \quad (4.7)$$

mit
$$w_0 = \sqrt{1+q_0+p_{\parallel}^2} = V + p_{\parallel} \cos\theta \quad (4.8)$$

und somit

$$A = 2\pi^2 c_0 \frac{\omega_H}{\omega} \int_{p_1}^{p_2} \sum_{n_{\min}}^{\infty} B_n e^{-w_0 \mu} (V + p_{\parallel} \cos\theta)^2 dp_{\parallel} \quad (4.9)$$

Aus der Bedingung $q_0 \geq 0$ folgt

$$p_{1,2} = \frac{1}{\sin^2\theta} \left[V \cos\theta \mp \sqrt{V^2 - \sin^2\theta} \right] \quad (4.10)$$

$$n > \frac{\omega}{\omega_H} \sin\theta \quad (4.11)$$

n_{\min} ist die kleinste ganze Zahl, welche Bedingung (4.11) erfüllt.

Das Argument der BESSEL-Funktionen in B_n ist $\frac{\omega}{\omega_H} \sqrt{q_0} \sin\theta$;

ferner hängt B_n noch über $\beta_n = p_n / \omega_0$ von p_n und q_0 ab.

Nun zur zweiten Möglichkeit, A als eindimensionales Integral darzustellen! Durch Umformen von TRUBNIKOV's Gleichung (A12) erhält man

$$A = 4 \pi \mu c_0 \int_0^{\infty} d\xi \operatorname{Re} \left[4G' B_5 + (4G' - G) \cos^2 \frac{\xi}{2} \right] d\xi \quad (4.12)$$

mit

$$B_5 = \cot^2 \theta \cdot \mu^2 + \left[\mu^2 - 2i\mu \frac{\omega}{\omega_H} \xi - (\sin^2 \theta) \left(\frac{\omega}{\omega_H} \right)^2 \xi^2 \right] \cos^2 \frac{\xi}{2} \quad (4.13)$$

$$+ \left[2 \frac{\omega}{\omega_H} \sin\theta \sin \frac{\xi}{2} \right]^2$$

$$G = G(R) = \frac{K_1(\sqrt{R})}{\sqrt{R}} ; \quad K_1 \equiv \text{modifizierte BESSEL-Funktion} \quad (4.14)$$

$$G' = \frac{dG}{dR}$$

$$R = \mu^2 - 2i\mu \frac{\omega}{\omega_H} \xi + \left(\frac{\omega}{\omega_H} \sin\theta \right)^2 (2 - 2\cos\xi - \xi^2) \quad (4.15)$$

Der Integrand von (4.12) zeigt qualitativ das in Abb. 3 dargestellte Verhalten.

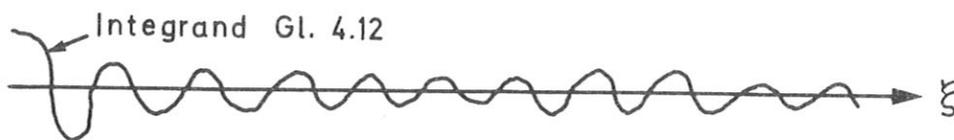


Abb. 3

Rechnung sowie der TRUBNIKOV'schen Endformeln getestet ist. Wir beginnen mit der Integration über dp_{\perp} in Gl. (3.14).

\vec{p} kommt nur als p_{\perp} oder p_{\parallel} vor; folglich ist $d^3p = 2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dp_{\parallel}$

Setzen wir
$$q = p_{\perp}^2 \quad (4.1)$$

dann erhalten wir
$$d^3p = \pi dq dp_{\parallel} \quad (4.2)$$

Das Argument der δ -Funktion ist
$$g = n - \frac{\omega}{\omega_H} (w - p_{\parallel} \cos\theta) \quad (4.3)$$

mit
$$w = \sqrt{1+q+p_{\parallel}^2} \quad (4.4)$$

Die Integration über dq geht von 0 bis $+\infty$; in diesem Intervall

besitzt g genau eine Nullstelle
$$q_0 = (V+p_{\parallel} \cos\theta)^2 - 1 - p_{\parallel}^2 \quad (4.5)$$

wobei
$$V = \frac{n\omega_H}{\omega} \quad (4.6)$$

Daraus folgt
$$\delta(g) = 2 \frac{\omega_H}{\omega} w_0 \delta(q - q_0) \quad (4.7)$$

mit
$$w_0 = \sqrt{1+q_0+p_{\parallel}^2} = V+p_{\parallel} \cos\theta \quad (4.8)$$

und somit

$$A = 2\pi^2 c_0 \frac{\omega_H}{\omega} \int_{P_1}^{P_2} \sum_{n_{\min}}^{\infty} B_n e^{-w_0 \mu} (V+p_{\parallel} \cos\theta)^2 dp_{\parallel} \quad (4.9)$$

Aus der Bedingung $q_0 \geq 0$ folgt

$$p_{1,2} = \frac{1}{\sin^2\theta} \left[V \cos\theta \mp \sqrt{V^2 - \sin^2\theta} \right] \quad (4.10)$$

$$n > \frac{\omega}{\omega_H} \sin\theta \quad (4.11)$$

n_{\min} ist die kleinste ganze Zahl, welche Bedingung (4.11) erfüllt.

Das Argument der BESSEL-Funktionen in B_n ist $\frac{\omega}{\omega_H} \sqrt{q_0} \sin\theta$;

ferner hängt B_n noch über $\beta_n = p_n / \omega_0$ von p_n und q_0 ab.

Nun zur zweiten Möglichkeit, A als eindimensionales Integral darzustellen! Durch Umformen von TRUBNIKOV's Gleichung (A12) erhält man

$$A = 4 \pi \mu c_0 \int_0^{\infty} d\xi \operatorname{Re} \left[4G' B_5 + (4G' - G) \cos^2 \frac{\xi}{2} \right] d\xi \quad (4.12)$$

mit

$$B_5 = \cot^2 \theta \cdot \mu^2 + \left[\mu^2 - 2i\mu \frac{\omega}{\omega_H} \xi - (\sin^2 \theta) \left(\frac{\omega}{\omega_H} \right)^2 \xi^2 \right] \cos^2 \frac{\xi}{2} \quad (4.13)$$

$$+ \left[2 \frac{\omega}{\omega_H} \sin\theta \sin \frac{\xi}{2} \right]^2$$

$$G = G(R) = \frac{K_1(\sqrt{R})}{\sqrt{R}} ; \quad K_1 \equiv \text{modifizierte BESSEL-Funktion} \quad (4.14)$$

$$G' = \frac{dG}{dR}$$

$$R = \mu^2 - 2i\mu \frac{\omega}{\omega_H} \xi + \left(\frac{\omega}{\omega_H} \sin\theta \right)^2 (2 - 2\cos\xi - \xi^2) \quad (4.15)$$

Der Integrand von (4.12) zeigt qualitativ das in Abb. 3 dargestellte Verhalten.

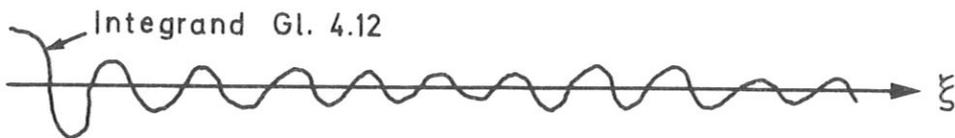


Abb. 3

Der Wert des Integrals in (4.12) ist oft nur 1 Tausendstel oder Millionstel des Integrals über eine Halbwelle; folglich braucht man viele 1000 Stützstellen und muß mit doppelter Genauigkeit rechnen.

§5 Näherungsformeln

(5.2)

Wir stellen nun einige Näherungsformeln zusammen und vergleichen sie mit den Resultaten, welche wir aus der numerischen Integration der Gleichungen (4.9) und (4.12) erhalten haben. Sämtlichen uns bekannten Näherungsformeln ist gemeinsam, daß sie vom Typ (3.13) sind, wobei dann für A verschiedene Näherungen eingeführt werden. Wir geben daher nur den dimensionslosen Absorptionskoeffizienten hier an, welcher aus dem in der Literatur angegebenen durch Streichung des Faktors

$$\frac{\omega^2}{c\omega_H} \text{ entsteht.}$$

DRUMMOND und ROSENBLUTH geben in ihrer Arbeit/1/ eine Näherungsformel an für den Fall, daß die Strahlung sich senkrecht zum Magnetfeld bewegt:

$$A_1 = \frac{1}{4} \sqrt{\mu \pi} (\epsilon^2 - 1)^{3/2} \cdot \left(\frac{\mu \omega_H}{\omega}\right)^2 \cdot \exp \left[\mu - \frac{2\omega/\omega_H}{\epsilon^2 - 1} \right] \quad (5.1)$$

(Den Anteil $m \cos^2 \theta$ haben wir weggelassen, weil er falsch ist; vgl. /4/)

Dabei ist ϵ die Lösung der Gleichung

$$\frac{2\epsilon}{\epsilon^2 - 1} - \ln \frac{\epsilon + 1}{\epsilon - 1} = \frac{\mu \omega_H}{\omega} \quad (5.2)$$

Gl. (5.1) gilt für heiße Plasmen und hohe Frequenzen, wenn A als

Funktion von ω/ω_H keine Schwingungen mehr aufweist; Die Abb. 4e und 4f zeigen diese Eigenschaft deutlich. Nach TRUBNIKOV (Ref. /4/) erhält man die Winkelabhängigkeit, wenn man die Formel für $\theta=90^\circ$ (wir benutzen Gl. (5.1)) wie folgt erweitert:

$$A_4 = A_1 \exp \left(-K \cdot \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)^2 \right) \quad (5.3)$$

wobei

$$K = \frac{\omega}{\omega_H} f(x) \quad (5.4)$$

$$x = \frac{\omega}{\omega_H} \frac{1}{t} \quad (5.5)$$

Für $f(x)$ werden Formeln sowie eine Tabelle angegeben, welche wir in guter Näherung durch

$$f(x) = (1 + 48x^2)^{-1/3} \quad (5.6)$$

interpolieren.

Bei relativ niedrigen Frequenzen und Temperaturen ist TRUBNIKOV's Ansatz für die θ -Abhängigkeit oft viel zu stark vereinfacht. Abb.6 gibt den numerisch berechneten Verlauf von A wieder. Nur den Fall $\omega/\omega_H = 1.9$ könnte man näherungsweise durch einen Ansatz vom Typ (5.3) beschreiben. In ihrer Arbeit /5/ geben ENGELMANN und CURATOLO eine Formel an, welche für kleine Temperaturen (einige keV) gelten soll:

$$A_5 = \sum_{n=1}^{n_{\max}} a_n p_n \quad (5.7)$$

wobei $n_{\max} = 0.8 \sqrt{t}$

$$a_n = \frac{\pi}{2} \frac{n^{2n-1}}{(n-1)!} \left[\frac{\sin^2 \theta}{2\mu} \right]^{n-1} \left[1 + \cos^2 \theta \right] \cdot \sin \theta \quad (5.8)$$

$$p_n = \frac{1}{\sqrt{\pi} D} \cdot \exp \left[- \left(\frac{\omega/\omega_H - n}{D} \right)^2 \right] \quad (5.9)$$

$$D = \sqrt{2} \cdot n \cdot \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\mu}} \cos \theta & \cos \theta > \sqrt{n/\mu} \\ \sqrt{\frac{n}{\mu}} & \cos \theta < \sqrt{n/\mu} \end{cases} \quad (5.10)$$

Diese Formeln basieren auf der Approximation (vgl. Ref. /3/)

$$J_n(x) = \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2} \right)^n \quad (5.11)$$

für die in Gl. (3.11) auftretenden BESSEL-Funktionen. Für kleine Winkel θ fällt A_5 zu niedrig aus (in Abb.4 etwa um einen Faktor 2). Bei $\theta=90^\circ$ liegen die Maxima von A_5 zu hoch und sind erheblich zu höheren Frequenzen hin verschoben (Abb.4d). Für den Spezialfall der Platten-geometrie (plasma slab) geben HIRSHFIELD et al. folgende Formel an:

(s. Ref. /14/):

$$A_H = \sum_n \frac{\pi}{n^2 x^3} \cdot \mu^2 \exp \left(- \mu \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \right) \left\{ J_{2n} - \frac{\sum_{k=1}^{\infty} J_{2n+2k+1}}{x^2 \sqrt{1-x^2}} - \frac{J_{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}} \right\} \quad (5.12)$$

wobei

$$\theta = 90^\circ$$

$$x = \frac{\omega}{n\omega_H}$$

Das Argument aller vorkommenden BESSEL-Funktionen ist $2n\sqrt{1-x^2}$.

Die Zahl n ist dabei so zu wählen, daß

$$x < 1$$

dies liefert ähnlich wie Gl. (4.11) eine untere Schranke für n .

In Abb. 4 und 5 werden die Näherungswerte von ROSENBLUTH, TRUBNIKOV, ENGELMANN und HIRSHFIELD mit den numerisch gemäß Gl. (4.9) berechneten A-Werten verglichen.

Zum Verständnis der Kurven betrachten wir den Spezialfall $\theta=90^\circ$ (z.B. Abb. 4d, e, f.). Man sieht scharfe Maxima und dicht benachbarte Minima in der Nähe von ganzzahligen ω/ω_H - Werten. Wir setzen die Approximation (5.11) in Gl. (4.9) ein und erhalten

$$A = 4\pi^2 c_0 \mu \sum_{n=n_{\min}}^{\infty} \frac{e^{-V\mu} \left(\frac{\omega}{\omega_H}\right)^{2n-1} (V^2-1)^{n+\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{1}{2}\right) \left(2+\frac{1}{2}\right) \dots \left(n+\frac{1}{2}\right) n! 4^n} A^{(n)} \quad (5.13)$$

$$A^{(n)} = V^2 + \frac{V^2-1}{2n+3} \quad (5.14)$$

Der Anteil $(V^2-1)^{n+\frac{1}{2}} e^{-V\mu}$

bestimmt gemäß Gl. (4.6) und (4.11) das qualitative Verhalten, da n_{\min} in der Umgebung von ganzzahligen ω/ω_H -Werten um 1 springt. Die gemäß (5.13) und (5.14) berechneten A-Werte sind für kleine Temperaturen und Frequenzen einigermaßen brauchbar; für $\omega \gtrsim 3\omega_H$ werden sie jedoch um den Faktor 1.5 bis 3 zu groß. Dies liegt an der Approximation (5.11), welche zu große Werte für die BESSEL-Funktionen liefert. Benutzt man anstelle von (5.11)

$$J_n(x) = \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \left[1 - \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^4 \right]$$

$$x \cdot J_n'(x) = \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \left[n - \frac{n+2}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{n+4}{2(n+1)(n+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{(n+6)}{6(n+1)(n+2)(n+3)} \left(\frac{x}{2}\right)^6 \right]$$

so erhält man ebenfalls (5.13), aber mit

$$A^{(n)} = b_0 + \frac{b_2 + \frac{3b_4 + \frac{15b_6}{2n+7}}{2n+5}}{2n+3} \quad (5.15)$$

wobei die b_k nach folgender Prozedur zu berechnen sind:

$$\hat{a}_1 = \left(\frac{\omega}{2\omega_H}\right)^2 \frac{1}{n+1} \quad \hat{c}_1 = (n+2)\hat{a}_1$$

$$a_2 = \left(\frac{\omega}{2\omega_H}\right)^2 \frac{\hat{a}_1}{2(n+2)} \quad \hat{c}_2 = (n+4)a_2$$

$$p_1^2 = v^2 - 1 \quad c_3 = \frac{n+6}{6(n+3)} \left(\frac{\omega}{2\omega_H}\right)^2 a_2$$

$$a_1 = \hat{a}_1 - 2a_2 p_1^2 \quad a_0 = 1 - \hat{a}_1 p_1^2 + a_2 p_1^4$$

$$c_1 = \hat{c}_1 - 2\hat{c}_2 p_1^2 + 3c_3 p_1^4 \quad \hat{c}_0 = n - \hat{c}_1 p_1^2 + \hat{c}_2 p_1^4 - c_3 p_1^6$$

$$c_2 = \hat{c}_2 - 3c_3 p_1^2$$

$$b_0 = \left(\frac{\omega_H}{\omega}\right)^2 \hat{c}_0^2$$

$$b_2 = p_1^2 \left[\left(\frac{\omega_H}{\omega}\right)^2 2\hat{c}_0 c_1 + a_0^2 \right]$$

$$b_4 = p_1^4 \left[\left(\frac{\omega_H}{\omega}\right)^2 (2\hat{c}_0 c_2 + c_1^2) + 2a_0 a_1 \right]$$

$$b_6 = p_1^6 \left[\left(\frac{\omega_H}{\omega}\right)^2 (2\hat{c}_0 c_3 + 2c_1 c_2) + 2a_0 a_2 + a_1^2 \right]$$

Berücksichtigt man die vier niedrigsten Summanden

$$n_{\min} \leq n \leq n_{\min} + 3 \quad ,$$

dann sind die mittels Gl.(5.13)+(5.15) berechneten A-Werte bei kleinen Frequenzen meist etwa 1% zu klein, jedoch in der Umgebung der Resonanzstellen zu groß:

$$\text{bei } \frac{\omega}{\omega_H} = n - 0.01 \quad \text{um ca. 4\% ,}$$

$$\text{bei } \frac{\omega}{\omega_H} = n - 0.02 \quad \text{um ca. 7\% .}$$

Bei $\frac{\omega}{\omega_H} = n$ und bei $\frac{\omega}{\omega_H} = n - 0.03$ stimmt Gl.(5.15) nahezu exakt. Für höhere Frequenzen geraten die mittels (5.15) berechneten A-Werte zu groß:

$$\text{bei } \frac{\omega}{\omega_H} = \frac{23}{\sqrt{T_e}} \quad \text{um ca. 2\% ,}$$

$$\text{bei } \frac{\omega}{\omega_H} = \frac{31}{\sqrt{T_e}} \quad \text{um ca. 12-15\% .}$$

Dabei ist für T_e die Elektronentemperatur in keV einzusetzen.

Im Bereich der Frequenzen:

$$\text{etwa für } \frac{\omega}{\omega_H} \geq \frac{\mu}{6} + 2 \text{ bei } \theta=90^\circ \quad (5.16)$$

$$\text{oder für } \frac{\omega}{\omega_H} \geq \frac{\mu}{20} + 1 \text{ bei } \theta=20^\circ$$

sind die Resonanzschwingungen abgeklungen. In diesem Bereich lassen sich die numerischen, aus Gl.(4.9) erhaltenen A-Werte durch die Näherungsformel

$$A = a \cdot \exp\left(-b \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_H}\right)^\gamma\right) \quad (5.17)$$

wiedergeben. Dabei ist

$$\gamma = 0.38 + 0.058 \ln\left(\frac{\mu}{12.5}\right),$$

$$b = \left[6.9 + 1.5 \ln\left(\frac{\mu}{12.5}\right)\right] (\sin\theta)^{-E},$$

$$E = 0.26 + \left[0.21 + \frac{\mu}{1000}\right] \sqrt[3]{\sin\theta},$$

$$a = \frac{2680 \cdot \left(\frac{\mu}{12.5}\right)^{2.95}}{1 + \frac{\mu}{12.5}} \cdot \frac{0.77 + \frac{0.23}{\sin\theta}}{(\sin\theta)^H},$$

$$H = 3.2 + 0.06 \mu.$$

Der Gültigkeitsbereich der Näherung (5.17) hängt stark von den Genauigkeits-Ansprüchen ab. Wir geben im folgenden den Bereich an, in welchem die relative Ungenauigkeit höchstens 10% beträgt:

$T_e = 60\text{keV}$	$\theta \geq 44^\circ$	$3 \leq \omega/\omega_H \leq 30$
$T_e = 32\text{keV}$	$\theta \geq 22^\circ$	$4.5 \leq \omega/\omega_H \leq 15$
$T_e = 17\text{keV}$	$\theta \geq 21^\circ$	$6 \leq \omega/\omega_H \leq 25$

Ist man mit 30% zufrieden, so erweitert sich der Bereich bis etwa $\frac{\omega}{\omega_H} \approx 25$ und $\theta = 10^\circ$; ferner kann man auch für niedrige Temperaturen Gültigkeitsbereiche angeben:

$T_e = 10\text{keV}$	$10^\circ < \theta \leq 67^\circ$	$5 < \omega/\omega_H \leq 22$
$T_e = 5\text{keV}$	$21^\circ \leq \theta \leq 67^\circ$	$8 \leq \omega/\omega_H \lesssim 20$

In der Umgebung des Punktes $T_e = 10\text{keV}$, $\mu = 50$; $\theta = 10^\circ$ und $\omega/\omega_H = 5$ fällt die Genauigkeit stark ab.

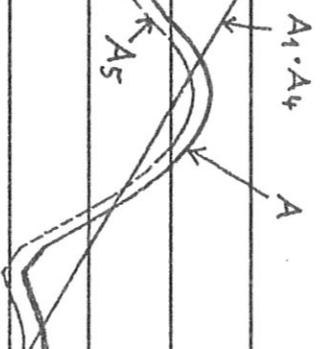
Abb. 6a und 6b zeigen Beispiele. Man sieht, wie bei $\omega/\omega_H = 6$ und $\theta = 60^\circ$ der Oszillationsbereich beginnt: bei $T_e = 10\text{keV}$ ziemlich drastisch, bei $T_e = 17\text{keV}$ erst andeutungsweise. Ferner sieht man: (5.17) ist auch für sehr hohe Temperaturen (60-100keV) noch brauchbar und liefert für hohe Frequenzen ($\approx 20\omega_H$) etwa um 10-30% zu hohe Werte.

2 3 4 5 → $\frac{\omega}{\omega_H}$

Abb. 4

Der dimensionslose Absorptionskoeffizient A
 aufgetragen gegen die Frequenz ω/ω_H
 für $\mu=500$ ($T_e=1\text{keV}$) und $\theta=34^\circ$

A	nach Gl. (4.9)	(numerisch)
A_1	"	(ROSENBLUTH; /1/)
A_4	"	(TRUBNIKOV; /4/)
A_5	"	(ENGELMANN; /5/)



10^0
 1
 $0,1$
 10^{-3}
 10^{-5}
 10^{-7}
 10^{-9}
 10^{-11}
 10^{-13}

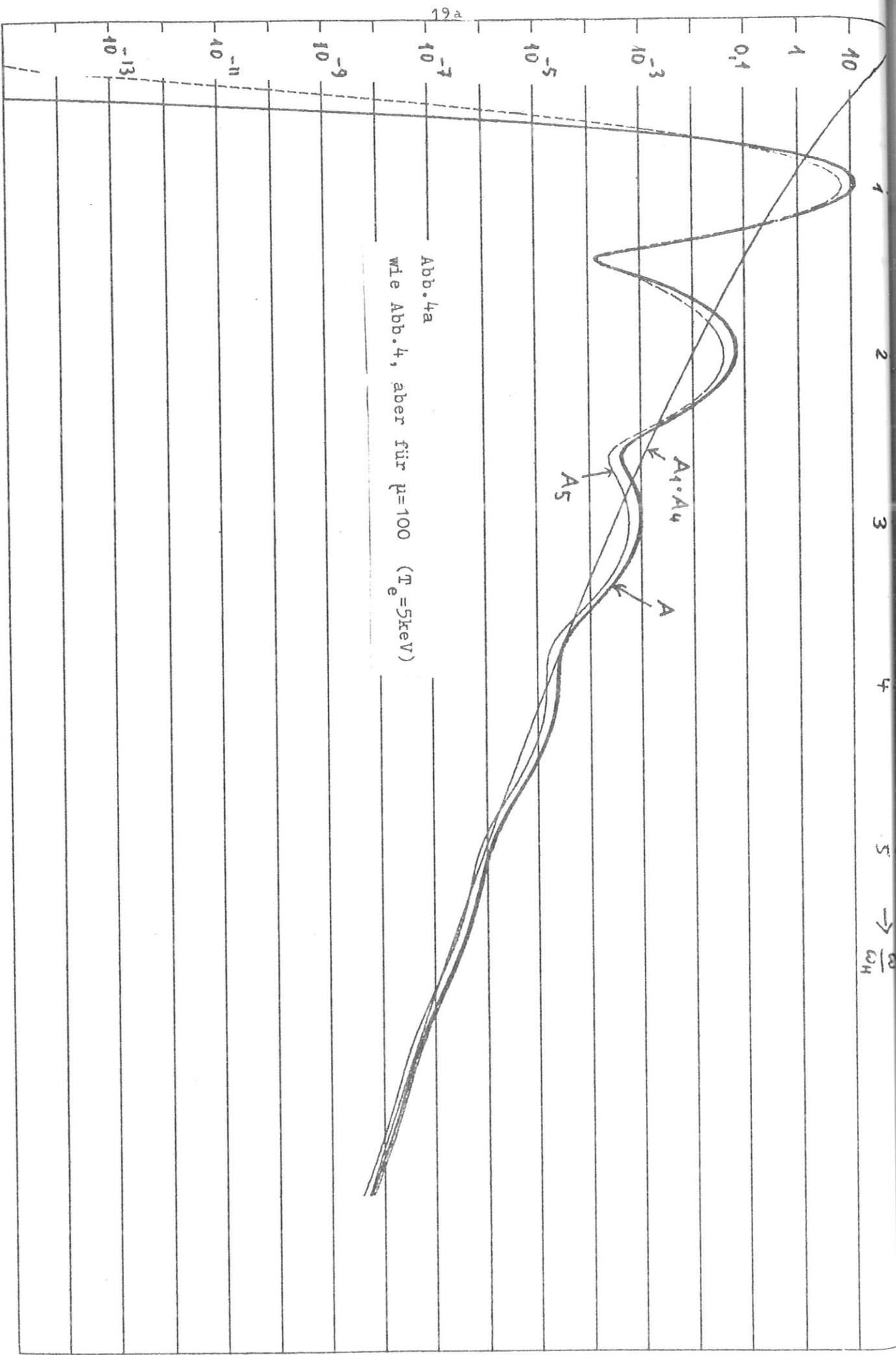


Abb. 4a
wie Abb. 4, aber für $\mu=100$ ($T_e=5\text{keV}$)

6 → $\frac{\omega}{\omega_H}$

1 2 3 4 5

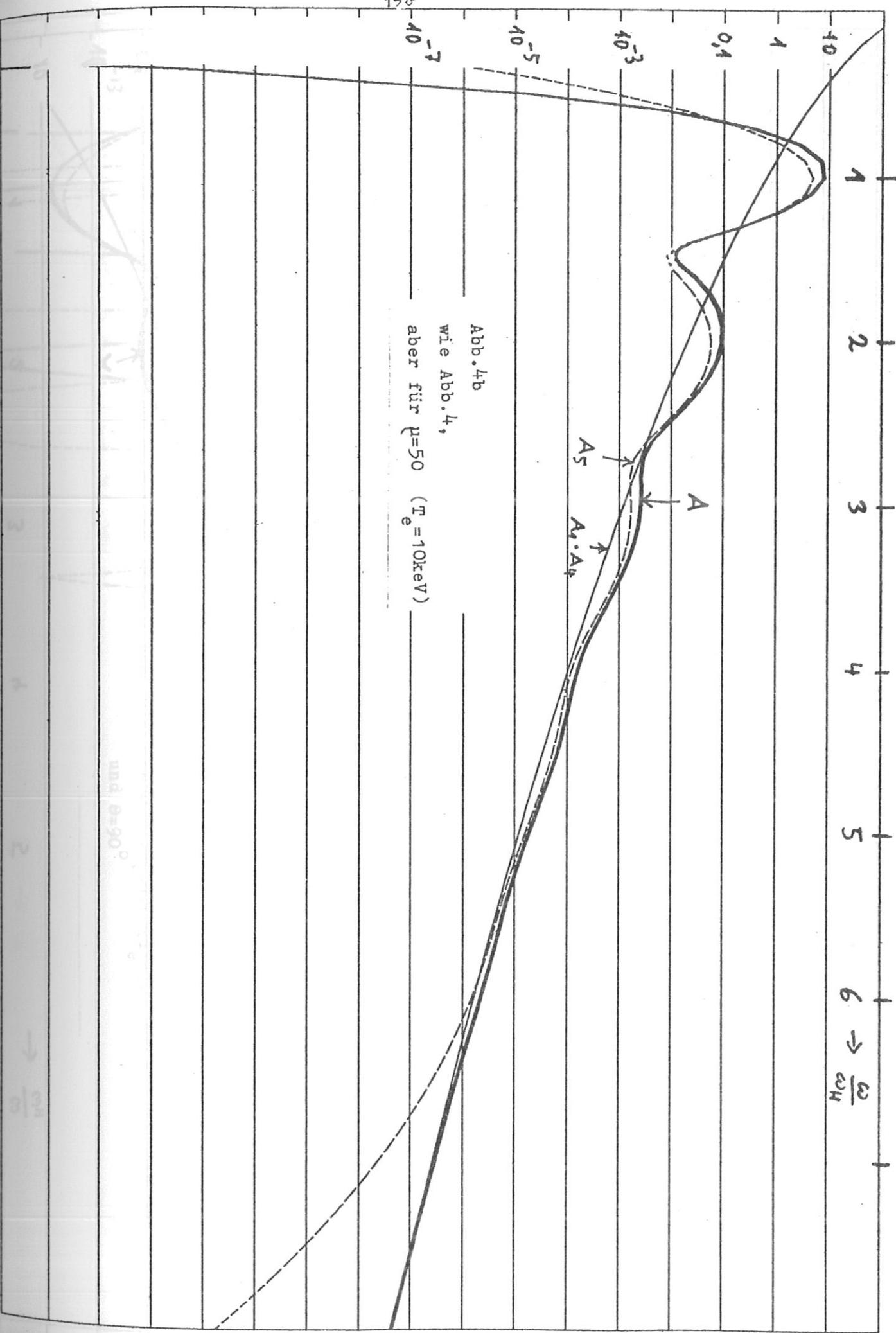
192

10
1
0,1
 10^{-3}
 10^{-5}
 10^{-7}

A
A₅
A₁·A₄

Abb. 4b
wie Abb. 4,
aber für $\mu=50$ ($T_e=10\text{keV}$)

und $\theta=90^\circ$



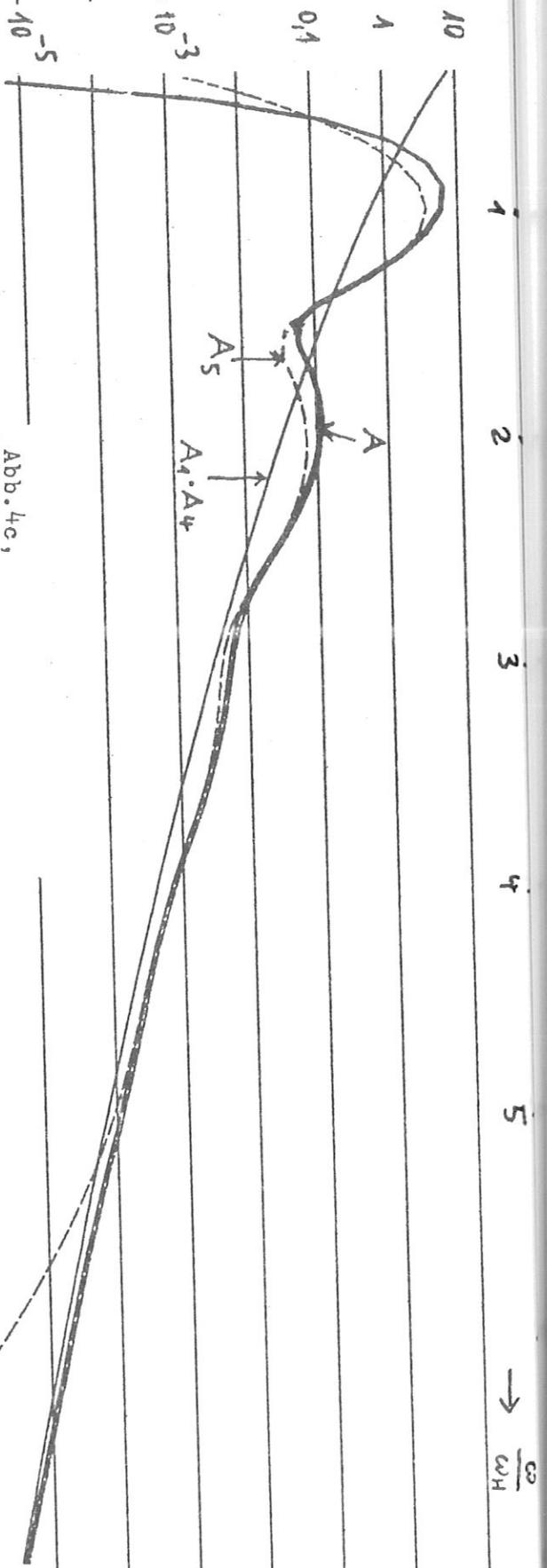


Abb. 4c,
 wie Abb. 4,
 aber für $\mu=30$ ($\Gamma_e = 17\text{keV}$)

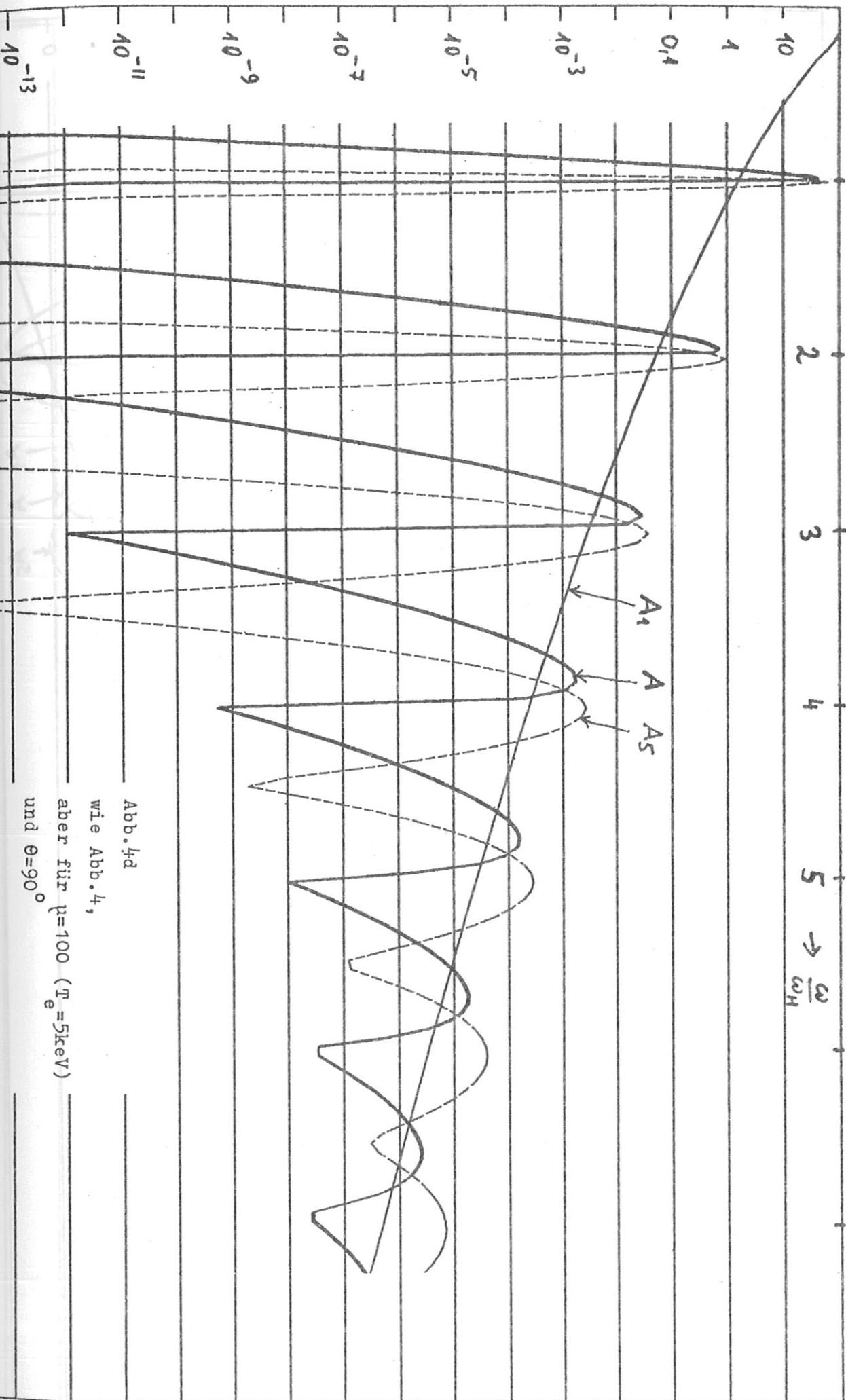


Abb. 4d
 wie Abb. 4,
 aber für $\mu=100$ ($T_e=5\text{keV}$)
 und $\theta=90^\circ$

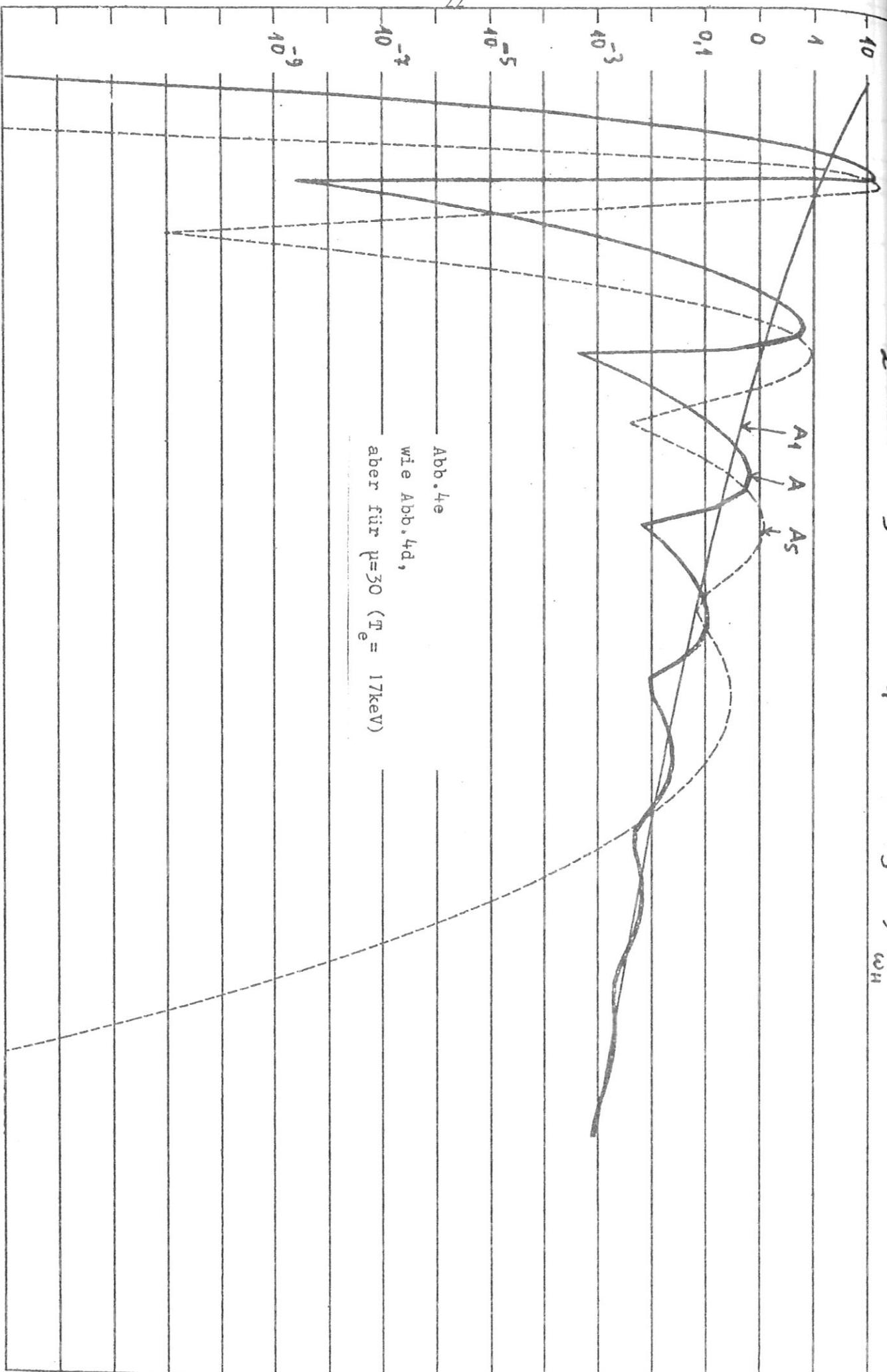


Abb. 4e
wie Abb. 4d,
aber für $\mu=30$ ($\Gamma_e = 17\text{keV}$)

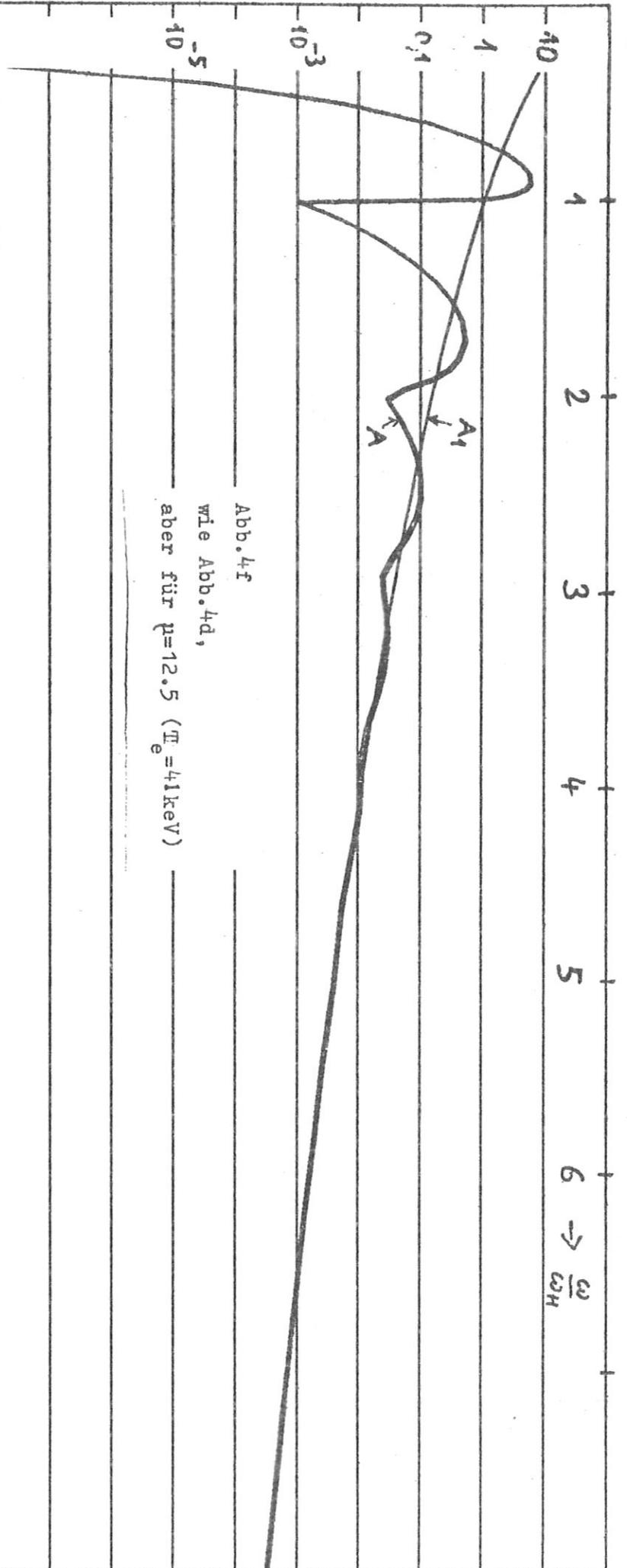


Abb. 4f

wie Abb. 4d,

aber für $\mu=12.5$ ($\mathbb{T}_e=41\text{keV}$)

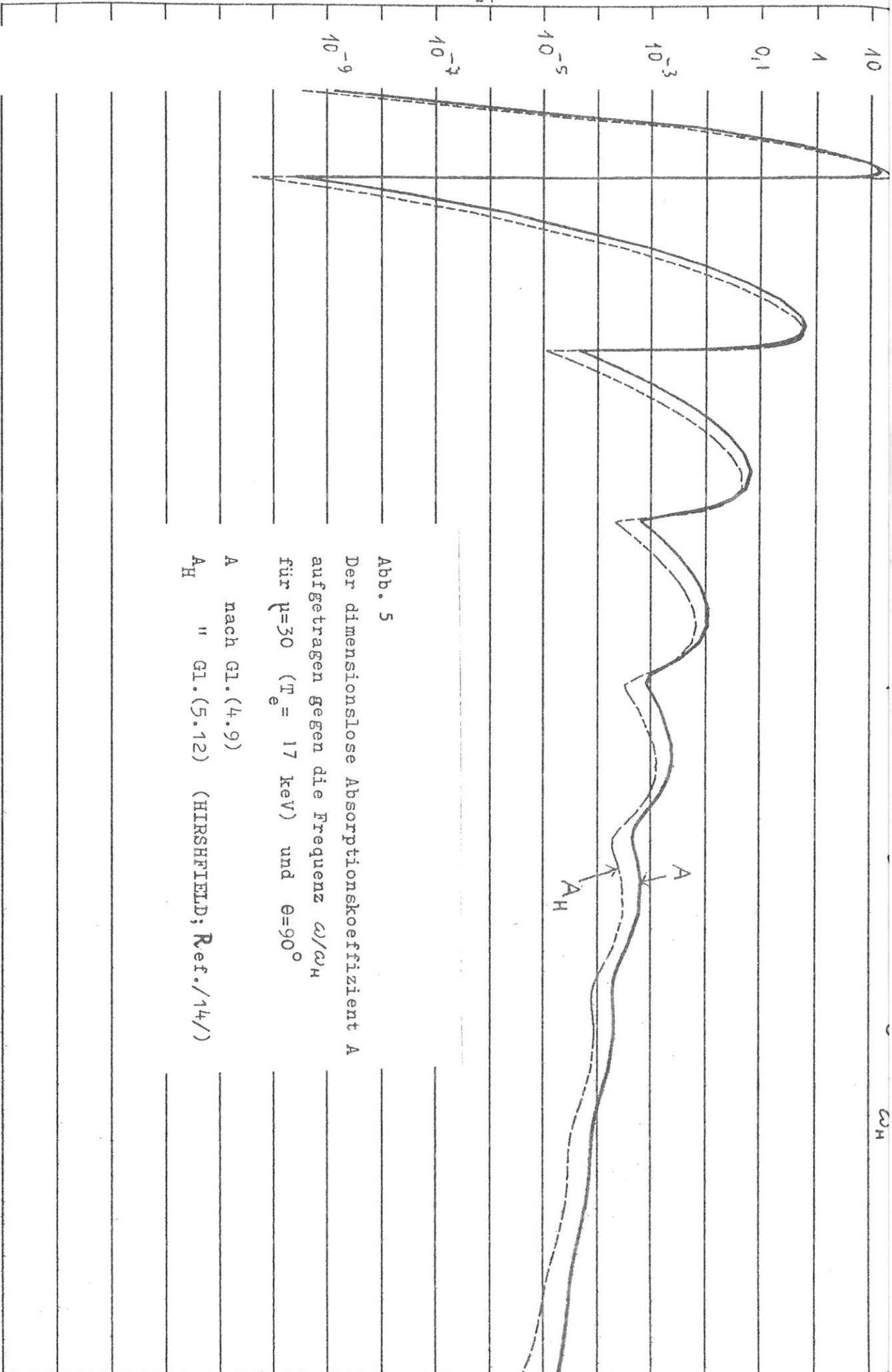


Abb. 5

Der dimensionslose Absorptionskoeffizient A
 aufgetragen gegen die Frequenz ω/ω_H
 für $\mu=30$ ($\Gamma_e = 17 \text{ keV}$) und $\theta=90^\circ$

A nach Gl.(4.9)

A_H " Gl.(5.12) (HIRSHFIELD; Ref./14/)

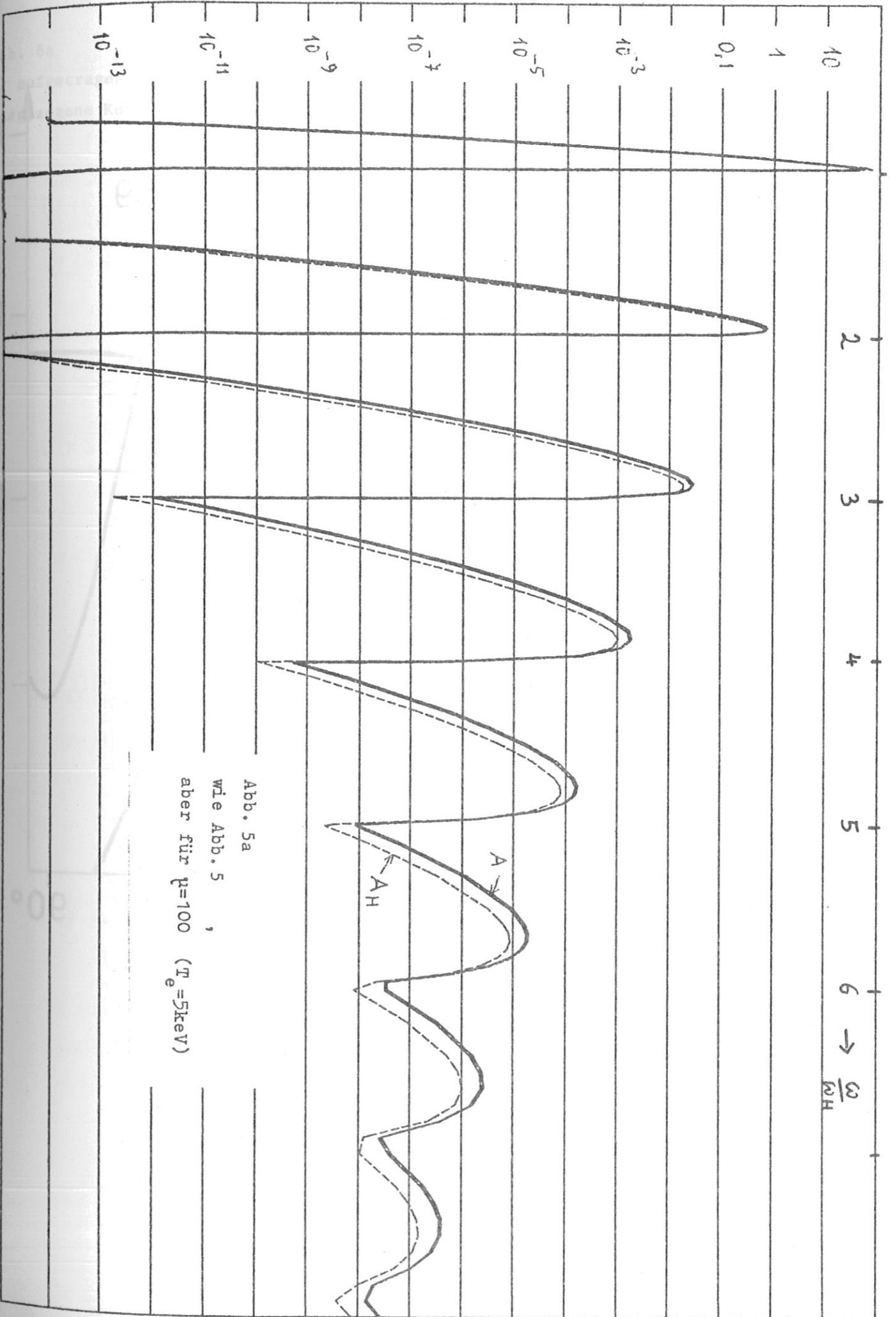


Abb. 5a
 wie Abb. 5
 aber für $\mu=100$ ($T_e=5\text{keV}$)

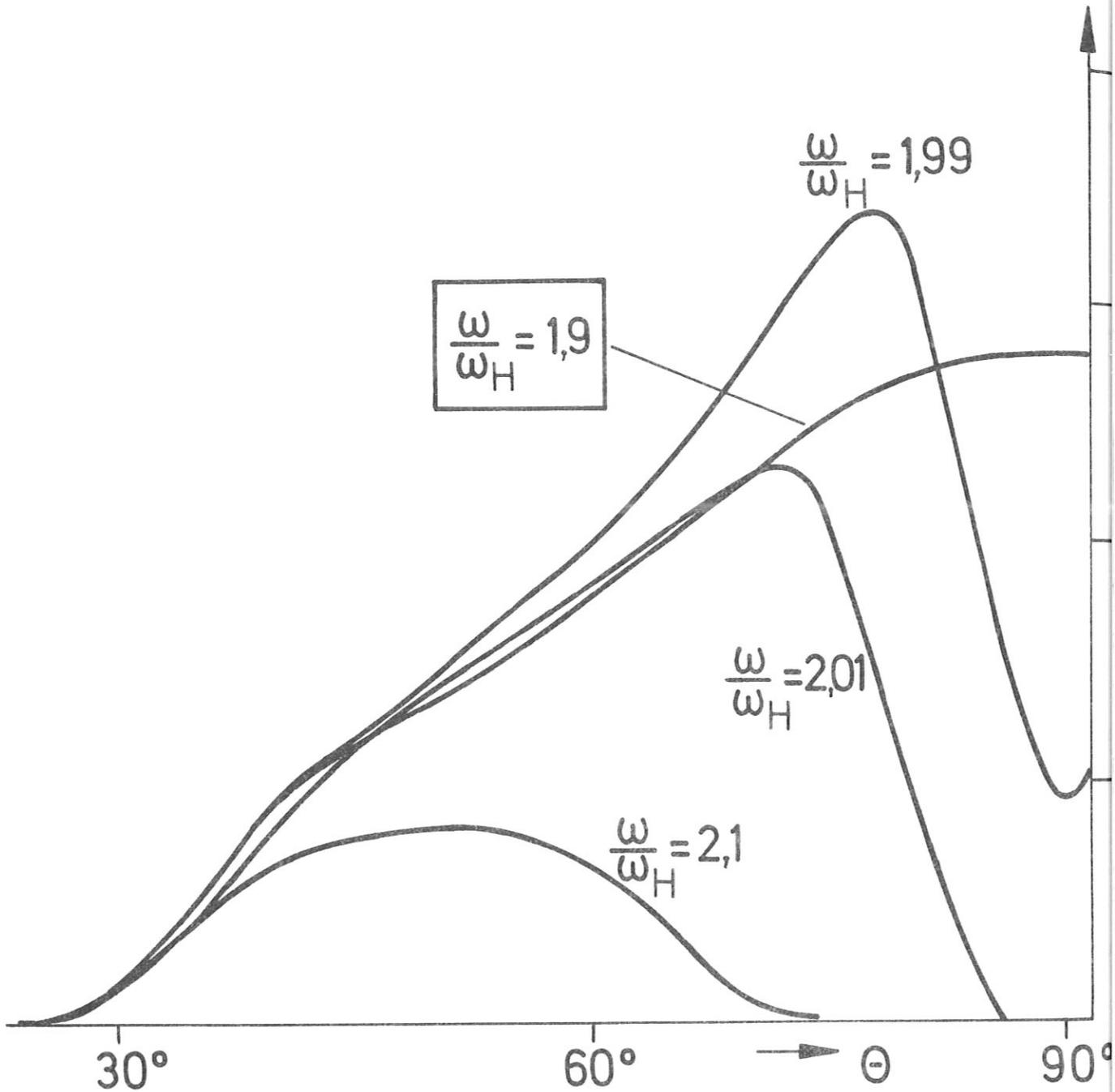


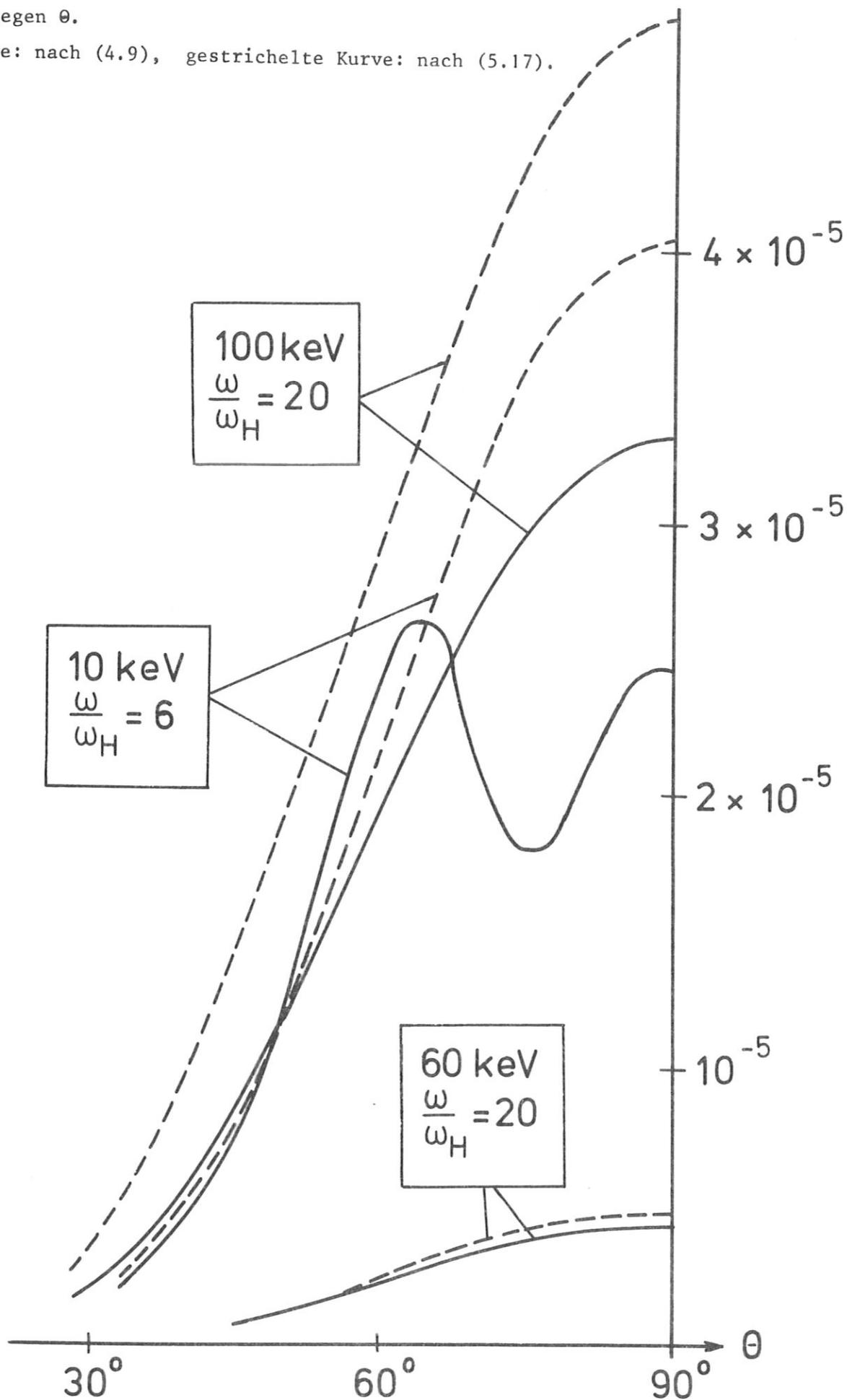
Abb. 6

Der dimensionslose Absorptionskoeffizient A nach Gl. (4.9), aufgetragen gegen den Winkel θ , für $\mu = 100$, ($T_e = 5 \text{ keV}$), für vier verschiedene Frequenzen ω/ω_H .

Das Absinken bei $\theta \approx 90^\circ$ für $\omega \gtrsim 2\omega_H$ ist eine Konsequenz aus Bedingung (4.11).

Abb. 6a
, aufgetragen gegen θ .

ausgezogene Kurve: nach (4.9), gestrichelte Kurve: nach (5.17).



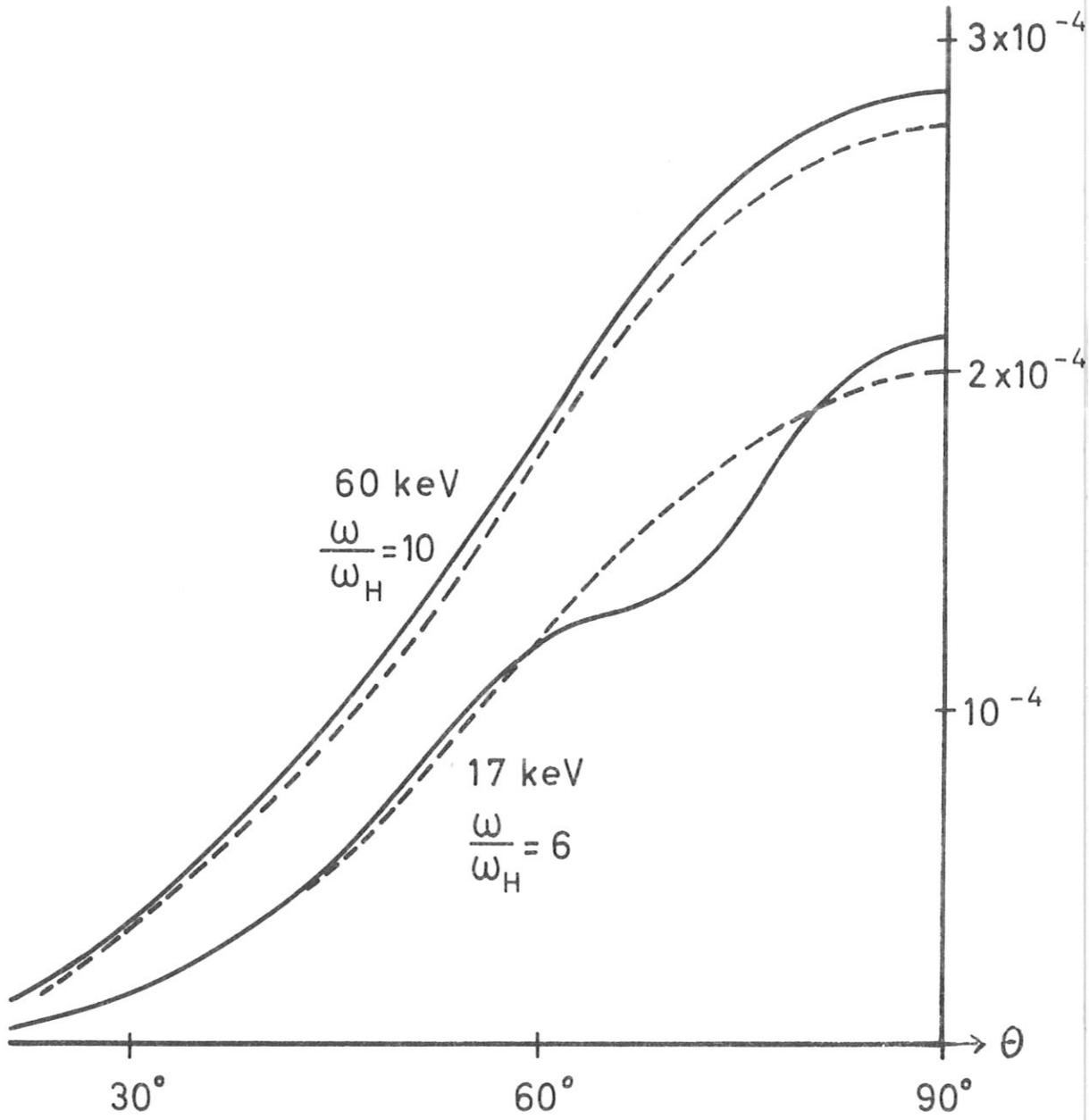


Abb. 6b, wie 6a

§6 Energiebilanz

Wir fragen nun nach der Änderung der Plasma-Energiedichte u an einem Aufpunkt B (s. Abb. 7) im Laufe der Zeit infolge Zyklotronstrahlungsemission und Absorption. Infolge Emission verliert ein Volumenelement dV in der Zeit dt die Energie

$$dV dt \int d\omega \int d\Omega \eta$$

in Worten: Emissivität am Aufpunkt B (Gl. 2.2), integriert über alle Raumwinkel und den gesamten Frequenzbereich. Es gilt also

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\text{emission}} = - \int d\omega \int d\Omega \eta$$

Im Gleichgewichtsfall folgt hieraus sowie aus Gl. (2.2)

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\text{emission}} = - \int d\omega \int d\Omega J \alpha$$

Infolge Absorption von Zyklotronstrahlung gewinnt das Plasma in B aber auch Energie. Wir beschreiben diesen Sachverhalt durch eine Funktion P , welche von ω sowie von der Richtung (γ, ϕ in Abb. 10) abhängt

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\text{absorp}} = + \int d\omega \int d\Omega P \alpha \quad (6.1a)$$

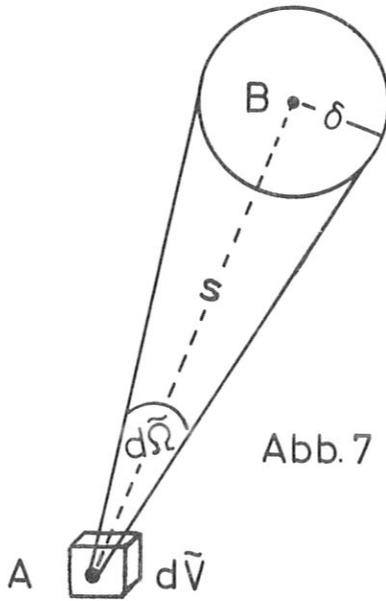
sodaß

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\text{emission}} + \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\text{absorp}} = \int d\omega \int d\Omega \alpha \cdot (P - J) \quad (6.1)$$

In diesem Paragraphen wird eine Integralformel für P hergeleitet, sowie eine Gleichung angegeben für die Intensität der Zyklotronstrahlung an der

Plasma-Oberfläche (6.14).

Zur Berechnung von P geben wir uns vor: einen Punkt B , an welchem die Energieänderung $\partial u / \partial t$ berechnet werden soll, sowie einen Punkt A



mit Volumenelement $d\tilde{V}$, welcher an die Umgebung von B Strahlungsenergie abgibt (Abb.7). Später integrieren wir dann über die Beiträge sämtlicher Volumenelemente $d\tilde{V}$. Wir legen um B eine sehr kleine Kugel mit Radius δ (Abb.7). Dann ist

$$\tilde{\Omega} = \pi \delta^2 / s^2 \quad (6.2)$$

der Raumwinkel, unter welchem die Kugel von A aus erscheint. Die Ent-

fernung AB sei gleich s . Die Halbgerade von B in Richtung A nennen wir "Lichtpfad" (vgl. Ref./5/) Dem Aufpunkt B ordnen wir den Wert $s = 0$ zu. Die in der Zeit dt von $d\tilde{V}$ im Frequenzintervall $(\omega, \omega + d\omega)$ in Richtung $d\tilde{\Omega}$ emittierte Strahlungsenergie beträgt

$$d\tilde{E} = dt \, d\tilde{\Omega} \, d\tilde{V} \, \eta(s) \, d\omega \quad (6.3)$$

Hiervon wird ein Teil unterwegs absorbiert, sodaß nur der Anteil

$$e^{-\tau(s)} d\tilde{E} \quad (6.4)$$

bis B gelangt. Dabei ist

$$\tau(s) = \int_0^s \alpha(\hat{s}) \, d\hat{s} \quad (6.5)$$

die "optische Dicke" der Plasmaschicht zwischen A und B .

\hat{s} bedeutet die Entfernung von B, gemessen auf der Strecke BA. Von dem Anteil (6.4) wiederum geht

$$e^{-\delta\tau} e^{-\tau(s)} d\tilde{E} \approx (1-\delta\tau) e^{-\tau(s)} d\tilde{E} \quad (6.6)$$

durch die Kugel hindurch, d.h.

$$\text{der Anteil} \quad \delta\tau \cdot e^{-\tau(s)} d\tilde{E} \quad (6.7)$$

wird in der Kugel absorbiert und trägt zur Energiebilanz bei. Dabei ist $\delta\tau$ die mittlere optische Dicke der Kugel. Für einen Strahl (Abb.8), welcher im Abstand r am Punkt B vorbeikommt, hat die Kugel die optische Dicke $2\alpha(o) \sqrt{\delta^2 - r^2}$.

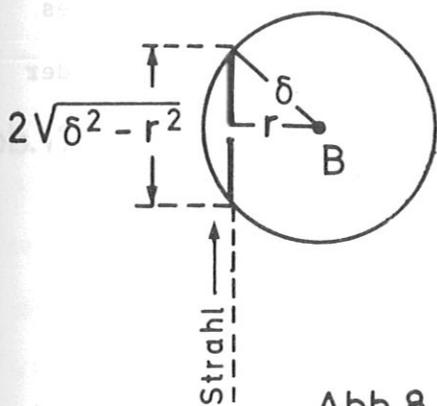


Abb.8

Es folgt

$$\delta\tau = \int_0^{\delta} 2\alpha(o) \sqrt{\delta^2 - r^2} \cdot \frac{2\pi r dr}{\pi\delta^2}$$

$$\delta\tau = \frac{4}{3} \cdot \alpha(o) \cdot \delta \quad (6.8)$$

Wir setzen nun ein: (6.2) in (6.3), (6.3) und (6.8) in (6.7), dividieren durch das Kugelvolumen $\frac{4}{3}\pi\delta^3$, integrieren über $d\omega$ und erhalten

$$du = dt \cdot d\tilde{V} \cdot \int \frac{e^{-\tau(s)}}{s^2} \alpha(o) \eta(s) d\omega \quad (6.9)$$

Die Größe du in Gl. (6.9) bedeutet die Zunahme der Energiedichte am Punkt B ($\hat{s}=0$) infolge Absorption von Strahlung, welche aus dem bei A ($\hat{s}=s$) gelegenen Volumenelement $d\tilde{V}$ her stammt.

Dabei

Wir ersetzen nun in (6.9) $\eta(s)$ gemäß (2.2) durch $\alpha(s) \cdot J(s)$, integrieren über $d\tilde{V}$ und erhalten

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{\text{absorb}} = \int d\omega \int d\tilde{V} \frac{e^{-\tau(s)}}{s} J(s)\alpha(s)\alpha(o) \quad (6.10)$$

$\alpha(o)$ hängt von der Richtung θ zwischen dem Magnetfeld bei B und der Geraden BA ab; $\alpha(o)$ ist somit eine Funktion von A und muß daher unter dem Integral stehen. Das Volumen-Integral $\int d\tilde{V}$ ist zu erstrecken über alle Volumenelemente bzw. Punkte A, welche von B aus gesehen werden können; diesen Volumenanteil bezeichnen wir fortan als "sichtbares Volumen"; das restliche Plasmavolumen nennen wir "unsichtbares Volumen". Abb. 9 zeigt die Verhältnisse für einen Aufpunkt B in der Äquatorebene eines Torus.

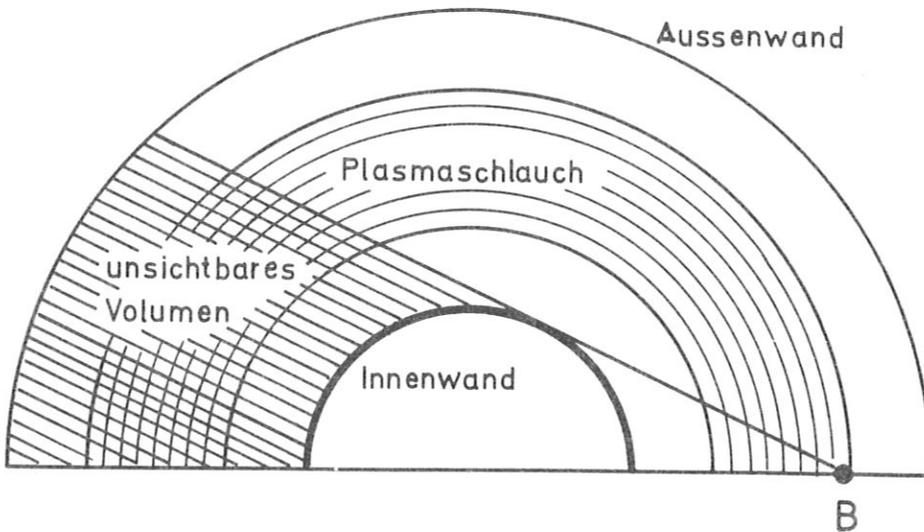
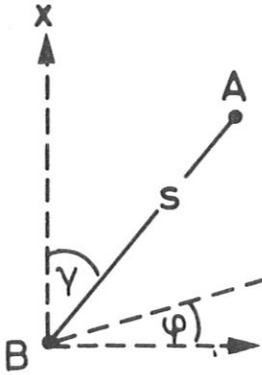


Abb. 9

Das sichtbare und unsichtbare Volumen bei einem Torus

Der Faktor $1/s^2$ in (6.10) erfordert die Einführung sphärischer Koordinaten:

Abb.10



$$d\tilde{V} = s^2 ds \sin\gamma d\phi d\gamma = s^2 ds d\tilde{\Omega} \quad (6.11)$$

vgl. Abb.10), wobei die x-Richtung später festgelegt wird.

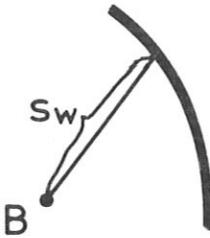
Setzt man (6.11) in (6.10) ein und vergleicht mit (6.1a), so erkennt man:

$$P = \int_0^{s_w} e^{-\tau(s)} \alpha(s) J(s) ds$$

wobei s_w derjenige s-Wert ist, für welchen die

Gefäßwand erreicht wird (Abb. 11). Aus $\alpha(s) = \frac{d\tau}{ds}$ (6.5) folgt durch partielle Integration

Abb.11



$$P = J(0) - e^{-\tau(s_w)} J(s_w) + \int_0^{s_w} e^{-\tau(s)} \frac{dJ}{ds} ds \quad (6.12)$$

Eine ähnliche Fragestellung ist die nach dem Energiefluß $\frac{\partial^2 E}{\partial F \partial t}$ aus der Plasmaoberfläche. Hierzu geben wir uns ein Flächenelement dF vor (Abb. 12).

Der Punkt B soll auf dF liegen. Ausgangsgleichung ist wieder (6.3), aber

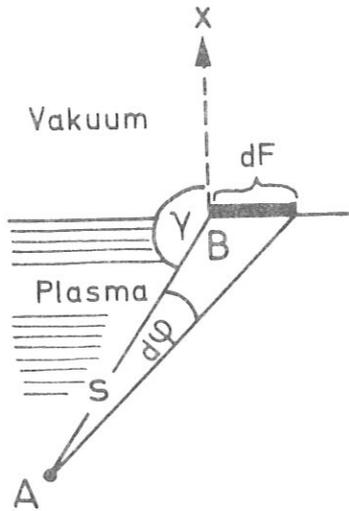
mit

$$d\tilde{\Omega} = \cos(\pi - \gamma) dF/s^2 \quad (6.13)$$

Dies ist derjenige Raumwinkel, unter welchem dF von A aus gesehen wird.

Dabei ist γ der Winkel gegen die Flächennormale (Abb. 12).

Abb.12



$$\text{Dann ist } \frac{\partial^2 E}{\partial F \partial t} = \frac{1}{dt} \frac{1}{dF} \int e^{-\tau} d\tilde{E}$$

wobei $d\tilde{E}$ durch (6.3) gegeben ist, und somit

$$\frac{\partial^2 E}{\partial F \partial t} = \int_{\pi/2}^{\pi} d\gamma \sin\gamma \cos(\pi-\gamma) \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} d\omega P \quad (6.14)$$

§ 7 Plasmen mit konstanter Temperatur in homogenen Magnetfeldern

Wir betrachten in diesem sowie dem folgenden Paragraphen Plasmen ortsunabhängiger Temperatur in einem homogenen Magnetfeld. Als Beispiele werden wir in §8 die Plasmplatte (slab) sowie den Plasmazylinder behandeln. Es lassen sich auch andere Beispiele finden: etwa Zylinder mit elliptischem Querschnitt. Toroidale Anordnungen gehören nicht hierher, weil dort das Magnetfeld gekrümmt ist. Betrachtet man z.B. den Torus in Abb. 9, so sieht man: der Winkel θ zwischen dem Magnetfeld und einem vorgegebenen Lichtpfad - z.B. der in Abb. 9 eingezeichneten Schatten-grenze - ist eine Funktion von s .

Aus obigen Voraussetzungen folgt: θ ist unabhängig von s wegen der Feld-homogenität; ferner: μ ist unabhängig von s wegen der Temperatur-Homogenität. Damit ist auch der dimensionslose Absorptionskoeffizient A (3.13) unabhängig von s - auch wenn die Dichte ortsabhängig ist. Die Plasmabegrenzung soll keine reflektierenden Eigenschaften haben, so daß die

Strahlung ungehindert die Oberfläche nach außen verlassen kann. Reflektierende Wände werden für den Fall des Plasmazyllinders in §12 behandelt. Wir formen nun die Gleichungen (6.12), (6.1) und (6.14) um. Infolge der Homogenität der Temperatur wird die Reabsorptionsgröße

$$P = J \cdot [1 - e^{-\tau(s_w)}] \quad (7.1)$$

P enthält also keine s-Integration mehr.

Die optische Dicke $\tau(s_w)$ läßt sich stets auf die Form bringen (s. §8)

$$\tau(s_w) = A \cdot D \cdot W \quad (7.2)$$

wobei

D proportional zur Plasma-Ausdehnung,

und

W eine geeignete Winkelfunktion ist.

Wir benutzen nebeneinander kartesische Koordinaten mit Magnetfeld in z-Richtung:

$$\vec{B}_{\text{stat}} = (0; 0; B_z) \quad (7.3)$$

und am Magnetfeld orientierte sphärische Koordinaten;

also anstelle von (6.11):

$$d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\psi \quad (7.4)$$

Das in §6 benutzte γ - ϕ -System ist an der x-Achse (Flächennormale) orientiert, (s. Abb. 12), welche senkrecht zum Magnetfeld steht.

Daraus folgt der Zusammenhang

$$\cos(\pi - \gamma) = \sin\theta \, \cos\psi \quad (7.5)$$

und somit die Energieflußdichte aus (6.14)

$$\frac{\partial^2 E}{\partial F \partial t} = \int_0^{\pi/2} d\theta \, \sin^2\theta \int_0^{2\pi} d\psi \, \cos\psi \int_0^{\infty} d\omega \, J(1 - e^{-ADW})$$

Dies schreiben wir in der Form

$$\frac{\partial^2 E}{\partial F \partial t} = m \omega_H^3 I(\mu, D) \quad (7.6)$$

$$I(\mu, D) = \int_0^\infty d\left(\frac{\omega}{\omega_H}\right) Y\left(\mu, D, \frac{\omega}{\omega_H}\right) \quad (7.7)$$

$$Y\left(\mu, D, \frac{\omega}{\omega_H}\right) = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_H}\right)^2}{2\pi^3 \mu} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\psi \sin^2 \theta \cos \psi (1 - e^{-ADW}) \quad (7.8)$$

Dabei ist I die dimensionslose Strahlungsintensität. Gl. (7.6) - (7.8) stellen eine Verallgemeinerung dar von Ref./1/ Gl.(15).

Analog folgt aus (6.1) für die Leistungsdichte

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{m}{c} \omega_H^2 \omega_p^2 Z(\mu, D, q) \quad (7.9)$$

$$Z(\mu, D, q) = \frac{1}{2\pi^3 \mu} \int_0^\infty \frac{d\omega \omega^2}{\omega_H^3} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\pi d\psi \sin \theta A e^{-ADW} \quad (7.10)$$

Z ist der dimensionslose Verlustterm,

q beschreibt die Lage des Aufpunktes B (s. §8, Abb. 14).

Bei ortsabhängiger Dichte ist

$$\omega_p^2 = \omega_o^2 \cdot f(q)$$

wobei ω_o = Plasmafrequenz bei $q = 0$ (s. Gl.(8.14));

f = Dichteprofil - Funktion (s. Gl.(8.9)).

Es gilt also

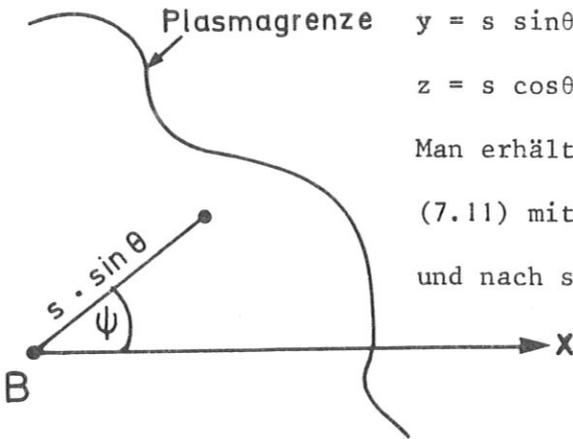
$$\frac{\partial u}{\partial t} \text{ prop. } Z \cdot f \quad .$$

I, Y und Z können außer von der Ausdehnung D auch noch von anderen geometrischen Parametern abhängen; bei elliptischen Plasmen etwa vom Achsenverhältnis. Bei den in diesem Bericht vorzunehmenden Anwendungen gibt es derartige Parameter nicht.

Zur Berechnung der Lichtpfadlänge s_w (in §8) benötigen wir die Gleichung der in Richtung θ, ψ durch den Ursprung B laufenden Gerade. Sie lautet

$$\begin{aligned} x &= s \sin\theta \cos\psi \\ y &= s \sin\theta \sin\psi \\ z &= s \cos\theta. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Man erhält s_w , indem man die Gerade (7.11) mit der Plasmagrenze schneidet und nach s auflöst.



Für den Grenzfall großer $\tau(s_w)$ kann man die Winkelintegration in (7.8) ausführen. Es folgt

$$Y(\mu, D, \frac{\omega}{\omega_H}) = \frac{(\frac{\omega}{\omega_H})^2}{8\pi^2 \mu} \quad (7.12)$$

Dies ist der niederfrequente RAYLEIGH-JEANS-Teil des Spektrums der Schwarzkörperstrahlung.

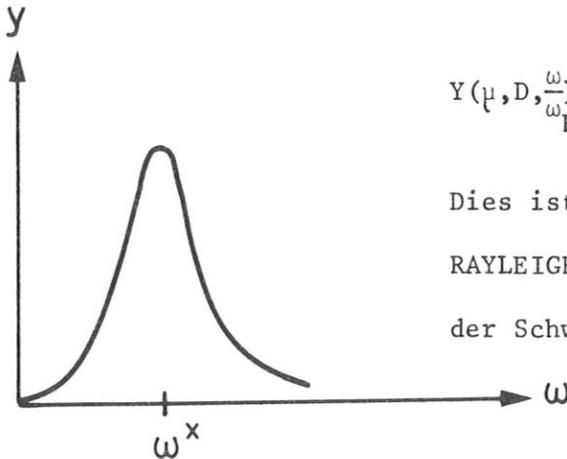


Abb.11 b

Im Grenzfall kleiner $\tau(s_w)$ wird Y sehr klein und proportional zu D . vgl. §8, Gl. (8.18a). Bei einer Frequenz ω^* irgendwo zwischen diesen Grenzfällen besitzt Y ein Maximum (s. Abb. 11b).

Rechnet man für $\omega \leq \omega^*$ mit (7.12)

und für $\omega \geq \omega^*$ mit $Y=0$

dann erhält man

$$I(\mu, D) = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_H}\right)^3}{24\pi^2 \mu} \quad (7.14)$$

DRUMMOND und ROSENBLUTH bringen in Ref. /1/, Gl. (16), ein ähnliches Resultat, welches sich von unserer Gl. (7.14) um den Faktor

$$\frac{25}{5\pi} \sqrt{\frac{\omega_H}{\omega^*}}$$

unterscheidet; dieser Faktor entsteht bei Berücksichtigung der Winkelabhängigkeit. Er ist etwa = 0,6 bis 0,7 da bei den hier betrachteten hohen Temperaturen und Dicken erfahrungsgemäß

$$\frac{\omega^*}{\omega_H} \approx 5 \text{ bis } 8 \quad (7.15)$$

gilt.

Im Frequenzbereich (7.15) erfolgt die stärkste Abstrahlung.

Bei niedrigen Temperaturen unterscheidet sich Y auch für niedrige Frequenzen stark von der Schwarzkörperstrahlung (7.12), wie man aus Abb. 15a entnehmen kann. Das Plasma ist in weiten Frequenzbereichen

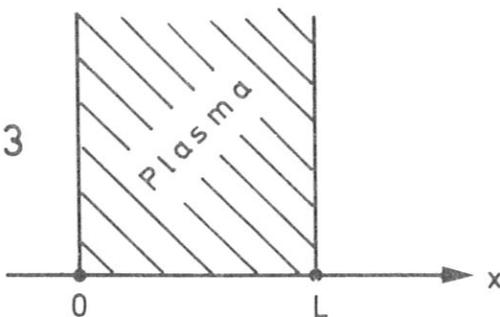
fast durchsichtig und Y nimmt nur in der Umgebung von Resonanzstellen Werte an, die mit der Schwarzkörperstrahlung (7.12) vergleichbar sind.

(8.8)

§8 Plasma-Platte und Plasma-Zylinder

Wir hatten im vorigen Paragraphen zur Beschreibung der Zyklotronstrahlungsverluste die dimensionslose Intensität $I(\mu, D)$ (Gl. 7.7) sowie den Verlustterm $Z(\mu, D, q)$ (Gl. (7.10)) eingeführt. Zur Berechnung von I oder Z benötigt man die optische Dicke ADW (Gl. 7.2); deren Bestimmung erfolgt zu Beginn dieses Paragraphen für die Spezialfälle Platten-Geometrie (Gl. 8.2-4) und Zylindergeometrie (Gl. 8.7-16). Im zweiten Teil dieses Paragraphen werden dann numerische Resultate für I und Z in Form von Tabellen (I-III), Abbildungen (15-18) und Näherungsformeln (8.5, 8.18-8.20) zusammengestellt und mit Näherungsformeln aus der Literatur verglichen (Abb. 13b und 18). Es sei jedoch schon hier darauf hingewiesen, daß unsere Näherungsformeln nicht auf Grund theoretischer Überlegungen entstanden sind, sondern lediglich in den angegebenen Bereichen numerische Resultate rationell darstellen und interpolieren sollen. Die Plasma-Platte wird begrenzt durch die beiden Ebenen

Abb. 13



$$x=0$$

und $x=L$

(s. Abb. 13) Folglich ist die Gleichung für die Plasmagrenze

$$x(x-L) = 0 \quad (8.1)$$

Im Fall der Plasma-Platte berechnen wir nur $\frac{\partial^2 E}{\partial F \partial t}$. Darum haben wir den Ursprung auf die Plasmagrenze gelegt. Schneidet man (8.1) mit (7.11), so erhält man für die Entfernung s_w vom Ursprung zur gegenüberliegenden

Wand:

$$s_w = \frac{L}{\sin\theta\cos\psi} \quad (8.2)$$

In Anlehnung an TRUBNIKOV /8/ definieren wir als dimensionslose Plattendicke

$$D = \frac{\omega^2}{c\omega_H} L \quad (8.3)$$

Wir setzen konstante Dichte voraus; dann ist

$$\tau(s_w) = \alpha s_w$$

Aus 7.2 und (3.13) folgt $W = \frac{1}{\sin\theta\cos\psi}$ (8.4)

Damit ist alles zusammengestellt, was man zur Programmierung von $Y(\mu, D, \frac{\omega}{\omega_H})$ und $I(\mu, D)$ gemäß (7.6) benötigt. Die Resultate lassen sich genähert durch die Formel

$$I(\mu, D) = \frac{a_1 D}{1 + a_2 \sqrt{D} + a_3 D} \quad (8.5)$$

wiedergeben; a_1, a_2, a_3 s. Tabelle II a.

Abb. 13a, b und Abb. 15 zeigen Beispiele. Die Einhüllende links ist der RAYLEIGH-JEANS-Anteil der Schwarzkörperstrahlung. In Abb. 13b vergleichen wir unsere Resultate mit denen von TRUBNIKOV (Ref. /8/). TRUBNIKOV's Kurven (gestrichelt) zeigen stärkere Resonanzschwingungen als unsere Kurven (ausgezogen), da TRUBNIKOV nur die Emission senkrecht zur Platte berücksichtigt. Es gibt nun

aber zahlreiche Frequenzbereiche, für welche die Plasmaplatte bei senkrechter Betrachtung nahezu durchsichtig erscheint, aber bei schräger Beobachtungsrichtung hingegen undurchsichtig ist. Die von uns durchgeführte Integration über alle - auch die schrägen - Richtungen führt daher zu einer Glättung, d.h. für niedrige Frequenzen zum Angleichen an die Schwarzkörper-Emission. Ferner sind TRUBNIKOV's Kurven etwa um den Faktor 1.5 zu niedrig. Dies liegt teilweise an den von TRUBNIKOV benutzten Absorptionskoeffizienten (Ref. /8/, Gl.16), welche zu niedrig sind (vgl. unsere Gl.(5.17)), teilweise auch an Zeichen- oder Rechenungenauigkeiten.

Zum Vergleich mit Ref. /8/ mußten wir unsere Abb.13b auf die RAYLEIGH-JEANS-Parabel normieren, welche die Temperatur enthält (vgl. Gl. (2.3)). Dadurch werden die Größenverhältnisse verzerrt. Wir haben darum außerdem die Emission der Plasmaplatte unverzerrt in Abb.13a dargestellt: die Platte emittiert bei 25keV etwa 8 mal mehr Zyklotronstrahlung als bei 10keV!

$\frac{\omega}{h\nu}$ ←

Abb. 13

Ausge:

wie A

besch:

Zum V

weil

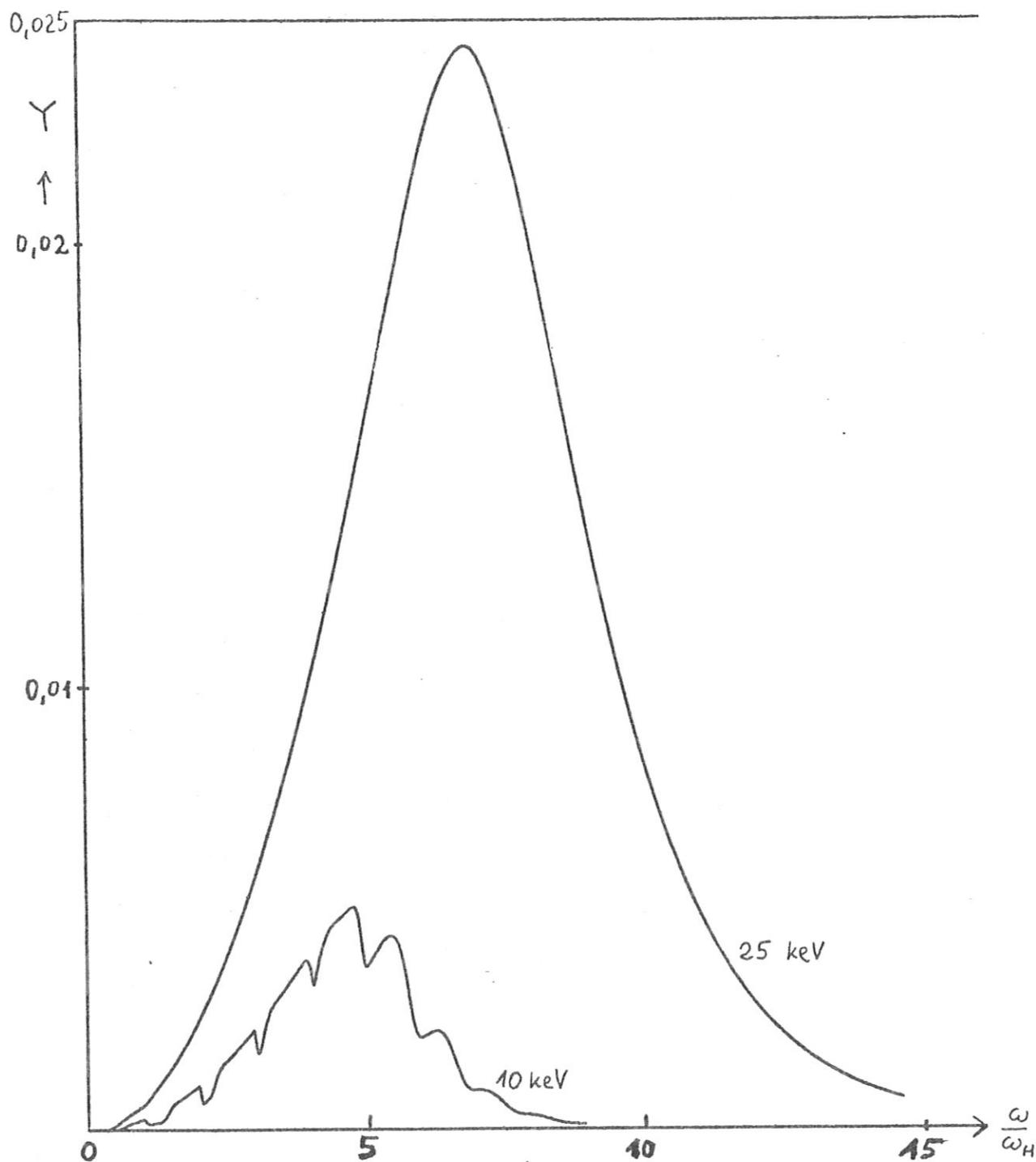


Abb. 13a

Die Zyklotronstrahlungsintensität pro Frequenzintervall, Y

aufgetragen gegen die Frequenz $\frac{\omega}{\omega_H}$

für die Plasmplatte der Dicke $D = 10^4$

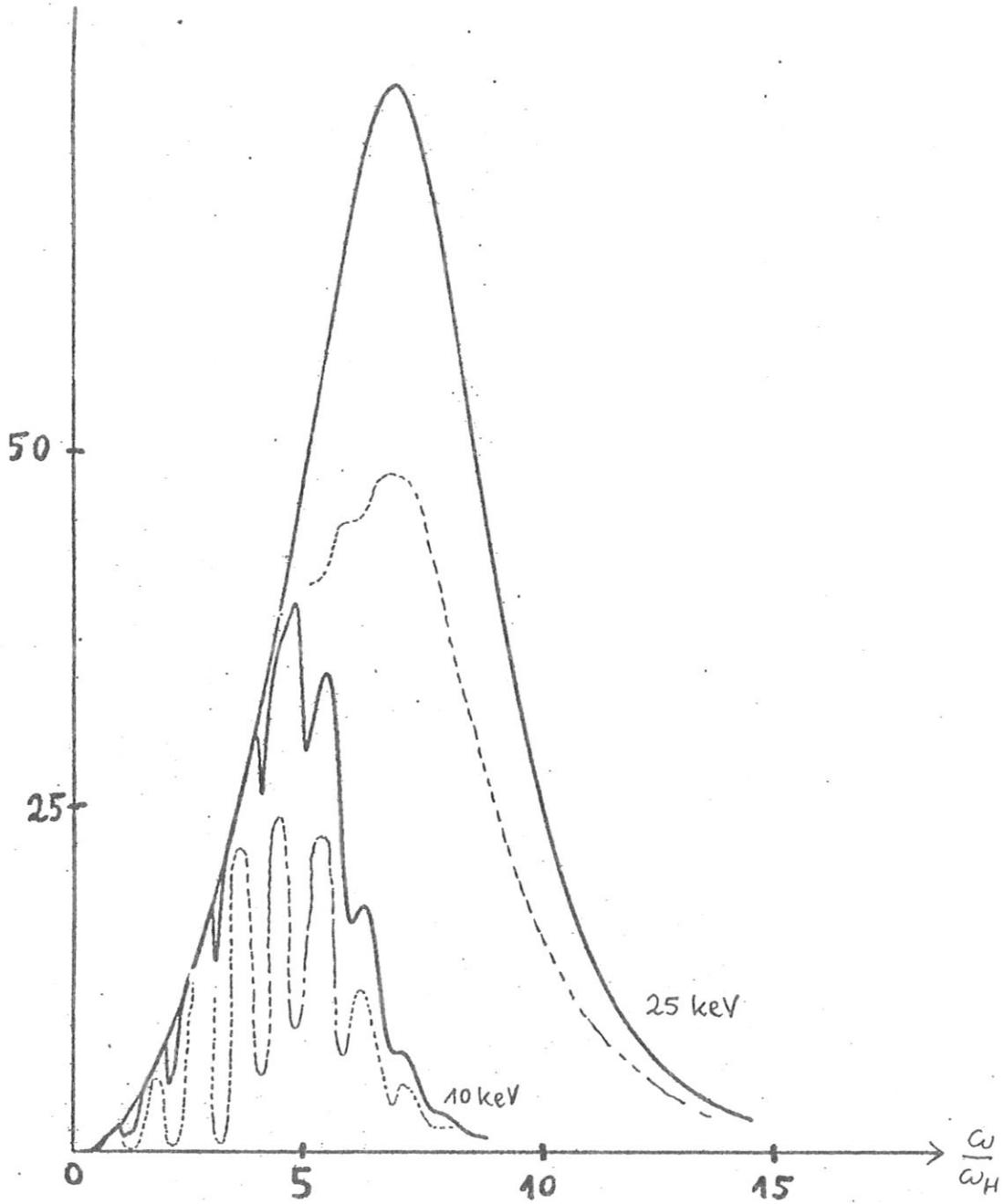


Abb. 13b

Ausgezogene Kurven:

wie Abb. 13a, aber so normiert, daß die RAYLEIGH-JEANS-Parabel durch

$$Y = 2 \left(\frac{\omega}{\omega_H} \right)^2$$

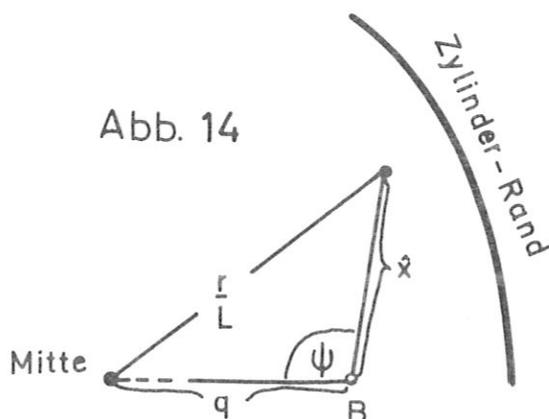
beschrieben wird.

Zum Vergleich: die gestrichelten Kurven aus TRUBNIKOV's Arbeit (Ref./8/),
welche auch bei ARZIMOVICH (Ref./6/) zu finden sind.

Beim Plasmazyylinder interessieren wir uns neben der Intensität auch für $\frac{\partial u}{\partial t}$. Folglich kann der Ursprung B auch im Innern liegen, im Abstand qL von der Zylinderachse. Der Zylinderradius sei L .

Die Gleichung für die Plasmagrenze ist

$$(x-qL)^2 + y^2 - L^2 = 0 \quad (8.6)$$



Beim Schnitt mit (7.11) erhält man

$$\frac{s_w}{L} = \frac{1}{\sin\theta} \left[q \cdot \cos\psi + \sqrt{1 - q^2 \sin^2\psi} \right] \quad (8.7)$$

In dieser Gleichung - wie auch sonst - kommt s nur in der Kombination vor:

$$\hat{x} = \sin\theta \cdot \frac{s}{L} \quad (8.8)$$

Die Dichte darf vom Abstand r von der Zylinderachse abhängen:

$$n_e = n_o f\left(\frac{r}{L}\right) \quad (8.9)$$

wobei f eine beliebige Profilmfunktion sein kann.

Aus der Geometrie (Abb.14) folgt

$$\left(\frac{r}{L}\right)^2 = q^2 + \hat{x}^2 - 2q\hat{x} \cos\psi \quad (8.10)$$

Wir definieren nun eine Funktion $g(\hat{x})$ durch die Gleichungen

$$\frac{dg}{d\hat{x}} = f\left(\frac{r}{L}\right) \text{ mit } g = 0 \text{ als Randbedingung bei } \hat{x} = 0, \text{ wobei für } \quad (8.11)$$

$\frac{r}{L}$ Gl. (8.10) eingesetzt wird.

$$\text{Ferner sei } D = \frac{\omega_0^2}{c\omega_H} L, \quad (8.12)$$

$$\text{mit } \omega_0^2 = \frac{4\pi e^2}{m} n_0, \quad (8.13)$$

wobei n_0 die Dichte auf der Achse ist (vgl. 8.9).

Dann folgt aus (7.2):

$$W = \frac{g(x_w)}{\sin\theta} \quad (8.14)$$

$$\text{und } x_w = q \cos\psi + \sqrt{1 - q^2 \sin^2\psi} \quad (8.15)$$

Beispiele

Wir behandeln 3 Typen von Dichte-Profilen und stellen die Resultate in Form von Tabellen (I-III) und Abbildungen (15-18) zusammen.

Zu jedem Dichteprofil gibt es eine Funktion $g(x)$ (s.Gl. 8.21). Die Spezialfälle $q = 0$ und $q = 1$ kommen sehr häufig vor, wir geben sie darum in Tab. I an.

Tabelle I

Dichte	$f\left(\frac{r}{L}\right)$	$g(x_w) \Big _{q=0}$	$g(x_w) \Big _{q=1}$
Kostenprofil	1	1	$2 \cos \psi$
Parabelprofil	$1 - \left(\frac{r}{L}\right)^2$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3} \cos^3 \psi$
Glockenprofil	$1 - 2\left(\frac{r}{L}\right)^2 + \left(\frac{r}{L}\right)^4$	$\frac{8}{15}$	$\frac{16}{15} \cos^5 \psi$

Mit den durch diese Dichteprofile festgelegten $g(x)$ lassen sich die optischen Dicken $\tau(s_n)$ und damit die Intensitäten $I(\mu, D)$ sowie später (Gl. 8.19) der Verlustterm Z berechnen. Einige gemäß (7.7) programmierte I -Werte sind am Ende von §11 angegeben.

Im allgemeinen stellt sich heraus, daß auch für den Zylinder die Gl. (8.5) für $T_e \geq 10 \text{ keV}$ brauchbare Näherungen liefert. Tabelle II gibt die in (8.5) benötigten Koeffizienten an.

Tabelle II a

μ	Zylinder			Platte		
	$1000a_1$	a_2	$1000a_3$	$1000a_1$	a_2	$1000a_3$
50	1.61	5.63	37.3	1.51	5.51	35.5
40	1.82	3.99	23.0	1.71	3.91	22.0
30	2.26	2.69	13.8	2.13	2.62	13.0
20	3.18	1.57	5.68	3.02	1.55	5.46
12.5	5.28	0.89	1.93	5.02	0.88	1.86
8.4	8.15	0.547	0.	7.78	0.544	0.

Zu Gl. (8.5); die Dichte ist konstant

In dieser und der folgenden Tabelle beträgt die Genauigkeit

für $\begin{cases} 5 \leq D \leq 10^4 \\ D < 5 \end{cases}$ etwa 1%-5%
etwa 3-10%

Tabelle IIb

μ	Parabel			Glocke		
	$1000a_1$	a_2	$1000a_3$	$1000a_1$	a_2	$1000a_3$
50	0.761	3.81	26.5	0.565	3.75	18.9
40	0.864	2.73	15.8	0.604	2.51	11.1
30	1.08	1.86	9.09	0.72	1.61	6.31
20	1.54	1.10	4.11	1.03	0.955	2.80
12.5	2.60	0.657	1.01	1.72	0.561	0.753

Zu Gl.(8.5); Zylinder mit ortsabhängiger Dichte

Zur Abschätzung von Größenordnungen sei angemerkt, daß z.B. für $B_{\text{stat}} = 10 \text{ kG}$ (=1Tesla) und $n_e = 1.4 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, $D=1$ einer Länge von etwa 1mm entspricht. Bei ortsabhängiger Dichte ist dabei n_e die Dichte in der Zylindermitte; vgl.(8.9).

Einfluß des Dichteprofiles

Wir untersuchen nun mittels Tabelle II den Einfluß des Profils auf die Intensität I. Hierzu definieren wir

die "durchschnittliche Dichte" $\bar{n} = 2 n_0 \int_0^1 f(q) q dq$

und vergleichen die Intensität I von 3 Zylindern mit gleichem \bar{n} , welche sich nur durch f unterscheiden. Nach Tabelle I gilt

(Fortsetzung Seite 48 oben)

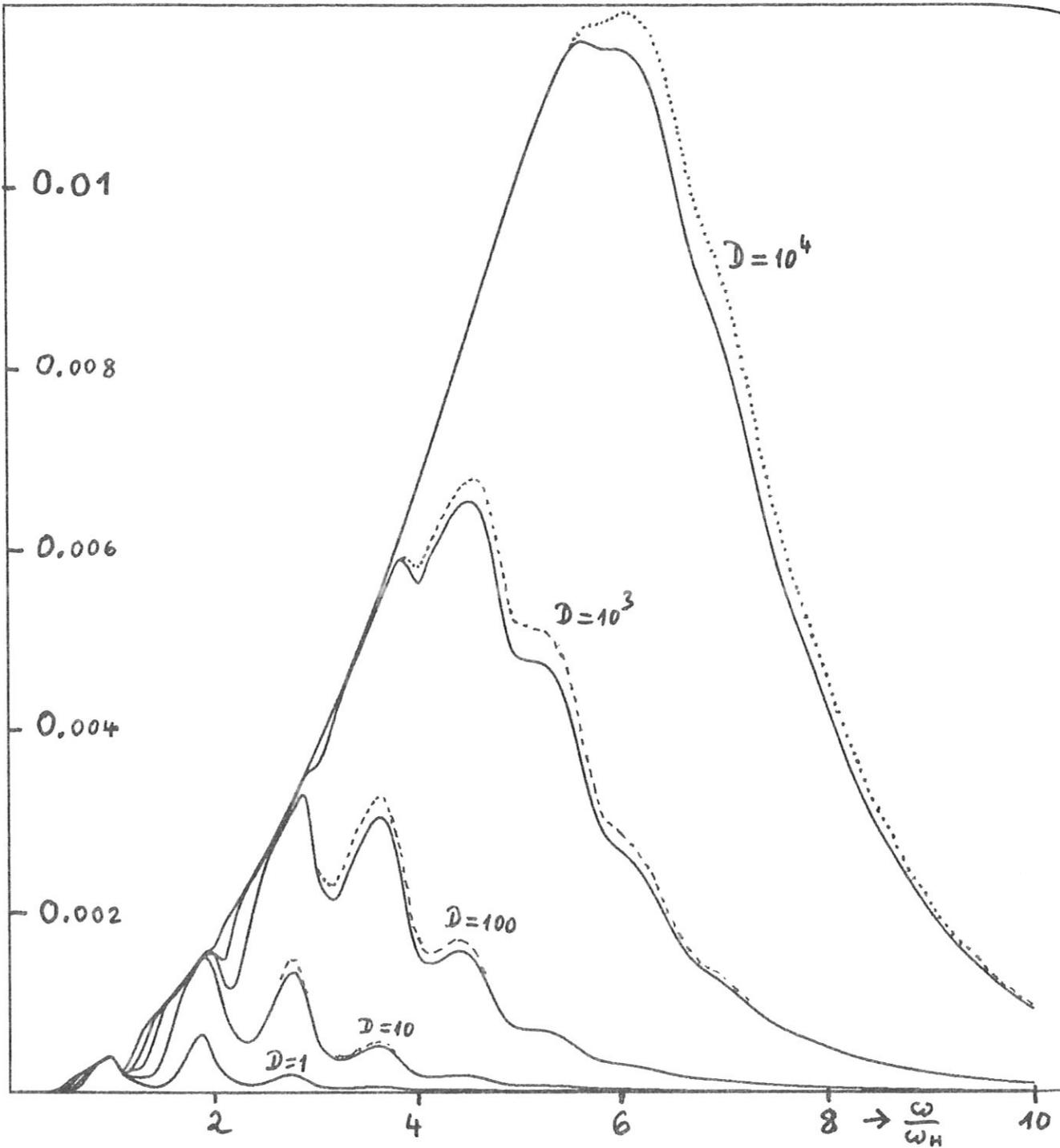


Abb. 15

Die Zyklotronstrahlungsintensität pro Frequenzintervall, Y , aufgetragen gegen die Frequenz, für $\mu=30$. ($T_e = 17$ keV)

Ausgezogene Kurve: Plasma-Platte;

Gestrichelte Kurve: Plasma-Zylinder bei konstanter Dichte

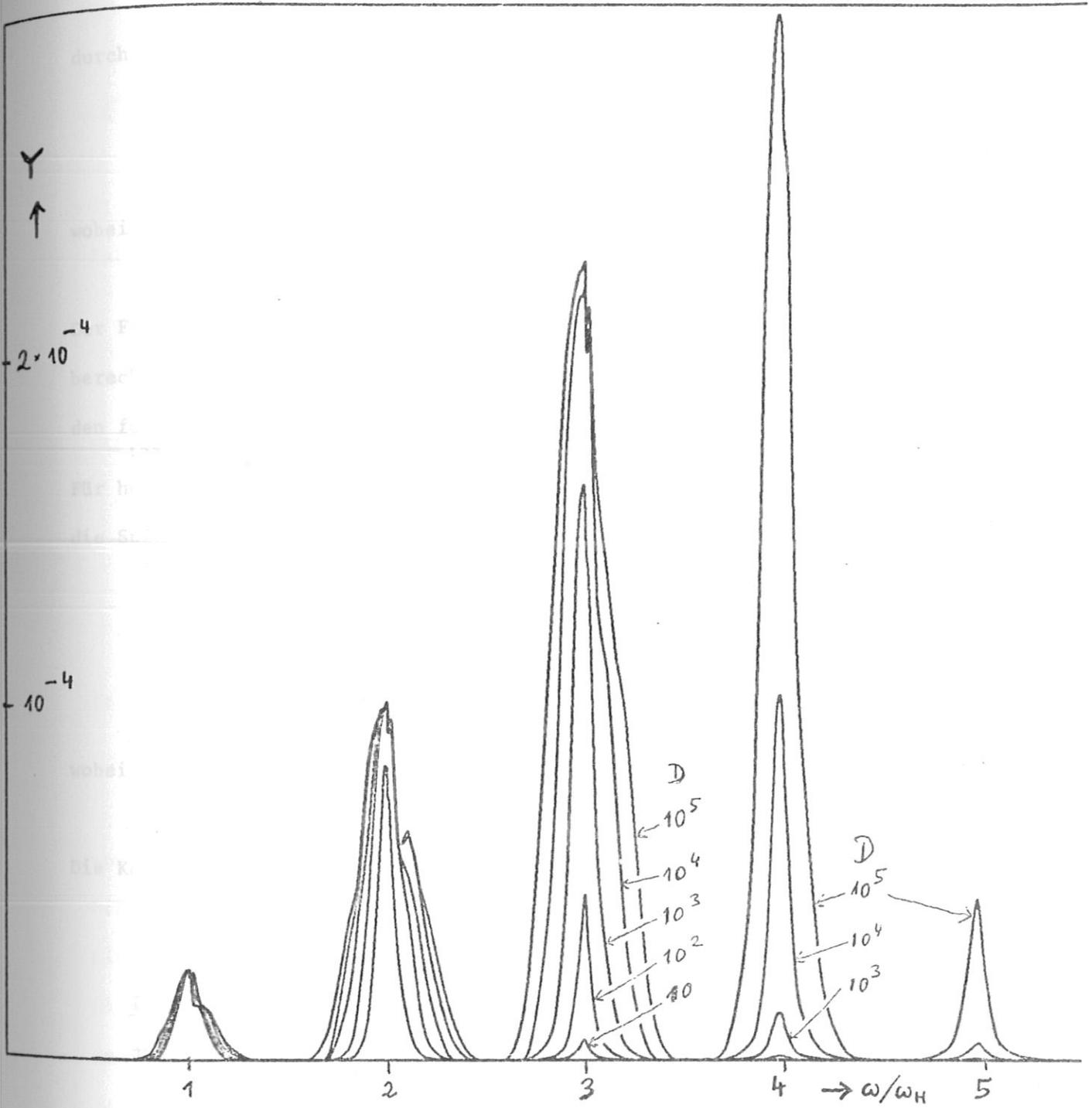


Abb. 15a

wie Abb. 15, für den Plasmazylinder bei 1keV ($\mu=500$)

bei Kastenprofil : $n_o = 1 \bar{n}$;

bei Parabelprofil : $n_o = 2 \bar{n}$;

bei Glockenprofil : $n_o = 3 \bar{n}$;

Gemäß Gl. (8.12) ist D proportional zu n_o und somit

$$D_{\text{parabel}} = 2 D_{\text{const}}$$

$$D_{\text{glocke}} = 3 D_{\text{const}}$$

Wie dies zu verstehen ist, sei am Beispiel $\mu=50$ (10keV) erläutert:

Die drei zu vergleichenden Intensitäten sind nach Tabelle II:

$$I_{\text{const}} = 1.61 \cdot 10^{-3} \cdot D / (1 + 5.63 \cdot \sqrt{D} + 0.0373 \cdot D)$$

$$I_{\text{parabel}} = 0.761 \cdot 10^{-3} \cdot 2D / (1 + 3.81 \sqrt{2D} + 0.0265 \cdot 2D)$$

$$I_{\text{glocke}} = 0.565 \cdot 10^{-3} \cdot 3D / (1 + 3.75 \sqrt{3D} + 0.0189 \cdot 3D)$$

Fast immer ist

$$I_{\text{const}} > I_{\text{parabel}} > I_{\text{glocke}} ;$$

doch sind die Unterschiede nur gering, ca 5-10% selten über 20%.

Näherungsformeln für die Intensität bei parabolischem Dichteprofil

Gl. (8.5) ist für spätere Anwendungen (Gl.9.2) zwar bequem, liefert

aber für sehr große D ($\geq 10^5$) zu kleine Werte und wird für kleine

Temperaturen unbrauchbar. Bei Parabelprofil läßt sich die

Intensität I im Bereich

$$10^2 \leq D \leq 10^4$$

$$0.5 \leq T_{e-} \leq 40 \text{ keV}$$

durch die Näherungsformel (8.18) beschreiben:

$$I = 4.9 \cdot 10^{-3} (0.1 T_e)^{2.25} \left(0.9 + \frac{0.6}{T_e}\right) \left(\frac{D}{1000}\right)^E \quad (8.18)$$

wobei

$$E = 0.28 + 0.035 \sqrt{T_e}$$

Der Fehler beträgt meist 5-10%; bei $T_e = 0.5$ ist das gemäß (8.18) berechnete I etwa 20% zu klein. Die Temperatur T_e ist hier und in den folgenden Näherungsformeln in keV einzusetzen.

Für hohe Temperaturen (>16 keV) und Dicken ($D > 100$) läßt sich auch für die Spektralfunktion $Y(\mu; D; \frac{\omega}{\omega_H})$ eine Näherungsformel angeben:

$$Y(\mu; D; \frac{\omega}{\omega_H}) = \frac{(\frac{\omega}{\omega_H})^2}{8\pi^2 \mu} \left[1 + \left(\frac{f}{D}\right)^{1.2} \right]^{-\frac{1}{1.2}}, \quad (8.18a)$$

wobei

$$f = a \exp \left[b \left(\frac{\omega}{\omega_H}\right)^{0.4} \right] \quad (8.18b)$$

Die Koeffizienten a, b sind in Tab. III zusammengestellt

Tabelle III

T_e (keV)	a	b
40	$2.14 \cdot 10^{-3}$	6.42
20	$2.19 \cdot 10^{-4}$	8.05
17	$1.8 \cdot 10^{-5}$	9.79

Die Koeffizienten a und b aus Gl. (8.18b) bei Parabel-Dichteprofil

In Abb. 15b vergleichen wir die nach (8.18a) berechnete Spektralfunktion mit dem exakten Y . Man erkennt, wie in diesem ("ungünstigsten") Grenzfall des Anwendungsbereiches die "Oszillationen" verschmiert werden. Y kann hier um einen Faktor 2 bis 3 zu groß ausfallen. Der exponentielle Abfall wird mit einer Genauigkeit von etwa 2% wiedergegeben. In der Nähe der Maxima beträgt der Fehler etwa 10%.

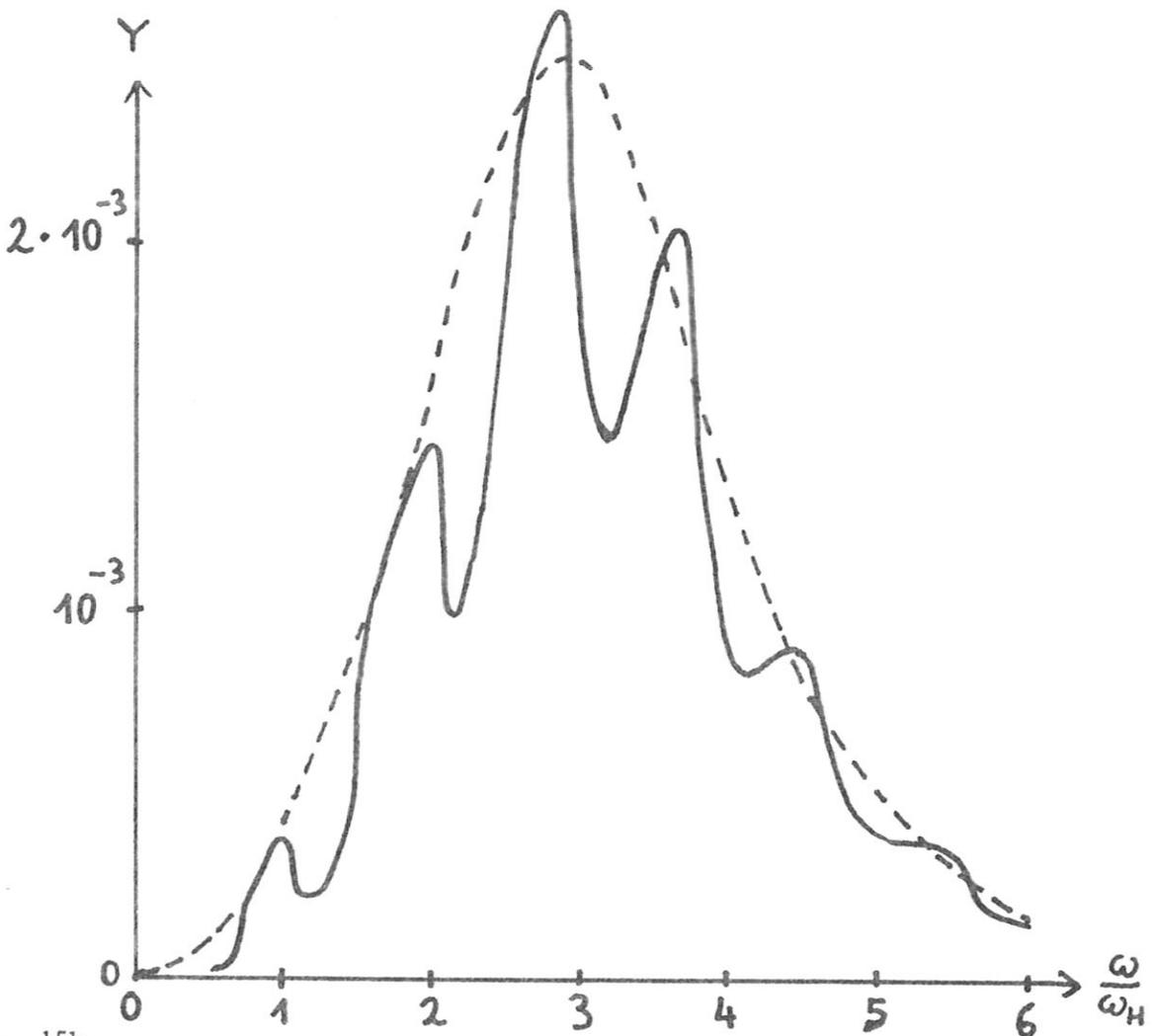


Abb. 15b

Zum Test der Näherungsformel (8.18a) (gestrichelte Kurve).

Die Spektralfunktion $Y(\mu; D; \frac{\omega}{\omega_H})$ bei parabolischem Dichteprofil für $\mu=30$ und $D=100$.

Ausgezogene Kurve = Y , nach Gl. (7.8) berechnet.

Lokaler Energieverlust

Als nächstes befassen wir uns mit dem Verlustterm Z aus Gl. (7.9). Die numerischen Resultate lassen sich für den Spezialfall $q = 0$ (Zylindermitte) in guter Näherung durch die Formel

$$Z(\mu, D, q=0) = \frac{c_1}{c_2 D^{0.2} + D^{0.7}} \quad (8.19)$$

wiedergeben; dabei ist bei konstanter Dichte:

$$c_1 = 10^{-3} (0.1 T_e)^{2.4} \left(0.9 + \frac{0.6}{T_e}\right) \quad (8.20a)$$

$$c_2 = 2 (0.1 T_e)^{0.58} + \frac{0.5}{T_e} \quad (8.20b)$$

Bei Parabelprofil gilt nach Tab. I, Gl. (8.12) und (8.15)

$$Z_{\text{Parabel}} = c_1 \left[c_2 \left(\frac{2}{3}D\right)^{0.2} + \left(\frac{2}{3}D\right)^{0.7} \right]^{-1}$$

wobei c_1 und c_2 durch (8.20) definiert sind. Das bedeutet physikalisch: Die optische Dicke für einen Beobachter in der Zylindermitte ändert sich nicht, wenn man vom Parabel-Dichteprofil zum Kastenprofil übergeht und gleichzeitig den Zylinderradius um den Faktor $2/3$ verkleinert.

Bei Glockenprofil ist überall der Faktor $\frac{2}{3}$ durch $\frac{8}{15}$ zu ersetzen.

Fehler und Anwendungsbereich für (8.19) ist ungefähr derselbe wie für (8.18); (8.19) liefert für 40keV etwa um 15% zu kleine Werte und ist bis etwa 0.3 keV noch brauchbar.

Zur Berechnung von Z für beliebige q benötigen wir $g(x)$;
aus (8.10) und (8.11) folgt:

$$\begin{aligned}
 \text{Kastenprofil:} \quad & g(x) = x \quad ; \\
 \text{Parabelprofil:} \quad & g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + q x^2 \cos\psi + (1-q^2) x \quad ; \quad (8.21) \\
 \text{Glockenprofil:} \quad & g(x) = \frac{1}{5}x^5 - q x^4 \cos\psi + (1-q^2)^2 x + \\
 & + 2q(1-q^2)x^2 \cos\psi + \frac{2}{3} \left[q^2(1+2\cos^2\psi) - 1 \right] x^3.
 \end{aligned}$$

Damit sind alle zur Berechnung von Z benötigten Formeln zusammengestellt. Abb.16 und 17 zeigen Beispiele.

In Abb. 16 wird als Abszisse die "Eintauchtiefe"

$$t = (1-q) \cdot D$$

verwendet, weil Z in der Randschicht von q und D im wesentlichen über die Kombination t abhängt. Es ist zu beachten, daß nicht Z , sondern $Z \cdot f$ proportional zu $\frac{\partial u}{\partial t}$ ist; vgl. (7.9), wo die Dichteprofilfunktion f auch in dem Faktor

$$\omega_p^2 = \omega_o^2 f$$

vorkommt. Z nimmt zu mit wachsendem q , weil am Rand weniger reabsorbiert wird als im Innern. Daher ist in weiten Bereichen $Z \cdot f$ nahezu unabhängig von q (s. Abb.17) und Gl.(8.20) auch außerhalb der Zylindermitte anwendbar.

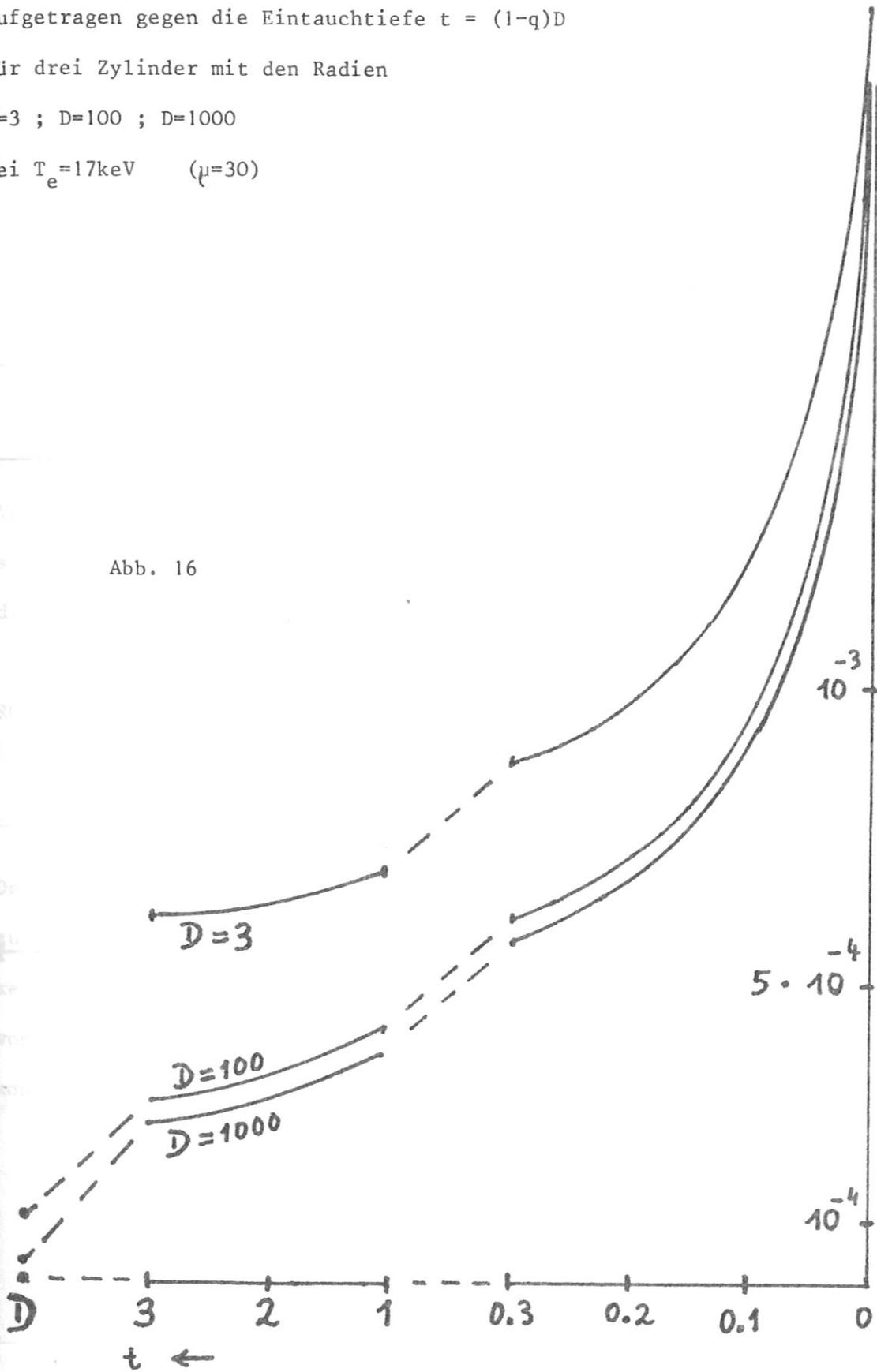
Der dimensionslose Verlustterm Z für Kastenprofil,
aufgetragen gegen die Eintauchtiefe $t = (1-q)D$

für drei Zylinder mit den Radien

$D=3$; $D=100$; $D=1000$

bei $T_e=17\text{keV}$ ($\mu=30$)

Abb. 16



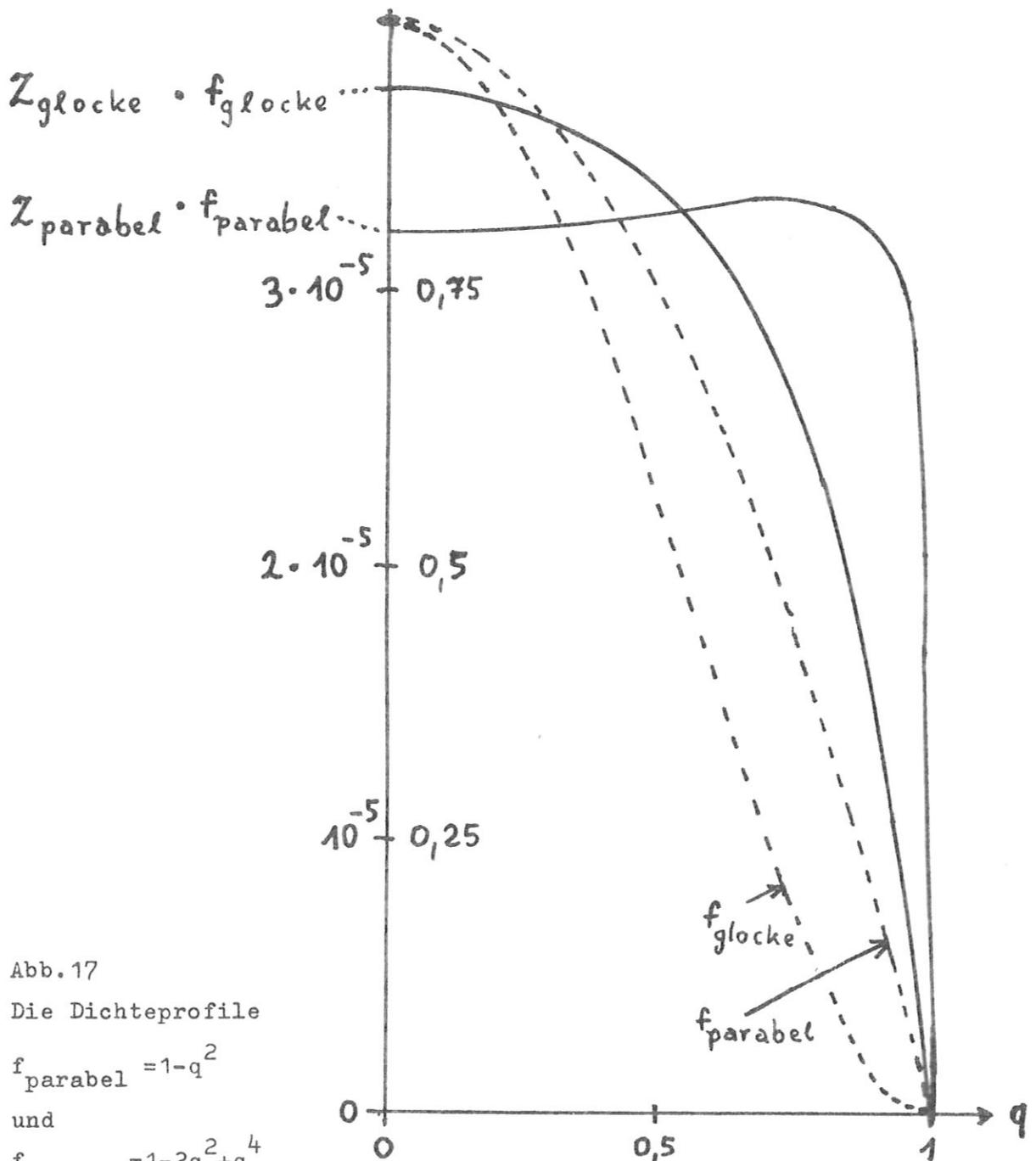


Abb. 17

Die Dichteprofile

$$f_{\text{parabel}} = 1 - q^2$$

und

$$f_{\text{glocke}} = 1 - 2q^2 + q^4$$

(gestrichelt, rechte Skala),

sowie die zugehörigen Verlustterme $Z \cdot f$

(ausgezogene Kurven, linke Skala), aufgetragen gegen q ,

für $\mu=30$ ($T_e=17\text{keV}$) und $D=1000$

Vergleich mit Ergebnissen anderer Autoren

Zum Schluß dieses Paragraphen vergleichen wir unsere Resultate, numerisch berechnet nach Gl.(7.10), mit einigen Näherungsformeln, welche vor allem bei der Berechnung von Plasmametern in Fusionsreaktoren Verwendung finden. TRUBNIKOV bringt in Ref./11/ eine Universalformel, welche in unserer Notation die Form

$$Z_{\text{TRUB}} = 6.3 \left[\frac{T_e}{511} \right]^{2.5} D^{-0.5} \sqrt{1-R} \quad (8.22)$$

annimmt. R ist dabei der Reflexionsfaktor der Wand; für unseren Vergleich ist $R = 0$ gesetzt; erst in §12 wird endliches R untersucht. Den toroidalen Anteil haben wir weggelassen, weil wir hier die Formel nur auf Zylinder anwenden.

ROSE (Ref/13/) gibt die Formel (umgeschrieben in unsere Notation)

$$Z_{\text{ROSE}} = 4 \cdot 10^{-7} T_e^{2.75} \left[1 + \frac{T_e}{200} \right] D^{-0.5} \quad (8.23)$$

Der Fehler wird mit Faktor 2 angegeben /11/; über das verwendete oder zu verwendende Dichteprofil sowie die Lage q des Aufpunktes werden keine Aussagen gemacht. In Abb. 18 vergleichen wir die Formeln von TRUBNIKOV und ROSE mit unseren Z-Werten in der Zylindermitte bei konstanter Dichte.

Abb. 18

$Z_{\text{numer.}}$ nach Gl.(7.10)

numerisch berechnet
bei $q=0$,

Z_{TRUB} nach Gl.(8.22)

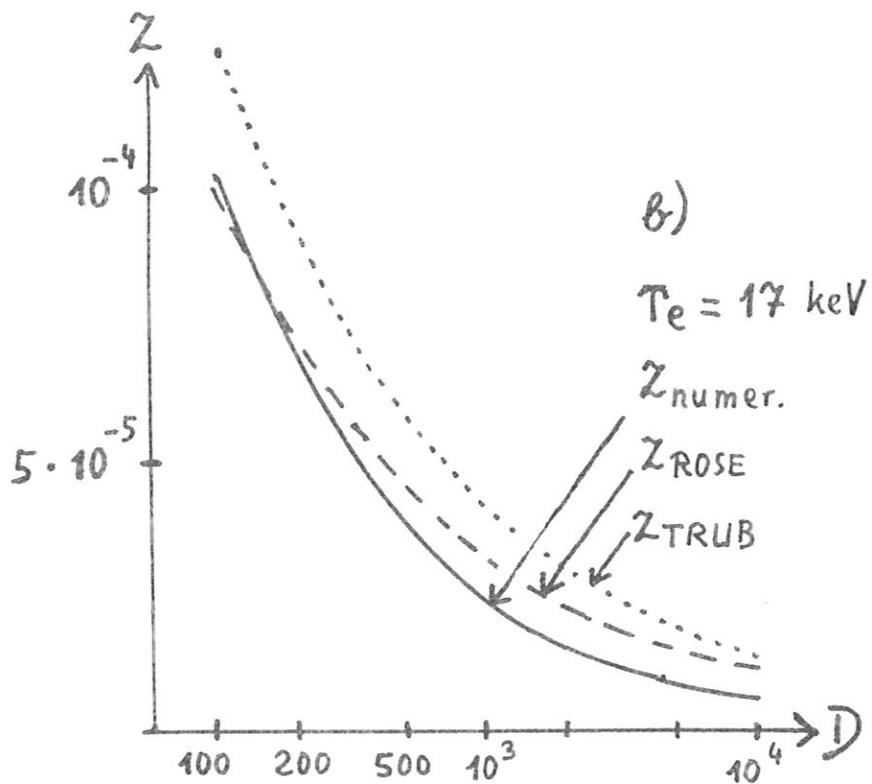
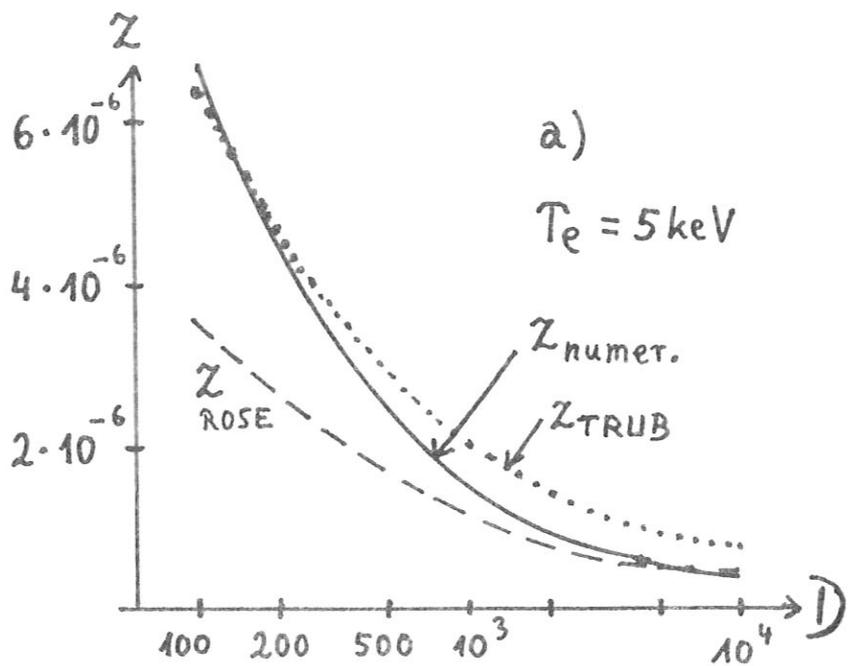
und

Z_{ROSE} nach Gl.(8.23)

aufgetragen gegen D ,

a) für $T_e = 5 \text{ keV}$

b) für $T_e = 17 \text{ keV}$



§9 Kritische Länge für ein Fusionsplasma

In der Literatur (z.B. Ref/1/) wird manchmal untersucht, wie groß die Dimensionen eines Plasmas (Zylinder oder Platte) mindestens sein müssen, damit die Fusionsleistung so groß wird wie die Strahlungsverluste.

Hierzu löst man eine Bilanzgleichung vom Typ

$$(P - B) \cdot \text{Volumen} - C \cdot \text{Oberfläche} = 0 \quad (9.1)$$

wobei P und B Gewinne beziehungsweise Verluste bedeuten, welche proportional zum Plasmavolumen sind, sowie C Verluste bedeuten, welche proportional zur Plasmaoberfläche sind. Bei Zylindergeometrie beispielsweise ist (vgl. §8)

$$\text{Volumen} = dz \pi L^2$$

$$\text{Oberfläche} = dz 2\pi L$$

C enthält die Zyklotronstrahlung und hängt daher von L ab (s.Gl.(8.5)).

Wir bezeichnen dasjenige L , welches Gl. (9.1) befriedigt, als "kritische Länge" L_{kr} . Gl. (9.1) ist natürlich nicht immer lösbar.

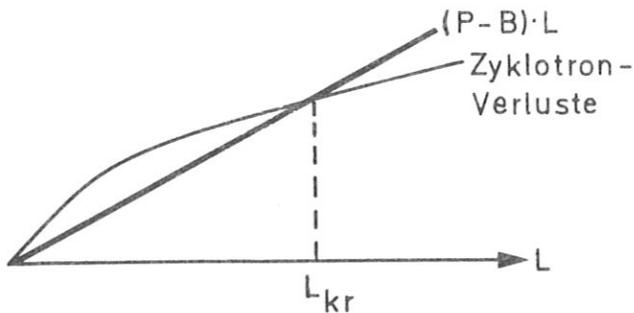


Abb. 19

Wir wollen nun unsere Resultate mit denen von DRUMMOND und ROSENBLUTH (Ref./1/) vergleichen. Hierzu setzen wir

P = Fusionsleistungsdichte

B = Bremsstrahlungs-Leistungsdichte

C = Zyklotronstrahlungs-Intensität

und vernachlässigen alle anderen Effekte, wie z.B. Strahlung von Verunreinigungen. Ferner beschränken wir uns auf Fälle ohne Wandreflexion. Die Dichte sei konstant.

Gemäß Ref./9/ ist:

$$P = P_{DD} = \frac{1}{2} n_D^2 \langle \sigma v \rangle_{DD} Q_{DD} \quad [\text{erg cm}^{-3} \text{sec}^{-1}] \text{ in Deuterium,}$$

$$P = P_{DT} = n_D n_T \langle \sigma v \rangle_{DT} Q_{DT} \quad \text{in einem Deuterium-Tritium-Gemisch.}$$

$$\langle \sigma v \rangle_{DD} = 2.33 \cdot 10^{-14} T_i^{-2/3} \exp(-18.76/T_i^{1/3}) \quad [\text{cm}^3 \text{sec}^{-1}] ,$$

$$\langle \sigma v \rangle_{DT} = 3.68 \cdot 10^{-12} T_i^{-2/3} \exp(-19.94/T_i^{1/3}) \quad [\text{cm}^3 \text{sec}^{-1}] ,$$

$$Q_{DT} = 5.6 \cdot 10^{-6} \quad [\text{erg}] ,$$

$$Q_{DD} = 6.6 \cdot 10^{-6} \quad [\text{erg}] ,$$

T_i = Iontemperatur in keV,

$$B = B_{DD} = 5.35 \cdot 10^{-24} n_D^2 \sqrt{T_e} \quad [\text{erg cm}^{-3} \text{sec}^{-1}] \text{ in Deuterium,}$$

$$B = B_{DT} = 2.14 \cdot 10^{-23} n_D n_T \sqrt{T_e} \quad \text{in einem Deuterium-Tritium-Gemisch,}$$

T_e = Elektronentemperatur in keV.

Nach Gl. (7.6) und (8.3) ist

$$C = m\omega_H^3 I(\mu, D) ,$$

$$D = \frac{\omega_P^2}{c\omega_H} L .$$

Bei Verwendung von Näherungsformel (8.5) erhält man aus (9.1)

$$D_{kr} = \frac{\omega_P^2}{c\omega_H} L_{kr} = \left\{ \sqrt{\left(\frac{a_2}{2a_3}\right)^2 + \frac{W-1}{a_3}} - \frac{a_2}{2a_3} \right\}^2 , \quad (9.2)$$

wobei

$$W = \frac{2m\omega_P^2\omega_H^2}{c(P-B)} a_1 . \quad (9.3)$$

Der Unterschied zwischen Zylinder- und Plattengeometrie erscheint in diesen Formeln lediglich in den für a_1 , a_2 , a_3 einzusetzenden Zahlenwerten (s. Tab. IIa, Seite 44).

Bei DD-Reaktionen ist meistens $W \gg \frac{a_2}{a_3}$ und $L_{kr} \text{ prop. } \omega_H^3$

Bei DT-Reaktionen ist meistens $W \ll \frac{a_2}{a_3}$ und $L_{kr} \text{ prop. } \omega_H^5$.

In Tabelle IV bringen wir Beispiele.

Tabelle IV

T_i	T_e	B_{stat}	n_e	β	Zylinder konstanter Dichte		Platte konstanter Dichte	
					L_{DD}	$L_{DT} (cm)$	L_{DD}	$L_{DT} (cm)$
46	40	10	1.4	0.5	-	0.04		
			0.28	0.1	-	30.7		
60	40	10	1.4	0.5	57m	0.002	55m	0.0005
			0.28	0.1	2.6km	15.2	2.6km	13.8
93	60	10	0.8	0.5	0.7km	0.55	0.7km	0.6
			0.16	0.1	95. km	272.	82. km	261.
15	16.7	30	60.	0.8	-	10^{-5}		
		50	10.	0.05	-	1.9		
		100	10.	0.01	-	59.2		

Die kritischen Längen L_{DD} für ein reines Deuteriumplasma
und L_{DT} für ein Deuterium-Tritium-Gemisch.

Einheiten: B_{stat} in kGauss, n_e in 10^{13} cm^{-3} ,

$$\beta = \frac{8\pi}{B_{stat}^2} n_e (kT_i + kT_e) \quad , \quad (9.4)$$

wobei die BOLTZMANN-Konstante $k=1.6 \cdot 10^{-9}$ zu setzen ist, da wir alle Temperaturen in keV angeben.

Zeile 1-6 aus Tabelle IV dient zum Vergleich mit DRUMMOND und ROSENBLUTH, Ref./1/, Table II, für DD-Reaktionen. Aus den dort ange-

gegebenen β -Werten schließen wir, daß die Angabe $B_0 = 10^5$ gauss ein Druckfehler ist und durch $B_0 = 10^4$ gauss ersetzt werden muß.

Für den Fall $T_i = 46 \text{ keV}$, $T_e = 40 \text{ keV}$ übersteigt bei den von uns benutzten Formeln (Ref./9/) die Bremsstrahlung die Fusionsleistung. Um überhaupt einen Anhaltspunkt über die Größenordnung der kritischen Länge zu haben, setzten wir daher willkürlich $T_i = 60 \text{ keV}$ (Zeile 3 und 4 in unserer Tabelle IV). Die so erhaltenen kritischen Längen übersteigen die aus Ref./1/ um ca. 2 Größenordnungen. Für den Fall

$T_i = 93 \text{ keV}$, $T_e = 60 \text{ keV}$ ist ein direkter Vergleich möglich:

unsere kritischen Längen sind etwa 1000 mal größer!

Zeile 7 aus unserer Tab. IV enthält die Daten eines Hoch- β -Reaktors, Zeile 8 die eines Tokamak-Reaktors. Wegen der Ungenauigkeit von Gl. (8.5) sind die Angaben unserer Tabelle IV für L_{DD} im km-Bereich erheblich zu klein.

```

$SOURCE
C KRITISCHE LAENGE
1 REAL*4 L, LDD, LDT, ME, MY, ND, NE, NT
2 ME = 9.106E-28
3 E = 4.803E-10
4 C = 2.998E 10
5 PRINT 99
6 10 READ 112, NE, TI, TE, BKGAUS, A1, A2, A3
7 A1 = A1 * 1.E-3
8 A3 = A3 * 1.E-3
9 NE = NE * 1.E13
10 B = BKGAUS * 1000.
11 BETA = 8 * 3.1416 * NE * 1.6E-9 * (TI + TE) / B**2
12 OH = E*B / (ME*C)
13 ND = NE
14 NT = 0.5 * NE
15 OP2 = 12.556 * NE / ME * E**2
16 BDD = 5.35E-24 * NE**2 * SQRT(TE)
17 BDT = BDD
18 QDD = 6.6 E-6
19 QDT = 5.6 E-6
20 SVDD = 2.33E-14 * TI**(-0.66667) * EXP(-18.76 * TI**(-0.33333))
21 SVDT = 3.68E-12 * TI**(-0.66667) * EXP(-19.94 * TI**(-0.33333))
22 PDD = 0.5 * ND**2 * SVDD * QDD
23 PDT = NT**2 * SVDT * QDT
24 OH2 = OH**2
25 WDD = 2 * A1 * ME * OH2 * OP2 / (C*(PDD - BDD)) - 1.
26 WDT = 2 * A1 * ME * OH2 * OP2 / (C*(PDT - BDT)) - 1.
27 A23 = 0.5 * A2 / A3
28 IF ( PDD. GT. BDD) GO TO 1
29 DDD = -1.E-20
30 GO TO 2
31 1 DDD = ( SQRT( A23**2 + WDD/A3 ) - A23 )**2
32 2 DDT = ( SQRT( A23**2 + WDT/A3 ) - A23 )**2
33 L = C * OH / OP2
34 LDD = L*DDD
35 LDT = L*DDT
36 PRINT 113, TI, TE, NE, BKGAUS, BETA, LDD, LDT , A1, A2, A3
37 GO TO 10
38 99 FORMAT(/84H TI(KEV) TE(KEV) NE(CM-3) B(KG) BETA LDD(CM) LD
IT(CM) A1 A2 A3)
39 112 FORMAT ( 12F6.2)
40 113 FORMAT ( F9.1 , F8.1 , 1PE9.1 , OPF7.1 , F7.2 , 1P3E10.2 , OPF7.2
1 , 1PE10.2)
41 END

```

\$DATA

TI(KEV)	TE(KEV)	NE(CM-3)	B(KG)	BETA	LDD(CM)	LDT(CM)	A1	A2	A3
46.0	40.0	1.4E 13	10.0	0.48	-1.18E-21	2.79E-02	5.02E-03	0.88	1.86E-0
46.0	40.0	2.8E 12	10.0	0.10	-5.92E-21	2.80E 01	5.02E-03	0.88	1.86E-0
60.0	40.0	1.4E 13	10.0	0.56	5.46E 03	4.96E-04	5.02E-03	0.88	1.86E-0
60.0	40.0	2.8E 12	10.0	0.11	2.55E 05	1.38E 01	5.02E-03	0.88	1.86E-0
93.0	60.0	8.0E 12	10.0	0.49	7.09E 04	5.90E-01	7.78E-03	0.54	1.00E-0
93.0	60.0	1.6E 12	10.0	0.10	8.23E 06	2.61E 02	7.78E-03	0.54	1.00E-0
15.0	17.0	6.0E 14	30.0	0.86	-8.29E-23	2.79E-05	2.25E-03	2.67	1.36E-0
15.0	17.0	1.0E 14	50.0	0.05	-8.29E-22	1.90E 00	2.25E-03	2.67	1.36E-0
15.0	17.0	1.0E 14	100.0	0.01	-1.66E-21	5.93E 01	2.25E-03	2.67	1.36E-0

Programmbeispiel zu Tabelle IV

§10 FORTRAN-Programm zur Berechnung von A nach Gl.(4.9)

Das hier abgedruckte Programm besteht aus dem Hauptprogramm (Rahmenprogramm) sowie der SUBROUTINE AROUT, welche aus den drei Variablen θ , ω/ω_H und μ den zugehörigen dimensionslosen Absorptionskoeffizient A berechnet. Im folgenden schreiben wir als Abkürzung

$$\Omega = \omega/\omega_H \quad \text{im Text,}$$

$$\square = \omega/\omega_H \quad \text{im Programm.}$$

Im Hauptprogramm werden eingelesen:

die Genauigkeitsparameter JMAX, EPS und P30,

ein Wert für μ , 8 Werte für θ , sowie KMAX Werte für Ω .

Ausgedruckt und ausgestanzt wird eine Liste für A mit

θ als Spaltenindex und Ω als Zeilenindex. Benötigt man mehr als 8, etwa N_T

θ -Werte, dann muß man in den Statements 0010-24

$$J=1,8 \quad \text{durch} \quad J=1,NT \quad \text{ersetzen}$$

und außerdem die zugehörigen Formate entsprechend verändern. Wir be-

nutzen in diesem Bericht ausschließlich die Unterteilung in 8 θ -Werte.

Als Beispiel drucken wir auf Seite 69 A für $\mu=500$ ($T_e=1\text{keV}$).

Zur Erläuterung von SUBROUTINE AROUT bringen wir Gl. (4.9) auf die

Form

$$A = \frac{1.2533}{\Omega} \frac{\mu^{5/2}}{(1 + 1.28\mu)^{3/2}} \sum_{n=n_{\min}}^{\infty} S_n \quad (10.1)$$

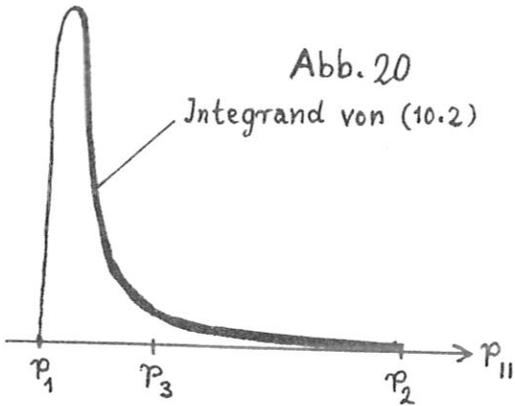
mit

$$S_n = \int_{P_1}^{P_2} B_n e^{(1-w_0)\mu} w_0^2 dp_{||} \quad (10.2)$$

Zunächst definieren wir die 3 oben erwähnten Genauigkeitsparameter. Gemäß Gl. (4.8) enthält der Integrand von (10.2) den Faktor

$$\exp(-p_{||} \cos \theta \mu)$$

und zeigt daher qualitativ den in Ab. 20 dargestellten Verlauf; wir



benutzen darum als obere Integrationsgrenze in (10.2) die Zahl

$$p_3 = \frac{p_{30}}{\mu \cos \theta} \quad (10.3)$$

anstelle von p_2 ; p_{30} ist einer der drei oben erwähnten einzulesenden Genauigkeitsparameter.

Je nach der gewünschten Genauig-

keit ist

$$8 \leq p_{30} \leq 30 \quad .$$

Die Einführung von p_{30} ist erforderlich, um Rechenzeit zu sparen, denn oft ist

$$\frac{p_2 - p_1}{p_3 - p_1} \approx 10 \text{ bis } 100.$$

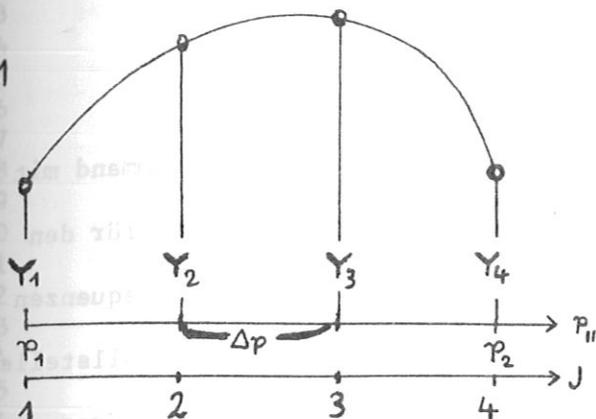
Wenn θ nahe 90° liegt, kann das gemäß (10.3) definierte p_3 größer als p_2 werden; in dem Fall soll p_2 als obere Integrationsgrenze verwendet werden;

s. Statement Nr. 0020.

Die Bedeutung von J_{MAX} sowie der Integrationsroutine INTRUT erläutern wir in Abb. 21 für den Fall, daß die obere Integrationsgrenze p_2 ist:

wir unterteilen das Intervall $(p_1; p_2)$ in Stützstellen:

Abb 21



$$p_J = p_1 + \Delta p (J-1),$$

wobei

$$\Delta p = \frac{p_2 - p_1}{J_{\text{MAX}} - 1}, \quad (\text{St.0022})$$

und berechnen den Integranden von (10.2) an diesen Stützstellen: $Y_J = Y(p_J)$, vgl.

Statement 0043. Abb. 21 zeigt den fall $J_{\text{MAX}}=4$.

INTRUT liefert sodann zu vorgebenem J_{MAX} , Δp und Vektor Y einen Näherungswert für das Integral S_n ; in Statement 0045 steht dafür S , da im Programm eine Indizierung - im Gegensatz zum Text - nicht erforderlich ist. Dieser Näherungswert wird erhalten, indem man Y im Intervall $(p_J; p_{J+1})$ durch ein Polynom 3. Ordnung approximiert und die Beiträge der einzelnen Intervalle aufaddiert.

Der Parameter EPS beschränkt die Anzahl der Summanden in (10.1); die Summation soll abgebrochen d.h. die höheren Terme vernachlässigt werden, sobald

$$\frac{S_n}{\sum_{m=n}^{\infty} S_m} \leq \text{EPS} \quad (10.5)$$

erfüllt ist; s. Statement 0051. Dieses Verfahren setzt voraus, daß die Summe (10.1) konvergiert.

Das Konvergenzverhalten von S_n wird im wesentlichen bestimmt durch den Faktor

$$e^{-w_0 t} \approx e^{-\frac{n}{\Omega} t}.$$

Die Konvergenz ist daher für große Frequenzen und Temperaturen schlechter. Erfahrungsgemäß ist

$$\text{EPS} \approx 0.001$$

falls eine Genauigkeit von ca. 1/2% gewünscht wird.

Die EPS-Abfrage (10.5 bzw. St.0052) wird sinnlos, wenn der Summand mit dem niedrigsten n verschwindet - zumindest für den Rechner, für den etwa 10^{-89} dasselbe ist wie 0. Bei kleinen Temperaturen und Frequenzen kann man daraus schließen, daß dann auch $A=0$ ist. Derartige "Nullstellen" treten vor allem bei Winkeln von etwa 60° - 90° auf. Bei höheren Frequenzen wird der Beitrag zu A manchmal erst von Summanden mit höheren n -Werten geliefert. Die Zahl $\Omega=1.6$ in Abfrage 0050 soll diesen Frequenzbereich vom Nullstellenbereich trennen. Dies gelingt nicht immer: für Temperaturen $\leq 1\text{keV}$ gibt es auch für höhere Frequenzen noch Nullstellen, z.B. auf Seite 69 für $\Omega=2.1$. Damit sich das Programm an einer derartigen Nullstelle nicht "totrechnet", wird in Abfrage 0049 die

$$\text{maximal zulässige Summandenzahl} = 20$$

gesetzt. Diese Zahl ist für sehr hohe Temperaturen viel zu klein; beispielsweise bei $T_e=100\text{keV}$ (s.Abb.6a) haben wir mit 99 Summanden - zum Test sogar mit 599 Summanden - gerechnet.

Zur Bestimmung von B_n (Gl.10.2 und 3.11) werden J-BESSEL-Funktionen sowie deren Ableitung benötigt.

BESJ (ARG, N, JN, IER) berechnet zu vorgebenem Argument ARG und Index N die zugehörige J-Bessel-Funktion $JN=J_N(\text{ARG})$.

Die ganze Zahl IER bedeutet eine Fehleranzeige, welche beschreibt, ob man z.B. N oder ARG versehentlich negativ gewählt hat. Zur Bildung der Ableitung J' muß man durch das Argument dividieren (St.0035). Wenn das

(Fortsetzung Seite 70)

67

```

0001      IMPLICIT REAL*8      (A-H, O-Z)
0002      REAL*8      MY
0003      REAL*4      A
0004      DIMENSION      A(17) , O(63) , THE(17)
0005      COMMON      EPS , P30 , JMAX
0006 10 PRINT 98
0007      PRINT 93
0008      READ 305,      JMAX, KMAX, EPS, P30
0009      PRINT 305,      JMAX, KMAX, EPS, P30
0010      PRINT 91
0011      READ 109,      MY , ( THE(J) , J=1,8)
0012      PRINT 110,      MY , ( THE(J) , J=1,8)
0013      PUNCH 109,      MY , ( THE(J) , J=1,8)
0014      READ 112,      ( O(K) , K=1,KMAX)
0015      PRINT 94
0016      DO 2      K=1,KMAX
0017      DO 1      J=1,8
0018      CALL AROUT ( THE(J) , O(K) , MY , AA )
0019      1      A(J) = AA
0020      PUNCH 909,      O(K) , ( A(J) , J=1,8)
0021      2 PRINT 111,      O(K) , ( A(J) , J=1,8)
0022      GO TO 10
0023 91 FORMAT(/20H      MY      THETA)
0024 93 FORMAT(/35H      JMAX      KMAX      EPS      P30)
0025 94 FORMAT(/20H      O      A)
0026 96 FORMAT (1H )
0027 98 FORMAT (1H1)
0028 109 FORMAT (9F8.4)
0029 110 FORMAT ( F10.1 , 9F10.4)
0030 111 FORMAT ( F11.3 , 1P8E10.2)
0031 112 FORMAT ( 12F6.2 )
0032 305 FORMAT ( 2I6 , 5F12.4)
0033 909 FORMAT ( F8.4 , 1P8E8.2)
0034      END

```

```

0001      SUBROUTINE AROUT ( THETA , O , MY , A )
0002      IMPLICIT REAL*8 (A-H , O-Z)
0003      REAL*8      MY, JN, JN1
0004      DIMENSION  Y(1000)
0005      COMMON  EPS , P30 , JMAX
0006      SINT = DSIN ( THETA )
0007      COST = DCOS ( THETA )
0008      SIN2 = SINT**2
0009      P3 = P30 / COST / MY
0010      P9 = DABS ( P3 )
0011      NMIN = O * SINT + 1
0012      SU = O.
0013      N = NMIN
0014      10      N1 = N + 1
0015              U = N/O
0016              V = DSQRT ( U**2 - SIN2)
0017              P1 = (U* COST - V) / SIN2
0018              P2 = (U* COST + V) / SIN2
0019              P3 = P1 + P9
0020      IF ( P3. GT. P2)      GO TO 5
0021              P2 = P3
0022      5      DP = (P2 -P1) / (JMAX -1)
0023      DO 4      J=1,JMAX
0024              P = DP * (J-1) + P1
0025              PQ = P**2
0026              W = U + P *COST
0027              W2 = W**2
0028              QO = W2 - 1. - PQ
0029      IF ( QO. LE. -1.0-3) GO TO 16
0030              QO = DABS ( QO )
0031      IF ( J. EQ. 1. OR. J. EQ. JMAX)      GO TO 1
0032              ARG = O * SINT * DSQRT ( QO )
0033      CALL BESJ ( ARG , N , JN , IER )
0034      CALL BESJ ( ARG , N1, JN1, IER )
0035              DJN = N * JN / ARG - JN1
0036      GO TO 3
0037      1      JN = O.
0038      IF ( N. EQ. 1)      GO TO 2
0039      DJN = O.
0040      GO TO 3
0041      2      DJN = 1.00
0042      3      B = (((COST - P/W)/SINT)*JN)**2 + (DSQRT(QO) *DJN /
0043              Y(J) = B* DEXP(( 1.00 - W) * MY) * W2
0044      4      CONTINUE
0045      CALL INTRUT ( JMAX , DP , Y , S )
0046              SU = SU + S
0047              N = N + 1
0048              N9 = N - NMIN
0049      IF ( N9. GT. 20)      GO TO 11
0050      IF ( SU. LE. O. AND. O. LE. 1.6)      GO TO 11
0051      IF ( SU. LE. O.)      GO TO 10
0052      IF ( S/SU. GT. EPS)      GO TO 10
0053      6      CONTINUE
0054      11      A = SU* MY**2.5 * 1.2533 /O /((1.+ 1.28/MY)**1.5
0055      RETURN
0056      16      PRINT 91
0057              PRINT 208,      J, QO
0058      91      FORMAT (/20H      J      QO      )
0059      208      FORMAT ( I6 , 1P8E10.2)
0060      RETURN
0061      END

```

X	KMAX	EPS	P30						
	55	0.0005	27.0000						
MY	THETA								
0.0	0.1708	0.3708	0.5708	0.7708	0.9708	1.1708	1.3708	1.5708	
n	A								
0.600	2.49E-28	1.99E-30	1.81E-34	3.31E-41	5.31E-52	3.39E-69	0.0	0.0	
0.700	3.18E-13	2.26E-14	1.26E-16	1.64E-20	4.95E-27	4.61E-38	5.47E-57	0.0	
0.800	1.21E-04	3.81E-05	3.75E-06	5.84E-08	3.43E-11	3.57E-17	1.10E-28	5.50E-49	
0.900	1.99E 00	1.50E 00	8.41E-01	2.86E-01	3.51E-02	3.84E-04	6.74E-09	2.03E-19	
0.920	5.51E 00	4.60E 00	3.20E 00	1.62E 00	4.18E-01	1.99E-02	6.61E-06	2.41E-14	
0.940	1.18E 01	1.06E 01	8.72E 00	6.04E 00	2.88E 00	4.96E-01	2.77E-03	1.55E-09	
0.960	1.96E 01	1.88E 01	1.73E 01	1.50E 01	1.14E 01	5.54E 00	4.24E-01	5.18E-05	
0.970	2.32E 01	2.26E 01	2.17E 01	2.04E 01	1.83E 01	1.33E 01	3.27E 00	6.97E-03	
0.980	2.60E 01	2.56E 01	2.53E 01	2.52E 01	2.54E 01	2.51E 01	1.68E 01	6.67E-01	
0.990	2.76E 01	2.74E 01	2.74E 01	2.81E 01	3.03E 01	3.63E 01	4.99E 01	4.07E 01	
0.995	2.78E 01	2.76E 01	2.78E 01	2.86E 01	3.14E 01	3.91E 01	6.53E 01	1.83E 02	
0.998	2.78E 01	2.76E 01	2.77E 01	2.86E 01	3.14E 01	3.94E 01	6.82E 01	2.11E 02	
1.000	2.77E 01	2.75E 01	2.76E 01	2.85E 01	3.12E 01	3.89E 01	6.61E 01	1.15E-10	
1.010	2.65E 01	2.61E 01	2.59E 01	2.61E 01	2.73E 01	2.98E 01	1.92E 01	0.0	
1.020	2.40E 01	2.35E 01	2.27E 01	2.18E 01	2.03E 01	1.54E 01	2.38E-03	0.0	
1.050	1.36E 01	1.23E 01	1.02E 01	7.03E 00	2.89E 00	7.04E-02	0.0	0.0	
1.100	2.18E 00	1.55E 00	7.35E-01	1.46E-01	1.52E-03	0.0	0.0	0.0	
1.200	3.37E-03	8.88E-04	3.94E-05	1.55E-08	6.91E-28	1.43E-71	0.0	0.0	
1.400	1.55E-12	5.72E-15	1.13E-19	2.65E-23	1.33E-29	2.09E-40	5.30E-59	0.0	
1.600	1.12E-08	1.63E-08	3.69E-09	1.03E-10	9.65E-14	1.63E-19	1.04E-30	6.34E-50	
1.800	2.06E-04	7.10E-04	9.02E-04	5.30E-04	9.89E-05	1.62E-06	5.32E-11	1.37E-20	
1.900	1.71E-03	7.26E-03	1.42E-02	1.88E-02	1.69E-02	7.08E-03	2.49E-04	1.15E-08	
1.950	2.78E-03	1.23E-02	2.67E-02	4.33E-02	5.92E-02	5.74E-02	4.01E-02	1.43E-03	
1.960	2.93E-03	1.31E-02	2.87E-02	4.75E-02	6.82E-02	8.82E-02	8.08E-02	1.12E-02	
1.970	3.06E-03	1.37E-02	3.02E-02	5.09E-02	7.56E-02	1.08E-01	1.41E-01	7.18E-02	
1.980	3.14E-03	1.41E-02	3.12E-02	5.31E-02	8.08E-02	1.22E-01	2.08E-01	3.15E-01	
1.990	3.18E-03	1.43E-02	3.17E-02	5.41E-02	8.30E-02	1.29E-01	2.48E-01	7.16E-01	
2.000	3.19E-03	1.43E-02	3.17E-02	5.38E-02	8.20E-02	1.26E-01	2.24E-01	6.22E-22	
2.010	3.15E-03	1.41E-02	3.10E-02	5.22E-02	7.79E-02	1.12E-01	1.37E-01	0.0	
2.100	1.63E-03	6.67E-03	1.20E-02	1.33E-02	7.06E-03	1.54E-04	1.27E-60	0.0	
2.300	1.73E-05	3.61E-05	1.39E-05	3.87E-07	3.13E-13	1.88E-27	1.00E-40	3.70E-62	
2.500	5.94E-09	4.83E-09	1.89E-09	3.06E-10	3.53E-12	2.74E-16	6.61E-25	5.04E-40	
2.700	5.42E-08	8.53E-07	2.46E-06	2.51E-06	7.22E-07	1.79E-08	1.04E-12	1.69E-21	
2.900	6.94E-07	1.38E-05	6.50E-05	1.69E-04	3.03E-04	3.56E-04	1.34E-04	1.63E-06	
2.990	9.26E-07	1.88E-05	9.23E-05	2.62E-04	5.66E-04	1.10E-03	2.28E-03	2.90E-03	
3.000	9.28E-07	1.88E-05	9.21E-05	2.60E-04	5.57E-04	1.05E-03	1.88E-03	6.07E-33	
3.100	7.01E-07	1.35E-05	5.93E-05	1.34E-04	1.71E-04	5.20E-05	5.78E-40	1.07E-59	
3.300	8.76E-08	1.24E-06	2.71E-06	1.29E-06	1.79E-08	3.24E-19	3.99E-28	3.49E-43	
3.500	1.92E-09	1.50E-08	9.00E-09	1.33E-09	1.88E-10	9.42E-13	2.42E-18	9.07E-29	
3.700	9.80E-11	7.18E-09	5.95E-08	1.68E-07	1.74E-07	3.52E-08	1.19E-10	2.59E-16	
3.900	3.74E-10	3.42E-08	3.67E-07	1.70E-06	4.84E-06	9.51E-06	1.05E-05	2.25E-06	
3.980	4.46E-10	4.10E-08	4.47E-07	2.14E-06	6.51E-06	1.55E-05	3.58E-05	4.74E-05	
4.000	4.51E-10	4.13E-08	4.49E-07	2.13E-06	6.36E-06	1.44E-05	2.53E-05	7.67E-44	
4.100	3.93E-10	3.48E-08	3.52E-07	1.43E-06	3.03E-06	2.20E-06	1.62E-30	2.89E-45	
4.500	1.37E-11	7.16E-10	2.21E-09	7.68E-10	1.50E-10	7.90E-12	1.37E-15	5.05E-23	
4.900	2.80E-13	1.12E-10	2.73E-09	2.16E-08	8.95E-08	2.46E-07	4.90E-07	4.79E-07	
5.000	3.11E-13	1.28E-10	3.13E-09	2.46E-08	1.01E-07	2.73E-07	4.49E-07	1.05E-41	
5.500	3.51E-14	9.92E-12	1.04E-10	1.32E-10	1.32E-11	6.21E-12	1.84E-14	8.34E-20	
6.000	3.52E-16	5.26E-13	2.84E-11	3.64E-10	2.04E-09	6.58E-09	9.79E-09	2.16E-35	
6.500	6.58E-17	9.30E-14	2.72E-12	9.18E-12	3.49E-12	1.63E-12	3.70E-14	5.77E-18	
7.000	1.19E-18	3.19E-15	3.18E-13	6.58E-12	5.05E-11	1.92E-10	2.50E-10	3.63E-31	
7.500	1.16E-19	7.85E-16	5.80E-14	4.26E-13	3.44E-13	2.47E-13	2.55E-14	5.76E-17	
8.000	5.31E-21	3.46E-17	4.51E-15	1.41E-13	1.48E-12	5.58E-12	7.26E-12	2.92E-28	
8.500	2.39E-22	6.70E-18	1.17E-15	1.69E-14	2.71E-14	2.79E-14	9.19E-15	1.60E-16	
9.000	1.97E-23	5.03E-19	8.72E-17	3.50E-15	4.96E-14	2.58E-13	2.33E-13	3.03E-26	

Argument verschwindet, dann gibt es die Fälle $J_4' = 1$ (St. 0041) und $J_n' = 0$ für $n \neq 1$ (St. 0037).

§ 11 Programm zur Berechnung von I und Y nach Gl. (7.8)

Dieses Programm soll nicht nur die Intensität $I(\mu; D)$ berechnen, sondern zugleich die Spektralfunktion $Y(\mu; D; \Omega)$ zeichnen.

Anstelle von Y wird im Programm das Symbol Y_D verwendet (siehe Statement 0060). Die Integrale über θ und μ werden durch endliche Summen approximiert; hierfür ist die Einführung von Stützstellen erforderlich.

Der 1. Teil bis Statement 0027 dient zum Einlesen der Daten sowie zum Zeichnen des Rahmens, d.h. des Rechtecks, welches Abb. 15 und 15a begrenzt. Es bedeuten:

N_{TH} Anzahl der θ -Stützstellen (hier: 8) ;
 N_{PH} Anzahl der Ψ -Stützstellen ;
 N_D Anzahl der D-Werte (in Abb. 15 : $N_D = 5$) ;
 O_{MIN} bis Y_{MAX} = Koordinaten der Rahmen-Eckpunkte;
(in Abb. 15 : $Y_{MAX} = 0.012$).

Im 2. Teil (St. 0028-0063) werden die Funktionen

$$Y(\mu; D; \Omega) \quad \text{und} \quad U_S(\mu; D; \Omega) = \int_0^{\Omega} Y(\mu; d; \Omega') \, d\Omega'$$

berechnet. Der Rest dient zum Zeichnen der Spektralfunktion (St. 0064-67), zum Ausdrucken von Y in Matrixform (St. 0081) mit D als Spaltenindex und Ω als Zeilenindex, sowie von $U_S(\mu; D; \Omega_{max})$. Dabei ist

$$\Omega_{max} = ZO(NO)$$

der höchste eingelesene Ω -Wert; (St.0027). Testläufe ergaben, daß z.B. in Abb. 15 für $\Omega_{\max} = 10$

$$I(\mu, D) = \int_0^{\infty} Y \, d\Omega$$

mit einer Genauigkeit von ca. 3% durch

$$U_S(\mu, D, \Omega=10)$$

wiedergegeben wird.

Weitere Fehler entstehen infolge der geringen Zahl der benutzten Winkelintegrations-Stützstellen. Möglicherweise sind die Zacken in Abb. 15a z.B. bei $\Omega=2$ darauf zurückzuführen. Bei glatten Kurven wie in Abb. 15 ist dieser Fehler sehr viel kleiner.

Ist eine feinere Θ -Stützstellenverteilung erwünscht, dann muß man nicht nur in diesem Programm die entsprechenden DIMENSION- und FORMAT-Statements ändern, sondern auch im Hauptprogramm zu AROUT, welches wir im vorhergehenden Paragraphen beschrieben haben, und das die hier in St. 0008 und 0027 benötigten Daten liefert.

Zum Verständnis der Programmierung des Integrals in Gl.(7.8) bringen wir (7.7) und (7.8) in die Form

$$I = \int_0^{\infty} Y \, d\Omega, \quad Y = \frac{\Omega^2}{2\pi^3 \mu} S_{GA}, \quad S_{GA} = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta S_{PH} \, d\theta, \quad (11.2)$$

$$S_{PH} = \int_0^{\pi/2} y \, d\psi, \quad y = (1 - e^{-ADW}) \cos \psi.$$

Dabei haben wir die Indizierung weggelassen. Wir setzen

$$1 - e^{-ADW} = \begin{cases} 1 & \text{falls } ADW > 5 \quad (\text{St.0052}) \\ ADW & \text{falls } ADW < 0.04 \quad (\text{st.0049}) \end{cases}$$

Statement 0059 erwies sich als überflüssig. Statem. 0061-62 beschreiben die Ω -Integration nach der Trapezregel. INTRUT ist nicht anwendbar, da die Ω -Stützstellen nicht äquidistant liegen. Die Genauigkeit der Winkelintegration läßt sich an Hand der Liste auf Seite 69 abschätzen, wobei zu beachten ist, daß die bei Winkelintegrationen verwendete INTRUT den Integranden zwischen zwei Stützstellen durch eine kubische Parabel approximiert. Extreme Fälle - wie z.B. bei $\Omega=1.4$, wo keine Aussage über das Winkelintegral möglich ist - sind glücklicherweise extrem selten. Die auf Seite 75 ff. abgedruckte Liste bildet die Grundlage zu Abb. 15. Die letzte Zeile auf Seite 76 zeigt $I(\mu=30;D)$.

Näherungsformel für I

Für viele Anwendungen sind Näherungsformeln wesentlich praktischer oder bequemer als Listen und Tabellen. Für unsere Anwendung in §9 ist zwar keine gute Genauigkeit, aber dafür ein großer Gültigkeitsbereich - nämlich $0 < D < 10^6$ erforderlich; wir benutzen deshalb Ansatz (8.5).

Ansätze mit gebrochenen Potenzen sind zwar genauer, aber für die spätere Anwendung in §9 zu unbequem. Wir beschreiben nun ein kleines Programm, welches aus einzulesenden Wertepaaren D, I - wir benutzen stattdessen

$$x_j = D_j \quad \text{und} \quad F_j = 1000 I_j$$

- die zugehörigen Koeffizienten $a_1; a_2; a_3$ aus Gl. (8.5) berechnet. Die im Programm vorkommenden Koeffizienten c_1, c_2, c_3 hängen gemäß

$$c_1 = 1000a_1 \quad c_2 = a_2 \quad c_3 = a_3$$

mit $a_1; a_2; a_3$ zusammen. Der Koeffizient c_4 ermöglicht die Behandlung von

(Fortsetzung S. 77)

```

C  DZE/DF/DT
0001 REAL*4 MY,I
0002 DIMENSION Y(216),YG(216),YD(216,7),ZO(216),ZA(216,8)
1 DD(7),OY(7),US(7),THE(8),ZSU(8)
Y(1) = 0.
0003
0004 10 PRINT 95
0005 READ 305, NTH, NPH, ND, OMIN, YMIN, OMAX, YMAX
0006 PRINT 305, NTH, NPH, ND, OMIN, YMIN, OMAX, YMAX
0007 PRINT 99
0008 READ 109, MY, ( THE(JT), JT=1,8)
0009 PRINT 109, MY, ( THE(JT), JT=1,8)
0010 READ 109, ( DD(JD), JD=1,ND)
0011 READ 220, NO
0012 DPH = 1.5707 / (NPH-1)
0013 DTH = 0.2
0014 ZO(1) = OMIN
0015 Y(1) = YMIN
0016 ZO(2) = OMIN
0017 Y(2) = YMAX
0018 ZO(3) = OMAX
0019 Y(3) = YMAX
0020 ZO(4) = OMAX
0021 Y(4) = YMIN
0022 ZO(5) = OMIN
0023 Y(5) = YMIN
0024 CALL FRAME ( OMIN, YMIN, OMAX, YMAX )
0025 CALL PLOTL ( ZO, Y, 5 )
0026 DO 11 J=1,NO
0027 11 READ 909, ZO(J), (ZA(J,JT), JT=1,8)
0028 DO 12 JD=1,ND
0029 US(JD) = 0.
0030 12 YO(1,JD) = 0.
0031 NI = NO - 1
0032 PRINT 91
0033 DO 6 J=2,NI
0034 O = ZO(J)
0035 DO 6 JD=1,ND
0036 D = DD(JD)
0037 DO 4 L=1,NTH
0038 THETA = THE(L)
0039 A = ZA(J,L)
0040 SINT = SIN(THETA)
0041 SIN2 = SINT**2
0042 DO 3 K=1,NPH
0043 PHI = DPH * (K-1)
0044 COSP = COS(PHI)
0045 W = 2* COSP / SINT
0046 EX = A*D*W
0047 IF (EX. GT. 0.01) GO TO 1
0048 IF (EX. LT. -1.E-4) GO TO 7
0049 Y(K) = EX
0050 GO TO 3
0051 1 IF ( EX. LT. 5. AND. EX. GT. 0.) GO TO 2
0052 Y(K) = 1.
0053 GO TO 3
0054 2 Y(K) = 1. - EXP(-EX)
0055 3 Y(K) = Y(K) * COSP
0056 CALL INTRUT ( NPH, DPH, Y, SPH )

```

74

```

0057      4  YG(L) = SIN2 * SPH
0058      CALL INTRUT ( NTH , DTH , YG , SGA )
0059      SGA = SGA + YG(1) * 0.1708
0060      YO(J,JD) = 0**2 * SGA / (62*MY)
0061      DO = 0.5*( ZO(J+1) - ZO(J-1))
0062      SU = SU + DO* YO(J,JD)
0063      6  US(JD) = US(JD) + DO* YO(J,JD)
0064      DO 8      JD=1,ND
0065      DO 9      J=1,N1
0066      9  Y(J) = YO(J,JD)
0067      8  CALL PLOTQ ( ZO , Y , N1 )
0068      NS = 0.02 * ND + 1.01
0069      NR = ND - 50*(NS-1) - 1
0070      DO 18     KS=1,NS
0071      PRINT 98
0072      PRINT 101, MY
0073      PRINT 92
0074      PRINT 108, ( DD(JD) , JD=1,ND)
0075      PRINT 91
0076      J1 = (KS-1)*50 + 1
0077      J2 = J1 + 49
0078      IF ( KS .LT. NS) GO TO 16
0079      J2 = J1 + NR - 1
0080      16 DO 17     J=J1,J2
0081      17 PRINT 220, J, ZO(J), ( YO(J,JD) , JD=1,ND)
0082      18 CONTINUE
0083      PRINT 92
0084      PRINT 108, ( DD(JD) , JD=1,ND)
0085      PRINT 94
0086      PRINT 108, ( US(JD) , JD=1,ND)
0087      DO 19     JD=1,ND
0088      19 US(JD) = US(JD) * 1.E5
0089      PUNCH 908, ( DD(JD) , JD=1,ND)
0090      PUNCH 109, ( US(JD) , JD=1,ND)
0091      PRINT 98
0092      GO TO 10
0093      7 PRINT 93
0094      PRINT 106, A,D,W,EX
0095      STOP
0096      91 FORMAT(/34H J D YO)
0097      92 FORMAT(/30H D)
0098      93 FORMAT(/46H A D W WX)
0099      94 FORMAT(/30H I)
0100      95 FORMAT(/60H NTH NPH ND OMIN YMIN OMAX
        IYMAX )
0101      98 FORMAT (1H1)
0102      99 FORMAT(/20H MY THE )
0103      101 FORMAT ( 50X , 10H MY =F6.1/)
0104      106 FORMAT ( 1P4E12.2 , 10H NEGATIV)
0105      108 FORMAT ( 24X , 1P8E12.3)
0106      109 FORMAT ( F8.3 , 8F8.4)
0107      220 FORMAT ( I12 , F12.4 , 1P8E12.2)
0108      305 FORMAT (3I4 , 5F12.4)
0109      908 FORMAT ( 9F8.1)
0110      909 FORMAT (F8.4,1P8E8.2)
0111      END
    
```

NTH NPH ND OMIN YMIN OMAX YMAX
 8 13 5 0.0 0.0 16.0000 0.0120

MY THE
 30.000 0.1708 0.3708 0.5708 0.7708 0.9708 1.1708 1.3708 1.5708

MY = 30.0

	D	Y0	Y0	Y0	Y0	Y0
	1.000E 04	1.000E 03	1.000E 02	1.000E 01	1.000E 00	1.000E 00
J	D	Y0	Y0	Y0	Y0	Y0
1	0.4000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.5000	4.76E-05	3.01E-05	1.29E-05	3.03E-06	3.71E-07
3	0.6000	1.40E-04	1.04E-04	7.80E-05	4.42E-05	1.28E-05
4	0.7000	2.08E-04	2.08E-04	2.00E-04	1.48E-04	8.01E-05
5	0.8000	2.71E-04	2.71E-04	2.71E-04	2.71E-04	2.34E-04
6	0.9000	3.43E-04	3.43E-04	3.43E-04	3.43E-04	3.42E-04
7	1.0000	3.90E-04	3.90E-04	3.90E-04	3.90E-04	3.88E-04
8	1.1000	2.44E-04	2.28E-04	2.26E-04	2.26E-04	2.19E-04
9	1.2000	4.10E-04	3.01E-04	2.60E-04	1.77E-04	1.34E-04
10	1.3000	6.87E-04	5.08E-04	2.95E-04	1.71E-04	8.10E-05
11	1.4000	8.31E-04	8.06E-04	5.60E-04	2.10E-04	6.11E-05
12	1.5000	9.54E-04	9.54E-04	9.03E-04	4.46E-04	8.10E-05
13	1.6000	1.09E-03	1.09E-03	1.08E-03	8.37E-04	1.70E-04
14	1.7000	1.23E-03	1.23E-03	1.23E-03	1.15E-03	3.57E-04
15	1.8000	1.37E-03	1.37E-03	1.37E-03	1.33E-03	5.82E-04
16	1.9000	1.53E-03	1.53E-03	1.53E-03	1.49E-03	6.73E-04
17	2.0000	1.63E-03	1.57E-03	1.56E-03	1.34E-03	3.77E-04
18	2.1000	1.86E-03	1.50E-03	1.15E-03	8.87E-04	2.10E-04
19	2.2000	2.05E-03	1.96E-03	1.23E-03	7.06E-04	1.31E-04
20	2.3000	2.24E-03	2.23E-03	1.68E-03	5.97E-04	8.71E-05
21	2.4000	2.44E-03	2.44E-03	2.15E-03	6.44E-04	8.02E-05
22	2.5000	2.65E-03	2.65E-03	2.52E-03	8.54E-04	1.04E-04
23	2.6000	2.87E-03	2.87E-03	2.76E-03	1.13E-03	1.47E-04
24	2.7000	3.09E-03	3.09E-03	2.98E-03	1.36E-03	1.88E-04
25	2.8000	3.32E-03	3.32E-03	3.19E-03	1.40E-03	1.90E-04
26	2.9000	3.57E-03	3.56E-03	3.31E-03	1.08E-03	1.31E-04
27	3.0000	3.81E-03	3.67E-03	2.48E-03	5.99E-04	6.83E-05
28	3.1000	4.07E-03	3.90E-03	2.26E-03	4.47E-04	4.91E-05
29	3.2000	4.34E-03	4.27E-03	2.34E-03	3.86E-04	4.11E-05
30	3.3000	4.62E-03	4.57E-03	2.61E-03	3.96E-04	4.15E-05
31	3.4000	4.90E-03	4.84E-03	2.86E-03	4.42E-04	4.65E-05
32	3.5000	5.19E-03	5.11E-03	3.08E-03	5.02E-04	5.33E-05
33	3.6000	5.49E-03	5.39E-03	3.22E-03	5.32E-04	5.65E-05
34	3.7000	5.80E-03	5.66E-03	3.15E-03	4.87E-04	5.13E-05
35	3.8000	6.12E-03	5.89E-03	2.71E-03	3.68E-04	3.82E-05
36	3.9000	6.44E-03	5.89E-03	1.97E-03	2.42E-04	2.48E-05
37	4.0000	6.76E-03	5.75E-03	1.57E-03	1.84E-04	1.87E-05
38	4.1000	7.10E-03	6.10E-03	1.53E-03	1.74E-04	1.77E-05
39	4.2000	7.44E-03	6.37E-03	1.58E-03	1.79E-04	1.81E-05
40	4.3000	7.79E-03	6.59E-03	1.65E-03	1.88E-04	1.91E-05
41	4.4000	8.14E-03	6.72E-03	1.68E-03	1.91E-04	1.94E-05
42	4.5000	8.48E-03	6.77E-03	1.61E-03	1.82E-04	1.84E-05
43	4.6000	8.83E-03	6.70E-03	1.42E-03	1.57E-04	1.59E-05
44	4.7000	9.18E-03	6.35E-03	1.15E-03	1.24E-04	1.25E-05
45	4.8000	9.50E-03	5.70E-03	9.00E-04	9.49E-05	9.54E-06
46	4.9000	9.82E-03	5.22E-03	7.59E-04	7.93E-05	7.95E-06
47	5.0000	1.02E-02	5.15E-03	7.27E-04	7.57E-05	7.58E-06
48	5.1000	1.05E-02	5.19E-03	7.28E-04	7.58E-05	7.59E-06
49	5.2000	1.08E-02	5.17E-03	7.22E-04	7.51E-05	7.53E-06
50	5.3000	1.11E-02	5.05E-03	6.94E-04	7.20E-05	7.21E-06

MY = 30.0

		D				
		1.000E 04	1.000E 03	1.000E 02	1.000E 01	1.000E 00
J	Q	YQ				
51	5.4000	1.14E-02	4.78E-03	6.33E-04	6.55E-05	6.55E-06
52	5.5000	1.16E-02	4.34E-03	5.48E-04	5.63E-05	5.63E-06
53	5.6000	1.17E-02	3.79E-03	4.57E-04	4.67E-05	4.67E-06
54	5.7000	1.18E-02	3.32E-03	3.86E-04	3.92E-05	3.92E-06
55	5.8000	1.18E-02	3.02E-03	3.44E-04	3.49E-05	3.49E-06
56	5.9000	1.19E-02	2.89E-03	3.26E-04	3.30E-05	3.30E-06
57	6.0000	1.19E-02	2.81E-03	3.16E-04	3.20E-05	3.20E-06
58	6.1000	1.19E-02	2.70E-03	3.01E-04	3.05E-05	3.05E-06
59	6.2000	1.18E-02	2.53E-03	2.79E-04	2.82E-05	2.82E-06
60	6.3000	1.16E-02	2.30E-03	2.51E-04	2.53E-05	2.53E-06
61	6.4000	1.12E-02	2.05E-03	2.20E-04	2.22E-05	2.22E-06
62	6.5000	1.07E-02	1.80E-03	1.92E-04	1.93E-05	1.93E-06
63	6.6000	1.02E-02	1.61E-03	1.70E-04	1.71E-05	1.71E-06
64	6.7000	9.78E-03	1.48E-03	1.55E-04	1.56E-05	1.56E-06
65	6.8000	9.48E-03	1.39E-03	1.45E-04	1.46E-05	1.46E-06
66	6.9000	9.20E-03	1.32E-03	1.37E-04	1.38E-05	1.38E-06
67	7.0000	8.85E-03	1.23E-03	1.28E-04	1.28E-05	1.28E-06
68	7.1000	8.40E-03	1.14E-03	1.18E-04	1.18E-05	1.18E-06
69	7.2000	7.87E-03	1.03E-03	1.06E-04	1.06E-05	1.06E-06
70	7.3000	7.30E-03	9.22E-04	9.48E-05	9.48E-06	9.48E-07
71	7.4000	6.76E-03	8.29E-04	8.50E-05	8.50E-06	8.50E-07
72	7.5000	6.28E-03	7.54E-04	7.70E-05	7.70E-06	7.70E-07
73	7.6000	5.89E-03	6.95E-04	7.08E-05	7.08E-06	7.08E-07
74	7.7000	5.56E-03	6.47E-04	6.59E-05	6.59E-06	6.59E-07
75	7.8000	5.24E-03	6.03E-04	6.13E-05	6.13E-06	6.13E-07
76	7.9000	4.91E-03	5.57E-04	5.66E-05	5.66E-06	5.66E-07
77	8.0000	4.56E-03	5.11E-04	5.17E-05	5.17E-06	5.17E-07
78	8.1000	4.22E-03	4.67E-04	4.72E-05	4.72E-06	4.72E-07
79	8.2000	3.88E-03	4.24E-04	4.29E-05	4.29E-06	4.29E-07
80	8.3000	3.57E-03	3.88E-04	3.91E-05	3.91E-06	3.91E-07
81	8.4000	3.31E-03	3.56E-04	3.59E-05	3.59E-06	3.59E-07
82	8.5000	3.07E-03	3.29E-04	3.31E-05	3.31E-06	3.31E-07
83	8.6000	2.87E-03	3.05E-04	3.06E-05	3.06E-06	3.06E-07
84	8.7000	2.66E-03	2.82E-04	2.83E-05	2.83E-06	2.83E-07
85	8.8000	2.47E-03	2.60E-04	2.61E-05	2.61E-06	2.61E-07
86	8.9000	2.28E-03	2.39E-04	2.40E-05	2.40E-06	2.40E-07
87	9.0000	2.10E-03	2.19E-04	2.20E-05	2.20E-06	2.20E-07
88	9.1000	1.94E-03	2.01E-04	2.02E-05	2.02E-06	2.02E-07
89	9.2000	1.79E-03	1.86E-04	1.86E-05	1.86E-06	1.86E-07
90	9.3000	1.66E-03	1.71E-04	1.71E-05	1.71E-06	1.71E-07
91	9.4000	1.54E-03	1.58E-04	1.58E-05	1.58E-06	1.58E-07
92	9.5000	1.43E-03	1.47E-04	1.47E-05	1.47E-06	1.47E-07
93	9.6000	1.32E-03	1.35E-04	1.35E-05	1.35E-06	1.35E-07
94	9.7000	1.22E-03	1.25E-04	1.25E-05	1.25E-06	1.25E-07
95	9.8000	1.13E-03	1.15E-04	1.15E-05	1.15E-06	1.15E-07
96	9.9000	1.05E-03	1.06E-04	1.06E-05	1.06E-06	1.06E-07

		D				
		1.000E 04	1.000E 03	1.000E 02	1.000E 01	1.000E 00

		I				
		5.050E-02	2.222E-02	8.093E-03	2.412E-03	5.781E-04

Ansätzen mit gebrochenen Exponenten (s. St.34). Wir definieren nun die Funktion

$$S(c_1, c_2, c_3) = \sum_J \left[\frac{1}{4} (1 + c_2 \sqrt{x} + c_3 x^{c_4}) (f_a - F) \right]_J^2,$$

wobei

$$f_a = \frac{c_1 x}{1 + c_2 \sqrt{x} + c_3 x^{c_4}},$$

und

$$x = x(J), \quad F = F(J).$$

Aus der Forderung, daß S minimal sein soll, folgt:

c_1, c_2 und c_3 sind Lösungen des Gleichungssystems

$$\sum_{K=1}^3 A_{JK} c_K = B_J,$$

wobei die A_{JK} und B_J durch St.6-17 definiert sind. Der Unterschied gegenüber der sonst üblichen Methode der kleinsten Quadrate ist der Gewichtungsfaktor

$$\frac{1}{x} (1 + c_2 \sqrt{x} + c_3 x^{c_4})$$

welcher dafür sorgt, daß das Gleichungssystem für die c_k linear ist und der relative Fehler in erträglichen Grenzen bleibt. Das hier behandelte Beispiel ist in der 3. Zeile von Tab. IIa wiederzufinden.

\$SOURCE

```

1   DIMENSION A(3,3) , B(3) , C(3) , F(20) , G(3,20) , X(20) , FA(20)
2   10 READ 207, N, C4
3   READ 112, ( X(J) , J=1,N)
4   READ 112, ( F(J) , J=1,N)
5   DO 2 J=1,N
6   G(1,J) = 1.
7   G(2,J) = - F(J) * X(J)**(-0.5)
8   2 G(3,J) = - F(J) * X(J)**(C4 - 1.)
9   DO 3 K=1,3
10  B(K) = 0.
11  DO 3 J=1,N
12  3 B(K) = B(K) + G(K,J) * F(J) / X(J)
13  DO 5 K=1,3
14  DO 5 L=1,3
15  A(K,L) = 0.
16  DO 5 J=1,N
17  5 A(K,L) = A(K,L) + G(K,J) * G(L,J)
18  A2 = A(1,2) / A(1,1)
19  A3 = A(1,3) / A(1,1)
20  B1 = B(1) / A(1,1)
21  E22 = A(2,2) - A2* A(2,1)
22  E23 = A(2,3) - A3* A(2,1)
23  E33 = A(3,3) - A3* A(3,1)
24  H2 = B(2) - B1* A(2,1)
25  H3 = B(3) - B1* A(3,1)
26  D = E22 *E33 - E23**2
27  C(2) = (H2* E33 - H3* E23) / D
28  C(3) = (H3* E22 - H2* E23) / D
29  C(1) = B1 - A2 * C(2) - A3* C(3)
30  PRINT 91
31  PRINT 207, N, ( C(K) , K=1,3) , C4
32  PRINT 92
33  DO 6 J=1,N
34  FA(J) = C(1) * X(J) / (1. + C(2)*X(J)**0.5 + C(3)*X(J)**C4)
35  6 PRINT 110, X(J) , F(J) , FA(J)
36  GO TO 10
37  91 FORMAT(/54H N C(1) C(2) C(3) C4)
38  92 FORMAT(/34H X F FA)
39  110 FORMAT ( F12.1 , 9F12.2)
40  112 FORMAT ( 9F8.3)
41  207 FORMAT ( I8 , 4F12.4)
42  END

```

\$DATA

N	C(1)	C(2)	C(3)	C4
10	2.2670	2.6955	0.0138	1.0000
X	F	FA		
0.1	0.13	0.12		
1.0	0.58	0.61		
10.0	2.41	2.35		
100.0	8.09	7.73		
300.0	13.50	13.12		
1000.0	22.22	22.66		
3000.0	34.00	35.79		
10000.0	50.50	55.49		
30000.0	74.90	77.13		
100000.0	109.00	101.52		

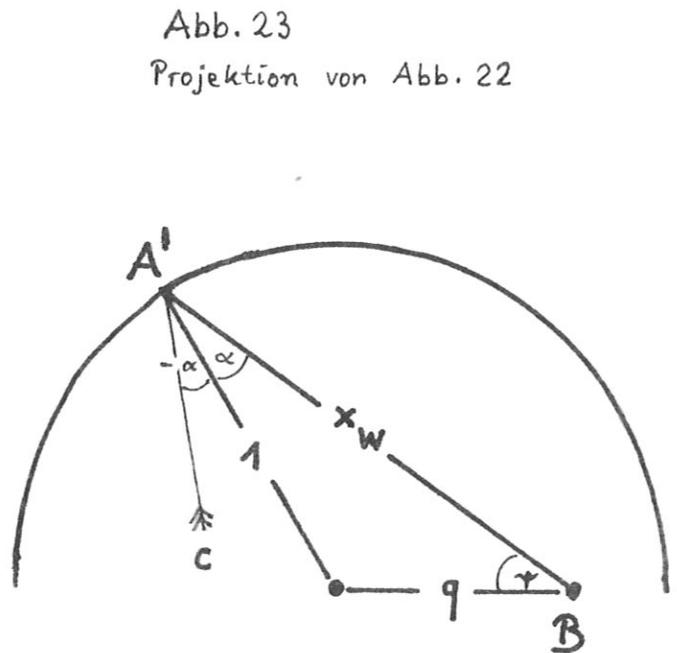
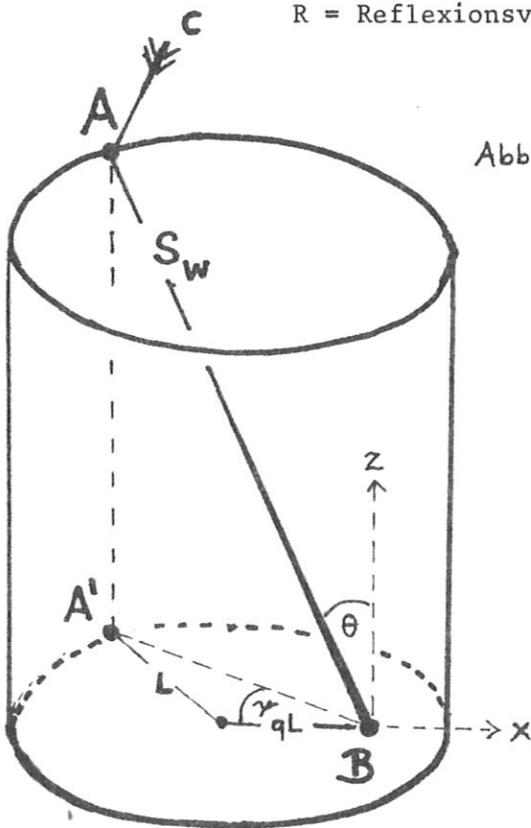
§12 Der Einfluß von reflektierenden Wänden.

Wir untersuchen hier die Leistungsdichte der Zyklotronstrahlung $\frac{\partial u}{\partial t}$.
 Dazu geben wir uns einen Aufpunkt B vor im Abstand $q \cdot L$ von der
 Zylinderachse sowie eine Richtung $\theta; \psi$. Am Zylinderrand ist $q = 1$
 (Abb.22).

Die durch B, θ, ψ definierte Halbgerade BA nennen wir nach ENGELMANN/5/
 den "Lichtpfad". Der Lichtpfad schneidet den Zylinder im Punkt A im
 Abstand s_w vom Aufpunkt B. Die Reflexion bewirkt, daß die Umgebung des
 Punktes A auf der Plasma-Oberfläche bzw. Wand-Innenfläche eine zu-
 sätzliche Lichtquelle darstellt. Gl.(6.12) ist daher um einen Reflexions-
 term zu erweitern:

$$P(q, \theta, \psi) = J [1 - e^{-\tau(s_w)}] + R \hat{P} e^{-\tau(s_w)} \quad (12.1)$$

$R =$ Reflexionsvermögen der Wand; $R < 1$,



$$\hat{P} = P(1, \theta, -\alpha), \quad (12.2)$$

$$\text{und } \cos \alpha = \left[x_w^2 + 1 - q^2 \right] / (2x_w) \text{ (s. Abb. 23)}. \quad (12.3)$$

Das Licht, das von A nach B reflektiert wird, stammt aus dem in Abb. 23 mit c bezeichneten Lichtpfad.

Es ist eine Eigenart des Zylinders, daß die Richtungen α und $-\alpha$ gleichwertig sind: wendet man (12.1) auf den Spezialfall $q = 1$ an, dann folgt

$$\hat{P} = P(1, \theta, \alpha) = J \cdot \left[1 - e^{-\hat{\tau}(s_w)} \right] / \left[1 - R e^{-\hat{\tau}(s_w)} \right], \quad (12.4)$$

$$\text{wobei gemäß (8.12) } \hat{\tau}(s_w) = 2A \cdot D \frac{\cos \alpha}{\sin \theta} \begin{cases} 1 & \text{bei Kastenprofil} \\ \frac{2}{3} \cos^2 \alpha & \text{Parabelprofil} \\ \frac{8}{15} \cos^4 \alpha & \text{Glockenprofil} \end{cases} \quad (12.5)$$

Einsetzen von (12.4) in (12.1) liefert

$$J-P = J e^{-\tau} \left[1 - R \frac{1 - e^{-\hat{\tau}}}{1 - R e^{-\hat{\tau}}} \right] = J e^{-\tau} \left[\frac{1-R}{1 - R e^{-\hat{\tau}}} \right]. \quad (12.6)$$

In Ref/1/ findet man eine ähnliche Formel für die Plasma-Platte. Man hat zur numerischen Behandlung der Reihe nach zu berechnen:

- 1) x_w aus (8.16)
- 2) α aus (12.3)
- 3) $\hat{\tau}$ aus (12.5)
- 4) τ aus (8.12),
- 5) $J-P$ # (12.6)

Als Beispiel behandeln wir das Analogon zu Gl.(8.19), also den Verlustterm Z in der Zylindermitte. Dort gilt

$$\begin{aligned} q &= 0 \\ x_w &= 1 \\ \alpha &= 0 \\ \hat{\tau} &= 2AD/\sin\theta \\ \tau &= AD/\sin\theta \end{aligned} \quad (\text{bei konst. Dichte})$$

Wir vergleichen die Verluste mit und ohne Reflexion:

Tabelle V $\frac{Z(R=0)}{Z(R)}$ als Funktion von R und D

$R \backslash D$	10^2	10^3	10^4
0,7	1,8	2,0	2,0
0,8	2,3	2,5	2,6
0,9	3,4	3,8	4,2
0,95	5,0	6,1	7,6
0,98	9.	11.	14.

Tabelle V ist brauchbar für $0,5 \leq \tau_e \leq 40\text{keV}$. Der Quotient

$\frac{Z(R=0)}{Z(R)}$ erweist sich als nahezu unabhängig von der Temperatur, abgesehen von Abweichungen der Größenordnung $\pm 10\%$.

Für den Fall $R = 0,9$ lassen sich die numerischen Daten genähert darstellen durch die Formel

$$Z = C_1 / [C_2 D^{0,3} + D^{0,78}] \quad (12.7)$$

$$\text{wobei } C_1 = 4,6 \cdot 10^{-4} (0,1 T_e)^{2,4} [0,9 + 0,6/T_e] \quad (12.8)$$

$$C_2 = 2 + 0,1 T_e \quad (12.9)$$

Die Formeln sind anwendbar im Bereich

$$100 < D < 10^4$$

$$0,5 < T_e < 25 \text{ keV} \quad .$$

Der Fehler beträgt meistens 5-10%; Im Bereich 1-5 keV sogar nur 3%.

Für $T_e = 25 \text{ keV}$ liefert (12.7) um etwa 15% zu kleine Werte.

Bei Parabelprofil ist in (12.7) D durch $\frac{2}{3} D$, bei Glockenprofil durch $\frac{8}{15} D$ zu ersetzen (siehe §8).

Referenzen:

- /1/ W.E.DRUMMOND and M.N.ROSENBLUTH Phys.Fluids 3 (1960) , S. 45
- /2/ M.N.ROSENBLUTH Nucl.Fusion 10 (1970) , S. 340
- /3/ J.SCHWINGER Phys.Review 75 (1949) , S.1925
- /4/ B.A.TRUBNIKOV Phys.Fluids 4 (1961) , S. 195
- /5/ F.ENGELMANN, M.CURATOLO Nucl.Fusion 13 (1973) , S. 497
- /6/ L.ARZIMOVICH, Gesteuerte thermonukleare Reaktionen (1965)
 Akademie-Verlag Berlin
 dt. Übersetzung: ROTHARDT,
 \$46,
- /7/ D.PFIRSCH, MPI/PA-8/64 April 1964
- /8/ B.A.TRUBNIKOV and V.B.KUDRYAZEV
 2nd United Nations International Conference on
 Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva 1958
 Vol. 31, S.93 ff
- /9/ S.GLASSTONE and R.H.LOVBERG
Controlled Thermonuclear Reactions, Seite 20
 van Nostrand Co., 1960
- /10/ G.BEKEFI Radiation Processes in Plasmas, Gl. (2.26)
 Wiley & Sons, New York, 1966
- /11/ B.A. TRUBNIKOV, JETP Letters 16 (1972), S.25
- /12/ D.ROSE & M.CLARK, Plasmas and Controlled Fusion
 Wiley & Sons, New York · London (1961), Gl. (11.82)
- /13/ D.ROSE, Nucl.Fusion 9 (1969), S. 189, Gl.14
- /14/ L.HIRSHFIELD et al. Phys.Fluids 4(1961), S.200

Lateinische Symbole

A (Punkt)	§6, Abb. 7	n	Summationsindex in (Gl.3.8) und (Gl.4.9)
A (Absorption)	Gl.(3.13)		
A ₁	Gl.(5.1)	n _e	Elektronendichte
A ₄	Gl.(5.3)	n _o	Gl.(8.9)
A ₅	Gl.(5.7)	n _{min}	Gl.(4.11)
a ₁ , a ₂ , a ₃	Gl.(8.5); Tab.II	q	} §8, Abb. 14
B (Punkt)	§6, Abb. 7	r	
B (Bremsstr.)	Gl.(9.1)	x	
B _n	Gl.(3.11)	R	Gl.(12.1)
B _{stat}	Gl.(7.3)	S	§6, Abb. 7
c	Lichtgeschwindigkeit	s _w	§6, Abb. 11
c _o	Gl.(3.7)	u	Gl.(6.1)
c ₁ , c ₂	Gl.(8.20)	V	Gl.(4.6)
D	in §5, Gl.(5.10)	Y	Gl.(7.7); Abb.15+15a
	ab §7, Gl.(7.2); Gl.(8.3); Gl.(8.12)	Z	Gl.(7.9); Abb.17+16
$\frac{\partial^2 E}{\partial F \partial t}$	Gl.(6.14); Gl.(7.6)	<u>Griechische Symbole</u>	
f(q)	Gl.(8.9)	α	Gl.(2.1); (3.13); (6.5)
g(x)	Gl.(8.11); (8.21)	β	Gl.(3.9)
I	Gl.(3.1); (3.8)	β	Gl.(9.4)
I(μ, D)	Gl.(7.6); (8.5)	γ	§6, Abb. 12
J	Gl.(2.3)	ε	Gl.(5.2)
J _n (BESSELf.)	Gl.(3.11)	θ	§3, Abb. 2
L	Gl.(8.3)	μ	Gl.(3.6)
L _{DD} ; L _{DT} ; L _{kr}	§9; Tab. IV	τ	Gl.(6.5)
m	Elektronenmasse	ω	Gl.(2.3)

ω_o	G1. (8.13)
ω_{rel}	G1. (3.10)
ω_H	G1. (3.10)
ω_p	G1. (3.3)
Ω	Anfang von §10
$d\tilde{\Omega}$	G1. (6.2); G1. (6.11)