

**Universidad de Nariño**  
**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**  
**Departamento de Física**



**Funciones de Green aplicadas a la solución de problemas de contorno  
basados en la ecuación diferencial de Airy**

**TRABAJO DE GRADO**

Para optar el título profesional de:

Físico

**Edgar Andrés Izquierdo Díaz**

San Juan de Pasto, Colombia

Marzo 2018

**Universidad de Nariño**  
**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**  
**Departamento de Física**

**Funciones de Green aplicadas a la solución de problemas de contorno  
basados en la ecuación diferencial de Airy**

**Edgar Andrés Izquierdo Díaz**

**TRABAJO DE GRADO**

Director:

**Álvaro Rugeles Pérez**

**Ph.D. en Física**

San Juan de Pasto, Colombia

Marzo 2018

©2018 - Edgar Andrés Izquierdo Díaz

“Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores”

Artículo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable  
Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Todos los derechos reservados.

Acta de Aceptación

15 de Marzo de 2018

---

---

---

---

---

Ph.D. Álvaro Rugeles Pérez

Director

M.Sc. Oscar Cadena Ibarra

Jurado

M.Sc. Sandra Esperanza Sanchez Sierra

Jurado

San Juan de Pasto, 15 Marzo 2018

## **Agradecimientos**

En primer lugar deseo expresar mi agradecimiento a mis padres Edgar y Alicia que han dado todo su esfuerzo y dedicación para que pueda cumplir esta etapa de mi vida, por apoyarme incondicionalmente y gracias a ellos puedo ser un gran profesional y seré un gran orgullo para ellos que confiaron en mí.

A mis hermanas Johana y Cristina por todo su cariño, apoyo y alegrías que siempre me han causado.

También quiero agradecer a mi novia Yuliana por todo su amor, preocupación y ayuda que me ha dado para alcanzar mis metas.

Agradezco mis profesores especialmente a mi asesor Ph.D. Álvaro Rugeles Pérez por la dedicación, apoyo y amistad que me ha brindado para la realización de este trabajo, por el respeto a mis sugerencias e ideas.

Muchas gracias, a todos.

*A mis padres Edgar y Alicia por todo su amor y apoyo incondicional  
perfectamente mantenido a través del tiempo.*

# **Funciones de Green aplicadas a la solución de problemas de contorno basados en la ecuación diferencial de Airy**

## **Resumen**

*En este trabajo de grado se implementa el método de la función de Green aplicado a la solución de una clase de problemas basados en la ecuación diferencial de Airy inhomogénea sujeta a unas condiciones iniciales o de frontera. Se construyen soluciones examinando la influencia tanto de las fuentes como de las condiciones iniciales o de frontera.*

**Green's functions applicated to the solution of problems of contour  
based on the Airy equation**

**Abstract**

*In this degree work, it is implemented the Green's function method applicated to the solution of a kind of problems that are based on the Airy's differential equation, this equation is not homogeneous and it is subject to initial or frontier conditions. Solutions are built by studying the influence of both the sources and the initial or frontier conditions.*

# Contenido

Título . . . . .	i
Título . . . . .	ii
Aceptación . . . . .	iv
Agradecimientos . . . . .	v
Dedicatoria . . . . .	vi
Resumen . . . . .	vii
Abstract . . . . .	viii
Lista de Figuras . . . . .	xi
Lista de Tablas . . . . .	xiii
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 Propiedades y definiciones</b>	<b>2</b>
2.1 Introducción histórica: Sir George Biddell Airy . . . . .	2
2.2 Ecuación de Airy . . . . .	4
2.3 Propiedades elementales . . . . .	6
2.3.1 Wronskianos de las funciones de Airy homogéneas . . . . .	6
2.3.2 Valores particulares de las funciones de Airy . . . . .	6
2.3.3 Relaciones entre las funciones de Airy . . . . .	7
2.4 Representaciones integrales . . . . .	7
2.5 Desarrollo de $A_i$ alrededor del origen . . . . .	9
2.6 Ceros de las funciones de Airy . . . . .	9
<b>3 Solución de la ecuación de Airy inhomogénea con condiciones iniciales</b>	<b>13</b>
3.1 Formulación de problema . . . . .	13
3.2 El método de la función de Green . . . . .	14
3.2.1 Obtención de la ecuación diferencial para la función de Green . . . . .	14
3.2.2 Condiciones de frontera para la función de Green . . . . .	15
3.2.3 Determinación de la función de Green . . . . .	16
3.2.4 Solución del problema (3.1) en términos de $G(x', x)$ . . . . .	22
3.3 Ecuación de Airy homogénea . . . . .	22
3.4 Ecuación de Airy inhomogénea . . . . .	26
3.4.1 Fuente constante . . . . .	26
3.4.2 Fuente tipo función escalón . . . . .	29
3.4.3 Fuente pulso rectangular . . . . .	33
3.4.4 Fuente sinusoidal . . . . .	37

---

<b>4</b>	<b>Solución de la ecuación de Airy inhomogénea con condiciones en la frontera</b>	<b>41</b>
4.1	Formulación de problema . . . . .	41
4.2	El método de la función de Green . . . . .	42
4.2.1	Obtención de la ecuación diferencial para la función de Green . . . . .	42
4.2.2	Condiciones de frontera para para la función de Green . . . . .	43
4.2.3	Determinación de la función de Green . . . . .	48
4.2.4	Solución del problema (4.1) en términos de $G(x', x)$ . . . . .	57
4.3	Ecuación de Airy homogénea . . . . .	58
4.4	Ecuación de Airy inhomogénea . . . . .	59
4.4.1	Fuente constante . . . . .	59
4.4.2	Fuente tipo función escalón . . . . .	63
4.4.3	Fuente pulso rectangular . . . . .	69
4.4.4	Fuente sinusoidal . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>78</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>79</b>

# Lista de Figuras

2.1	<a href="#">Sir George Biddell Airy (1801-1892)</a> . . . . .	3
2.2	Gráfica de la función de Airy $A_i$ (línea azul) y su derivada $A'_i$ (línea discontinua). . . . .	5
2.3	Gráfica de la función de Airy $B_i$ (línea azul) y su derivada $B'_i$ (línea discontinua). . . . .	5
2.4	Gráfica de $1/A_i(x)$ . . . . .	10
2.5	Gráfica de $1/A'_i(x)$ . . . . .	11
2.6	Gráfica de $1/B_i(x)$ . . . . .	11
2.7	Gráfica de $1/B'_i(x)$ . . . . .	12
3.1	Gráfica de $G(x', x)$ para diferentes valores de $x$ , donde $x = -1$ (línea azul), $x = 0$ (línea violeta) y $x = 1$ (línea roja). . . . .	21
3.2	Gráfica de $G_{x'}(x', x)$ cuando $x = -1$ . . . . .	21
3.3	Gráfica de $A_i(x)B'_i(x) - B_i(x)A'_i(x)$ . . . . .	24
3.4	Gráfica de la solución $y(x)$ para la ecuación de Airy homogénea. . . . .	25
3.5	Gráfica para una fuente constante $K = 0.4$ . . . . .	26
3.6	Gráfica de la solución $y(x)$ del problema (3.1) producida por una fuente constante $K = 0.4$ (línea azul), comparada con la solución de la ecuación de Airy sin fuentes (línea discontinua). . . . .	28
3.7	Gráfica de fuente tipo función escalón. . . . .	29
3.8	Gráfica de la solución $y(x)$ del problema (3.1) producida por una fuente de la forma función escalón (línea azul), comparada con la solución de la ecuación de Airy sin fuentes (línea discontinua). . . . .	32
3.9	Gráfica de fuente tipo pulso rectangular. . . . .	33
3.10	Gráfica de la solución $y(x)$ del problema (3.1) producida por una fuente tipo pulso rectangular (línea azul), comparada con la solución de la ecuación de Airy sin fuentes (línea discontinua). . . . .	37
3.11	Gráfica de fuente sinusoidal. . . . .	38
3.12	Gráfica de la solución $y(x)$ del problema (3.1) producida por una fuente sinusoidal (línea azul), comparada con la solución de la ecuación de Airy sin fuentes (línea discontinua). . . . .	40
4.1	Gráfica de $G(x', x)$ (línea roja) y $G_{x'}(x', x)$ (línea azul) para $x = 0$ . . . . .	56
4.2	Gráfica de la solución $y(x)$ para la ecuación de Airy homogénea. . . . .	59
4.3	Gráfica de una fuente constante $K = 3$ . . . . .	60

---

4.4	Gráfica de la solución $y(x)$ del problema (4.1) producida por una fuente constante $K = 3$ (línea azul), comparada con la solución de la ecuación de Airy sin fuentes (línea discontinua). . . . .	62
4.5	Gráfica de fuente tipo función escalón. . . . .	63
4.6	Gráfica de la solución $y(x)$ del problema (4.1) producida por una fuente de la forma función de paso (línea azul), comparada con la solución de la ecuación de Airy sin fuentes (línea discontinua). . . . .	68
4.7	Gráfica de fuente tipo pulso rectangular. . . . .	69
4.8	Gráfica de la solución $y(x)$ del problema (4.1) producida por una fuente tipo pulso rectangular (línea azul), comparada con la solución de la ecuación de Airy sin fuentes (línea discontinua). . . . .	73
4.9	Gráfica de fuente sinusoidal. . . . .	74
4.10	Gráfica de la solución $y(x)$ del problema (4.1) producida por una fuente sinusoidal (línea azul), comparada con la solución de la ecuación de Airy sin fuentes (línea discontinua). . . . .	77

# Lista de Tablas

- 3.1 Valores numéricos de la solución  $y(x)$  problema (3.1) con fuente sinusoidal. . 39
- 4.1 Valores numéricos de la solución  $y(x)$  problema (4.1) con fuente sinusoidal. . 76

# Capítulo 1

## Introducción

En este trabajo se centra el estudio en la ecuación de Airy como prototipo de ecuación diferencial ordinaria de segundo orden lineal con coeficientes variables. La ecuación de Airy desempeña un papel importante en la física. Las soluciones fundamentales de la ecuación de Airy homogénea denominadas funciones de Airy se usan en muchos campos de la física (óptica, mecánica de fluidos, física molecular, física de superficies, física cuántica) [1].

El método de la función de Green se aplica a la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales lineales inhomogéneas, en particular, cuando se resuelven sistemas descritos mediante dichas ecuaciones con condiciones de frontera lineales o condiciones iniciales lineales. El método de las funciones de Green desde su aparición en 1825 se ha convertido en una herramienta alternativa para abordar temas con ecuaciones diferenciales no homogéneas bajo ciertas condiciones de contorno, esta técnica ha demostrado ser útil en diversas áreas de la física. La importancia de este método radica en su simplicidad para aplicarse a sistemas físicos gobernados por ecuaciones diferenciales [2].

Este Informe consta de dos capítulos. En el primero se presenta una revisión bibliográfica sobre la ecuación de Airy y las funciones de Airy. En el segundo se desarrollan las ideas y herramientas fundamentales del método de la función de Green en forma adecuada para la resolución de problemas basados en la ecuación de Airy.

# Capítulo 2

## Propiedades y definiciones

### 2.1 Introducción histórica: Sir George Biddell Airy

George Biddell Airy nació el 27 de julio de 1801 en Inglaterra. Estudió en el Trinity College (University of Cambridge). En 1828 se le otorgó el título de profesor de Astronomía y fue nombrado director del nuevo Observatorio de Cambridge. Sus primeras obras en ese momento fueron sobre la masa de Júpiter y también sobre los movimientos irregulares de la tierra y Venus.

En 1834, Airy comenzó sus primeros estudios matemáticos relacionados con el fenómeno de difracción y la óptica. En junio de 1835, Airy se convirtió en el séptimo astrónomo real y director del Observatorio de Greenwich. Airy también introdujo el estudio de las manchas solares y el magnetismo de la tierra. Airy definió el "Airy Transit Circle", que se convirtió en 1884: meridiano de Greenwich.

En 1854 Airy intentó determinar la densidad media de la Tierra. Teniendo en cuenta la forma elíptica y la rotación de la Tierra, Airy obtuvo para esta densidad el valor de  $6.56 \text{ gr/cm}^3$ , que no está tan lejos, considerando la época, del valor actualmente admitido de  $5.42 \text{ gr/cm}^3$ . Aproximadamente en 1872, Airy comenzó a elaborar una teoría luna cuyos resultados se publicaron en 1886, pero en 1890 Airy encontró un error en sus cálculos. En 1881 Airy dejó su puesto de astrónomo en Greenwich para retirarse. Airy muere el 2 de enero de 1892.

El nombre de Airy ha quedado asociado a muchos fenómenos como: la espiral de Airy (fenómenos ópticos visibles en cristales de quartz), la mancha (spot) de Airy (fenómenos de difracción), la función de tensión de Airy en elasticidad, diferente de las funciones Airy [1].

Airy estuvo bastante relacionado con la óptica, por ejemplo, él hizo unos lentes especiales

para corregir su propio astigmatismo. Él estuvo también interesado por el cálculo de la intensidad de la luz en la vecindad de un caustic [Airy (1838), (1849)].

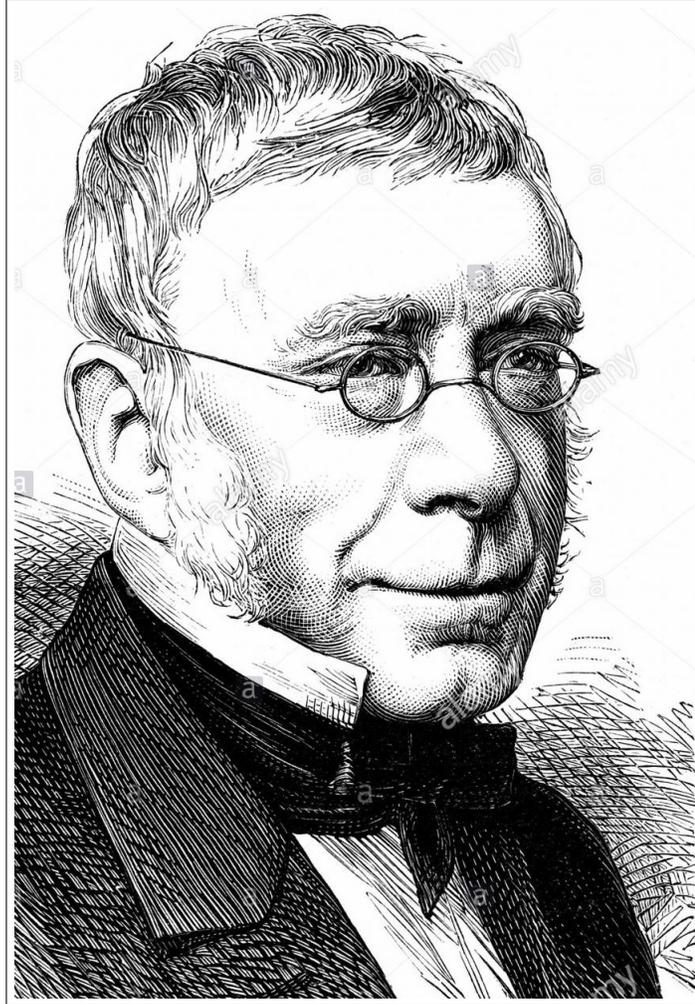


Figura 2.1: [Sir George Biddell Airy \(1801-1892\)](#)

Para este propósito, él introdujo la función definida por la integral

$$W(m) = \int_0^{\infty} \cos \left[ \frac{\pi}{2} (w^3 - mw) \right] dw,$$

actualmente denominada función de Airy.  $W$  es solución de la ecuación diferencial

$$W''' + \frac{\pi^2}{12} W = 0$$

En 1928 Jeffreys introdujo la notación utilizada hoy en día

$$A_i(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt,$$

la cual es solución de la ecuación diferencial homogénea conocida como la ecuación de Airy

$$y''(x) - xy(x) = 0.$$

## 2.2 Ecuación de Airy

Se considera la siguiente ecuación diferencial homogénea de segundo orden llamada ecuación de Airy

$$y''(x) - xy(x) = 0 \quad (2.1)$$

Se define la función de Airy en el plano complejo por

$$A_i(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{xz - z^3/3} dz. \quad (2.2)$$

La ecuación anterior es solución de la ecuación de Airy. Se cumple la siguiente relación

$$A_i(x) + \mathbf{j}A_i(\mathbf{j}x) + \mathbf{j}^2A_i(\mathbf{j}^2x) = 0, \quad (2.3)$$

donde  $\mathbf{j}$  toma el siguiente valor  $\mathbf{j} = e^{i2\pi/3}$ .

Ahora, se define la función  $B_i(x)$ , linealmente independiente de  $A_i(x)$ , que tiene la propiedad interesante de ser real cuando  $x$  es real

$$B_i(x) = \mathbf{i}\mathbf{j}^2A_i(\mathbf{j}^2x) - \mathbf{i}\mathbf{j}A_i(\mathbf{j}x). \quad (2.4)$$

Similarmente a  $A_i(x)$  en la ecuación (2.3), cumple la relación

$$B_i(x) + \mathbf{j}B_i(\mathbf{j}x) + \mathbf{j}^2B_i(\mathbf{j}^2x) = 0. \quad (2.5)$$

Las soluciones  $A_i(x)$  y  $B_i(x)$  dadas en (2.2) y (2.4), respectivamente, de la ecuación de Airy homogénea (2.1) se conocen como funciones de Airy homogéneas, sus gráficas para  $x$  real se muestran en las Figuras 2.2 y 2.3

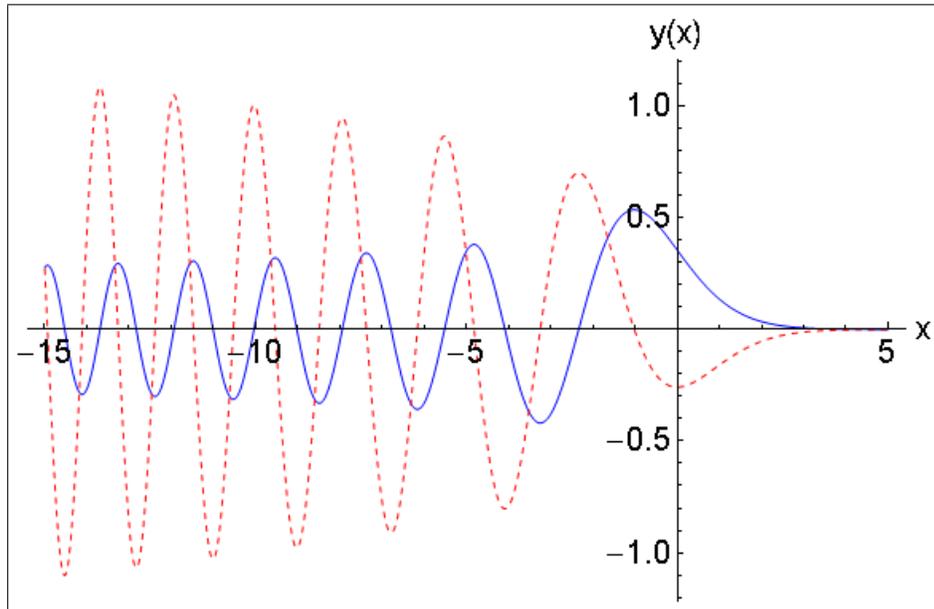


Figura 2.2: Gráfica de la función de Airy  $A_i$  (línea azul) y su derivada  $A_i'$  (línea discontinua).

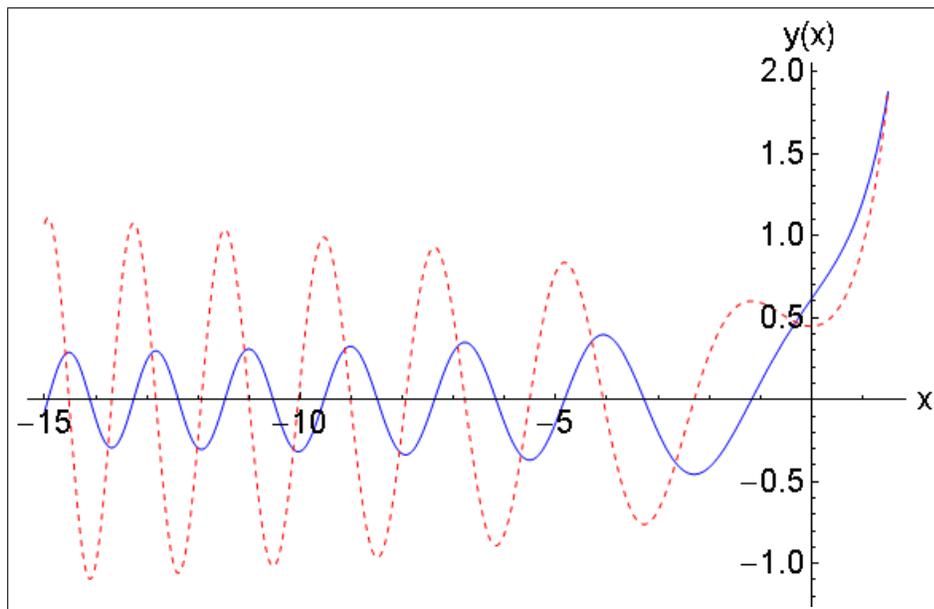


Figura 2.3: Gráfica de la función de Airy  $B_i$  (línea azul) y su derivada  $B_i'$  (línea discontinua).

## 2.3 Propiedades elementales

### 2.3.1 Wronskianos de las funciones de Airy homogéneas

El Wronskiano  $W\{f, g\}$ ; de dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  se define como:

$$W\{f, g\} = f(x) \frac{dg(x)}{dx} - \frac{df(x)}{dx} g(x).$$

Para las funciones de Airy  $A_i$  y  $B_i$ , se tienen los siguientes Wronskianos [3]:

$$\bullet \quad W\{A_i(x), B_i(x)\} = \frac{1}{\pi} \quad (2.6)$$

$$\bullet \quad W\{A_i(x), A_i(xe^{i2\pi/3})\} = \frac{e^{-i\pi/6}}{2\pi} \quad (2.7)$$

$$\bullet \quad W\{A_i(x), A_i(xe^{-i2\pi/3})\} = \frac{e^{i\pi/6}}{2\pi} \quad (2.8)$$

$$\bullet \quad W\{A_i(xe^{i2\pi/3}), A_i(xe^{-i2\pi/3})\} = \frac{i}{2\pi}. \quad (2.9)$$

### 2.3.2 Valores particulares de las funciones de Airy

Los valores en el origen de las funciones de Airy homogéneas son

$$A_i(0) = \frac{B_i(0)}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3^{2/3}\Gamma(\frac{2}{3})} = 0.355028053887817239 \quad (2.10)$$

$$-A'_i(0) = \frac{B'_i(0)}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3^{1/3}\Gamma(\frac{1}{3})} = 0.258819403792806798 \quad (2.11)$$

y por lo tanto

$$A_i(0) A'_i(0) = \frac{-1}{2\pi\sqrt{3}}. \quad (2.12)$$

De modo más general, para las derivadas de orden mayor se tiene [4]

$$A_i^{(n)}(0) = (-1)^n c_n \sin\left(\frac{\pi(n+1)}{3}\right), \quad n = 0, 1, 2, 3\dots \quad (2.13)$$

y

$$B_i^{(n)}(0) = c_n \left[ 1 + \sin \left( \frac{\pi(4n+1)}{6} \right) \right], \quad (2.14)$$

donde el coeficiente  $c_n$  es

$$c_n = \frac{1}{\pi} 3^{(n-2)/3} \Gamma \left( \frac{n+1}{3} \right). \quad (2.15)$$

### 2.3.3 Relaciones entre las funciones de Airy

Las siguientes relaciones se deducen a partir de las fórmulas (2.3), (2.4) y (2.5) [3, 5].

$$\bullet \quad A_i(xe^{\pm i2\pi/3}) = \frac{e^{\pm i\pi/3}}{2} [A_i(x) \mp iB_i(x)] \quad (2.16)$$

$$\bullet \quad A_i'(xe^{\pm i2\pi/3}) = \frac{e^{\pm i\pi/3}}{2} [A_i'(x) \mp iB_i'(x)] \quad (2.17)$$

$$\bullet \quad B_i(x) = e^{i\pi/6} A_i(xe^{i2\pi/3}) + e^{-i\pi/6} A_i(xe^{-i2\pi/3}) \quad (2.18)$$

$$\bullet \quad B_i'(x) = e^{i5\pi/6} A_i'(xe^{i2\pi/3}) + e^{-i5\pi/6} A_i'(xe^{-i2\pi/3}) \quad (2.19)$$

## 2.4 Representaciones integrales

Una definición integral de  $A_i(x)$  está dada por la fórmula (2.2). Esta función también se puede definir mediante las siguientes fórmulas [3]:

$$\bullet \quad A_i(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \left( \frac{z^3}{3} + xz \right) dz \quad (2.20)$$

$$\bullet \quad A_i(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(z^3/3+xz)} dz \quad (2.21)$$

$$\bullet \quad A_i(x) = \frac{x^{1/2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^{3/2}(z^3/3+xz)} dz, \quad x > 0 \quad (2.22)$$

$$\bullet \quad A_i(x) = \frac{e^{-\xi}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xz^2 + iz^3/3} dz, \quad x > 0, \quad \xi = \frac{2}{3}x^{3/2} \quad (2.23)$$

$$\bullet \quad A_i(x) = \frac{e^{-\xi}}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-xz^2} \cos\left(\frac{z^3}{3}\right) dz, \quad x > 0, \quad \xi = \frac{2}{3}x^{3/2}. \quad (2.24)$$

En forma más general, se tiene

$$A_i(ax) = \frac{1}{2\pi a} \int_{-\infty}^{+\infty} e\left[i\left(\frac{u^3}{3} + xu\right)\right] du. \quad (2.25)$$

Una fórmula útil es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e\left[i\left(\frac{t^3}{3} + at^2 + bt\right)\right] dt = 2\pi e^{ia(2a^2/3 - b)} A_i(b - a^2). \quad (2.26)$$

En [6] se obtiene las expresiones

$$A_i(x) = \frac{1}{i\pi} \int_0^{i\infty} \cosh\left(\frac{z^3}{3} - xz\right) dz, \quad (2.27)$$

y para  $x > 0$

$$A_i(x) = \frac{x^{1/2}}{\pi} \int_{-1}^{\infty} \cos\left[x^{3/2}\left(\frac{z^3}{3} + z^2 - \frac{2}{3}\right)\right] dz. \quad (2.28)$$

También se usa la expresión [7]

$$A_i(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{\frac{t^3}{3} - \frac{x^3}{3t^3}} dt, \quad x > 0. \quad (2.29)$$

Para la función  $B_i$ , se tiene la representación integral

$$B_i(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ e^{\frac{t^3}{3} + xt} + \sin\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) \right] dt. \quad (2.30)$$

Se encuentra las siguientes relaciones entre las funciones de Airy  $A_i$  y  $B_i$  y la función de Bessel  $K_\nu(x)$ :

$$\bullet \quad A_i\left[\left(\frac{3x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right] = \frac{\left(\frac{3x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}{\pi\sqrt{3}} K_{\frac{1}{3}}(x). \quad (2.31)$$

$$\bullet \quad A_i(x) = \frac{e^{-\frac{2x^{2/3}}{3}}}{2^3 2^{1/6} 3^{5/6} \pi^2 x^{1/4}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} K_{1/3}(t)}{t^{1/3} \left(1 + \frac{3t}{2x^{3/2}}\right)} dt, \quad (x > 0), \quad (2.32)$$

$$\bullet \quad B_i(x) = \frac{e^{\frac{2x^{2/3}}{3}}}{2^2 2^{1/6} 3^{5/6} \pi^2 x^{1/4}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} K_{1/3}(t)}{t^{1/3} \left(1 - \frac{3t}{2x^{3/2}}\right)} dt, \quad (x > 0). \quad (2.33)$$

## 2.5 Desarrollo de $A_i$ alrededor del origen

El desarrollo de  $A_i$  alrededor del origen  $x = 0$  es [8]

$$A_i(x) = \frac{1}{\pi 3^{2/3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{3}\right)}{n!} \sin\left[\frac{2}{3}(n+1\pi)\right] (3^{1/3}x)^n. \quad (2.34)$$

## 2.6 Ceros de las funciones de Airy

Los ceros de la función Airy  $Ai(x)$  están situados en la parte negativa del eje real. Se define a  $a_s$ , y  $a'_s$ , los segundos ceros de  $Ai(x)$  y  $A'i(x)$  respectivamente,  $b_s$ , y  $b'_s$  los ceros reales de  $Bi(x)$  y  $B'i(x)$  [5]. Así se obtiene

$$a_s = -f \left[ \frac{3\pi}{8} (4s - 1) \right] \quad (2.35)$$

$$a'_s = -g \left[ \frac{3\pi}{8} (4s - 3) \right] \quad (2.36)$$

$$b_s = -f \left[ \frac{3\pi}{8} (4s - 3) \right] \quad (2.37)$$

$$b'_s = -g \left[ \frac{3\pi}{8} (4s - 1) \right] \quad (2.38)$$

También se tiene las relaciones:

$$A'_i(a_s) = (-1)^{s-1} f_1 \left[ \frac{3\pi}{8} (4s - 1) \right] \quad (2.39)$$

$$A_i(a'_s) = (-1)^{s-1} g_1 \left[ \frac{3\pi}{8} (4s - 3) \right] \quad (2.40)$$

$$B'_i(b_s) = (-1)^{s-1} f_1 \left[ \frac{3\pi}{8} (4s - 3) \right] \quad (2.41)$$

$$B_i(b'_s) = (-1)^{s-1} g_1 \left[ \frac{3\pi}{8} (4s - 1) \right] \quad (2.42)$$

Se definen las funciones  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $f_1(x)$  y  $g_1(x)$ , con  $|x| \gg 1$ , por las relaciones

$$f(x) \approx x^{2/3} \left[ 1 + \frac{5}{48x^2} - \frac{5}{36x^4} + \frac{77125}{82944x^6} - \dots \right] \quad (2.43)$$

$$g(x) \approx x^{2/3} \left[ 1 - \frac{7}{48x^2} + \frac{35}{288x^4} - \frac{181223}{207360x^6} + \dots \right] \quad (2.44)$$

$$f_1(x) \approx \frac{x^{1/6}}{\pi^{1/2}} \left[ 1 + \frac{5}{48x^2} - \frac{1525}{4608x^4} + \frac{2397875}{663552x^6} - \dots \right] \quad (2.45)$$

$$g_1(x) \approx \frac{x^{-1/6}}{\pi^{1/2}} \left[ 1 - \frac{7}{96x^2} + \frac{1673}{6144x^4} - \frac{84394709}{26552080x^6} + \dots \right] \quad (2.46)$$

La distribución de los ceros de  $A_i$ ,  $A'_i$ ,  $B_i$  y  $B'_i$  en las Figuras 2.4, 2.5, 2.6 y 2.7, respectivamente.

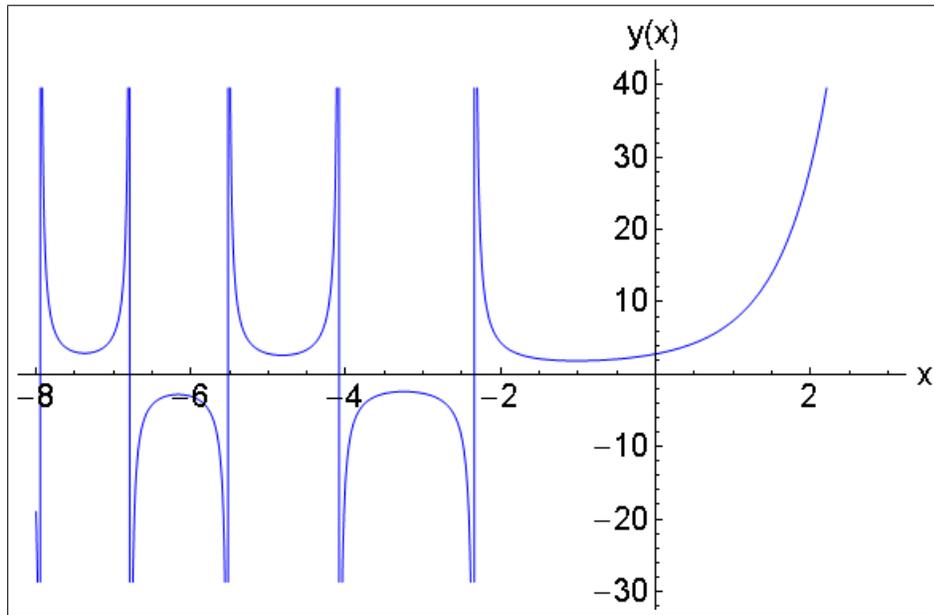


Figura 2.4: Gráfica de  $1/A_i(x)$ .

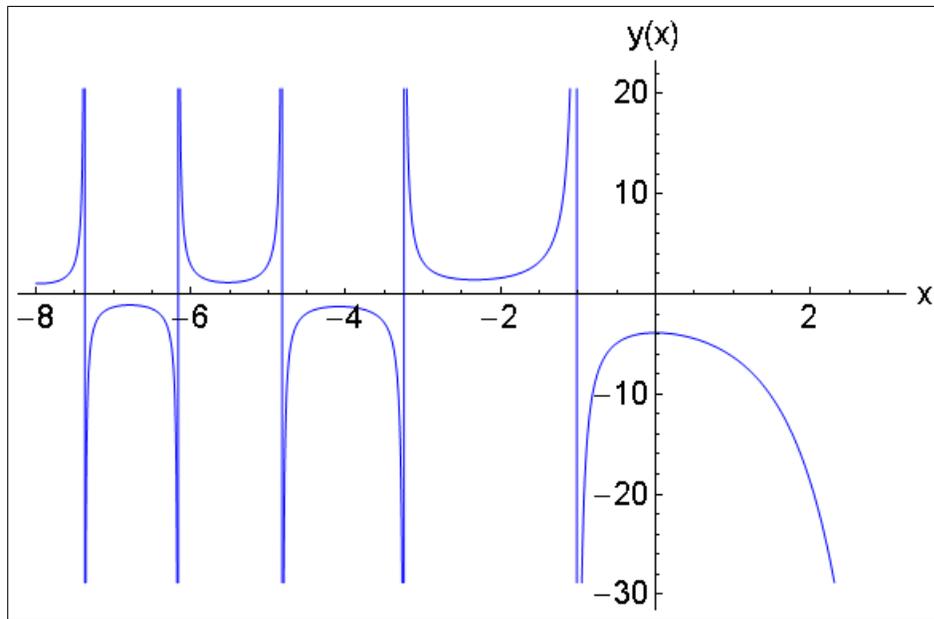


Figura 2.5: Gráfica de  $1/A'_i(x)$ .

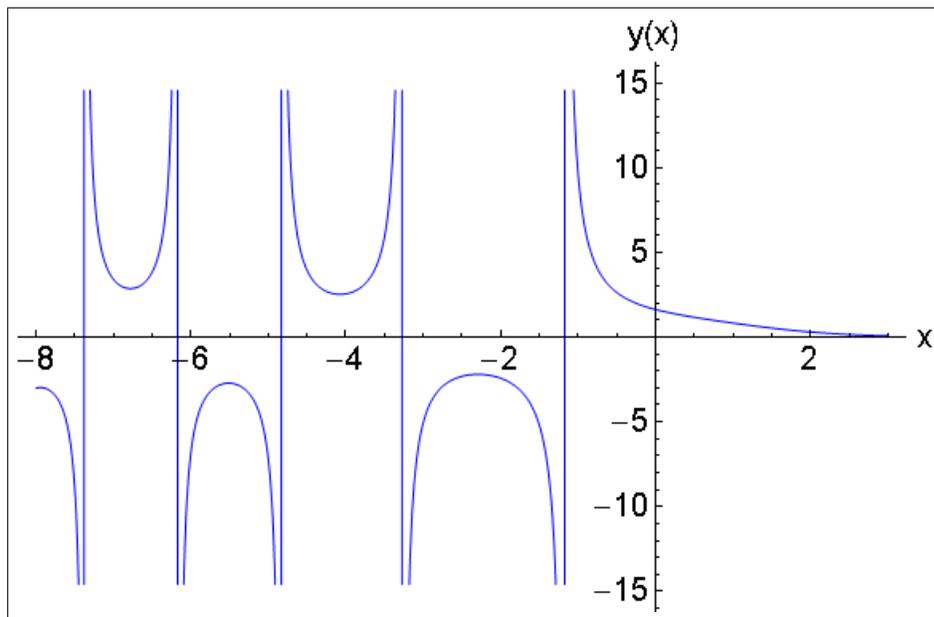
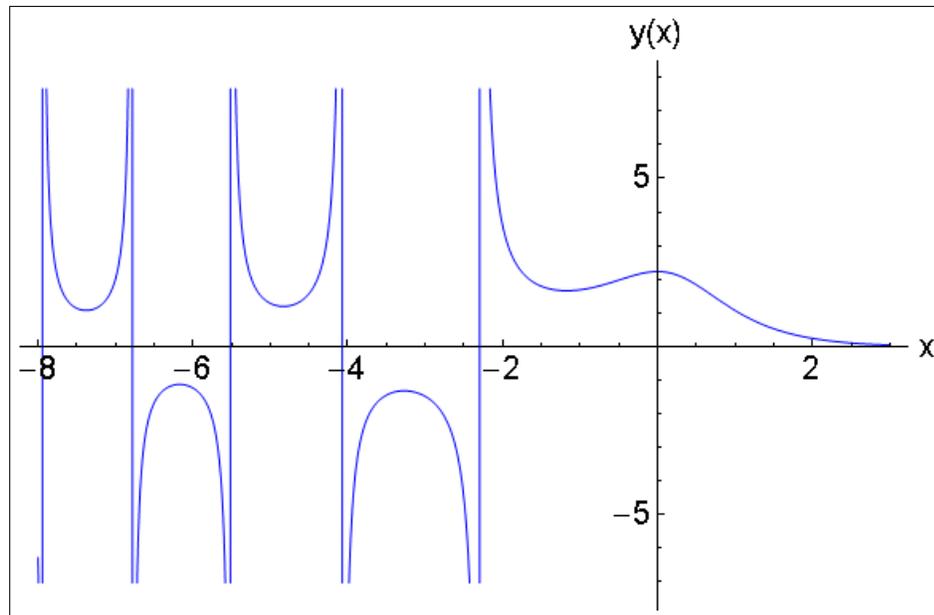


Figura 2.6: Gráfica de  $1/B_i(x)$ .

Figura 2.7: Gráfica de  $1/B'_i(x)$ .

Las propiedades y definiciones reseñadas en este capítulo servirán para el desarrollo de los próximos capítulos.

# Capítulo 3

## Solución

### de la ecuación de Airy inhomogénea con condiciones iniciales

#### 3.1 Formulación de problema

Se considera el problema descrito mediante las siguientes ecuaciones

$$y''(x) - xy(x) = f(x), \quad x > x_1, \tag{3.1}$$

$$y(x_1) = d_1, \quad y'(x_1) = d_2,$$

siendo  $d_1$  y  $d_2$  constantes conocidas. Este problema está basado en la ecuación de Airy inhomogénea y la incógnita  $y(x)$  está sujeta a condiciones iniciales en un punto. La variable independiente es  $x$ ,  $f(x)$  es una fuente externa y  $y(x)$  es la respuesta a dicha fuente, si por lo menos uno de los términos  $f(x)$ ,  $d_1$  y  $d_2$  es diferente de cero, el problema es no homogéneo. A continuación se explica el método de la función de Green, aplicado a la solución del problema (3.1).

## 3.2 El método de la función de Green

### 3.2.1 Obtención de la ecuación diferencial para la función de Green

A continuación se explica paso a paso el método de la función de Green aplicado a la solución del problema (3.1). La variable  $x$  en la ecuación de Airy (3.1) se renombra como  $x'$

$$y''(x') - x'y'(x') = f(x'), \quad x' > x_1.$$

Esta ecuación se multiplica por una función de Green  $G(x', x)$  por ahora desconocida, la cual depende de dos puntos  $x'$  y  $x$ . Luego se integra por  $x'$  entre  $x_1$  e infinito

$$\int_{x_1}^{\infty} G(x', x) [y''(x') - x'y'(x')] dx' = \int_{x_1}^{\infty} G(x', x) f(x') dx'. \quad (3.2)$$

Usando integración por partes en el lado izquierdo de la ecuación (3.2), se tiene

$$\begin{aligned} & \left[ G(x', x) y'(x') - G_{x'}(x', x) y(x') \right] \Big|_{x'=x_1}^{x'=\infty} + \\ & \int_{x_1}^{\infty} y(x') [G_{x'x'}(x', x) - x'G(x', x)] dx' = \\ & \int_{x_1}^{\infty} G(x', x) f(x') dx'. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Para comenzar a determinar la función de Green  $G(x', x)$  asociada a la solución del problema (3.1), se exige que la integral del lado izquierdo de la ecuación (3.3) sea igual a  $y(x)$

$$y(x) = \int_{x_1}^{\infty} y(x') [G_{x'x'}(x', x) - x'G(x', x)] dx', \quad (3.4)$$

de otra parte,  $y(x)$  se escribe como

$$y(x) = \int_{x_1}^{\infty} y(x') \delta(x' - x) dx'. \quad (3.5)$$

Comparando las ecuaciones (3.4) y (3.5) se debe cumplir la siguiente expresión

$$G_{x'x'}(x', x) - x'G(x', x) = \delta(x' - x), \quad x' > x_1, \quad (3.6)$$

donde  $G_{x'}$  y  $G_{x'x'}$  representa la primera y segunda derivada de  $G(x', x)$  con respecto a  $x'$ .

Por lo tanto al reemplazar la ecuación (3.4) en (3.3) y despejando  $y(x)$  se obtiene

$$y(x) = - \left[ G(x', x) y'(x') - G_{x'}(x', x) y(x') \right] \Big|_{x'=x_1}^{x'=\infty} + \int_{x_1}^{\infty} G(x', x) f(x') dx'. \quad (3.7)$$

Esta es la expresión para  $y(x)$  en términos de la función de Green [9].

### 3.2.2 Condiciones de frontera para la función de Green

A continuación se realiza el siguiente análisis de los términos de frontera, inicialmente se expande los términos de frontera

$$-\left[ G(x', x) y'(x') - G_{x'}(x', x) y(x') \right] \Big|_{x'=x_1}^{x'=\infty} = -G(\infty, x) y'(\infty) + G_{x'}(\infty, x) y(\infty) + G(x_1, x) y'(x_1) - G_{x'}(x_1, x) y(x_1). \quad (3.8)$$

En la expresión anterior se tiene cuatro términos de frontera los cuales se detallan así:

- $G(\infty, x) y'(\infty)$ , se observa que en la formulación del problema (3.1),  $y'(\infty)$  no se conoce y para eliminar  $y'(\infty)$  se impone la condición para la función de Green en el infinito

$$G(\infty, x) = 0. \quad (3.9)$$

- $G_{x'}(\infty, x) y(\infty)$ , en la formulación del problema (3.1), el término  $y(\infty)$  es desconocido y para eliminar  $y(\infty)$  es necesario imponer otra condición sobre la derivada de la función de Green en el infinito

$$G_{x'}(\infty, x) = 0. \quad (3.10)$$

- $G(x_1, x) y'(x_1)$ , en este término de acuerdo con la formulación del problema (3.1),  $y'(x_1)$  es conocido y tiene el valor  $d_2$ , por lo tanto el término permanece

$$G(x_1, x) y'(x_1) = d_2 G(x_1, x). \quad (3.11)$$

- $G_{x'}(x_1, x) y(x_1)$ , como en el caso anterior en la formulación del problema (3.1),  $y(x_1)$  es conocido con valor  $d_1$  y el término permanece

$$G_{x'}(x_1, x) y(x_1) = d_1 G_{x'}(x_1, x). \quad (3.12)$$

Los términos de frontera dados por la ecuación (3.8), adquieren la forma

$$-\left[ G(x', x) y'(x') - G_{x'}(x', x) y(x') \right] \Big|_{x'=x_1}^{x'=\infty} = d_2 G(x_1, x) - d_1 G_{x'}(x_1, x). \quad (3.13)$$

Reemplazando (3.13) en (3.7),  $y(x)$  se expresa como

$$y(x) = d_2 G(x_1, x) - d_1 G_{x'}(x_1, x) + \int_{x_1}^{\infty} G(x', x) f(x') dx'. \quad (3.14)$$

Esta es la solución del problema (3.1) en términos de la función de Green, cabe destacar que toda la expresión es una función que depende de  $x$  [10].

### 3.2.3 Determinación de la función de Green

De acuerdo con los resultados anteriores (3.6), (3.9) y (3.10), la función de Green satisface el siguiente problema

$$G_{x'x'}(x', x) - x'G(x', x) = \delta(x' - x), \quad x' > x_1, \quad (3.15)$$

$$G(\infty, x) = 0, \quad G_{x'}(\infty, x) = 0.$$

Para encontrar la función de Green  $G(x', x)$  es necesario resolver la ecuación diferencial del problema (3.15), en la cual aparece la función delta de Dirac  $\delta(x' - x)$  que tiene una singularidad en el punto  $x' = x$  ( $\delta(0) = \infty$ ), entonces se comienza a solucionar la ecuación diferencial del problema (3.15) en todo el intervalo  $x' > x_1$  excepto en el punto  $x' = x$ . Por tanto el intervalo  $x' > x_1$  se divide en dos partes  $x_1 < x' < x$  y  $x' > x$ . En cada subintervalo se tiene  $\delta(x' - x)|_{x' \neq x} = 0$ , entonces la ecuación diferencial en (3.15) se reduce a

$$G_{x'x'}(x', x) - x'G(x', x) = 0, \quad \text{para } x' \neq x, \quad (3.16)$$

la ecuación (3.16) se conoce como ecuación diferencial de Airy homogénea, la solución de (3.16) se escribe en la forma [11]

$$G(x', x) = \begin{cases} C_1 A_i(x') + C_2 B_i(x'), & x_1 < x' < x \\ C_3 A_i(x') + C_4 B_i(x'), & x' > x \end{cases}, \quad (3.17)$$

donde  $A_i(x')$  y  $B_i(x')$  se conocen como las funciones de Airy, que son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea (3.16), además  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$

incógnitas por ahora desconocidas las cuales no dependen de  $x'$ . Se requiere determinar cada una de las cantidades  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$ , para las cuales se necesita de cuatro ecuaciones algebraicas. Dos de ellas se obtienen de los términos de frontera dados en (3.15). Reescribiendo éstas condiciones con base a la solución de la ecuación diferencial de Airy homogénea dada por (3.17) se tiene

$$C_3 A_i(\infty) + C_4 B_i(\infty) = 0, \quad (3.18)$$

$$C_3 A'_i(\infty) + C_4 B'_i(\infty) = 0. \quad (3.19)$$

Las otras dos ecuaciones se obtienen examinando el comportamiento de la función de Green  $G(x', x)$  en el punto  $x' = x$  y así poder completar la definición de la función de Green en todo el intervalo  $x' > x_1$ . Con este fin se integran los dos lados de la ecuación diferencial en (3.15) sobre un intervalo infinitesimal alrededor del punto  $x' = x$ , es decir, en el intervalo  $x^- < x' < x^+$  [10]

$$\int_{x^-}^{x^+} \underbrace{G_{x'x'}(x', x) dx'}_{(1)} - \int_{x^-}^{x^+} \underbrace{x' G(x', x) dx'}_{(2)} = \int_{x^-}^{x^+} \underbrace{\delta(x' - x) dx'}_{(3)}. \quad (3.20)$$

En la expresión anterior se tiene tres integrales por resolver (1), (2) y (3). La integral (1) da

$$\begin{aligned} \int_{x^-}^{x^+} G_{x'x'}(x', x) dx' &= G_{x'}(x', x) \Big|_{x'=x^-}^{x'=x^+} \\ &= G_{x'}(x^+, x) - G_{x'}(x^-, x). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Para calcular la integral (2) se adiciona una nueva condición a la función de Green  $G(x', x)$  que sea continua en el punto  $x' = x$ , es decir

$$G(x^+, x) = G(x^-, x), \quad (3.22)$$

con esta condición, la integral (2) es igual a cero ya que el integrando  $x' G(x', x)$  es continuo y se integra en un intervalo infinitesimal donde el área bajo la curva es cero

$$\int_{x^-}^{x^+} x' G(x', x) dx' = 0. \quad (3.23)$$

Finalmente, la integral (3) debido a las propiedades que posee la función delta de Dirac  $\delta(x' - x)$ , ésta es igual a 1

$$\int_{x^-}^{x^+} \delta(x' - x) dx' = 1. \quad (3.24)$$

Reemplazando los resultados (3.21), (3.23) y (3.24) en (3.20), se tiene

$$G_{x'}(x^+, x) - G_{x'}(x^-, x) = 1. \quad (3.25)$$

La ecuación (3.25) representa una condición que debe satisfacer la función de Green  $G(x', x)$ , la cual consiste en que su primera derivada tiene una discontinuidad se salto igual a 1 en el punto  $x' = x$ . Esta discontinuidad es producida por la función delta de Dirac  $\delta(x' - x)$  en la ecuación diferencial del problema (3.15) y por la condición de continuidad en dicho punto impuesta a  $G(x', x)$ . De acuerdo con (3.17) la ecuación (3.25) se reescribe

$$C_1 A_i'(x) + C_2 B_i'(x) - C_3 A_i'(x) - C_4 B_i'(x) = -1. \quad (3.26)$$

Finalmente la condición de continuidad de la función de Green  $G(x', x)$  en  $x' = x$  dada por (3.22), y teniendo en cuenta (3.17) adquiere la forma

$$C_1 A_i(x) + C_2 B_i(x) - C_3 A_i(x) - C_4 B_i(x) = 0. \quad (3.27)$$

En resumen los resultados obtenidos en (3.18), (3.19), (3.26) y (3.27) son muy importantes ya que con ellos se completa el sistema de cuatro ecuaciones algebraicas necesarias para encontrar las incógnitas  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$ , presentes en la función de Green  $G(x', x)$  dada en (3.17). Por lo tanto el sistema a resolver es el siguiente

$$C_1 A_i'(x) + C_2 B_i'(x) - C_3 A_i'(x) - C_4 B_i'(x) = -1,$$

$$C_1 A_i(x) + C_2 B_i(x) - C_3 A_i(x) - C_4 B_i(x) = 0,$$

(3.28)

$$C_3 A_i(\infty) + C_4 B_i(\infty) = 0,$$

$$C_3 A_i'(\infty) + C_4 B_i'(\infty) = 0.$$

Para solucionar el sistema (3.28) se comienza examinando el comportamiento de las funciones de Airy  $A_i(x')$ ,  $A'_i(x')$ ,  $B_i(x')$  y  $B'_i(x')$  cuando  $x'$  tiende a infinito [ver capítulo 2].

- La función de Airy  $A_i(x')$  y su derivada  $A'_i(x')$  tienden a cero cuando  $x'$  tiende a  $+\infty$ , es decir

$$A_i(x' \rightarrow +\infty) \rightarrow 0, \quad A'_i(x' \rightarrow +\infty) \rightarrow 0. \quad (3.29)$$

- La función de Airy  $B_i(x')$  y su derivada  $B'_i(x')$  tienden al infinito cuando  $x'$  tiende a  $+\infty$ , es decir

$$B_i(x' \rightarrow +\infty) \rightarrow +\infty, \quad B'_i(x' \rightarrow +\infty) \rightarrow +\infty. \quad (3.30)$$

Examinando las dos últimas ecuaciones de (3.28), junto con (3.29) y (3.30) se concluye que éstas ecuaciones se cumplen para  $C_4 = 0$  y  $C_3$  arbitraria, entonces se escoge  $C_3 = 0$ . Por lo tanto el sistema (3.28) se reduce a

$$C_1 A'_i(x) + C_2 B'_i(x) = -1, \quad (3.31)$$

$$C_1 A_i(x) + C_2 B_i(x) = 0.$$

Resolviendo el sistema (3.31) se encuentra que  $C_1$  y  $C_2$  son funciones de  $x$ , es decir  $C_1 = C_1(x)$ ,  $C_2 = C_2(x)$  y están dadas por

$$C_1(x) = \frac{-B_i(x)}{B_i(x)A'_i(x) - A_i(x)B'_i(x)}, \quad (3.32)$$

$$C_2(x) = \frac{A_i(x)}{B_i(x)A'_i(x) - A_i(x)B'_i(x)}. \quad (3.33)$$

Con los resultados de cada una de las cantidades  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$ , dadas por (3.32), (3.33),  $C_3 = 0$  y  $C_4 = 0$ , se procede a reemplazar estos valores en la expresión (3.17) para la

función de Green  $G(x', x)$  en la cual ya está incluido el punto  $x' = x$

$$G(x', x) = \begin{cases} \frac{-B_i(x)A_i(x') + A_i(x)B_i(x')}{B_i(x)A_i'(x) - A_i(x)B_i'(x)}, & x_1 < x' < x \\ 0, & x' > x. \end{cases} \quad (3.34)$$

Para verificar que la función de Green  $G(x', x)$  dada en (3.34) es correcta se utiliza el programa Mathematica y se comprueba las siguientes propiedades:

- Es solución de la ecuación diferencial homogénea en los intervalos:  $x_1 < x' < x$  y  $x' > x$

$$G_{x'x'}(x', x) - x'G(x', x) = 0.$$

- Es continua en el punto  $x' = x$ , es decir

$$G(x^-, x) = G(x^+, x) = 0.$$

- Satisface la condición de salto igual a 1 en el punto  $x' = x$

$$G_{x'}(x^+, x) - G_{x'}(x^-, x) = 1.$$

- Las tres anteriores condiciones significan que la función de Green satisface la ecuación diferencial inhomogénea con fuente  $\delta(x' - x)$

$$G_{x'x'}(x', x) - x'G(x', x) = \delta(x' - x).$$

- Adicionalmente cumple las dos condiciones cuando  $x'$  tiende a infinito

$$G(\infty, x) = 0, \quad G_{x'}(\infty, x) = 0.$$

Una vez comprobada que es la función de Green asociada al problema (3.1), se realiza un estudio gráfico de  $G(x', x)$ . En la Figura 3.1 se muestra la gráfica de  $G(x', x)$  para diferentes valores de  $x$

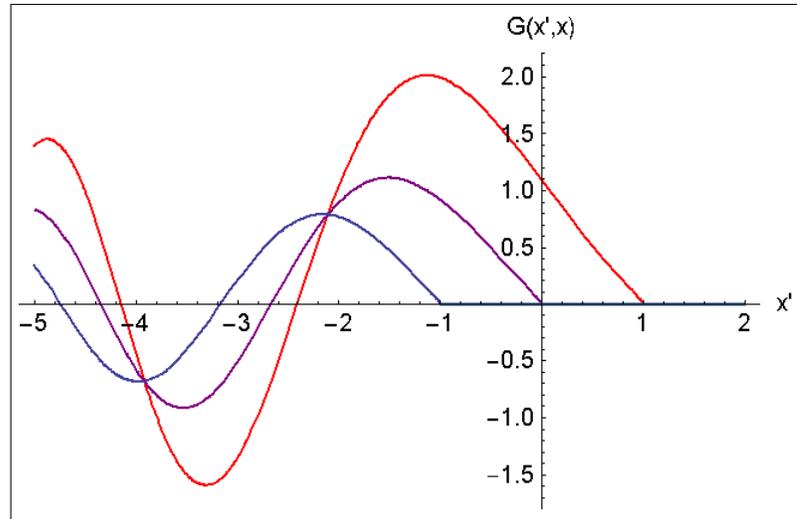


Figura 3.1: Gráfica de  $G(x', x)$  para diferentes valores de  $x$ , donde  $x = -1$  (línea azul),  $x = 0$  (línea violeta) y  $x = 1$  (línea roja).

En la Figura 3.2 se comprueba gráficamente la discontinuidad de salto igual a 1 de la primera derivada de la función de Green  $G(x', x)$  con respecto a  $x'$  en el punto  $x = -1$ .

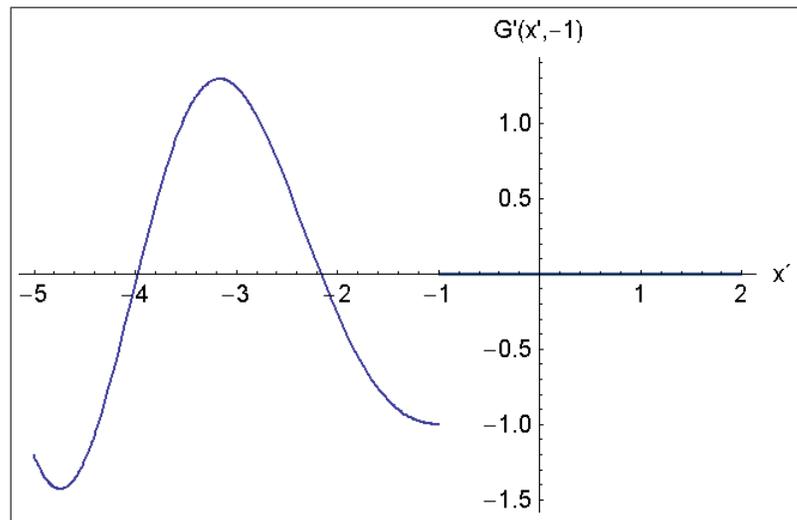


Figura 3.2: Gráfica de  $G_{x'}(x', x)$  cuando  $x = -1$ .

### 3.2.4 Solución del problema (3.1) en términos de $G(x', x)$

De acuerdo con la función de Green  $G(x', x)$  obtenida en (3.34) la integral que aparece en la solución  $y(x)$  dada en (3.15), se parte en dos intervalos:  $x_1 \leq x' < x$  y  $x' > x$  excluyendo el punto  $x' = x$ . En el segundo intervalo la integral es cero y la solución se reduce a

$$y(x) = d_2 G(x_1, x) - d_1 G_{x'}(x_1, x) + \int_{x_1}^x G(x', x) f(x') dx'. \quad (3.35)$$

A continuación se aplica la función de Green dada en (3.34) en la fórmula (3.35) de la solución  $y(x)$  del problema (3.1). Con este fin se evalúan las cantidades  $G(x_1, x)$  y  $G_{x'}(x_1, x)$

$$G(x_1, x) = \frac{B_i(x)A_i(x_1) - A_i(x)B_i(x_1)}{A_i(x)B_i'(x) - B_i(x)A_i'(x)}, \quad (3.36)$$

$$G_{x'}(x_1, x) = \frac{B_i(x)A_i'(x_1) - A_i(x)B_i'(x_1)}{A_i(x)B_i'(x) - B_i(x)A_i'(x)}. \quad (3.37)$$

Reemplazando (3.34), (3.36) y (3.37) en (3.35), se escribe

$$y(x) = \frac{d_2[B_i(x)A_i(x_1) - A_i(x)B_i(x_1)] - d_1[B_i(x)A_i'(x_1) - A_i(x)B_i'(x_1)]}{A_i(x)B_i'(x) - B_i(x)A_i'(x)} + \frac{B_i(x)}{A_i(x)B_i'(x) - B_i(x)A_i'(x)} \int_{x_1}^x f(x') A_i(x') dx' - \frac{A_i(x)}{A_i(x)B_i'(x) - B_i(x)A_i'(x)} \int_{x_1}^x f(x') B_i(x') dx'. \quad (3.38)$$

En (3.38) intervienen las funciones de Airy y la fuente  $f(x)$  que es el término inhomogéneo de la ecuación diferencial de Airy del problema (3.1). La fórmula (3.38) se aplicará a la solución del problema (3.1) considerando separadamente el caso cuando la ecuación de Airy es homogénea ( $f(x) = 0$ ), y el caso cuando la ecuación de Airy es inhomogénea ( $f(x) \neq 0$ ).

## 3.3 Ecuación de Airy homogénea

Antes de aplicar diversas fuentes a la solución del problema (3.1), es importante resolver la ecuación diferencial de Airy homogénea con respecto a  $y$  sujeta a condiciones iniciales, esto

es resolver el siguiente problema

$$y''(x) - xy(x) = 0, \quad x > x_1, \quad (3.39)$$

$$y(x_1) = d_1, \quad y'(x_1) = d_2,$$

donde  $d_1$  y  $d_2$  son conocidos. El problema (3.39) describe un sistema aislado (sin fuentes), la solución del problema (3.39) servirá de referencia para las soluciones de los problemas basados en la ecuación de Airy con fuentes.

La solución general de la ecuación diferencial homogénea presente en (3.39) es [1]

$$y(x) = C_1 A_i(x) + C_2 B_i(x). \quad (3.40)$$

Para determinar las constantes  $C_1$  y  $C_2$  se usan las dos condiciones iniciales en (3.40) y se forma el sistema de ecuaciones

$$C_1 A_i(x_1) + C_2 B_i(x_1) = d_1, \quad (3.41)$$

$$C_1 A_i'(x_1) + C_2 B_i'(x_1) = d_2.$$

Resolviendo el sistema (3.41) se obtiene que

$$C_1 = \frac{d_2 B_i(x_1) - d_1 B_i'(x_1)}{A_i'(x_1) B_i(x_1) - A_i(x_1) B_i'(x_1)}, \quad (3.42)$$

$$C_2 = \frac{d_1 A_i'(x_1) - d_2 A_i(x_1)}{A_i'(x_1) B_i(x_1) - A_i(x_1) B_i'(x_1)}. \quad (3.43)$$

Reemplazando (3.42) y (3.43) en (3.40) se obtiene la solución de la ecuación de Airy homogénea dada en (3.39)

$$y(x) = \frac{[d_2 B_i(x_1) - d_1 B_i'(x_1)] A_i(x) + [d_1 A_i'(x_1) - d_2 A_i(x_1)] B_i(x)}{A_i'(x_1) B_i(x_1) - A_i(x_1) B_i'(x_1)}. \quad (3.44)$$

Otra manera de obtener la solución del problema (3.39), es mediante el uso la fórmula (3.38) para  $y(x)$  en términos de la función de Green. En efecto, teniendo en cuenta que  $f(x) = 0$  la fórmula (3.38) se reduce a

$$y(x) = \frac{[d_2 B_i(x_1) - d_1 B_i'(x_1)] A_i(x) + [d_1 A_i'(x_1) - d_2 A_i(x_1)] B_i(x)}{A_i'(x) B_i(x) - A_i(x) B_i'(x)}. \quad (3.45)$$

Las expresiones (3.44) y (3.45) son iguales, entonces los denominadores de cada expresión deben ser iguales es decir

$$A_i(x)B_i'(x) - B_i(x)A_i'(x) = A_i(x_1)B_i'(x_1) - B_i(x_1)A_i'(x_1) = -0.31831.$$

En la Figura 3.3 se presenta la gráfica de  $A_i(x)B_i'(x) - B_i(x)A_i'(x)$  y se comprueba que es constante igual a  $-0.31831$  para cualquier valor de  $x$ .

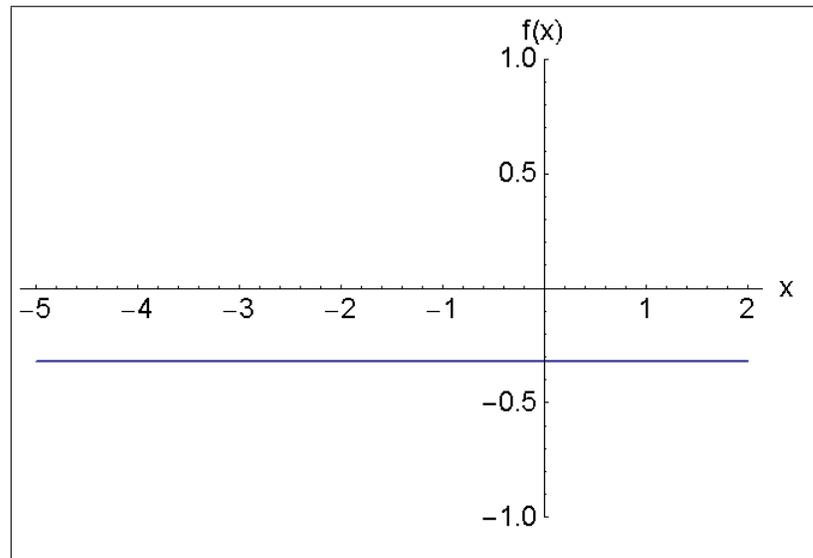


Figura 3.3: Gráfica de  $A_i(x)B_i'(x) - B_i(x)A_i'(x)$ .

Para verificar que la solución  $y(x)$  del problema (3.39), es correcta se utiliza el programa Mathematica y se comprueba las siguientes propiedades:

- Satisface la ecuación diferencial homogénea

$$y''(x) - xy(x) = 0.$$

- Cumple las dos condiciones iniciales dadas en (3.39)

1.  $y(x_1) = d_1$ .

2.  $y'(x_1) = d_2$ .

Con el fin de analizar el resultado (3.44) numéricamente se toman los siguientes valores de los parámetros que aparecen en el problema (3.39)

$$x_1 = -6, \quad d_1 = 0 \text{ y } d_2 = -1/10.$$

Introduciendo valores anteriores en la ecuación (3.44)

$$y(x) = \frac{\frac{-1}{10}B_i(-6)A_i(x) + \frac{1}{10}A_i(-6)B_i(x)}{A_i'(-6)B_i(-6) - A_i(-6)B_i'(-6)}, \quad (3.46)$$

donde

$$\begin{aligned} A_i(-6) &= -0.329145, & B_i(-6) &= -0.146698, \\ A_i'(-6) &= 0.345935, & B_i'(-6) &= -0.812899. \end{aligned}$$

Finalmente la solución  $y(x)$  en (3.46) se reduce a

$$y(x) = -0.05 A_i(x) - 0.1 B_i(x). \quad (3.47)$$

En la Figura 3.4 se muestra la gráfica de la solución  $y(x)$  dada en (3.47) de la ecuación diferencial de Airy homogénea.

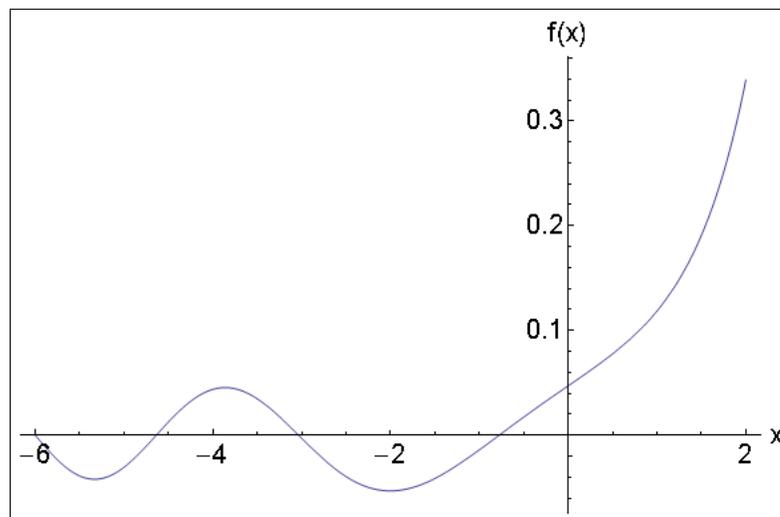


Figura 3.4: Gráfica de la solución  $y(x)$  para la ecuación de Airy homogénea.

La solución (3.45) del problema (3.39), servirá de referencia cuando se resuelva el problema (3.1) basado en la ecuación de Airy con fuente.

## 3.4 Ecuación de Airy inhomogénea

A continuación se aplican diferentes fuentes a la solución  $y(x)$  en (3.38).

### 3.4.1 Fuente constante

La función constante a aquella función matemática que toma el mismo valor para cualquier valor de la variable independiente. Se la representa de la forma

$$f(x) = K, \quad (3.48)$$

donde  $K$  es una constante conocida. En la Figura 3.5 se presenta la gráfica de la fuente constante (3.48), donde  $K = 0.4$ .

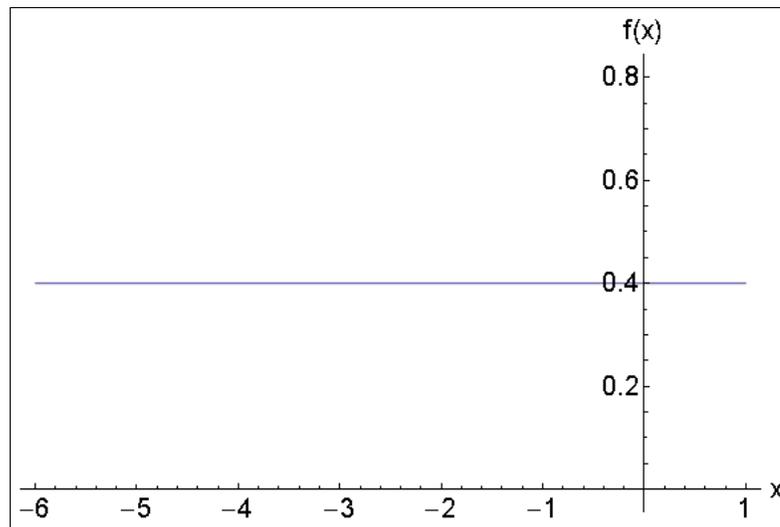


Figura 3.5: Gráfica para una fuente constante  $K = 0.4$ .

Remplazando (3.48) en (3.38), la solución  $y(x)$  adquiere la forma

$$y(x) = \frac{d_2[B_i(x)A_i(x_1) - A_i(x)B_i(x_1)] - d_1[B_i(x)A_i'(x_1) - A_i(x)B_i'(x_1)]}{A_i(x)B_i'(x) - B_i(x)A_i'(x)} + \frac{K}{A_i(x)B_i'(x) - B_i(x)A_i'(x)} \left[ B_i(x) \int_{x_1}^x A_i(x') dx' - A_i(x) \int_{x_1}^x B_i(x') dx' \right]. \quad (3.49)$$

En la expresión (3.49) se nombran las siguientes integrales

$$J_1 = \int_{x_1}^x A_i(x') dx', \quad (3.50)$$

$$J_2 = \int_{x_1}^x B_i(x') dx'. \quad (3.51)$$

Se hace uso del programa Mathematica para resolver las integrales  $J_1$  y  $J_2$ , de las ecuaciones (3.50) y (3.51), obteniendo los siguientes resultados

$$J_1 = \frac{{}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x - {}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{x_1^3}{9}\right) x_1}{3^{2/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} + \frac{\sqrt[6]{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left[ {}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x_1^3}{9}\right) x_1^2 - {}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x^2 \right]}{4\pi}, \quad (3.52)$$

$$J_2 = \frac{{}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x - {}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{x_1^3}{9}\right) x_1}{\sqrt[6]{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} + \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right) \left[ {}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x_1^3}{9}\right) x_1^2 - {}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x^2 \right]}{4\sqrt[3]{3} \pi}. \quad (3.53)$$

En (3.52) y (3.53) intervienen la función gamma definida como

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad (3.54)$$

y las series hipergeométricas de la forma

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \dots (a_p)_n x^n}{(b_1)_n (b_2)_n \dots (b_q)_n n!}, \quad (3.55)$$

donde

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1).$$

Para verificar la solución  $y(x)$  en (3.49) con fuente constante, es correcta se utiliza el programa Mathematica y se comprueba las siguientes propiedades:

- Satisface la ecuación diferencial con fuente constante

$$y''(x) - xy(x) = K.$$

- Cumple las dos condiciones iniciales dadas en (3.1)

1.  $y(x_1) = d_1$ .

2.  $y'(x_1) = d_2$ .

En la Figura 3.6 se muestra un estudio gráfico de la solución  $y(x)$  con fuente constante, se asigna los siguientes valores

$$x_1 = -6, d_1 = 0 \text{ y } d_2 = -1/10.$$

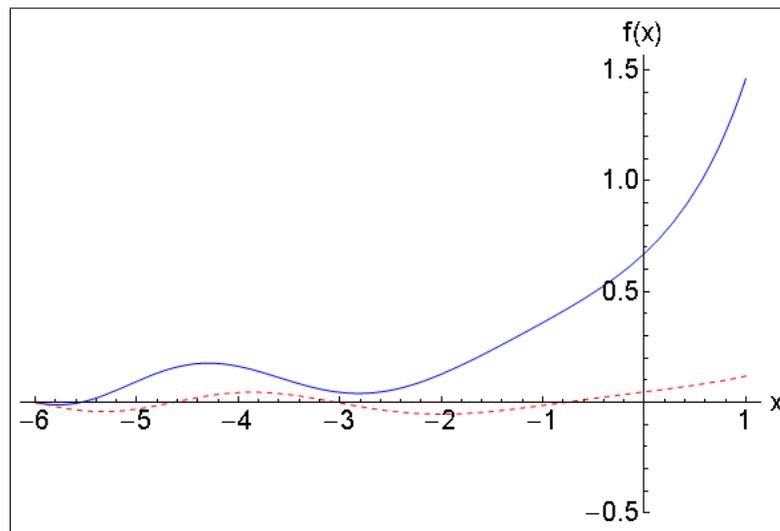


Figura 3.6: Gráfica de la solución  $y(x)$  del problema (3.1) producida por una fuente constante  $K = 0.4$  (línea azul), comparada con la solución de la ecuación de Airy sin fuentes (línea discontinua).

### 3.4.2 Fuente tipo función escalón

Este tipo de fuente se expresa como

$$f(x) = K_1 + K_2 H(x - x_2), \quad (3.56)$$

donde  $K_1$ ,  $K_2$  y  $x_2$  son constantes y  $H(x - x_2)$  es la función escalón definida

$$H(x - x_2) = \begin{cases} 0, & x < x_2, \\ 1, & x > x_2. \end{cases} \quad (3.57)$$

En la Figura 3.7 se muestra la gráfica de la fuente (3.56), con los siguientes valores de los parámetros

$$K_1 = 0.2, \quad K_2 = 0.4 \text{ y } x_2 = -2.$$

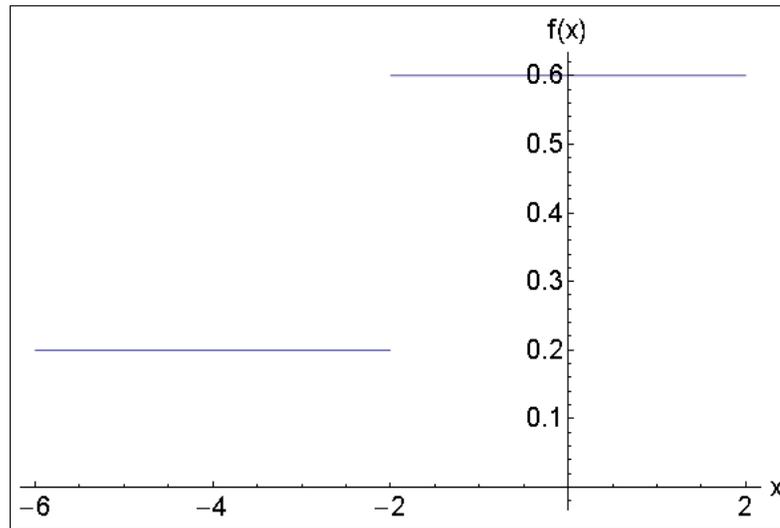


Figura 3.7: Gráfica de fuente tipo función escalón.

Reemplazando (3.56) en la solución  $y(x)$  dada por (3.38) se tiene

$$\begin{aligned}
 y(x) = & \frac{d_2[B_i(x)A_i(x_1) - A_i(x)B_i(x_1)] - d_1[B_i(x)A_i'(x_1) - A_i(x)B_i'(x_1)]}{A_i(x)B_i'(x) - B_i(x)A_i'(x)} + \\
 & \frac{B_i(x)}{A_i(x)B_i'(x) - B_i(x)A_i'(x)} \int_{x_1}^x [K_1 + K_2 H(x' - x_2)]A_i(x')dx' - \\
 & \frac{A_i(x)}{A_i(x)B_i'(x) - B_i(x)A_i'(x)} \int_{x_1}^x [K_1 + K_2 H(x' - x_2)]B_i(x')dx'. \quad (3.58)
 \end{aligned}$$

Se calculan las integrales

$$\int_{x_1}^x [K_1 + K_2 H(x' - x_2)]A_i(x')dx' = \begin{cases} K_1 \int_{x_1}^x A_i(x')dx', & x' < x_2 \\ K_1 \int_{x_1}^x A_i(x')dx' + K_2 \int_{x_2}^x A_i(x')dx', & x' > x_2 \end{cases},$$

y

$$\int_{x_1}^x [K_1 + K_2 H(x' - x_2)]B_i(x')dx' = \begin{cases} K_1 \int_{x_1}^x B_i(x')dx', & x' < x_2 \\ K_1 \int_{x_1}^x B_i(x')dx' + K_2 \int_{x_2}^x B_i(x')dx', & x' > x_2 \end{cases}.$$

Reemplazando los dos resultados anteriores en (3.58), se escribe

$$y(x) = \frac{d_2[B_i(x)A_i(x_1) - A_i(x)B_i(x_1)] - d_1[B_i(x)A_i'(x_1) - A_i(x)B_i'(x_1)]}{A_i(x)B_i'(x) - B_i(x)A_i'(x)} +$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{B_i(x)K_1}{A_i(x)B_i'(x) - B_i(x)A_i'(x)} \int_{x_1}^x A_i(x')dx' - \\ \frac{A_i(x)K_1}{A_i(x)B_i'(x) - B_i(x)A_i'(x)} \int_{x_1}^x B_i(x')dx', \quad x < x_2 \\ \\ \frac{B_i(x)}{A_i(x)B_i'(x) - B_i(x)A_i'(x)} \left[ K_1 \int_{x_1}^x A_i(x')dx' + K_2 \int_{x_2}^x A_i(x')dx' \right] - \\ \frac{A_i(x)}{A_i(x)B_i'(x) - B_i(x)A_i'(x)} \left[ K_1 \int_{x_1}^x B_i(x')dx' + K_2 \int_{x_2}^x B_i(x')dx' \right], \quad x > x_2 \end{array} \right. \quad (3.59)$$

En la expresión (3.59) intervienen las integrales  $J_1$  y  $J_2$  las cuales se calcularon anteriormente y sus resultados están dados en (3.52) y (3.53) respectivamente, además se definen las integrales  $J_3$  y  $J_4$  como

$$J_3 = \int_{x_2}^x A_i(x')dx', \quad (3.60)$$

$$J_4 = \int_{x_2}^x B_i(x')dx'. \quad (3.61)$$

Mediante el uso del programa Mathematica se calcula las integrales de (3.60) y (3.61) así

$$J_3 = \frac{{}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x - {}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{x_2^3}{9}\right) x_2}{3^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} +$$

$$\frac{\sqrt[6]{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left[ {}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x_2^3}{9}\right) x_2^2 - {}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x^2 \right]}{4\pi}, \quad (3.62)$$

$$J_4 = \frac{{}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x - {}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{x_2^3}{9}\right) x_2}{\sqrt[6]{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} +$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{-1}{3}\right) \left[ {}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x_2^3}{9}\right) x_2^2 - {}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x^2 \right]}{4\sqrt[3]{3}\pi}. \quad (3.63)$$

Para verificar que  $y(x)$  dada en (3.59) es la solución de la ecuación de Airy con fuente tipo función escalón, se utiliza el programa Mathematica y se comprueba las siguientes propiedades:

- Satisface la ecuación diferencial con fuente función escalón

$$y''(x) - xy(x) = \begin{cases} K_1, & x < x_2 \\ K_1 + K_2, & x > x_2 \end{cases} .$$

- Cumple las dos condiciones iniciales dadas en (3.1)

1.  $y(x_1) = d_1$ .
2.  $y'(x_1) = d_2$ .

En la Figura 3.8 se muestra la gráfica de la solución  $y(x)$  con fuente tipo función escalón, se asigna los siguientes valores

$$x_1 = -6, \quad x_2 = -2, \quad K_1 = 0.2, \quad K_2 = 0.4, \quad d_1 = 0 \text{ y } d_2 = -1/10.$$

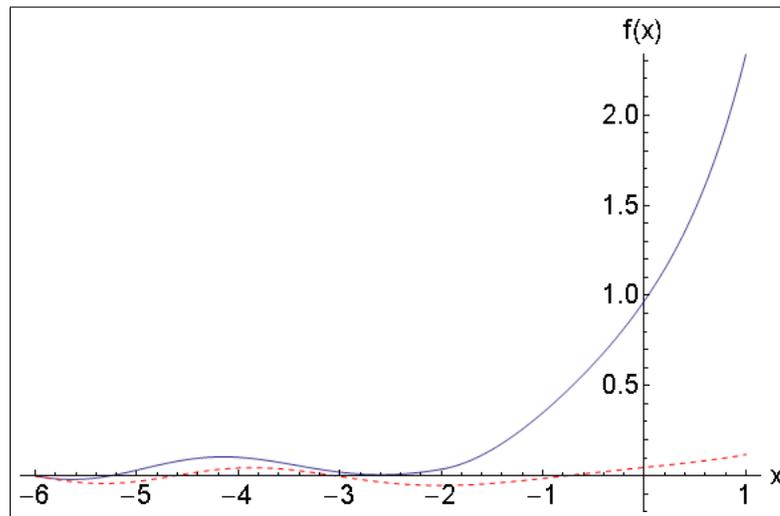


Figura 3.8: Gráfica de la solución  $y(x)$  del problema (3.1) producida por una fuente de la forma función escalón (línea azul), comparada con la solución de la ecuación de Airy sin fuentes (línea discontinua).

### 3.4.3 Fuente pulso rectangular

Este tipo de fuente se expresa como

$$f(x) = K_1 + K_2 H(x - x_2) - K_3 H(x - x_3), \quad (3.64)$$

donde  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $x_2$  y  $x_3$  son constantes, además  $H(x - x_2)$  y  $H(x - x_3)$  son funciones tipo escalón definidas en (3.57).

En la Figura 3.9 se muestra la gráfica de la fuente (3.64), con los siguientes valores de los parámetros

$$K_1 = 0.2, \quad K_2 = 0.4, \quad K_3 = 0.3, \quad x_1 = -6, \quad x_2 = -4 \quad \text{y} \quad x_3 = -1.$$

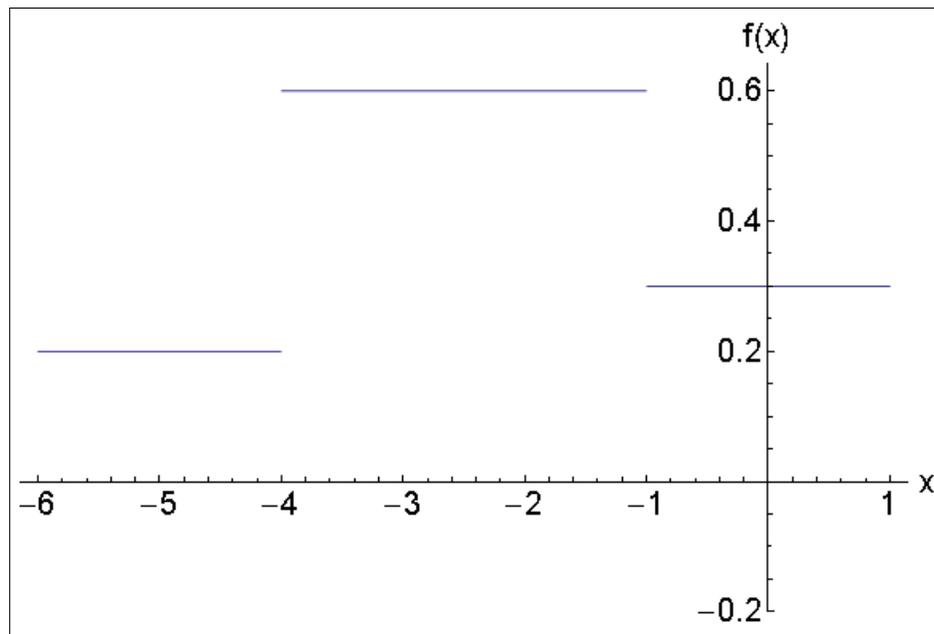


Figura 3.9: Gráfica de fuente tipo pulso rectangular.

Reemplazando (3.64) en la solución  $y(x)$  dada por (3.38), se tiene

$$\begin{aligned}
 y(x) = & \frac{d_2[B_i(x)A_i(x_1) - A_i(x)B_i(x_1)] - d_1[B_i(x)A_i'(x_1) - A_i(x)B_i'(x_1)]}{A_i(x)B_i'(x) - B_i(x)A_i'(x)} + \\
 & \frac{B_i(x)}{A_i(x)B_i'(x) - B_i(x)A_i'(x)} \times \\
 & \int_{x_1}^x [K_1 + K_2 H(x' - x_2) - K_3 H(x' - x_3)] A_i(x') dx' - \\
 & \frac{A_i(x)}{A_i(x)B_i'(x) - B_i(x)A_i'(x)} \times \\
 & \int_{x_1}^x [K_1 + K_2 H(x' - x_2) - K_3 H(x' - x_3)] B_i(x') dx'. \tag{3.65}
 \end{aligned}$$

Se calculan las integrales

$$\int_{x_1}^x [K_1 + K_2 H(x' - x_2) - K_3 H(x' - x_3)] A_i(x') dx' =$$

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 K_1 \int_{x_1}^x A_i(x') dx', & x' < x_2 \\
 K_1 \int_{x_1}^x A_i(x') dx' + K_2 \int_{x_2}^x A_i(x') dx', & x_2 < x' < x_3 \\
 K_1 \int_{x_1}^x A_i(x') dx' + K_2 \int_{x_2}^x A_i(x') dx' - \\
 K_3 \int_{x_3}^x A_i(x') dx' & x' > x_3
 \end{array} \right. ,$$

y

$$\int_{x_1}^x [K_1 + K_2 H(x' - x_2) - K_3 H(x' - x_3)] B_i(x') dx' = \begin{cases} K_1 \int_{x_1}^x B_i(x') dx', & x' < x_2 \\ K_1 \int_{x_1}^x B_i(x') dx' + K_2 \int_{x_2}^x B_i(x') dx', & x_2 < x' < x_3 \\ K_1 \int_{x_1}^x B_i(x') dx' + K_2 \int_{x_2}^x B_i(x') dx' - \\ K_3 \int_{x_3}^x B_i(x') dx' & x' > x_3 \end{cases}$$

Reemplazando los dos resultados anteriores en (3.65) se escribe

$$y(x) = \frac{d_2[B_i(x)A_i(x_1) - A_i(x)B_i(x_1)] - d_1[B_i(x)A_i'(x_1) - A_i(x)B_i'(x_1)]}{A_i(x)B_i'(x) - B_i(x)A_i'(x)} + \begin{cases} \frac{K_1}{A_i(x)B_i'(x) - B_i(x)A_i'(x)} [B_i(x)J_1 - A_i(x)J_2] & x < x_2 \\ \frac{B_i(x)}{A_i(x)B_i'(x) - B_i(x)A_i'(x)} [K_1J_1 + K_2J_3] - \\ \frac{A_i(x)}{A_i(x)B_i'(x) - B_i(x)A_i'(x)} [K_1J_2 + K_2J_4], & x_2 < x < x_3 \quad , \quad (3.66) \\ \frac{B_i(x)}{A_i(x)B_i'(x) - B_i(x)A_i'(x)} [K_1J_1 + K_2J_3 - K_3J_5] - \\ \frac{A_i(x)}{A_i(x)B_i'(x) - B_i(x)A_i'(x)} [K_1J_2 + K_2J_4 - K_3J_6], & x > x_3 \end{cases}$$

donde las integrales  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  y  $J_4$  están dados en las expresiones (3.52), (3.53), (3.62) y (3.63) respectivamente, las integrales  $J_5$  y  $J_6$  tienen la siguiente forma

$$J_5 = \int_{x_2}^x A_i(x') dx' = \frac{{}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x - {}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{x_2^3}{9}\right) x_2}{3^{2/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} + \frac{\sqrt[6]{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left[{}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x_3^3}{9}\right) x_3^2 - {}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x^2\right]}{4\pi}, \quad (3.67)$$

$$J_6 = \int_{x_2}^x B_i(x') dx' = \frac{{}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x - {}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{x_3^3}{9}\right) x_3}{\sqrt[6]{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} + \frac{\Gamma\left(\frac{-1}{3}\right) \left[{}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x_3^3}{9}\right) x_3^2 - {}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x^2\right]}{4\sqrt[3]{3} \pi}, \quad (3.68)$$

Para verificar que  $y(x)$  dada en (3.66) es la solución de la ecuación de Airy con fuente tipo pulso rectangular, se utiliza el programa Mathematica y se comprueba las siguientes propiedades:

- Satisface la ecuación diferencial con fuente tipo pulso rectangular

$$y''(x) - xy(x) = \begin{cases} K_1, & x < x_2 \\ K_1 + K_2, & x_2 < x < x_3 \\ K_1 + K_2 - K_3, & x > x_3 \end{cases} .$$

- Cumple las dos condiciones iniciales dadas en (3.1)

1.  $y(x_1) = d_1$ .

2.  $y'(x_1) = d_2$ .

En la Figura 3.10 se muestra la gráfica de la solución  $y(x)$  con fuente pulso rectangular, se asigna los siguientes valores

$$x_1 = -6, K_1 = 0.2, K_2 = 0.4, K_3 = 0.3,$$

$$x_2 = -4, x_3 = -1, d_1 = 0 \text{ y } d_2 = -1/10.$$

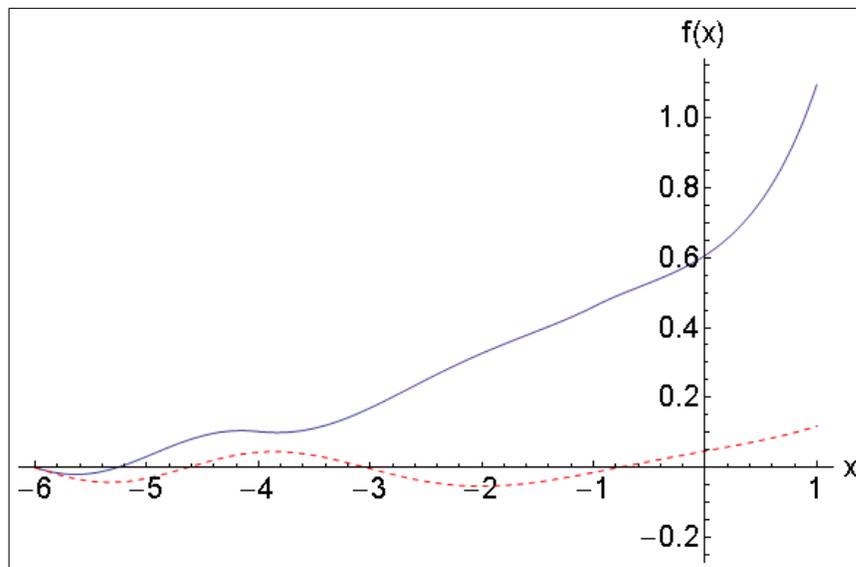


Figura 3.10: Gráfica de la solución  $y(x)$  del problema (3.1) producida por una fuente tipo pulso rectangular (línea azul), comparada con la solución de la ecuación de Airy sin fuentes (línea discontinua).

### 3.4.4 Fuente sinusoidal

Este tipo de fuente se expresa como

$$f(x) = C \sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right), \quad (3.69)$$

donde  $C$  y  $l$  son constantes. En la Figura 3.11 se muestra la gráfica de la fuente (3.69), con los siguientes valores de los parámetros  $C = 0.6$  y  $l = 3$ .

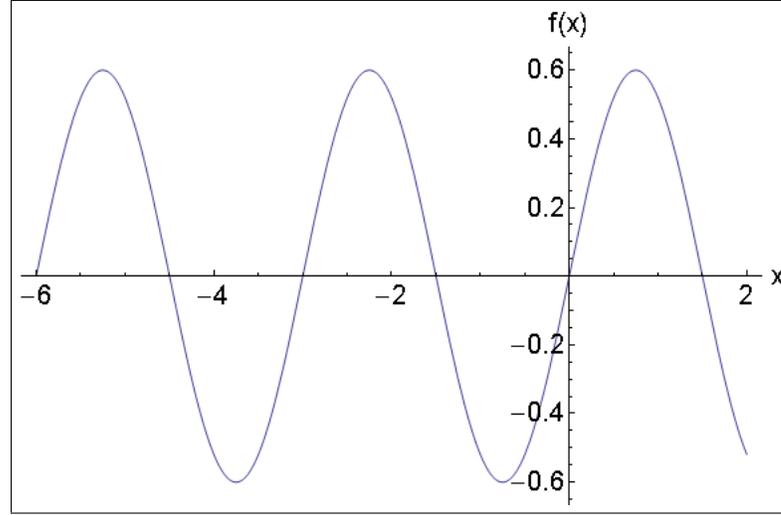


Figura 3.11: Gráfica de fuente sinusoidal.

Reemplazando (3.69) en la solución  $y(x)$  dada por (3.38), se tiene

$$y(x) = \frac{d_2[B_i(x)A_i(x_1) - A_i(x)B_i(x_1)] - d_1[B_i(x)A_i'(x_1) - A_i(x)B_i'(x_1)]}{A_i(x)B_i'(x) - B_i(x)A_i'(x)} +$$

$$\frac{B_i(x)}{A_i(x)B_i'(x) - B_i(x)A_i'(x)} \int_{x_1}^x C \sin\left(\frac{2\pi}{l}x'\right) A_i(x') dx' -$$

$$\frac{A_i(x)}{A_i(x)B_i'(x) - B_i(x)A_i'(x)} \int_{x_1}^x C \sin\left(\frac{2\pi}{l}x'\right) B_i(x') dx'. \quad (3.70)$$

Las integrales que aparecen en (3.70) no se pueden calcular analíticamente, ya que los integrandos  $\sin\left(\frac{2\pi}{l}x'\right) A_i(x')$  y  $\sin\left(\frac{2\pi}{l}x'\right) B_i(x')$  son funciones trascendentes y se resuelven numéricamente. Para verificar la solución  $y(x)$  obtenida en (3.70) es correcta, se utiliza el programa Mathematica y se comprueba las siguientes propiedades:

- Satisface la ecuación diferencial con fuente sinusoidal

$$y''(x) - xy(x) = C \sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right).$$

- Cumple las dos condiciones iniciales dadas en (3.1)

1.  $y(x_1) = d_1.$

2.  $y'(x_1) = d_2.$

Para graficar  $y(x)$  dada por (3.70) se utiliza integración numérica con ayuda del programa Mathematica, tomando el intervalo  $-6 < x < 1$  y los siguientes valores de los parámetros

$$x_1 = -6, d_1 = 0, d_2 = -1/10, C = 0.5 \text{ y } l = 3,$$

se obtienen los resultados que se muestran en la Tabla 3.1, la cual se grafica en la Figura 3.12

x	y(x)	x	y(x)	x	y(x)
-6	0	-3.6	-0.132986	-1.1	0.850211
-5.9	-0.009692	-3.5	-0.201825	-1	0.893333
-5.8	-0.0175812	-3.4	-0.268794	-0.9	0.922363
-5.7	-0.022036	-3.3	-0.331091	-0.8	0.93742
-5.6	-0.0217441	-3.2	-0.386006	-0.7	0.939043
-5.5	-0.0158177	-3.1	-0.431035	-0.6	0.928154
-5.4	-0.00387045	-3	-0.463982	-0.5	0.906013
-5.3	0.0139473	-2.9	-0.483049	-0.4	0.874165
-5.2	0.0369516	-2.8	-0.486904	-0.3	0.834374
-5.1	0.0639664	-2.7	-0.47473	-0.2	0.78856
-5	0.0933989	-2.6	-0.446258	-0.1	0.73873
-4.9	0.123341	-2.5	-0.40177	0	0.686911
-4.8	0.151694	-2.4	-0.342083	0.1	0.635082
-4.7	0.176299	-2.3	-0.268518	0.2	0.585124
-4.6	0.195076	-2.1	-0.087199	0.3	0.538759
-4.5	0.206154	-2	0.0159628	0.4	0.497519
-4.4	0.207991	-1.9	0.123992	0.5	0.462707
-4.3	0.199471	-1.8	0.234123	0.6	0.435384
-4.2	0.17998	-1.7	0.343573	0.7	0.416359
-4.1	0.14945	-1.6	0.449636	0.8	0.406196
-4	0.10838	-1.5	0.549774	0.9	0.405234
-3.9	0.0578217	-1.4	0.641691	1	0.413611
-3.8	-0.0006603	-1.3	0.723407		
-3.7	-0.0650541	-1.2	0.793314		

Tabla 3.1: Valores numéricos de la solución  $y(x)$  problema (3.1) con fuente sinusoidal.

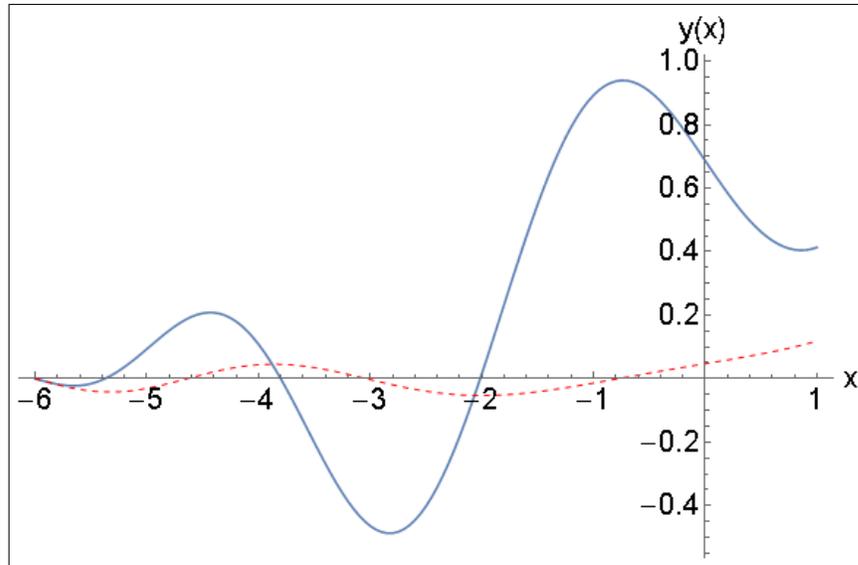


Figura 3.12: Gráfica de la solución  $y(x)$  del problema (3.1) producida por una fuente sinusoidal (línea azul), comparada con la solución de la ecuación de Airy sin fuentes (línea discontinua).

# Capítulo 4

## Solución de la ecuación de Airy inhomogénea con condiciones en la frontera

### 4.1 Formulación de problema

Se considera el problema formulado por las siguientes ecuaciones

$$y''(x) - xy(x) = f(x), \quad a < x < b, \tag{4.1}$$

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = d_1; \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = d_2,$$

en las cuales intervienen como parámetros constantes  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $d_1$  y  $d_2$ . Este problema está basado en la ecuación de Airy inhomogénea y la incógnita  $y(x)$  está sujeta a condiciones de frontera en dos puntos. Las condiciones de frontera son separadas, esto es, cada una afecta a un sólo punto de la frontera. Si por lo menos uno de los términos  $f(x)$ ,  $d_1$  y  $d_2$  es diferente de cero, el problema es inhomogéneo. La función  $f(x)$  representa una fuente externa y  $y(x)$  es la respuesta a dicha fuente.

A continuación se explica el método de la función de Green, aplicado a la solución del problema (4.1).

## 4.2 El método de la función de Green

### 4.2.1 Obtención de la ecuación diferencial para la función de Green

En el método de la función de Green la variable  $x$  en la ecuación de Airy (4.1) se renombra como  $x'$

$$y''(x') - x'y(x') = f(x'), \quad a < x' < b.$$

La ecuación anterior se multiplica por una función de Green  $G(x', x)$  por ahora desconocida, la cual depende de dos puntos  $x'$  y  $x$ . Luego se integra por  $x'$  entre  $a$  y  $b$

$$\int_a^b G(x', x) [y''(x') - x'y(x')] dx' = \int_a^b G(x', x) f(x') dx'. \quad (4.2)$$

Realizando integración por partes en el lado izquierdo de la ecuación (4.2) se tiene

$$\begin{aligned} & \left[ G(x', x) y'(x') - G_{x'}(x', x) y(x') \right] \Big|_{x'=a}^{x'=b} + \\ & \int_a^b y(x') [G_{x'x'}(x', x) - x'G(x', x)] dx' = \\ & \int_a^b G(x', x) f(x') dx'. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Para comenzar a determinar la función de Green  $G(x', x)$  asociada a la solución del problema (4.1), se exige que la integral del lado izquierdo de la ecuación (4.3) sea igual a  $y(x)$

$$y(x) = \int_a^b y(x') [G_{x'x'}(x', x) - x'G(x', x)] dx'. \quad (4.4)$$

De otra parte,  $y(x)$  se escribe como

$$y(x) = \int_a^b y(x') \delta(x' - x) dx'. \quad (4.5)$$

Comparando (4.4) con (4.5) se debe cumplir la siguiente ecuación

$$G_{x'x'}(x', x) - x'G(x', x) = \delta(x' - x), \quad a < x' < b, \quad (4.6)$$

donde  $G_{x'}$  y  $G_{x'x'}$  representa la primera y segunda derivada de  $G(x', x)$  con respecto a  $x'$ . Por lo tanto al reemplazar la ecuación (4.4) en (4.3) y despejando  $y(x)$  se obtiene

$$y(x) = - \left[ G(x', x) y'(x') - G_{x'}(x', x) y(x') \right] \Big|_{x'=a}^{x'=b} + \int_a^b G(x', x) f(x') dx'. \quad (4.7)$$

Esta es la expresión para  $y(x)$  en términos de la función de Green [9].

### 4.2.2 Condiciones de frontera para para la función de Green

A continuación se analizan los términos de frontera en (4.7)

$$\begin{aligned} & - [G(x', x) y'(x') - G_{x'}(x', x) y(x')] \Big|_{x'=a}^{x'=b} = \\ & - G(b, x) y'(b) + G_{x'}(b, x) y(b) + G(a, x) y'(a) - G_{x'}(a, x) y(a). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Se aplican en la ecuación (4.8) las condiciones de frontera dadas en la formulación del problema (4.1). Pueden darse los siguientes casos que se examinarán separadamente:

1.  $\alpha_1 \neq 0, \beta_1 \neq 0,$
2.  $\alpha_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0,$
3.  $\alpha_2 \neq 0, \beta_1 \neq 0,$
4.  $\alpha_2 \neq 0, \beta_2 \neq 0.$

**Caso 1:**  $\alpha_1 \neq 0, \beta_1 \neq 0.$  Se despeja  $y(a)$  y  $y(b)$  de (4.1)

$$y(a) = \frac{d_1 - \alpha_2 y'(a)}{\alpha_1},$$

$$y(b) = \frac{d_2 - \beta_2 y'(b)}{\beta_1}.$$

Reemplazando las expresiones anteriores en (4.8), se obtiene

$$\begin{aligned}
 & - [G(x', x) y'(x') - G_{x'}(x', x) y(x')] \Big|_{x'=a}^{x'=b} = \\
 & - \left\{ G(b, x) y'(b) - G_{x'}(b, x) \left[ \frac{d_2 - \beta_2 y'(b)}{\beta_1} \right] \right\} + \\
 & \left\{ G(a, x) y'(a) - G_{x'}(a, x) \left[ \frac{d_1 - \alpha_2 y'(a)}{\alpha_1} \right] \right\} = \\
 & - \left\{ y'(b) \left[ \frac{\beta_1 G(b, x) + \beta_2 G_{x'}(b, x)}{\beta_1} \right] - \frac{d_2}{\beta_1} G_{x'}(b, x) \right\} + \\
 & \left\{ y'(a) \left[ \frac{\alpha_1 G(a, x) + \alpha_2 G_{x'}(a, x)}{\alpha_1} \right] - \frac{d_1}{\alpha_1} G_{x'}(a, x) \right\}. \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

En (4.9) intervienen las cantidades  $y'(a)$  y  $y'(b)$  cuyos valores no se especifican en las condiciones de frontera (4.1) por lo tanto son desconocidas. Para eliminar éstas cantidades en (4.9) se imponen las siguientes condiciones sobre la función de Green

$$\beta_1 G(b, x) + \beta_2 G_{x'}(b, x) = 0, \tag{4.10}$$

$$\alpha_1 G(a, x) + \alpha_2 G_{x'}(a, x) = 0.$$

Aplicando (4.10) en (4.9), se obtiene

$$- [G(x', x) y_{x'}(x') - G_{x'}(x', x) y(x')] \Big|_{x'=a}^{x'=b} = \frac{d_2}{\beta_1} G_{x'}(b, x) - \frac{d_1}{\alpha_1} G_{x'}(a, x). \tag{4.11}$$

Reemplazando (4.11) en la ecuación (4.7), se tiene

$$y(x) = \frac{d_2}{\beta_1} G_{x'}(b, x) - \frac{d_1}{\alpha_1} G_{x'}(a, x) + \int_a^b G(x', x) f(x') dx'. \tag{4.12}$$

Esta es la solución del problema (4.1) para el caso 1 donde  $\alpha_1 \neq 0$  y  $\beta_1 \neq 0$ , en términos de la función de Green  $G(x', x)$ , la cual se determina resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (4.6) y (4.10).

**Caso 2:**  $\alpha_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0$ . Se despeja  $y(a)$  y  $y'(b)$  de (4.1)

$$y(a) = \frac{d_1 - \alpha_2 y'(a)}{\alpha_1},$$

$$y'(b) = \frac{d_2 - \beta_1 y(b)}{\beta_2}.$$

Reemplazando las expresiones anteriores en (4.8), se obtiene

$$\begin{aligned} & - [G(x', x) y'(x') - G_{x'}(x', x) y(x')] \Big|_{x'=a}^{x'=b} = \\ & - \left\{ G(b, x) \left[ \frac{d_2 - \beta_1 y(b)}{\beta_2} \right] - G_{x'}(b, x) y(b) \right\} + \\ & \left\{ G(a, x) y'(a) - G_{x'}(a, x) \left[ \frac{d_1 - \alpha_2 y'(a)}{\alpha_1} \right] \right\} = \\ & - \left\{ -y(b) \left[ \frac{\beta_1 G(b, x) + \beta_2 G_{x'}(b, x)}{\beta_2} \right] + \frac{d_2}{\beta_2} G_{x'}(b, x) \right\} + \\ & \left\{ y'(a) \left[ \frac{\alpha_1 G(a, x) + \alpha_2 G_{x'}(a, x)}{\alpha_1} \right] - \frac{d_1}{\alpha_1} G_{x'}(a, x) \right\}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

En (4.13) intervienen las cantidades  $y(b)$  y  $y'(a)$  cuyos valores no se especifican en las condiciones de frontera (4.1) por lo tanto son desconocidas. Para eliminar éstas cantidades en (4.13) se imponen las siguientes condiciones sobre la función de Green

$$\beta_1 G(b, x) + \beta_2 G_{x'}(b, x) = 0, \quad (4.14)$$

$$\alpha_1 G(a, x) + \alpha_2 G_{x'}(a, x) = 0.$$

Aplicando (4.14) en (4.9), se obtiene

$$- [G(x', x) y'(x') - G_{x'}(x', x) y(x')] \Big|_{x'=a}^{x'=b} = -\frac{d_2}{\beta_2} G(b, x) - \frac{d_1}{\alpha_1} G_{x'}(a, x). \quad (4.15)$$

Reemplazando (4.15) en la ecuación (4.7),  $y(x)$  se expresa como

$$y(x) = -\frac{d_2}{\beta_2} G(b, x) - \frac{d_1}{\alpha_1} G_{x'}(a, x) + \int_a^b G(x', x) f(x') dx'. \quad (4.16)$$

Esta es la solución del problema (4.1) para el caso 2 donde  $\alpha_1 \neq 0$  y  $\beta_2 \neq 0$ , en términos de la función de Green  $G(x', x)$ , la cual se determina resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (4.6) y (4.14).

**Caso 3:**  $\alpha_2 \neq 0, \beta_1 \neq 0$ . Se despeja  $y'(a)$  y  $y(b)$  de (4.1)

$$y'(a) = \frac{d_1 - \alpha_1 y(a)}{\alpha_2},$$

$$y(b) = \frac{d_2 - \beta_2 y'(b)}{\beta_1}.$$

Reemplazando las expresiones anteriores en (4.8) se obtiene

$$\begin{aligned} & - [G(x', x) y'(x') - G_{x'}(x', x) y(x')] \Big|_{x'=a}^{x'=b} = \\ & - \left\{ G(b, x) y'(b) - G_{x'}(b, x) \left[ \frac{d_2 - \beta_2 y'(b)}{\beta_2} \right] \right\} + \\ & \left\{ G(a, x) \left[ \frac{d_1 - \alpha_1 y(a)}{\alpha_2} \right] - G_{x'}(a, x) y(a) \right\} = \\ & - \left\{ y'(b) \left[ \frac{\beta_1 G(b, x) + \beta_2 G_{x'}(b, x)}{\beta_1} \right] - \frac{d_2}{\beta_1} G_{x'}(b, x) \right\} + \\ & \left\{ -y(a) \left[ \frac{G_{x'}(a, x) + \alpha_1 G(a, x)}{\alpha_2} \right] + \frac{d_1}{\alpha_2} G(a, x) \right\} \end{aligned} \quad (4.17)$$

En (4.17) intervienen las cantidades  $y'(b)$  y  $y(a)$  cuyos valores no se especifican en las condiciones de frontera (4.1) por lo tanto son desconocidas. Para eliminar éstas cantidades en (4.17) se imponen las siguientes condiciones sobre la función de Green

$$\beta_1 G(b, x) + \beta_2 G_{x'}(b, x) = 0, \quad (4.18)$$

$$\alpha_1 G(a, x) + \alpha_2 G_{x'}(a, x) = 0.$$

Aplicando (4.18) en (4.9), se obtiene

$$- [G(x', x) y'(x') - G_{x'}(x', x) y(x')] \Big|_{x'=a}^{x'=b} = -\frac{d_2}{\beta_1} G_{x'}(b, x) - \frac{d_1}{\alpha_2} G(a, x). \quad (4.19)$$

Reemplazando (4.19) en la ecuación (4.7),  $y(x)$  se expresa como

$$y(x) = -\frac{d_2}{\beta_1} G_{x'}(b, x) - \frac{d_1}{\alpha_2} G(a, x) + \int_a^b G(x', x) f(x') dx'. \quad (4.20)$$

Esta es la solución del problema (4.1) para el caso 3 donde  $\alpha_2 \neq 0$  y  $\beta_1 \neq 0$ , en términos de la función de Green  $G(x', x)$ , la cual se determina resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (4.6) y (4.18).

**Caso 4:**  $\alpha_2 \neq 0, \beta_2 \neq 0$ . Se despeja  $y'(a)$  y  $y'(b)$  de (4.1)

$$y'(a) = \frac{d_1 - \alpha_1 y(a)}{\alpha_2},$$

$$y'(b) = \frac{d_2 - \beta_1 y(b)}{\beta_2}.$$

Reemplazando las expresiones anteriores en (4.8) se obtiene

$$\begin{aligned} & - [G(x', x) y'(x') - G_{x'}(x', x) y(x')] \Big|_{x'=a}^{x'=b} = \\ & - \left\{ G(b, x) \left[ \frac{d_2 - \beta_1 y(b)}{\beta_2} \right] - G_{x'}(b, x) y(b) \right\} + \\ & \left\{ G(a, x) \left[ \frac{d_1 - \alpha_1 y(a)}{\alpha_2} \right] - G_{x'}(a, x) y(a) \right\} = \\ & - \left\{ -y(b) \left[ G_{x'}(b, x) + \frac{\beta_1}{\beta_2} G(b, x) \right] + \frac{d_2}{\beta_2} G(b, x) \right\} + \\ & \left\{ -y(a) \left[ G_{x'}(a, x) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} G(a, x) \right] + \frac{d_1}{\alpha_2} G(a, x) \right\} \end{aligned} \quad (4.21)$$

En (4.21) intervienen las cantidades  $y(b)$  y  $y(a)$  cuyos valores no se especifican en las condiciones de frontera (4.1) por lo tanto son desconocidas. Para eliminar éstas cantidades en (4.21) se imponen las siguientes condiciones sobre la función de Green

$$\beta_1 G(b, x) + \beta_2 G_{x'}(b, x) = 0, \quad (4.22)$$

$$\alpha_1 G(a, x) + \alpha_2 G_{x'}(a, x) = 0.$$

Aplicando (4.22) en (4.9), se obtiene

$$- [G(x', x) y'(x') - G_{x'}(x', x) y(x')] \Big|_{x'=a}^{x'=b} = -\frac{d_2}{\beta_2} G(b, x) - \frac{d_1}{\alpha_2} G(a, x). \quad (4.23)$$

Reemplazando (4.23) en (4.7),  $y(x)$  se simplifica así

$$y(x) = -\frac{d_2}{\beta_2} G(b, x) - \frac{d_1}{\alpha_2} G(a, x) + \int_a^b G(x', x) f(x') dx'. \quad (4.24)$$

Esta es la solución del problema (4.1) para el caso 4 donde  $\alpha_2 \neq 0$  y  $\beta_2 \neq 0$ , en términos de la función de Green  $G(x', x)$ , la cual se determina resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (4.6) y (4.22).

Examinando los resultados anteriores se concluye que tanto la ecuación diferencial (4.6) como las condiciones de frontera (4.10), (4.14), (4.18) y (4.22) para la función de Green son comunes para los 4 casos examinados. Por lo tanto la función de Green es la misma para todos los casos y se rige por las ecuaciones

$$G_{x'x'}(x', x) - x'G(x', x) = \delta(x' - x), \quad a < x' < b,$$

$$\beta_1 G(b, x) + \beta_2 G_{x'}(b, x) = 0, \quad (4.25)$$

$$\alpha_1 G(a, x) + \alpha_2 G_{x'}(a, x) = 0.$$

Analizando las expresiones (4.12), (4.16), (4.20) y (4.24) para  $y(x)$  se observa que se diferencian en los términos de frontera [10].

### 4.2.3 Determinación de la función de Green

A continuación se resuelve el problema (4.25) con respecto a la función de Green. Teniendo en cuenta que en la ecuación diferencial que aparece en (4.25) interviene la función delta de Dirac  $\delta(x' - x)$  la cual presenta una singularidad en el punto  $x' = x$  ( $\delta(0) = \infty$ ). Es conveniente dividir el intervalo  $a < x' < b$  en dos subintervalos:  $a < x' < x$  y  $x < x' < b$ , excepto en el punto  $x' = x$ . En cada subintervalo se tiene  $\delta(x' - x)|_{x' \neq x} = 0$ , entonces la ecuación diferencial en (4.25) se reduce a

$$G_{x'x'}(x', x) - x'G(x', x) = 0, \quad \text{para } x' \neq x. \quad (4.26)$$

La solución general de la ecuación diferencial de Airy homogénea dada en (4.26) es

$$G(x', x) = \begin{cases} C_1 A_i(x') + C_2 B_i(x'), & a < x' < x \\ C_3 A_i(x') + C_4 B_i(x'), & x < x' < b, \end{cases} \quad (4.27)$$

donde  $A_i(x')$  y  $B_i(x')$  son las funciones de Airy, que son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea (4.26) y  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  son cantidades constantes con respecto a la variable  $x'$ . Para determinar éstas cantidades se utilizan las condiciones de frontera del problema (4.25), con este fin se escriben las siguientes expresiones

$$G(a, x) = C_1 A_i(a) + C_2 B_i(a), \quad G(b, x) = C_3 A_i(b) + C_4 B_i(b),$$

$$G_{x'}(a, x) = C_1 A'_i(a) + C_2 B'_i(a), \quad G_{x'}(b, x) = C_3 A'_i(b) + C_4 B'_i(b).$$

Con base en las expresiones anteriores las condiciones de frontera en (4.25) se reescriben como

$$[\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A'_i(a)] C_1 + [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B'_i(a)] C_2 = 0, \quad (4.28)$$

$$[\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A'_i(b)] C_3 + [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B'_i(b)] C_4 = 0. \quad (4.29)$$

Las ecuaciones (4.28) y (4.29) son insuficientes para determinar las cantidades  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$ . Se necesitan de otras dos ecuaciones que se obtienen examinando el comportamiento de la función de Green  $G(x', x)$  en el punto  $x' = x$  y así poder completar la definición de la función de Green en todo el intervalo  $a < x' < b$ . Con este fin se integran los dos lados de la ecuación diferencial en (4.25) sobre un intervalo infinitesimal alrededor del punto  $x' = x$ , es decir, en el intervalo  $x^- < x' < x^+$

$$\int_{x^-}^{x^+} G_{x'x'}(x', x) dx' - \int_{x^-}^{x^+} x' G(x', x) dx' = \int_{x^-}^{x^+} \delta(x' - x) dx'. \quad (4.30)$$

En (4.30) intervienen las siguientes integrales:

1.  $\int_{x^-}^{x^+} G_{x'x'}(x', x) dx'$ .
2.  $\int_{x^-}^{x^+} x'G(x', x) dx'$ .
3.  $\int_{x^-}^{x^+} \delta(x' - x) dx'$ .

El resultado de la primera integral es

$$\begin{aligned} \int_{x^-}^{x^+} G_{x'x'}(x', x) dx' &= G_{x'}(x', x) \Big|_{x'=x^-}^{x'=x^+} \\ &= G_{x'}(x^+, x) - G_{x'}(x^-, x). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Para calcular la segunda integral se adiciona una nueva condición a la función de Green  $G(x', x)$  que sea continua en el punto  $x' = x$ , es decir

$$G_{x'}(x^+, x) = G_{x'}(x^-, x), \quad (4.32)$$

con esta condición, la segunda integral es igual a cero ya que el integrando  $x'G(x', x)$  es continuo y se integra en un intervalo infinitesimal donde el área bajo la curva es cero

$$\int_{x^-}^{x^+} x'G(x', x) dx' = 0. \quad (4.33)$$

Finalmente, la tercera integral debido a las propiedades que posee la función delta de Dirac  $\delta(x' - x)$ , ésta es igual a 1

$$\int_{x^-}^{x^+} \delta(x' - x) dx' = 1. \quad (4.34)$$

Reemplazando los resultados (4.31), (4.33) y (4.34) en (4.30), se tiene

$$G_{x'}(x^+, x) - G_{x'}(x^-, x) = 1. \quad (4.35)$$

La ecuación (4.35) representa una condición que debe satisfacer la función de Green  $G(x', x)$ . Teniendo en cuenta (4.27) la ecuación (4.35), se reescribe

$$A'_i(x) C_1 + B'_i(x) C_2 - A'_i(x) C_3 - B'_i(x) C_4 = -1. \quad (4.36)$$

Finalmente la condición de continuidad de la función de Green  $G(x', x)$  en  $x' = x$  dada por (4.32), con base a (4.27) adquiere la forma

$$A_i(x) C_1 + B_i(x) C_2 - A_i(x) C_3 - B_i(x) C_4 = 0. \quad (4.37)$$

Con los resultados obtenidos en (4.28), (4.29), (4.36) y (4.37) se completa el sistema de cuatro ecuaciones necesarias para encontrar las cantidades  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$ , presentes en la función de Green  $G(x', x)$  dada en (4.27). Por lo tanto el sistema a resolver es el siguiente

$$\begin{aligned} [\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A'_i(a)] C_1 + [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B'_i(a)] C_2 &= 0, \\ [\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A'_i(b)] C_3 + [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B'_i(b)] C_4 &= 0, \\ A'_i(x) C_1 + B'_i(x) C_2 - A'_i(x) C_3 - B'_i(x) C_4 &= -1, \\ A_i(x) C_1 + B_i(x) C_2 - A_i(x) C_3 - B_i(x) C_4 &= 0. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Se aplica la regla de Cramer del álgebra lineal a la solución del sistema (4.38) [12]. Si  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  es un sistema de ecuaciones,  $\mathbf{A}$  es la matriz de coeficientes del sistema,  $\mathbf{x} = (C_1, C_2, C_3, C_4)$  es el vector columna de las incógnitas, y  $\mathbf{b}$  es el vector columna de los términos independientes, entonces la solución al sistema se presenta así

$$C_j = \frac{\det(\mathbf{A}_j)}{\det(\mathbf{A})}, \quad j = 1, 2, 3 \text{ y } 4 \tag{4.39}$$

donde  $\mathbf{A}_j$  es la matriz resultante de reemplazar la  $j$ -ésima columna de  $\mathbf{A}$  por el vector columna  $\mathbf{b}$ . Además el determinante de la matriz  $\mathbf{A}$  debe ser diferente de cero.

Se comienza escribiendo el sistema (4.38) en forma matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.40}$$

donde

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a), & a_{21} &= 0, \\
 a_{12} &= \alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a), & a_{22} &= 0, \\
 a_{13} &= 0, & a_{23} &= \beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b), \\
 a_{14} &= 0, & a_{24} &= \beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b), \\
 \\ 
 a_{31} &= A_i'(x), & a_{41} &= A_i(x), \\
 a_{32} &= B_i'(x), & a_{42} &= B_i(x), \\
 a_{33} &= -A_i'(x), & a_{43} &= -A_i(x), \\
 a_{34} &= -B_i'(x), & a_{44} &= -B_i(x).
 \end{aligned}$$

Con base a la ecuación (4.39) las cantidades  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  que son funciones de  $x$ , tienen la forma

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{\det(\mathbf{A}_1)}{\det(\mathbf{A})} \\
 &= \left[ \alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a) \right] \left\{ -B_i(x) \left[ \beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b) \right] + \right. \\
 &\quad \left. A_i(x) \left[ \beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b) \right] \right\} / \left[ A_i'(x) B_i(x) - A_i(x) B_i'(x) \right] \times \\
 &\quad \left\{ \beta_1 A_i(b) \left[ \alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a) \right] + \beta_2 A_i'(b) \left[ \alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \left[ \alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a) \right] \left[ \beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b) \right] \right\}, \tag{4.41}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_2 &= \frac{\det(\mathbf{A}_2)}{\det(\mathbf{A})} \\
 &= \left[ \alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a) \right] \left\{ B_i(x) \left[ \beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b) \right] - \right. \\
 &\quad \left. A_i(x) \left[ \beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b) \right] \right\} / \left[ A_i'(x) B_i(x) - A_i(x) B_i'(x) \right] \times \\
 &\quad \left\{ \beta_1 A_i(b) \left[ \alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a) \right] + \beta_2 A_i'(b) \left[ \alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \left[ \alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a) \right] \left[ \beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b) \right] \right\}, \tag{4.42}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_3 &= \frac{\det(\mathbf{A}_3)}{\det(\mathbf{A})} \\
 &= \left[ \beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b) \right] \left\{ - B_i(x) \left[ \alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a) \right] + \right. \\
 &\quad \left. A_i(x) \left[ \alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a) \right] \right\} / \left[ A_i'(x) B_i(x) - A_i(x) B_i'(x) \right] \times \\
 &\quad \left\{ \beta_1 A_i(b) \left[ \alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a) \right] + \beta_2 A_i'(b) \left[ \alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \left[ \alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a) \right] \left[ \beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b) \right] \right\}, \tag{4.43}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_4 &= \frac{\det(\mathbf{A}_4)}{\det(\mathbf{A})} \\
 &= \left[ \beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b) \right] \left\{ B_i(x) \left[ \alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a) \right] - \right. \\
 &\quad \left. A_i(x) \left[ \alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a) \right] \right\} / \left[ A_i'(x) B_i(x) - A_i(x) B_i'(x) \right] \times \\
 &\quad \left\{ \beta_1 A_i(b) \left[ \alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a) \right] + \beta_2 A_i'(b) \left[ \alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \left[ \alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a) \right] \left[ \beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b) \right] \right\}. \tag{4.44}
 \end{aligned}$$

Con los resultados de las cantidades  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$ ,  $C_3(x)$  y  $C_4(x)$  dadas por las ecuaciones (4.41), (4.42), (4.43) y (4.44) respectivamente, se procede a reemplazarlos en (4.27) para la función de Green  $G(x', x)$

$$G(x', x) = \begin{cases} h_1(x) \left\{ \left[ \alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a) \right] A_i(x') - \right. \\ \quad \left. \left[ \alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a) \right] B_i(x') \right\} & a < x' < x \\ \\ h_2(x) \left\{ \left[ \beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b) \right] A_i(x') - \right. \\ \quad \left. \left[ \beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b) \right] B_i(x') \right\} & x < x' < b \end{cases}, \tag{4.45}$$

donde  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son constantes dadas en (4.1). además  $h_1(x)$  y  $h_2(x)$  son funciones

que dependen de  $x$  y tienen la forma

$$\begin{aligned}
 h_1(x) = & \left\{ A_i(x) \left[ \beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b) \right] - B_i(x) \left[ \beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b) \right] \right\} / \\
 & \left[ A_i'(x) B_i(x) - A_i(x) B_i'(x) \right] \left\{ \beta_1 A_i(b) \left[ \alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a) \right] + \right. \\
 & \left. + \beta_2 A_i'(b) \left[ \alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a) \right] - \left[ \alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a) \right] \times \right. \\
 & \left. \left[ \beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b) \right] \right\}, \tag{4.46}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_2(x) = & \left\{ A_i(x) \left[ \alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a) \right] - B_i(x) \left[ \alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a) \right] \right\} / \\
 & \left[ A_i'(x) B_i(x) - A_i(x) B_i'(x) \right] \left\{ \beta_1 A_i(b) \left[ \alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a) \right] + \right. \\
 & \left. + \beta_2 A_i'(b) \left[ \alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a) \right] - \left[ \alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a) \right] \times \right. \\
 & \left. \left[ \beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b) \right] \right\}. \tag{4.47}
 \end{aligned}$$

La ecuación (4.45) es la función de Green asociada al problema (4.25) con valores en la frontera, la cual satisface la ecuación diferencial homogénea (4.26), las condiciones de frontera presentes en (4.25), la condición de continuidad (4.32) y la condición de discontinuidad de su primera derivada (4.35) [1, 10].

En la Figura 4.1 se muestra la gráfica de la función de Green y de su primera derivada con los siguientes parámetros

$$x = 0, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 0, \beta_1 = 8, \beta_2 = -1, a = -5 \text{ y } b = 5.$$

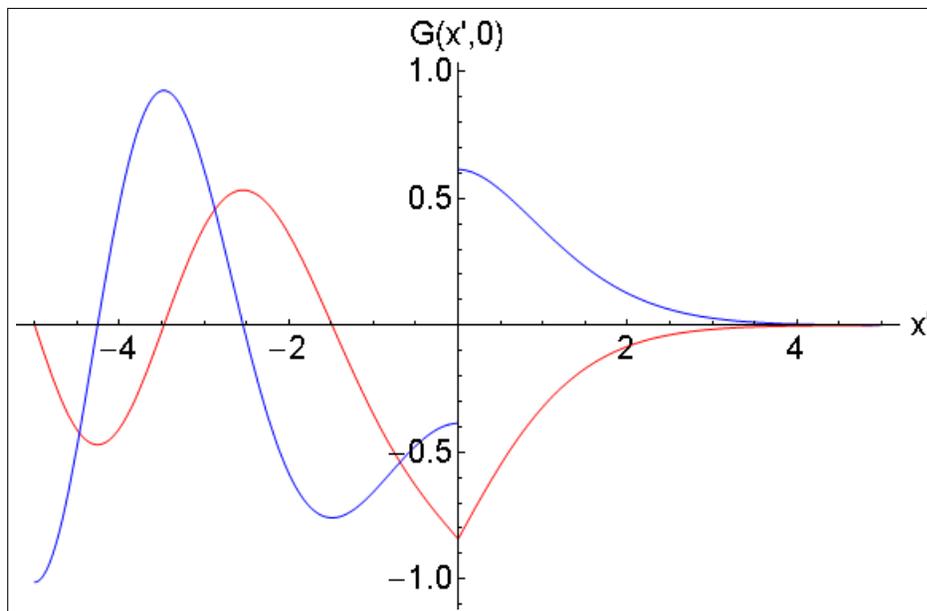


Figura 4.1: Gráfica de  $G(x', x)$  (línea roja) y  $G_{x'}(x', x)$  (línea azul) para  $x = 0$ .

#### 4.2.4 Solución del problema (4.1) en términos de $G(x', x)$

Resumiendo los resultados (4.12), (4.16), (4.20) y (4.24), la solución del problema con valores en la frontera (4.1) se escribe así

$$y(x) = \begin{cases} \frac{d_2}{\beta_1} G_{x'}(b, x) - \frac{d_1}{\alpha_1} G_{x'}(a, x), & \alpha_1 \neq 0, \beta_1 \neq 0 \\ -\frac{d_2}{\beta_2} G(b, x) - \frac{d_1}{\alpha_1} G_{x'}(a, x), & \alpha_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0 \\ -\frac{d_2}{\beta_1} G_{x'}(b, x) - \frac{d_1}{\alpha_2} G(a, x), & \alpha_2 \neq 0, \beta_1 \neq 0 \\ -\frac{d_2}{\beta_2} G(b, x) - \frac{d_1}{\alpha_2} G(a, x), & \alpha_2 \neq 0, \beta_2 \neq 0 \end{cases} +$$

$$\begin{aligned} & h_1(x)[\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] \int_a^x A_i(x') f(x') dx' - \\ & h_1(x)[\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a)] \int_a^x B_i(x') f(x') dx' + \\ & h_2(x)[\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b)] \int_x^b A_i(x') f(x') dx' - \\ & h_2(x)[\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b)] \int_x^b B_i(x') f(x') dx', \end{aligned} \quad (4.48)$$

donde

$$G(a, x) = \left\{ [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] A_i(a) - [\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a)] B_i(a) \right\} h_1(x),$$

$$G(b, x) = \left\{ [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b)] A_i(b) - [\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b)] B_i(b) \right\} h_2(x),$$

(4.49)

$$G_{x'}(a, x) = \left\{ [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] A_i'(a) - [\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a)] B_i'(a) \right\} h_1(x),$$

$$G_{x'}(b, x) = \left\{ [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b)] A_i'(b) - [\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b)] B_i'(b) \right\} h_2(x).$$

En (4.48) intervienen las funciones de Airy. Esta expresión es válida para cualquier fuente  $f(x)$  que es el término inhomogéneo de la ecuación diferencial de Airy del problema (4.1),

siempre y cuando existan todas las integrales que intervienen en (4.48). La fórmula (4.48) se aplicará a la solución del problema (4.1) considerando separadamente el caso cuando la ecuación de Airy es homogénea ( $f(x) = 0$ ), y el caso cuando la ecuación de Airy es inhomogénea ( $f(x) \neq 0$ ).

### 4.3 Ecuación de Airy homogénea

El este caso se plantea el siguiente problema

$$y''(x) - xy(x) = 0, \quad a < x < b, \quad (4.50)$$

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = d_1, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = d_2,$$

donde  $a, b, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, d_1$  y  $d_2$  son constantes conocidas. En lo sucesivo se considera el caso cuando  $\alpha_1 \neq 0$  y  $\beta_1 \neq 0$ .

La solución de la ecuación diferencial en (4.50) se obtiene mediante el uso de la fórmula (4.48) para  $y(x)$  en términos de la función de Green. teniendo en cuenta que  $f(x)$  es igual a cero, la expresión (4.48) se reduce a

$$y(x) = \frac{d_2}{\beta_1} G_{x'}(b, x) - \frac{d_1}{\alpha_1} G_{x'}(a, x). \quad (4.51)$$

Remplazando (4.49) para las expresiones  $G_{x'}(b, x)$  y  $G_{x'}(a, x)$  en (4.51) se tiene

$$y(x) = \frac{d_2}{\beta_1} \left\{ [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b)] A_i'(b) - [\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b)] B_i'(b) \right\} h_2(x) - \frac{d_1}{\alpha_1} \left\{ [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] A_i'(a) - [\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a)] B_i'(a) \right\} h_1(x), \quad (4.52)$$

donde  $a, b, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, d_1$  y  $d_2$  son parámetros constantes,  $h_1(x)$  y  $h_2(x)$  están dados en (4.46) y (4.47) respectivamente. En (4.52) intervienen las funciones de Airy y sus primeras derivadas evaluadas en  $a$  y  $b$ .

En la Figura 4.2 se presenta la gráfica de la solución  $y(x)$  (4.52) del problema (4.50), para los siguientes valores de los parámetros

$$a = -5, \quad b = 5, \quad \alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 0, \quad d_1 = -5, \quad \beta_1 = 8, \quad \beta_2 = -1, \quad \text{y} \quad d_2 = 1.$$

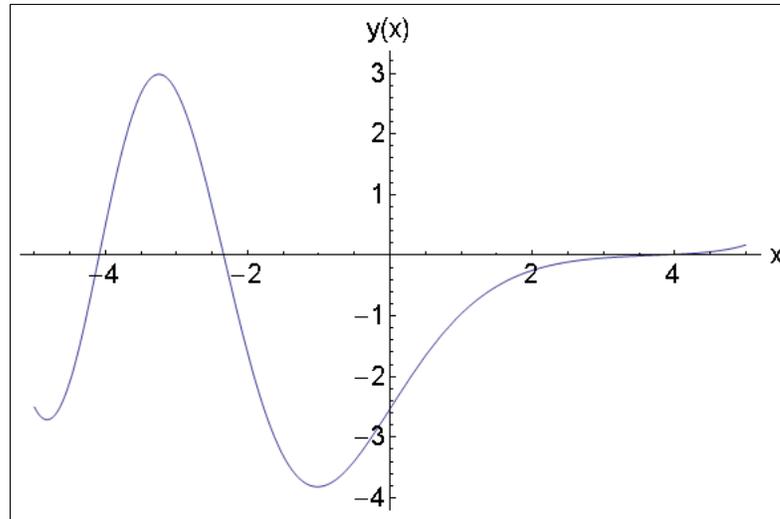


Figura 4.2: Gráfica de la solución  $y(x)$  para la ecuación de Airy homogénea.

La solución (4.52) del problema (4.50), servirá de referencia cuando se resuelva el problema (4.1) basado en la ecuación de Airy con fuente.

## 4.4 Ecuación de Airy inhomogénea

A continuación se aplican diferentes fuentes ( $f(x) \neq 0$ ) a la solución  $y(x)$ , cuando  $\alpha_1 \neq 0$  y  $\beta_1 \neq 0$ .

### 4.4.1 Fuente constante

Este tipo de fuente se expresa como

$$f(x) = K, \tag{4.53}$$

donde  $K$  es una constante. En la Figura 4.3 se muestra la gráfica de una fuente constante  $K = 3$ .

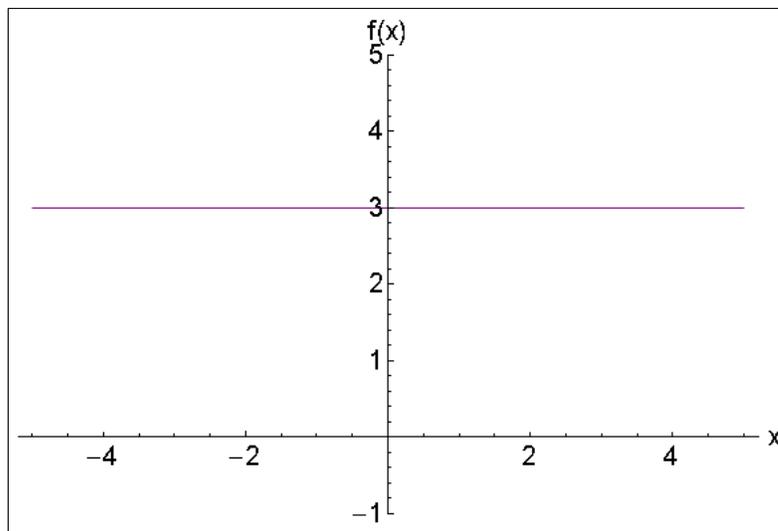


Figura 4.3: Gráfica de una fuente constante  $K = 3$ .

Reemplazando (4.53) en (4.48), se tiene

$$y(x) = \frac{d_2}{\beta_1} \left\{ [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b)] A_i'(b) - [\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b)] B_i'(b) \right\} h_2(x) -$$

$$\frac{d_1}{\alpha_1} \left\{ [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] A_i'(a) - [\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a)] B_i'(a) \right\} h_1(x) +$$

$$h_1(x) K \left\{ [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] \int_a^x A_i(x') dx' -$$

$$[\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a)] \int_a^x B_i(x') dx' \right\} +$$

$$h_2(x) K \left\{ [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b)] \int_x^b A_i(x') dx' -$$

$$[\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b)] \int_x^b B_i(x') dx' \right\},$$

(4.54)

donde  $a, b, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, d_1$  y  $d_2$  son parámetros constantes,  $h_1(x)$  y  $h_2(x)$  están dados en (4.46) y (4.47) respectivamente. En (4.54) aparecen cuatro integrales las cuales se resuelven con el programa Mathematica y se presentan a continuación

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_a^x A_i(x') dx' \\
 &= \frac{{}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x - {}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{a^3}{9}\right) a}{3^{2/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} + \\
 &\quad \frac{\sqrt[6]{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left[{}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{a^3}{9}\right) a^2 - {}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x^2\right]}{4\pi}, \tag{4.55}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_a^x B_i(x') dx' \\
 &= \frac{{}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x - {}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{a^3}{9}\right) a}{\sqrt[6]{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} + \\
 &\quad \frac{\Gamma\left(\frac{-1}{3}\right) \left[{}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{a^3}{9}\right) a^2 - {}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x^2\right]}{4\sqrt[3]{3} \pi}, \tag{4.56}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_x^b A_i(x') dx' \\
 &= \frac{{}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{b^3}{9}\right) b - {}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x}{3^{2/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} + \\
 &\quad \frac{\sqrt[6]{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left[{}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x^2 - {}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{b^3}{9}\right) b^2\right]}{4\pi}, \tag{4.57}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \int_x^b B_i(x') dx' \\
 &= \frac{{}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{b^3}{9}\right) b - {}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x}{\sqrt[6]{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} + \\
 &\quad \frac{\Gamma\left(\frac{-1}{3}\right) \left[{}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x^2 - {}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{b^3}{9}\right) b^2\right]}{4\sqrt[3]{3} \pi}. \tag{4.58}
 \end{aligned}$$

En (4.55), (4.56), (4.57), y (4.58) intervienen la función gamma y las series hipergeométricas definidas en (3.54) y (3.55) respectivamente.

Para verificar la solución  $y(x)$  en (4.54), se utilizó el programa Mathematica y se comprobaron las siguientes propiedades:

1. Satisface la ecuación diferencial de Airy con fuente constante

$$y''(x) - xy(x) = K.$$

2. Cumple las dos condiciones en la frontera dadas en (4.1)

- $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = d_1.$
- $\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = d_2.$

En la Figura 4.4 se muestra la gráfica de la solución  $y(x)$  con fuente constante, asignando los siguientes valores

$$a = -5, b = 5, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 0, d_1 = -5, \beta_1 = 8, \beta_2 = -1, \text{ y } d_2 = 1.$$

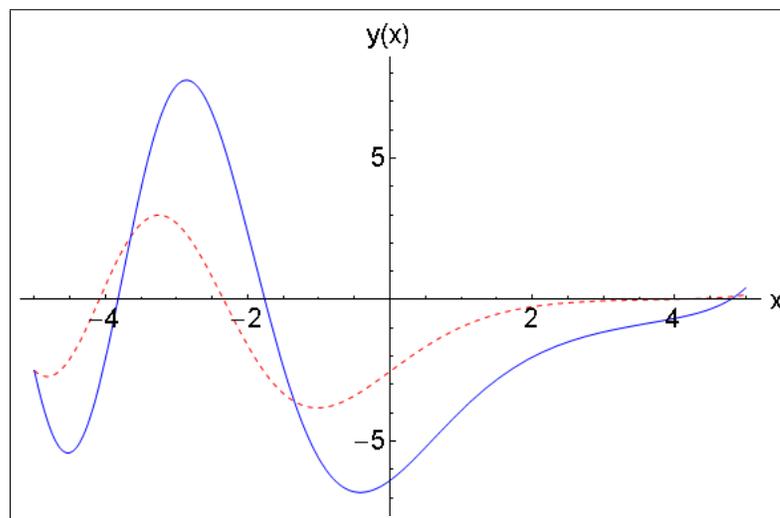


Figura 4.4: Gráfica de la solución  $y(x)$  del problema (4.1) producida por una fuente constante  $K = 3$  (línea azul), comparada con la solución de la ecuación de Airy sin fuentes (línea discontinua).

### 4.4.2 Fuente tipo función escalón

Este tipo de fuente se expresa como

$$f(x) = K_1 + K_2 H(x - x_1), \quad (4.59)$$

donde  $K_1$ ,  $K_2$  y  $x_1$  son constantes y  $H(x - x_1)$  es la función escalón definida así

$$H(x - x_1) = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ 1, & x > x_1. \end{cases} \quad (4.60)$$

En la Figura 4.5 se muestra la gráfica de la fuente (4.59), con los siguientes valores de los parámetros

$$K_1 = 3, \quad K_2 = 4 \text{ y } x_1 = 0.$$

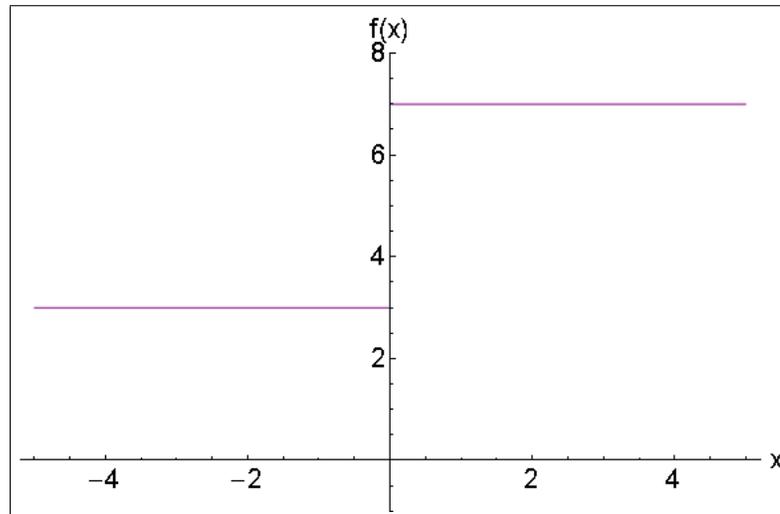


Figura 4.5: Gráfica de fuente tipo función escalón.

Reemplazando (4.59) en la solución  $y(x)$  dada por (4.48), se tiene

$$\begin{aligned}
 y(x) = & \frac{d_2}{\beta_1} \left\{ [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B'_i(b)] A'_i(b) - [\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A'_i(b)] B'_i(b) \right\} h_2(x) - \\
 & \frac{d_1}{\alpha_1} \left\{ [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B'_i(a)] A'_i(a) - [\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A'_i(a)] B'_i(a) \right\} h_1(x) + \\
 & h_1(x) \left\{ [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B'_i(a)] \int_a^x A_i(x') [K_1 + K_2 H(x' - x_1)] dx' - \right. \\
 & \left. [\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A'_i(a)] \int_a^x B_i(x') [K_1 + K_2 H(x' - x_1)] dx' \right\} + \\
 & h_2(x) \left\{ [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B'_i(b)] \int_x^b A_i(x') [K_1 + K_2 H(x' - x_1)] dx' - \right. \\
 & \left. [\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A'_i(b)] \int_x^b B_i(x') [K_1 + K_2 H(x' - x_1)] dx' \right\}. \quad (4.61)
 \end{aligned}$$

Se calculan las integrales

$$\int_a^x [K_1 + K_2 H(x' - x_1)] A_i(x') dx' = \begin{cases} K_1 \int_a^x A_i(x') dx', & x' < x_1 \\ K_1 \int_a^x A_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^x A_i(x') dx', & x' > x_1 \end{cases},$$

$$\int_a^x [K_1 + K_2 H(x' - x_1)] B_i(x') dx' = \begin{cases} K_1 \int_a^x B_i(x') dx', & x' < x_1 \\ K_1 \int_a^x B_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^x B_i(x') dx', & x' > x_1 \end{cases},$$

$$\int_x^b [K_1 + K_2 H(x' - x_1)] A_i(x') dx' = \begin{cases} K_1 \int_x^b A_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^b A_i(x') dx', & x' < x_1 \\ K_1 \int_x^b A_i(x') dx' + K_2 \int_x^{x_1} A_i(x') dx', & x' > x_1 \end{cases},$$

y

$$\int_x^b [K_1 + K_2 H(x' - x_1)] B_i(x') dx' = \begin{cases} K_1 \int_x^b B_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^b B_i(x') dx', & x' < x_1 \\ K_1 \int_x^b B_i(x') dx' + K_2 \int_x^{x_1} B_i(x') dx', & x' > x_1 \end{cases}.$$

Reemplazando los cuatro resultados anteriores en (4.61), se escribe

$$\begin{aligned}
 y(x) = & \frac{d_2}{\beta_1} \left\{ [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b)] A_i'(b) - [\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b)] B_i'(b) \right\} h_2(x) - \\
 & \frac{d_1}{\alpha_1} \left\{ [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] A_i'(a) - [\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a)] B_i'(a) \right\} h_1(x) + \\
 & \left\{ \begin{array}{l}
 h_{11}(x) K_1 \int_a^x A_i(x') dx' - h_{12}(x) K_1 \int_a^x B_i(x') dx' + \\
 h_{21}(x) \left[ K_1 \int_x^b A_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^b A_i(x') dx' \right] - \\
 h_{22}(x) \left[ K_1 \int_x^b B_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^b B_i(x') dx' \right], \quad x < x_1 \\
 \\
 h_{11}(x) \left[ K_1 \int_a^x A_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^x A_i(x') dx' \right] - \\
 h_{12}(x) \left[ K_1 \int_a^x B_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^x B_i(x') dx' \right] + \\
 h_{21}(x) \left[ K_1 \int_x^b A_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^b A_i(x') dx' \right] - \\
 h_{22}(x) \left[ K_1 \int_x^b B_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^b B_i(x') dx' \right], \quad x > x_1
 \end{array} \right. , \quad (4.62)
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 h_{11}(x) &= [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] h_1(x), \\
 h_{12}(x) &= [\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a)] h_1(x), \\
 h_{21}(x) &= [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b)] h_2(x), \\
 h_{22}(x) &= [\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b)] h_2(x).
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

En (4.62) aparecen nuevamente las integrales  $I_1, I_2, I_3$  y  $I_4$  dadas en (4.55), (4.56), (4.57) y (4.58), respectivamente, e intervienen cuatro integrales más que se presentan a continuación

$$\begin{aligned}
 I_5 &= \int_{x_1}^x A_i(x') dx' \\
 &= \frac{{}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x - {}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{x_1^3}{9}\right) x_1}{3^{2/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} + \\
 &\quad \frac{\sqrt[6]{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left[{}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x_1^3}{9}\right) x_1^2 - {}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x^2\right]}{4\pi}, \tag{4.64}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_6 &= \int_{x_1}^x B_i(x') dx' \\
 &= \frac{{}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x - {}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{x_1^3}{9}\right) x_1}{\sqrt[6]{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} + \\
 &\quad \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right) \left[{}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x_1^3}{9}\right) x_1^2 - {}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x^2\right]}{4\sqrt[3]{3} \pi}, \tag{4.65}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_7 &= \int_{x_1}^b A_i(x') dx' \\
 &= \frac{{}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{b^3}{9}\right) b - {}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{x_1^3}{9}\right) x_1}{3^{2/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} + \\
 &\quad \frac{\sqrt[6]{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left[{}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x_1^3}{9}\right) x_1^2 - {}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{b^3}{9}\right) b^2\right]}{4\pi}, \tag{4.66}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_8 &= \int_{x_1}^b B_i(x') dx' \\
 &= \frac{{}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{b^3}{9}\right) b - {}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x}{\sqrt[6]{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} + \\
 &\quad \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right) \left[{}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{x^3}{9}\right) x^2 - {}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{b^3}{9}\right) b^2\right]}{4\sqrt[3]{3} \pi}. \tag{4.67}
 \end{aligned}$$

Para verificar la solución  $y(x)$  en (4.62), se utilizó el programa Mathematica y se comprobaron las siguientes propiedades:

1. Satisface la ecuación diferencial de Airy con fuente función de paso

$$y''(x) - xy(x) = \begin{cases} K_1, & x < x_1 \\ K_1 + K_2, & x > x_1 \end{cases}.$$

2. Cumple las dos condiciones en la frontera dadas en (3.1)

- $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = d_1.$
- $\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = d_2.$

En la Figura 4.6 se muestra la gráfica de la solución  $y(x)$  con fuente función escalón, asignando los siguientes valores

$$a = -5, b = 5, x_1 = 0, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 0, d_1 = -5, \beta_1 = 8, \beta_2 = -1, \text{ y } d_2 = 1.$$

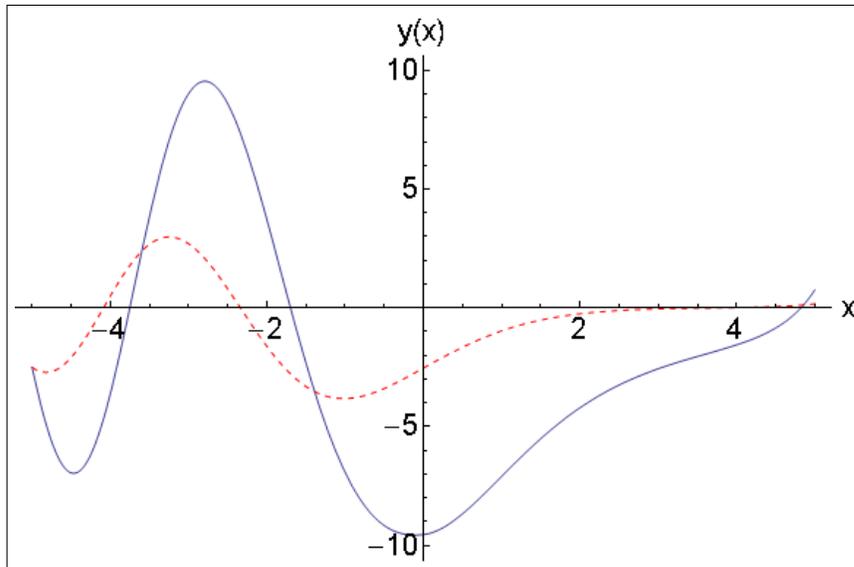


Figura 4.6: Gráfica de la solución  $y(x)$  del problema (4.1) producida por una fuente de la forma función de paso (línea azul), comparada con la solución de la ecuación de Airy sin fuentes (línea discontinua).

### 4.4.3 Fuente pulso rectangular

Este tipo de fuente se expresa como

$$f(x) = K_1 + K_2 H(x - x_1) - K_3 H(x - x_2), \quad (4.68)$$

donde  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $x_1$  y  $x_2$  son constantes, además  $H(x - x_1)$  y  $H(x - x_2)$  son funciones tipo escalón definidas en (4.60).

En la Figura 4.7 se muestra la gráfica de la fuente (4.68), con los siguientes valores de los parámetros

$$K_1 = 3, K_2 = 4, K_3 = 5, x_1 = -2 \text{ y } x_2 = 2.$$

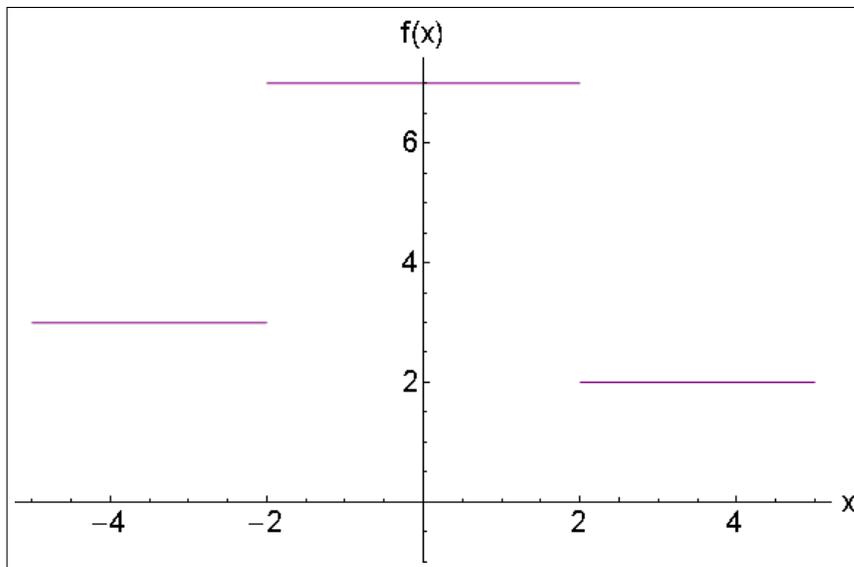


Figura 4.7: Gráfica de fuente tipo pulso rectangular.

Reemplazando (4.68) en la solución  $y(x)$  dada por (4.48), se tiene

$$\begin{aligned}
 y(x) = & \frac{d_2}{\beta_1} \left\{ [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b)] A_i'(b) - [\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b)] B_i'(b) \right\} h_2(x) - \\
 & \frac{d_1}{\alpha_1} \left\{ [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] A_i'(a) - [\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a)] B_i'(a) \right\} h_1(x) + \\
 & h_{11}(x) \int_a^x A_i(x') [K_1 + K_2 H(x' - x_1) - K_3 H(x' - x_2)] dx' - \\
 & h_{12}(x) \int_a^x B_i(x') [K_1 + K_2 H(x' - x_1) - K_3 H(x' - x_2)] dx' + \\
 & h_{21}(x) \int_x^b A_i(x') [K_1 + K_2 H(x' - x_1) - K_3 H(x' - x_2)] dx' - \\
 & h_{22}(x) \int_x^b B_i(x') [K_1 + K_2 H(x' - x_1) - K_3 H(x' - x_2)] dx', \quad (4.69)
 \end{aligned}$$

donde  $h_{11}(x)$ ,  $h_{12}(x)$ ,  $h_{21}(x)$  y  $h_{22}(x)$  están dados en (4.63). Se calculan las integrales

$$\int_a^x [K_1 + K_2 H(x' - x_1) - K_3 H(x' - x_2)] A_i(x') dx' = \begin{cases} K_1 \int_a^x A_i(x') dx', & a < x' < x_1 \\ K_1 \int_a^x A_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^x A_i(x') dx', & x_1 < x' < x_2 \\ K_1 \int_a^x A_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^{x_2} A_i(x') dx' - K_3 \int_{x_2}^b A_i(x') dx', & x_2 < x' < b \end{cases} ,$$

$$\int_a^x [K_1 + K_2 H(x' - x_1) - K_3 H(x' - x_2)] B_i(x') dx' = \begin{cases} K_1 \int_a^x B_i(x') dx', & a < x' < x_1 \\ K_1 \int_a^x B_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^x B_i(x') dx', & x_1 < x' < x_2 \\ K_1 \int_a^x B_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^{x_2} B_i(x') dx' - K_3 \int_{x_2}^x B_i(x') dx', & x_2 < x' < b \end{cases} ,$$

$$\int_x^b [K_1 + K_2 H(x' - x_1) - K_3 H(x' - x_2)] A_i(x') dx' = \begin{cases} K_1 \int_x^b A_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^{x_2} A_i(x') dx' - K_3 \int_{x_2}^b A_i(x') dx', & a < x' < x_1 \\ K_1 \int_x^b A_i(x') dx' + K_2 \int_x^{x_2} A_i(x') dx' - K_3 \int_{x_2}^b A_i(x') dx', & x < x' < x_2 \\ K_1 \int_a^x A_i(x') dx' - K_3 \int_x^b A_i(x') dx', & x_2 < x' < b \end{cases} ,$$

y

$$\int_x^b [K_1 + K_2 H(x' - x_1) - K_3 H(x' - x_2)] B_i(x') dx' = \begin{cases} K_1 \int_x^b A_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^{x_2} A_i(x') dx' - K_3 \int_{x_2}^b A_i(x') dx', & a < x' < x_1 \\ K_1 \int_x^b A_i(x') dx' + K_2 \int_x^{x_2} A_i(x') dx' - K_3 \int_{x_2}^b A_i(x') dx', & x < x' < x_2 \\ K_1 \int_a^x A_i(x') dx' - K_3 \int_x^b A_i(x') dx', & x_2 < x' < b \end{cases} .$$

Reemplazando los cuatro resultados anteriores en (4.69), se tiene

$$\begin{aligned}
 y(x) = & \frac{d_2}{\beta_1} \left\{ [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b)] A_i'(b) - [\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b)] B_i'(b) \right\} h_2(x) - \\
 & \frac{d_1}{\alpha_1} \left\{ [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] A_i'(a) - [\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a)] B_i'(a) \right\} h_1(x) + \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 & h_{11}(x) K_1 \int_a^x A_i(x') dx' - h_{12}(x) K_1 \int_a^x B_i(x') dx' + \\
 & h_{21}(x) \left[ K_1 \int_x^b A_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^{x_2} A_i(x') dx' - K_3 \int_{x_2}^b A_i(x') dx' \right] - \\
 & h_{22}(x) \left[ K_1 \int_x^b B_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^{x_2} B_i(x') dx' - K_3 \int_{x_2}^b B_i(x') dx' \right], \quad a < x < x_1 \\
 & h_{11}(x) \left[ K_1 \int_a^x A_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^x A_i(x') dx' \right] - \\
 & h_{12}(x) \left[ K_1 \int_a^x B_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^x B_i(x') dx' \right] + \\
 & h_{21}(x) \left[ K_1 \int_x^b A_i(x') dx' + K_2 \int_x^{x_2} A_i(x') dx' - K_3 \int_{x_2}^b A_i(x') dx' \right] - \\
 & h_{22}(x) \left[ K_1 \int_x^b B_i(x') dx' + K_2 \int_x^{x_2} B_i(x') dx' - K_3 \int_{x_2}^b B_i(x') dx' \right], \quad x_1 < x < x_2 \\
 & h_{11}(x) \left[ K_1 \int_a^x A_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^{x_2} A_i(x') dx' - K_3 \int_{x_2}^b A_i(x') dx' \right] \\
 & h_{12}(x) \left[ K_1 \int_a^x B_i(x') dx' + K_2 \int_{x_1}^{x_2} B_i(x') dx' - K_3 \int_{x_2}^b B_i(x') dx' \right] - \\
 & h_{21}(x) \left[ K_1 \int_x^b A_i(x') dx' + K_3 \int_x^b A_i(x') dx' \right] - \\
 & h_{22}(x) \left[ K_1 \int_x^b B_i(x') dx' - K_3 \int_x^b B_i(x') dx' \right], \quad x_2 < x < b
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}
 \tag{4.70}$$

Las integrales que intervienen en (4.70) se resuelven análogamente a las expresiones (4.55), (4.56), (4.57), (4.58), (4.64), (4.65), (4.66) y (3.67). Para verificar la solución  $y(x)$  en (4.70),

con ayuda del programa Mathematica se comprobaron las propiedades:

1. Satisface la ecuación diferencial de Airy con fuente tipo pulso rectangular

$$y''(x) - xy(x) = \begin{cases} K_1, & x < x_1 \\ K_1 + K_2, & x_1 < x < x_2 \\ K_1 + K_2 - K_3, & x > x_2 \end{cases} .$$

2. Cumple las dos condiciones en la frontera dadas en (4.1)

- $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = d_1$ .
- $\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = d_2$ .

En la Figura 4.8 se muestra la gráfica de la solución  $y(x)$  con fuente pulso rectangular, se asigna los siguientes valores

$$a = -5, b = 5, x_1 = -2, x_2 = 2, \alpha_1 = 2, \\ \alpha_2 = 0, d_1 = -5, \beta_1 = 8, \beta_2 = -1, \text{ y } d_2 = 1.$$

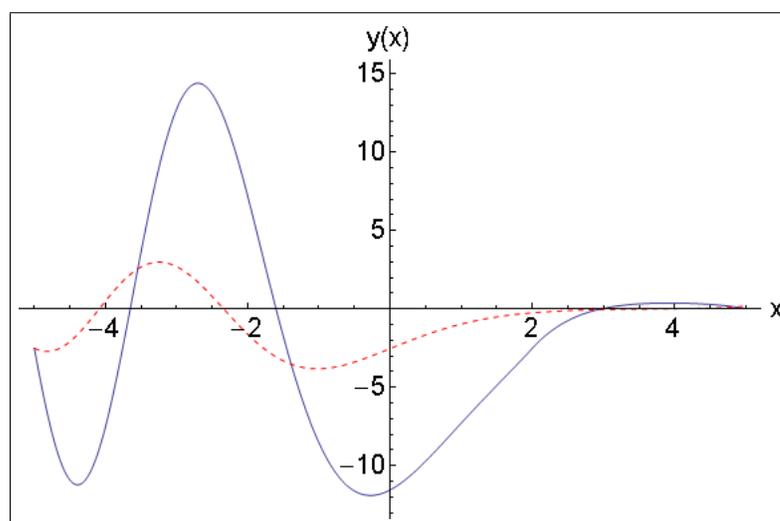


Figura 4.8: Gráfica de la solución  $y(x)$  del problema (4.1) producida por una fuente tipo pulso rectangular (línea azul), comparada con la solución de la ecuación de Airy sin fuentes (línea discontinua).

#### 4.4.4 Fuente sinusoidal

Este tipo de fuente se expresa como

$$f(x) = C \sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right), \quad (4.71)$$

donde  $C$  y  $l$  son constantes.

En la Figura 4.9 se muestra la gráfica de la fuente (4.71), con los siguientes valores de los parámetros  $C = 5$  y  $l = 2$ .

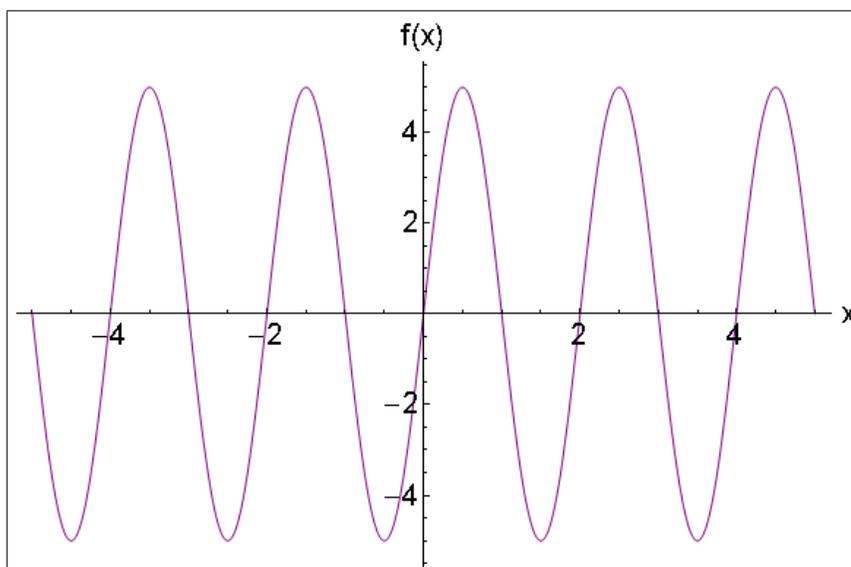


Figura 4.9: Gráfica de fuente sinusoidal.

Reemplazando (4.71) en la solución  $y(x)$  dada por (4.48), se tiene

$$\begin{aligned}
 y(x) = & \frac{d_2}{\beta_1} \left\{ [\beta_1 B_i(b) + \beta_2 B_i'(b)] A_i'(b) - [\beta_1 A_i(b) + \beta_2 A_i'(b)] B_i'(b) \right\} h_2(x) - \\
 & \frac{d_1}{\alpha_1} \left\{ [\alpha_1 B_i(a) + \alpha_2 B_i'(a)] A_i'(a) - [\alpha_1 A_i(a) + \alpha_2 A_i'(a)] B_i'(a) \right\} h_1(x) + \\
 & h_{11}(x) \int_a^x C A_i(x') \sin\left(\frac{2\pi}{l} x'\right) dx' - h_{12}(x) \int_a^x C B_i(x') \sin\left(\frac{2\pi}{l} x'\right) dx' + \\
 & h_{21}(x) \int_x^b C A_i(x') \sin\left(\frac{2\pi}{l} x'\right) dx' - h_{22}(x) \int_x^b C B_i(x') \sin\left(\frac{2\pi}{l} x'\right) dx', \quad (4.72)
 \end{aligned}$$

donde  $h_{11}(x)$ ,  $h_{12}(x)$ ,  $h_{21}(x)$  y  $h_{22}(x)$  están dados en (4.63).

Las integrales que aparecen en (4.72) no se pueden calcular analíticamente, ya que los integrandos  $\sin\left(\frac{2\pi}{l} x'\right) A_i(x')$  y  $\sin\left(\frac{2\pi}{l} x'\right) B_i(x')$  son funciones trascendentes y se resuelven numéricamente. Para verificar la solución obtenida en (4.72) es correcta, se utiliza el programa Mathematica y se comprueba las siguientes propiedades:

1. Satisface la ecuación diferencial con fuente sinusoidal

$$y''(x) - xy(x) = C \sin\left(\frac{2\pi}{l} x\right)$$

2. Cumple las dos condiciones iniciales dadas en (4.1)

- $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = d_1.$
- $\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = d_2.$

Para graficar  $y(x)$  dada por (4.72) se utiliza integración numérica con ayuda del programa Mathematica, tomando el intervalo  $-5 < x < 5$  y los siguientes valores de los parámetros

$$\begin{aligned}
 a = -5, \quad b = 5, \quad C = 5, \quad l = 2, \quad \alpha_1 = 2, \\
 \alpha_2 = 0, \quad d_1 = -5, \quad \beta_1 = 8, \quad \beta_2 = -1, \quad \text{y } d_2 = 1.
 \end{aligned}$$

se obtienen los resultados que se muestran en la Tabla 4.1, la cual se grafica en la Figura 4.10

x	y(x)	x	y(x)	x	y(x)
-5	-2.5	-1.7	-3.01531	1.6	0.00773882
-4.9	-2.35735	-1.6	-3.3814	1.7	0.00282227
-4.8	-2.11489	-1.5	-3.64641	1.8	-0.0422269
-4.7	-1.80031	-1.4	-3.8073	1.9	-0.11724
-4.6	-1.44135	-1.3	-3.86786	2	-0.209847
-4.5	-1.06325	-1.2	-3.83812	2.1	-0.306673
-4.4	-0.686837	-1.1	-3.73324	2.2	-0.394616
-4.3	-0.327237	-1	-3.572	2.3	-0.462067
-4.2	0.0064665	-0.9	-3.37503	2.4	-0.499979
-4.1	0.310907	-0.8	-3.16299	2.5	-0.502659
-4	0.58742	-0.7	-2.95476	2.6	-0.468236
-3.9	0.840558	-0.6	-2.76592	2.7	-0.398738
-3.8	1.07634	-0.5	-2.60761	2.8	-0.299807
-3.7	1.30044	-0.4	-2.4858	2.9	-0.180054
-3.6	1.5166	-0.3	-2.40119	3	-0.0501537
-3.5	1.72539	-0.2	-2.34947	3.1	0.0782604
-3.4	1.92344	-0.1	-2.32219	3.2	0.193763
-3.3	2.10334	0	-2.30791	3.3	0.286274
-3.2	2.25406	0.1	-2.29363	3.4	0.348041
-3.1	2.36193	0.2	-2.26631	3.5	0.374384
-3	2.41207	0.3	-2.21437	3.6	0.364135
-2.9	2.39003	0.4	-2.12893	3.7	0.319725
-2.8	2.28355	0.5	-2.00481	3.8	0.246926
-2.7	2.08417	0.6	-1.84108	3.9	0.154286
-2.6	1.78858	0.7	-1.6412	4	0.0522919
-2.5	1.39947	0.8	-1.41262	4.1	-0.0476208
-2.4	0.925884	0.9	-1.16615	4.2	-0.134131
-2.3	0.38297	1	-0.914804	4.3	-0.197057
-2.2	-0.208873	1.1	-0.672571	4.4	-0.22823
-2.1	-0.825325	1.2	-0.453044	4.5	-0.222148
-2	-1.43988	1.3	-0.268102	4.6	-0.176318
-1.9	-2.02578	1.4	-0.126785	4.7	-0.0912742
-1.8	-2.55804	1.5	-0.0344439	4.8	0.0297577

Tabla 4.1: Valores numéricos de la solución  $y(x)$  problema (4.1) con fuente sinusoidal.

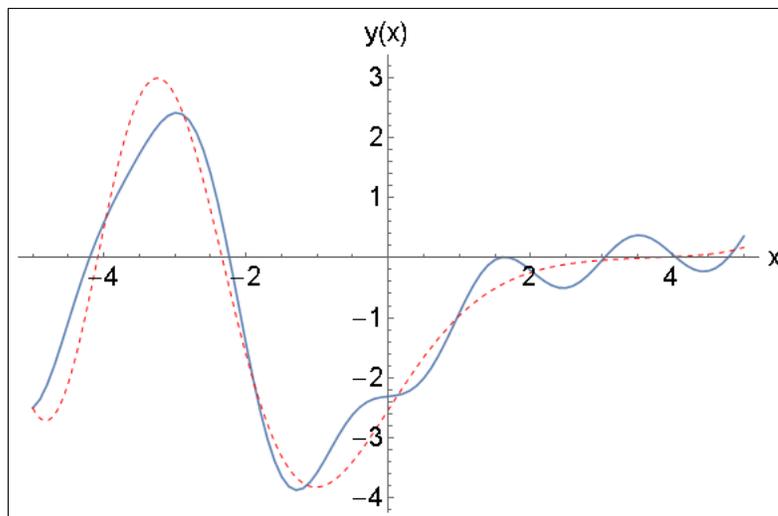


Figura 4.10: Gráfica de la solución  $y(x)$  del problema (4.1) producida por una fuente sinusoidal (línea azul), comparada con la solución de la ecuación de Airy sin fuentes (línea discontinua).

# Capítulo 5

## Conclusiones

- En este trabajo se implementó el método de la función de Green aplicado a la solución de una clase de problemas con valores en la frontera basados en la ecuación de Airy inhomogénea (con fuentes).
- El conocimiento de la función de Green asociada a esta clase de problemas permite construir soluciones para diversas fuentes.
- El método de la función de Green facilita la construcción numérica de soluciones cuando no es posible la construcción de soluciones analíticas.
- El método de la función de Green y el método de las funciones propias son las dos aproximaciones fundamentales que se aplican en la solución de esta clase de problemas.
- Los resultados de este trabajo se pueden aplicar a ecuaciones diferenciales que mediante un cambio de variable se reduce a la ecuación de Airy

# Bibliografía

- [1] Olivier Vallée and Manuel Soares (2004), "Airy functions and applications to physics", Imperial College Press, London.
- [2] Roach, G.F., Green's Functions, Cambridge University Press, Great Britain, 2th edition, 1982.
- [3] Abramowitz, M. and Stegun, I. (1965). Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, New York.
- [4] Crandal R.E. (1996). On the quantum zeta function, J. Phys. A:Math. Gen. 29, pp. 6795-6816.
- [5] Miller, J.C.P. (1946). The Airy Integral, British Assoc. Adv. Sci. Mathematical Tables, Part-Volume B, Cambridge University Press, London.
- [6] Olver, F.W.J. (1974). Asymptotics and special functions, Academic Press, New York.
- [7] Reid, W.H. (1995). Integral representations for products of Airy functions, ZAMP 46, pp. 159-170.
- [8] Copson, E.T. (1967). Asymptotic expansions, Cambridge University Press.
- [9] Kademova Krasimira, Matemática Avanzada para Físicos e Ingenieros. Parte I. Universidad Industrial de Santander.1980
- [10] Álvaro Rugeles. Funciones de Green aplicadas a la solución de ecuaciones diferenciales no homogéneas de segundo orden con condiciones de frontera, Universidad de Nariño,2013.
- [11] Polyanin, A. D.Handbook of exact solutions for ordinary differential equations / Andrei D. Polyanin, Valentin F. Zaitsev.-2nd ed.2003

- [12] Boyce. DiPrima, Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera.  
Limusa Wiley. 2012