Матеріали наукової конференції Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, Тернопіль, 2019

УДК 537.8, 539.3

О. Король, Б. Береженко, О. Гурик к.т.н., доцент
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ОСТИГАННЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ДЕТАЛІ ПІСЛЯ ІНДУКЦІЙНОГО НАГРІВАННЯ

O. Korol, B. Berezhenko, O. Huryk, Ph.D., Assoc. Prof.

BUILDING MATHEMATICAL MODEL FOR THE OPERATION OF CYLINDRICAL PARAMETER AFTER INDUCTION HEATING

Розроблено математичну модель остигання по всій робочій поверхні деталі циліндричної форми, після заливання розплавленого металу в технологічний тигель. Охолодження буде проходити від 1600°С до 20°С. Причому при 1450°С – 1600°С як залитий рідкий метал, так і підготовлений на границі між ними основний метал будуть в рідкому стані та в сумі рідкого металу й аустеніту, тобто будуть створені умови для їх взаємного перемішування та дифузії, що сприятиме їх дійсному з’єднанню.

За допомогою розробленої математичної моделі проведено дослідження залежності температури від частоти і сили струму в індукторі та тривалості нагрівання. Розроблені основи індукційного нагрівання та наплавлення деталей циліндричної форми невеликих діаметрів, які дозволяють проектувати нагрівальні системи індуктор-магнітопровід з урахуванням їх електрофізичних, енергетичних та геометричних параметрів. Отримані теоретичні і експериментальні результати дослідження нагрівальної системи (індуктор, магнітопровід) підтвердили обґрунтованість застосування вибраної методики з достатньою для інженерних розрахунків і практичних цілей точністю в межах 3-4 %.

Після досягнення необхідної температури наплавлення джерело нагрівання вимикають і деталь циліндричної форми (колесо) вільно остигає. На циліндр невеликої товщини в цьому випадку діє тільки тепловий екран.

Рівняння вільного остигання циліндричної деталі має вигляд:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} - m^2 T - \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} = 0 . \tag{1}$$

Внаслідок того, що температура повинна бути симетричною відносно центру деталі, можемо записати таку умову:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \text{; при } r=0.$$

На краю циліндричної деталі, де маємо теплове екранування, гранична умова матиме вигляд

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r} + K_T \alpha \; T = 0 , \tag{2}$$

де $K_T = \dfrac{\lambda_T}{d_T \alpha}$.

Будемо шукати розв’язок рівняння (1) у формі

$$T = C J_0 \left(\nu \; r\right) \, e^{-a\lambda^2 t} . \tag{3}$$

Підставивши вираз (3) в граничну умову (2), одержимо:

$$C\nu\left[-J_1\left(\nu\ r_2\right)\right] e^{-a\lambda^2 t} + K_T \alpha C J_0\left(\nu\ r_2\right) e^{-a\lambda^2 t} = 0\ .$$

Звідси після розділення на $C \cdot e^{-a\lambda^2 t}$ одержимо рівняння для визначення ν:

$$-\nu J_1\left(\nu\ r_2\right) + K_T \alpha J_0\left(\nu\ r_2\right) = 0\ . \qquad (4)$$

Оскільки коренів цього рівняння – нескінченна кількість, то розв'язок (3) набуде вигляду

$$T = \sum_{j=1}^{\infty} C_j J_0\left(\nu_j r\right) \cdot e^{-a\lambda_j{}^2 t}\ . \qquad (5)$$

Для знаходження коефіцієнтів C_j використаємо умову, що в момент початку остигання $t = \tau$ температура рівна $T_\tau(r)$ – кінцевій температурі наплавлення.

Тобто $\quad T = T_\tau(r) \qquad (6)$

Помноживши вираз для температури (5) при $t = \tau$ на $J_0\left(\nu_j r\right)$ і проінтегрувавши його в границях від 0 до r_2, будемо мати формулу

$$\int_0^{r_2} T_\tau J_0\left(\nu_j r\right) r dr = C_j e^{-a\lambda_j^2\ t} \int_0^{r_2} \left[J_0\left(\nu_j r\right)\right]^2 r dr\ ,$$

яка при $t = \tau$ набуде вигляду

$$\int_0^{r_2} T_\tau(r) J_0\left(\nu_j r\right) r dr = C_j e^{-a\lambda_j^2\ \tau} \int_0^{r_2} \left[J_0\left(\nu_j r\right)\right]^2 r dr\ .$$

З цієї формули знаходимо

$$C_j = \frac{\int_0^{r_2} T_\tau(r) J_0\left(\nu_j r\right)\ r dr}{e^{-a\lambda_j^2 \tau} \int_0^{r_2} \left[J_0\left(\nu_j r\right)\right]^2 r dr}\ . \qquad (7)$$

Підставляючи коефіцієнти C_j, знайдені по формулі (7), у вираз для визначення температури (5), одержимо кінцеву формулу для знаходження температури остигання деталі циліндричної форми:

$$T = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\int_0^{r_2} T_\tau(r) J_0\left(\nu_j r\right)\ r dr}{\int_0^{r_2} \left[J_0\left(\nu_j r\right)\right]^2 r dr} J_0\left(\nu_j r\right) \cdot e^{a\lambda_j^2 (\tau - t)}\ , \qquad (8)$$

в якій корені ν_j визначаються з рівняння (4).

З цієї формули також видно, що кінцева температура нагрівання однозначно визначає температуру остигання.