Матеріали наукової конференції Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, Тернопіль, 2019

УДК 539.3

О. Самборська, канд. фіз.– мат. наук, доц.
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ЗАСТОСУВАННЯ РЯДІВ ФУР'Є З ЦИЛІНДРИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ В ЗАДАЧАХ ПРО ВТРАТУ СТІЙКОСТІ ВОЛОКНИСТИХ КОМПОЗИТІВ

O. Samborska Ph.D., Assoc.Prof.

APPLICATION OF FOURIER SERIES WITH CYLINDRICAL FUNCTIONS IN PROBLEMS OF BUCKLING OF FIBROUS COMPOSITES

Розглядається задача про втрату стійкості композиту з періодичним рядом циліндричних анізотропних волокон. Припускається, що на поверхнях розділу середовищ усі сили та зміщення неперервні.

Згідно з тривимірною лінеаризованою теорією стійкості деформівних тіл, складові зміщень виражаються через функції ψ і χ:

$$u_r=\frac{i}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}-\frac{\partial^2\chi}{\partial r\partial z},\quad u_\theta=-\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\chi}{\partial\theta\partial r},\ u_z=\mathrm{A}\left(\Delta+\mathrm{B}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\chi \qquad (1)$$

Функції φ і χ є розв'язками наступних рівнянь:

$$\left(\Delta+\zeta_1^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi=0,\ \left(\Delta^2+\left(\zeta_2^2+\zeta_3^2\right)\Delta\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\zeta_2^2\ \zeta_3^2\ \frac{\partial^4}{\partial z^4}\right)\chi=0, \qquad (2)$$

Ці функції φ та χ шукаємо у вигляді рядів Фур'є з циліндричними функціями.

Для модифікованої функції Бесселя $I_\nu(x)$ та функції Макдональда $K_\nu(x)$ справджуються такі асимптотичні формули:

$$\mathrm{I}_\nu(x)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^x,\ \mathrm{K}_\nu(x)\approx\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\ e^{-x}.$$

Оскільки розв'язки рівнянь (2) для матриці повинні задовольняти умови згасання на "нескінченності", то для нескінченної матриці застосовують ряди Фур'є з функціями Макдональда, а для волокон – з модифікованими функціями Бесселя.

Запишемо, наприклад, вирази для функцій $\chi_s\,(s=2,3)$ для матриці та для волокна з номером q у випадку втрати стійкості у площині волокон.

$$\chi_s=\sum_{P=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{K}_n\left(\varsigma_s\gamma r_p\right)\cos n\theta_p\left(\mathrm{A}_{1n,s}^{p}\cos\gamma z_p+\mathrm{A}_{2n,s}^{p}\sin\gamma z_p\right), \qquad (3)$$

$$\chi_s^{(1)q}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{I}_n\left(\varsigma_s^{(1)}\gamma\, r_q\right)\cos n\,\theta_q\left(\mathrm{A}_{1n,s}^{(1)q}\cos\gamma z_q+\mathrm{A}_{2n,s}^{(1)q}\sin\gamma z_q\right).$$

Оскільки для розв'язків повинні виконуватись умови періодичності, то достатньо задовольнити граничні умови на контурі лише одного волокна, наприклад, при $q=0$. Для визначення невідомих коефіцієнтів, які входять у вирази (3), отримаємо нескінченну однорідну систему лінійних рівнянь, яка має ненульові розв'язки тоді і тільки тоді, коли її визначник $\Delta=0$.

Доведено, що в одержаному характеристичному рівнянні нескінченний визначник можна замінити скінченним визначником деякого порядку.