



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

Relazioni tra la Teoria di Morse discreta e continua

13 Giugno 2014

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

Candidato
Fabio Strazzeri

Relatore
Dott. Filippo Callegaro
Università di Pisa

Controrelatore
Prof. Giovanni Gaiffi
Università di Pisa

ANNO ACCADEMICO 2013/2014

A Vittorio, Anna e Alice

Indice

Introduzione	3
1 Teoria di Morse continua	6
1.1 Prime Definizioni	7
1.2 Attaccamento di celle	10
1.3 La categoria cobordismo	15
1.4 Il simil-gradiente	18
1.5 Teoremi di ordinamento	20
1.6 Teoremi di cancellazione	24
1.7 Eliminazione di punti critici di indice 0 e 1	27
2 Teoria di Morse Discreta	33
2.1 Introduzione e primi concetti	33
2.2 Il Teorema Principale	36
2.3 Teorema della Sfera	38
2.4 Il Gradiente V	42
2.5 Equivalenza Omologica	46
2.6 Funzioni di Morse auto-indicizzanti	50
2.7 Triadi Cellulari	51
2.8 Eliminazione di punti critici e suddivisione	57
3 Proprietà del blocco duale	60
3.1 Nozioni basiche	60
3.2 Il blocco duale	63
3.3 Proprietà del blocco duale	65
3.4 Alcune Equivalenze	70
4 Relazioni ed Equivalenza	73
4.1 Dal differenziabile al PL	73
4.2 Dal PL al differenziabile	76
4.3 Triangolazioni non-PL	81
Bibliografia	86

Introduzione

Il nostro lavoro si basa sul mostrare le relazioni tra Teoria di Morse continua e Teoria di Morse discreta. Per fare ciò inizieremo introducendo la Teoria di Morse continua seguendo i lavori di Milnor degli anni '50-'60 dello scorso secolo. In tale introduzione i nostri oggetti di studio saranno le varietà differenziabili e le funzioni differenziabili su di esse che non posseggono punti critici degeneri. Data una varietà (differenziabile) M , la Teoria di Morse continua ci fornisce risultati interessanti dal punto di vista del tipo di omotopia di M , in particolare ci dice che se indichiamo con m_λ il numero di punti critici di indice λ allora M è omotopicamente equivalente a un CW-complesso costituito da m_λ celle λ -dimensionali (Teorema 1.4) ed è da tale risultato che ricaveremo inoltre le importanti Disuguaglianze di Morse, le quali ci forniscono un limite superiore per i numeri di Betti di M (Equazione 1.1 ed Equazione 1.2). Sarà nostro compito nel primo capitolo introdurre inoltre il potente strumento dell' h -cobordismo, il quale riesce a darci importanti risultati riguardo alle varietà differenziabili compatte. Ciò che avremo cura di mostrare, rielaborando il lavoro di Milnor [Mil65], è il forte legame tra Teoria di Morse continua definita su triadi differenziabili e h -cobordismo, in particolare come possano essere utilizzati i risultati trovati tramite la prima per darne altri per il secondo e viceversa. L'esempio forse più eclatante di questa relazione sono i due Teoremi:

Teorema 1.11

Ogni cobordismo può essere espresso come composizione di

$$c = c_0 c_1 \dots c_m$$

Dove ogni cobordismo c_i ammette una funzione di Morse con solo un livello critico e tutti i punti di indice k_i .

Teorema 1.14

Data una funzione f di Morse sulla triade $(M; V_0, V_1)$ esiste una funzione g di Morse tale che g sia auto-indicizzante ed inoltre se p è punto critico di indice λ per f allora p è punto critico di indice λ anche per g .

Tali teoremi enunciano la medesima proprietà, ma con linguaggi diversi, il primo del h -cobordismo, il secondo della Teoria di Morse continua. Concluderemo il capitolo mostrando che data una funzione di Morse sulla triade $(M; V, V')$ il gruppo di omologia di M relativa a V è isomorfo al gruppo libero generato da m_λ elementi (Teorema 1.18).

Passeremo dopo questa prima incursione nella Teoria di Morse continua ad illustrare la Teoria di Morse discreta come fu presentata da Forman negli anni '80, in maniera leggermente semplificata. I nostri oggetti di studio per la loro semplicità saranno infatti i complessi simpliciali, pur essendo nella letteratura i CW-complessi. Ci occuperemo dunque nel secondo capitolo di mostrare come attraverso un'adeguata definizione di funzione di Morse discreta si possano ricavare risultati decisamente simili a quelli ricavati nel caso continuo. Ad esempio è possibile dimostrare che anche nel caso discreto dato un complesso simpliciale ed una funzione di Morse su di esso con m_λ punti critici di indice λ allora tale complesso è omotopicamente equivalente a un CW-complesso con m_λ celle λ -dimensionali (Teorema 2.1), ed anche in questo caso potremo dedurre le Disuguaglianze di Morse che avranno espressione identica al caso continuo (Equazione 2.3 ed Equazione 2.4). Sempre in analogia al caso continuo introdurremo le funzioni di Morse discrete su triadi e mostreremo come dimostrare che ogni funzione di Morse f su una data triade cellulare possa essere deformata in modo tale che ogni punto critico di indice λ abbia immagine λ (Teorema 2.13). Sarà nostra cura mostrare che i risultati sull'omologia di M , o di M relativa a V nel caso di triadi, sono analoghi, con le dovute distinzioni, al caso continuo. Facciamo notare inoltre che un risultato che presentiamo è l'equivalenza delle due definizioni di funzione di Morse presenti in letteratura dal punto di vista dei risultati della Teoria discreta (Lemma 2.5).

Avendo dunque introdotto entrambe le versioni della Teoria di Morse faremo una pausa prima di mostrare le relazioni fra di esse per dare una piccola introduzione della topologia PL, combinando nella trascrizione delle nozioni di tale topologia il lavoro di Rouke-Sanderson [RS72] e di Munkreas [Mun84]. Daremo infatti le prime definizioni di tale topologia necessarie principalmente ad introdurre quello che viene chiamato "blocco duale di un complesso" (Definizione 3.10), che nel caso PL si rivela essere anch'esso una varietà PL. In particolare un risultato che presentiamo è che nel caso di una varietà PL con bordo M il complesso biduale M^{**} è omeomorfo PL ad M con un collare di ∂M attaccato lungo il comune bordo (Teorema 3.6). Termineremo mostrando come attraverso il complesso duale si possano enunciare dei teoremi che ricordano le dualità di Poincarè, nel caso di varietà chiuse, e di Lefschetz, nel caso di varietà con bordo (Teorema 3.7 e Teorema 3.8).

Terminati questi tre capitoli saremo finalmente pronti ad enunciare le relazioni fra le due Teorie, rifacendoci all'articolo di Benedetti [Ben13]. Per prima cosa mostreremo che presa una varietà differenziabile e una sua decomposizione in manici è sempre possibile trovare una funzione di Morse su di essa con tanti punti critici di indice λ quanti sono i λ -manici nella decomposizione, e viceversa (Teorema 4.5 e Teorema 4.6). In particolare se la dimensione è minore di 8 il Teorema di Kervaire-Milnor ci permette di trovare una decomposizione in manici PL compatibile con la decomposizione differenziabile. Per mostrare che se la varietà ha dimensione minore di 8 allora la Teoria di Morse continua e discreta su varietà PL coincidono, mostreremo che per le triangolazioni PL della varietà vi è una corrispondenza biunivoca tra decomposizione in manici e funzioni di Morse definite su una certa m -esima suddivisione baricentrica della triangolazione (Teorema 4.12 e Teorema 4.14) e grazie a tale risultato potremo passare sia nel caso continuo che nel caso discreto PL dalle funzioni di Morse

alle decomposizioni in manici e dunque grazie al Teorema di Kervaire-Milnor ottenere l'equivalenza cercata.

Concluderemo mostrando che in realtà le triangolazioni non-PL possono essere più utili di quelle PL. Forniremo una triangolazione non-PL della 5-sfera topologica che ammette una funzione di Morse perfetta, ossia con un punto critico di indice 0 e uno di indice 5, mentre il Teorema di Lickorish, Benedetti e Zigler ci dice che esiste una triangolazione PL della 5-sfera tale che nessuna delle sue suddivisioni baricentriche ammetta una funzione di Morse perfetta.

Capitolo 1

Teoria di Morse continua

Uno strumento importante per lo studio della topologia di una varietà differenziabile M è rappresentato da quella che viene chiamata *Teoria di Morse*. Tale teoria nasce negli anni trenta del novecento, in realtà in ambito analitico, come strumento del Calcolo delle Variazioni, solo negli anni quaranta e cinquanta tale teoria viene vista in un ambito più geometrico da diversi matematici, quali ad esempio Thom e Milnor. Proprio quest'ultimo a cavallo tra gli anni cinquanta e sessanta fornisce diversi teoremi di grande portata che permettono di studiare la topologia di una varietà differenziabile.

Lo strumento base della Teoria di Morse sono le *funzioni di Morse*. Una funzione f su M varietà differenziabile è una *funzione di Morse* se non possiede punti critici degeneri. Dato p punto critico di f si definisce indice di p , λ , il numero intero uguale al massimo della dimensione di un sottospazio V di T_p^*M tale che f_{**} , il funzionale simmetrico e bilineare indotto da f su T^*M , sia definito negativo su V :

$$\lambda = \max_V \{ \dim V \mid f_{**} \text{ è definito negativo su } V \},$$

dove f_{**} è l'hessiano di f .

Indicato con $m_\lambda(f)$ il numero di punti critici di indice λ , uno dei risultati trovati da Milnor è che M è omotopicamente equivalente a un CW-complesso tale che possieda $m_\lambda(f)$ λ -celle per ogni λ intero. Da tale decomposizione siamo in grado di fornire inoltre un limite superiore per i numeri di Betti di M .

Milnor e Smale negli anni 60 introdussero uno strumento ulteriore fortemente legato alla Teoria di Morse, il *cobordismo*. Sia M una varietà differenziabile compatta tale che la sua frontiera ∂M sia composta da due componenti connesse V_0 e V_1 allora M è chiamato *cobordante* con V_0 e V_1 . Una funzione di Morse sulla triade $(M; V_0, V_1)$ è una funzione tale che $f(V_0) = \min f$, $f(V_1) = \max f$ ed inoltre in $M \setminus \partial M$ non abbia punti critici degeneri. Un cobordismo tra V_0 e V_1 sarà allora una 5-upla $(M; M_0, M_1, h_0, h_1)$ dove $h_i : M_i \rightarrow V_i$ è diffeomorfismo per $i = 0, 1$ e $(M; M_0, M_1)$ è una triade. Ciò che vedremo è che i cobordismi, dotati di una relazione di equivalenza, definiscono una categoria i cui oggetti sono le varietà chiuse e mentre i morfismi sono i cobordismi. Data la classe d'equivalenza di un cobordismo C i suoi rappresentanti hanno come invariante il *numero di Morse*:

$$\mu(c) = \min_f \left\{ \sum_\lambda m_\lambda(f) \mid f \text{ è funzione di Morse} \right\}$$

Vedremo come lavorare sui cobordismi ci fornisce risultati sulle funzioni di Morse e viceversa.

Siamo in grado ad esempio di fornire un isomorfismo tra il λ -esimo gruppo di omologia di M relativa ad V_0 , $H_\lambda(M, V_0; \mathbb{Z})$ e il gruppo libero generato da $m_\lambda(f)$ elementi ed è possibile vedere, data una funzione di Morse f , come approssimarla per eliminare o sostituire alcuni suoi punti critici, abbassando così il limite fornito dalle due Disuguaglianze di Morse.

Nel caso in cui V_0 e V_1 siano retratti di deformazione di M allora si parla di *h-cobordismo* e un importante risultato che si ottiene è il *Teorema di h-cobordismo* di Smale, il quale afferma che se la triade $(M; V_0, V_1)$ è tale che V_0 e V_1 siano semplicemente connessi e di dimensione maggiore di 4 allora M è diffeomorfo a $V_0 \times [0, 1]$ e di conseguenza che V_0 è diffeomorfo a V_1 . Tra le varie applicazioni di tale teorema troviamo ad esempio la dimostrazione della congettura di Poincaré per dimensione maggiore di 4.

Ulteriore applicazione dei cobordismi è la possibilità di modificare una data f , funzione di Morse, in modo tale che i punti critici di indice λ abbiano valore, tramite f , esattamente λ , o nel linguaggio dei cobordismi mostrare che ogni cobordismo può essere visto come composizione di soli cobordismi con numero di Morse 1, chiamati *cobordismi elementari*.

1.1 Prime Definizioni

Iniziamo dunque ad introdurre i concetti iniziali della Teoria di Morse, quali funzione di Morse e punto critico. Attraverso tali concetti e il concetto di varietà di livello $M(c)$ saremo in grado di caratterizzare il tipo di omotopia di M . Facciamo notare che per brevità di scrittura nella nostra trattazione le funzioni sono sempre considerate differenziabili ed a valori reali, inoltre quando scriveremo varietà ci staremo riferendo sempre ad una varietà differenziabile. In questa prima parte della trattazione ci siamo riferiti al lavoro di Milnor [Mil63], nel caso di alcune dimostrazioni omesse per brevità rimandiamo a tale lavoro il lettore interessato.

Definizione 1.1. (Punto critico)

Sia f una funzione su una varietà M . Un punto $p \in M$ è detto punto critico di f se la mappa indotta $f_ : TM_p \rightarrow T\mathbb{R}_{f(p)} = \mathbb{R}$ è nulla. Il valore $f(p)$ è chiamato valore critico per f*

Facciamo notare che, scelto un sistema di coordinate locali (x^1, \dots, x^n) in un intorno U abbastanza piccolo di p , essere punto critico equivale a dire che:

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(p) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) = 0$$

Definizione 1.2. (Punto critico non degenero)

Sia M una varietà ed f una funzione su di essa, preso un sistema di coordinate locali $\{x^1, \dots, x^n\}$ in un intorno U abbastanza piccolo di p , allora il punto critico $p \in M$ è detto punto critico non degenero se la matrice:

$$H(f)(p) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right)(p),$$

è non singolare.

È facilmente verificabile che tale definizione non dipende dal sistema di coordinate scelto inoltre se consideriamo il funzionale bilineare e simmetrico f_{**} su TM_p chiamato *Hessiano di f in p* la matrice $H(f)(p)$ è esattamente la matrice di f_{**} rispetto alla base $\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p$.

Definizione 1.3. (Indice di p in f)

Sia p punto critico di f , funzione sulla varietà M , allora definiamo indice di p in f l'indice di f_{**} in T_pM , ossia il massimo della dimensione dei sottospazi V di T_pM tali che f_{**} è definito negativo su V .

Definiamo infine le varietà di livello:

Definizione 1.4. (M^a)

Sia M una varietà, f una funzione su M ed a un numero reale allora possiamo definire la varietà:

$$M^a = \{x \in M \mid f(x) \leq a\}.$$

Nota: Se a non è valore critico di f allora il *Teorema della funzione implicita* ci dice che M^a è una varietà con bordo e il bordo $f^{-1}(a)$ è una sottovarietà di $M(a)$ la cui codimensione in M è 1.

Enunceremo ora un lemma di supporto:

Lemma 1.1. Sia f una funzione in un intorno convesso V di $0 \in \mathbb{R}^n$, tale che $f(0) = 0$, allora:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_n),$$

per alcune appropriate funzioni g_i definite in V , tali che $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(0)$

Segue nel caso di punti critici non degeneri il cosiddetto *Lemma di Morse*:

Lemma 1.2 (Lemma di Morse). Sia p un punto critico non-degenere di f , allora esiste un sistema di coordinate locali (y^1, \dots, y^n) in un intorno centrato U abbastanza piccolo di p tale che valga la seguente uguaglianza in tutto U :

$$f = f(p) - [(y^1)^2 + \dots + (y^\lambda)^2] + [(y^{\lambda+1})^2 + \dots + (y^n)^2],$$

dove λ è l'indice di p in f .

Dal Lemma di Morse discende che:

Corollario 1.3. Sia f una funzione su una varietà M , allora i suoi punti critici non-degeneri sono isolati.

Possiamo finalmente dire cosa sia una funzione di Morse su una varietà:

Definizione 1.5 (Funzione di Morse). Sia M una varietà ed f una funzione su di essa. Chiameremo f funzione di Morse se non possiede punti critici degeneri.

Una funzione di Morse avrà quindi tutti i punti critici isolati ed inoltre in intorno abbastanza piccolo di ognuno di essi sarà possibile trovare un sistema di coordinate tale che valga il Lemma di Morse.

Diamo ora alcuni esempi di funzioni di Morse su varietà ben note.

Esempio 1.1. (\mathbb{R}^n)

Sia $M = \mathbb{R}^n$ allora la funzione distanza dall'origine, $f = d(\cdot, 0)^2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, è una funzione di Morse. L'unico punto critico in questo caso è l'origine $0 = (0, \dots, 0)$ e inoltre il suo Hessiano sarà:

$$H(f) = \begin{bmatrix} 2 & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}.$$

Dunque 0 è un punto critico di indice 0 .

Esempio 1.2. (S^n)

Un altro esempio può essere la n -sfera, $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$. In questo caso possiamo considerare come funzione di Morse la proiezione sull'ultima coordinata $\pi_{n+1} : S^n \rightarrow \mathbb{R}$. In questo caso i punti critici sono 2 , il massimo ed il minimo di π_n , i.e. $N = (0, \dots, 0, 1)$ e $S = (0, \dots, 0, -1)$. Inoltre N ha indice 0 mentre S ha indice n .

Esempio 1.3. ($\mathbb{R}P^n$)

Infine consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}$ data da:

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^2 + 2x_2^2 + \dots + (n+1)x_{n+1}^2,$$

dove consideriamo $\mathbb{R}P^n$ come quoziente di S^n .

Preso il ricoprimento $\{U_i\}_i$ di aperti definiti come $U_i = \{x \mid x_i \neq 0\}$, in ogni U_i possiamo definire il sistema di coordinate $(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_{n+1})$ dove $y_j = x_j$, in particolare avremo che

$x_i = \sqrt{1 - \sum_{j \neq i} y_j^2}$. Dunque otteniamo che

$$f(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_{n+1}) = \sum_{j \neq i} j y_j^2 + i(1 - \sum_{j \neq i} y_j^2).$$

Sviluppando otteniamo che l'espressione di f nell'aperto U_i , che è centrato nel punto $z_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, ha espressione:

$$i + \sum_{j \neq i} (j - i) y_j^2,$$

ossia l'espressione del Lemma di Morse per l'unico punto critico di U_i , z_i . Allora a_i avrà indice $i - 1 = \#\{j \mid j - i < 0\}$. In particolare i punti critici di f sono unicamente quelli che abbiamo trovato, poiché gli aperti U_i ricoprono tutto $\mathbb{R}P^n$.

1.2 Attaccamento di celle

Possiamo ora lavorare effettivamente con le funzioni di Morse. Data f funzione di Morse dimostreremo che le varietà $M(a)$ al variare di a in \mathbb{R} sono tali che se $M(a)$ e $M(b)$ hanno gli stessi punti critici allora sono diffeomorfe, e dunque una retratto dell'altra, mentre ciò non accade se non hanno gli stessi punti critici. Da tale fatto mostreremo come i punti critici definiscono una decomposizione in manici di M . Infine come anticipato nell'introduzione del capitolo vedremo come essi diano inoltre informazioni precise sul tipo di omologia di M e definiscano un limite superiore per i numeri di Betti di M .

Per prima cosa introduciamo il seguente strumento:

Definizione 1.6. (Gruppo a un parametro)

Un gruppo di diffeomorfismi a un parametro di una varietà M è una mappa

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M,$$

tale che

1. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ la mappa $\varphi_t : M \rightarrow M$ definita da $\varphi_t(q) = \varphi(t, q)$ è un diffeomorfismo da M in sé stesso;
2. Per ogni $t, s \in \mathbb{R}$ abbiamo che $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$.

Nota: La terminologia di gruppo deriva semplicemente dal fatto che un gruppo a un parametro di diffeomorfismi φ definisce naturalmente il gruppo abeliano $(G^\varphi := \{\varphi_t | t \in \mathbb{R}\}, \circ)$.

Dato un gruppo a un parametro φ possiamo definire il seguente campo di vettori per ogni funzione f su M :

$$X_q(f) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_h(q)) - f(q)}{h}.$$

Diremo allora che X genera il gruppo a un parametro φ .

Sotto certe ipotesi abbiamo che un campo di vettori X su M genera un unico gruppo a un parametro, infatti:

Lemma 1.4. Sia X un campo di vettori su M varietà, tale che si annulli fuori da un compatto $K \subset M$ allora X genera un unico gruppo a un parametro φ_X .

Attraverso lo strumento di gruppo a un parametro è possibile dimostrare il seguente teorema, di cui tuttavia non daremo dimostrazione, rimandiamo il lettore interessato a [Mil65].

Teorema 1.1. Sia f una funzione su M varietà e a, b numeri reali tali che $a < b$. Se $f^{-1}[a, b]$ è compatto e non contiene punti critici per f allora M^a è diffeomorfo a M^b . Perciò M^a è un retratto di deformazione di M^b e dunque l'inclusione $M^a \hookrightarrow M^b$ è un'equivalenza omotopica.

Dato X uno spazio topologico se esso è diffeomorfo ad una n -palla di raggio 1, i.e. $D_1^n := \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| \leq 1\}$ lo chiameremo n -cella. Facciamo notare che per brevità di notazione ci riferiremo con il termine n -palla alla palla di raggio

1 ed inoltre ometteremo il pedice in D_ρ^n nel caso in cui il raggio ρ della n -palla sia uguale ad 1. Sia Y un altro spazio topologico e $f : \partial X \rightarrow Y$ una funzione continua, diremo che lo spazio $Z = Y \cup_f X$ è ottenuto *attaccando una n -cella* ad Y . Ad esempio S^n è ottenuto attaccando una n -cella ad una 0-cella. Quello che otteniamo è che se $M(a)$ ed $M(b)$ differiscono per almeno un punto critico la situazione è la seguente:

Teorema 1.2. *Sia f una funzione su M varietà e p un punto critico non-degenere di f con indice λ . Posto $f(p) = c$, e scelto ϵ abbastanza piccolo affinché $f^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$ sia compatto e supposto che $f^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$ non contenga ulteriori punti critici di f , allora l'insieme $M^{c+\epsilon}$ è omotopo all'insieme $M^{c-\epsilon}$ con una λ -cella attaccata.*

Dimostrazione. Lo schema della dimostrazione è il seguente, per prima cosa introdurremo una nuova funzione di Morse $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ che coincide con la funzione f a meno di un intorno abbastanza piccolo di p dove $F < f$. Dimostreremo che dunque la regione $F^{-1}(-\infty, c-\epsilon]$ è formata da $M^{c-\epsilon}$ unita ad una regione H vicina a p , mentre $F^{-1}(-\infty, c+\epsilon]$ coincide con $M^{c+\epsilon}$. Scegliendo in maniera precisa una λ -cella $e^\lambda \subset H$, faremo vedere che $M^{c-\epsilon} \cup e^\lambda$ è un retratto di deformazione di $M^{c-\epsilon} \cup H$. Applicando infine alla regione $F^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$ il Teorema 1.1 vedremo che $M^{c-\epsilon} \cup H$ è un retratto di deformazione di $M^{c+\epsilon}$.

Possiamo scegliere un sistema di coordinate $\varphi = (u^1, \dots, u^n)$ in un intorno centrato U abbastanza piccolo di p dove $f = c - [(u^1)^2 + \dots + (u^\lambda)^2] + [(u^{\lambda+1})^2 + (u^n)^2]$ inoltre possiamo scegliere un ϵ abbastanza piccolo affinché $f^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$ sia compatto e non contenga punti critici oltre a p e che l'immagine di U tramite φ contenga la palla chiusa $D_{2\epsilon}^n = \{(u^1, \dots, u^n) \mid \sum_{1, \dots, n} (u^i)^2 \leq 2\epsilon\}$.

Definiamo dunque la cella e^λ nel modo che segue:

$$e^\lambda := \{u \in U \mid (u^1)^2 + \dots + (u^\lambda)^2 \leq \epsilon, u^{\lambda+1} = \dots = u^n = 0\}$$

Costruiamo ora la funzione F .

Consideriamo $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$\begin{cases} \mu(0) > \epsilon \\ \mu(r) = 0 & \text{per } r \geq 2\epsilon \\ -1 < \mu'(r) = \frac{\partial \mu}{\partial r} \leq 0 & \text{per ogni } r \end{cases}$$

Definiamo quindi F coincidente con f fuori da U ed in U come segue:

$$F = f - \mu[(u^1)^2 + \dots + (u^\lambda)^2 + 2(u^{\lambda+1})^2 + \dots + 2(u^n)^2]$$

F è una funzione ben definita e differenziabile su M inoltre se poniamo

$$\begin{aligned} \xi(u^1, \dots, u^n) &= \sum_{i=1, \dots, \lambda} (u^i)^2 \in [0, \infty) \\ \nu(u^1, \dots, u^n) &= \sum_{i=\lambda+1, \dots, n} (u^i)^2 \in [0, \infty) \end{aligned}$$

allora per ogni $q \in U$ otteniamo che $f = c - \xi + \nu$ ed in aggiunta:

$$F = c - \xi + \nu - \mu(\xi + 2\nu).$$

Ora se $\xi + 2\nu \geq 2\epsilon$ allora $\mu \equiv 0$ e dunque $f \equiv F$ se invece $\xi + 2\nu \leq 2\epsilon$ allora otteniamo che:

$$F \leq f = c - \xi + \nu < c + \frac{1}{2}\xi + \nu < c + \epsilon$$

Dunque $F^{-1}(-\infty, c + \epsilon] = M^{c+\epsilon}$ ed inoltre i punti critici di F sono gli stessi di f , *i.e.* F è di Morse. Ora essendo $F \leq f$:

$$F^{-1}[c - \epsilon, c + \epsilon] \subset f^{-1}[c - \epsilon, c + \epsilon].$$

Questa regione è compatta e se contiene un punto critico deve essere p , ma $F(p) = c - \mu(0) < c - \epsilon$. Perciò in $F^{-1}[c - \epsilon, c + \epsilon]$ non vi sono punti critici, ciò implica grazie al Teorema 1.1 che la regione $F^{-1}(-\infty, c - \epsilon]$ è un retratto di deformazione di $F^{-1}(-\infty, c + \epsilon] = M^{c+\epsilon}$. Per semplicità scriveremo $M^{c-\epsilon} \cup H$ al posto di $F^{-1}(-\infty, c + \epsilon]$, *i.e.* $H = \{q \in M \mid c - \epsilon \leq f(q), F(q) \leq c + \epsilon\}$.

La nostra λ -cella ricordiamo essere l'insieme:

$$\{q \in U \mid \xi(q) \leq \epsilon, \nu(q) = 0\}$$

Dunque con la nuova notazione otteniamo che $e^\lambda \subset H$. Resta dunque da trovare la retrazione di deformazione da $M^{c-\epsilon} \cup H$ a $M^{c-\epsilon} \cup e^\lambda$.

Definiremo la nostra retrazione $r : [0, 1] \times M^{c-\epsilon} \cup H \rightarrow M^{c-\epsilon} \cup H$ essere l'identità fuori da U e dentro U consideriamo i seguenti tre casi:

1. Se $\xi \leq \epsilon$ allora sia:

$$r(t; u^1, \dots, u^n) = (u^1, \dots, u^\lambda, tu^{\lambda+1}, \dots, tu^n).$$

Avremo dunque che $r(1; \cdot)$ è l'identità e $r(0; \cdot)$ mappa l'intera regione in e^λ inoltre poiché $\frac{\partial F}{\partial \nu} > 0$ segue che $r(t; \cdot)$ mappa la regione $F^{-1}[c - \epsilon, c + \epsilon]$ in sé stessa;

2. Se $\epsilon \leq \xi \leq \nu + \epsilon$ allora, posto $s_t(u^1, \dots, u^n) = t + (1 - t)((\xi - \epsilon)/\nu)^{1/2}$, sia:

$$r(t; u^1, \dots, u^n) = (u^1, \dots, u^\lambda, s_t u^{\lambda+1}, \dots, s_t u^n).$$

Anche in questo caso $r(t; \cdot)$ è una deformazione e se $\xi = \epsilon$ la definizione coincide con il caso 1).

3. Se infine $\nu + \epsilon \leq \xi$ allora si ponga:

$$r(t; \cdot) = Id.$$

Di nuovo nel caso limite $\xi = \nu + \epsilon$ la definizione coincide con la 2).

Abbiamo dunque che r è la retrazione di deformazione cercata. \square

Può succedere che due punti critici abbiano stessa immagine, ma tale opzione può essere evitate grazie al seguente teorema:

Teorema 1.3. *Sia f una funzione di Morse su M varietà, con punti critici p_1, \dots, p_k , se esistono degli indici i, j tali che $f(p_i) = f(p_j)$ allora f può essere approssimata ad una funzione di Morse g con gli stessi punti critici tale che $g(p_i) \neq g(p_j)$.*

D'ora in poi considereremo le funzioni di Morse sempre approssimate in modo tale che dati due punti critici non abbiano mai stesso valore critico.

Ci fermiamo ora un momento per introdurre la nozione di *CW-complesso*.

Dato uno spazio X si chiama *decomposizione in celle di X* una famiglia di sottospazi di X , $\mathcal{E} = \{e^\alpha | \alpha \in I\}$ tale che ogni e^α sia una cella ed inoltre:

$$X = \cup_{\alpha \in I} e^\alpha.$$

Dove l'unione è intesa disgiunta.

Facciamo notare che le e^α possono avere dimensione differente e I può anche non essere finito. Nel caso lo fosse \mathcal{E} viene chiamata *decomposizione finita in celle*. Dato un intero n si indicherà con X_n l'*n*-scheletro di X definito come $X_n = \cup_{\dim e^\alpha \leq n} e^\alpha$. Dunque abbiamo che:

Definizione 1.7. Un CW-complesso è uno spazio topologico con una successione crescente di spazi

$$\emptyset \subset X_0 \subset \dots \subset X_n \subset \dots \subset X.$$

Tale che:

1. Ogni X_i è ottenuto attraverso X_{i-1} attaccando solo celle di dimensione i ;
2. Si ha che $X = \cup_{n \geq 0} X_n$
3. X è dotato della topologia debole indotta dalla famiglia $\{X_n\}_{n \geq 0}$, ossia $A \subseteq X$ è chiuso se e solo se $A \cap X_n$ è chiuso per ogni X_n .

Un CW-complesso si dice *finito* se il numero di attaccamenti è finito mentre di *dimensione finita* se $\emptyset \subset X_0 \subset \dots \subset X_n = X$. Facciamo notare che il CW-complesso formato da un'infinità numerabile di celle di dimensione 0 è di dimensione finita ma non è finito.

Riprendendo dunque in mano il Teorema 1.1 e il Teorema 1.2 otteniamo come loro combinazione il seguente teorema di importanza decisamente rilevante:

Teorema 1.4. Se f è una funzione su una varietà M tale che non possiede nessun punto critico degenere. Se ogni M^a è compatto allora M ha lo stesso tipo di omologia di un CW-complesso con tante λ -celle quanti sono i punti critici di f con indice λ per ogni λ intero.

Terminiamo dunque questo capitolo con il dimostrare quelle che vengono chiamate *Disuguaglianze di Morse*.

Definizione 1.8. (Subadditività)

Sia S una funzione che va da un insieme di coppie di spazi topologici in \mathbb{Z} . Diremo che S è subadditiva se si verifica per ogni tripletta $Z \subset Y \subset X$ che:

$$S(X, Z) \leq S(X, Y) + S(Y, Z).$$

Se l'eguaglianza è sempre valida S è chiamata additiva

È nostro intento utilizzare mappe subadditive note per dimostrare le due Disuguaglianze di Morse. Prendiamo ad esempio un campo \mathbb{F} e consideriamo per ogni coppia di spazi (X, Y) e un numero intero λ la funzione $R_\lambda(X, Y) = \lambda$ -esimo numero di Betti di $(X, Y) = \text{rango di } H_\lambda(X, Y; \mathbb{F})$ rispetto ad \mathbb{F} , quando esso è finito. Se consideriamo la seguente sequenza esatta corta:

$$\dots \rightarrow H_\lambda(Y, Z) \rightarrow H_\lambda(X, Z) \rightarrow H_\lambda(X, Y) \rightarrow \dots$$

Discende che R_λ è subadditiva.

Se prendiamo invece per ogni coppia di spazi (X, Y) la funzione *caratteristica di Eulero* $\chi(X, Y) = \sum_{1, \dots, n} (-1)^\lambda R_\lambda(X, Y)$ per induzione su n si verifica che è additiva.

Lemma 1.5. *Sia S una funzione subadditiva e sia data una sequenza nidificata $X_0 \subset \dots \subset X_n$. Allora è vero che $S(X_n, X_0) \leq \sum_{i=1, \dots, n} S(X_i, X_{i-1})$. Se inoltre S è additiva allora vale che $S(X_n, X_0) = \sum_{i=1, \dots, n} S(X_i, X_{i-1})$*

Possiamo dunque dimostrare la prima Disuguaglianza di Morse:

Teorema 1.5 (Disuguaglianza Debole di Morse). *Sia f una funzione di Morse su M varietà e $m_\lambda(f)$ il numero di punti critici di indice λ allora vale:*

$$\begin{cases} R_\lambda(M) \leq m_\lambda(f) \text{ per ogni } \lambda \text{ intero;} \\ \sum (-1)^\lambda R_\lambda(M) = \sum (-1)^\lambda m_\lambda(f). \end{cases} \quad (1.1)$$

Dimostrazione. Possiamo considerare, grazie al Teorema 1.3, $a_1 < \dots < a_k$ tali che ogni M^{a_j} contiene esattamente j punti critici, e $M^{a_k} = M$. Allora è vero che:

$$\begin{aligned} H_\lambda(M^{a_j}, M^{a_{j-1}}) &= H_\lambda(M^{a_{j-1}} \cup e^{\lambda_j}, M^{a_{j-1}}) \\ &\text{dove } \lambda_j \text{ l'indice del punto critico in } M^{a_{j+1}} \setminus M^{a_j} \\ &= H_\lambda(e^{\lambda_j}, e^{\lambda_j}) \text{ tramite escissione} \\ &= \begin{cases} \text{Il gruppo dei coefficienti} & \text{Se } \lambda = \lambda_j \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

Possiamo dunque utilizzare il Lemma 1.5 applicato alla sequenza $\emptyset = M^{a_0} \subset \dots \subset M^{a_k} = M$ e la funzione $S = R_\lambda$ così da ottenere la prima disuguaglianza:

$$R_\lambda(M, \emptyset) = R_\lambda(M) \leq \sum_{j=1, \dots, k} R(M^{a_j}, M^{a_{j-1}}) = m_\lambda(f).$$

Se applichiamo il Lemma 1.5 alla funzione $S = \chi$ allora avremo l'altra disuguaglianza:

$$\chi(M, \emptyset) = \chi(M) = \sum_{\lambda=1, \dots, n} (-1)^\lambda R_\lambda(M) \leq \sum_{\lambda=1, \dots, n} (-1)^\lambda m_\lambda(f).$$

□

Per ottenere la seconda disuguaglianza abbiamo bisogno del seguente operatore:

$$S_\lambda(X, Y) = R_\lambda(X, Y) - R_{\lambda-1}(X, Y) + \dots + (-1)^{\lambda+1} R_0(X, Y)$$

Dimostriamo tramite sequenze esatte che S_λ è subadditivo. Consideriamo infatti la sequenza esatta lunga relativa alla tripletta $Z \subset Y \subset X$:

$$\dots \rightarrow H_{\lambda+1}(X, Y) \xrightarrow{\partial} H_\lambda(Y, Z) \xrightarrow{i} H_\lambda(X, Z) \xrightarrow{j} H_\lambda(X, Y) \rightarrow \dots$$

Ora il rango di ∂ è uguale a $R_\lambda(Y, Z)$ -rango di i , a sua volta il rango di i è uguale a $R_\lambda(X, Z)$ -rango di j , seguendo la sequenza fino alla fine otteniamo che il rango di ∂ è uguale a

$$R_\lambda(Y, Z) - R_\lambda(X, Z) + R_\lambda(X, Y) + \dots + (-1)^{\lambda+1} (R_\lambda(Y, Z) - R_\lambda(X, Z) + R_\lambda(X, Y)),$$

che raggruppando è uguale a $S_\lambda(Y, Z) - S_\lambda(X, Z) + S_\lambda(X, Y)$. Ora il rango di un'applicazione è sempre maggiore od uguale a 0 dunque $S_\lambda(Y, Z) - S_\lambda(X, Z) + S_\lambda(X, Y) \geq 0$, ossia S_λ è subadditiva. Possiamo perciò enunciare la seconda Disuguaglianza di Morse:

Teorema 1.6 (Disuguaglianza Forte di Morse). *Data M varietà ed f funzione di Morse su di essa, per ogni λ intero ed una sequenza di $a_0 < \dots < a_k$ tali che M^{a_j} contiene esattamente j punti critici abbiamo che:*

$$R_\lambda(M) - \dots + (-1)^{\lambda+1} R_0(M) \leq m_\lambda(f) - \dots + (-1)^{\lambda+1} m_0(f) \quad (1.2)$$

1.3 La categoria cobordismo

Come anticipato il cobordismo è uno strumento fortemente legato con la Teoria di Morse e ci permetterà di enunciare importanti risultati riguardo il legame fra punti critici di una funzione f di Morse su una varietà compatta M e i suoi gruppi di omologia. In questa trattazione per brevità abbiamo preferito omettere alcune dimostrazioni particolarmente tecniche o lunghe, rimandiamo perciò il lettore interessato al lavoro di Milnor [Mil65], D'ora in poi la notazione "varietà" indicherà una varietà differenziabile compatta.

Iniziamo con la definizione di triade:

Definizione 1.9. (Triade)

Sia M una n -varietà tale che ∂M sia unione di due sottovarietà chiuse ed aperte V_0 e V_1 , allora diremo che $(M; V_0, V_1)$ è una triade.

Date due triadi $(M; V_0, V_1)$ e $(M'; V'_0, V'_1)$ e un diffeomorfismo $h : V_1 \rightarrow V'_0$, allora possiamo *attaccare* le due triadi in modo da formarne una terza $(M \cup_h M'; V_0, V'_1)$.

La nozione di funzione di Morse può essere trasportata anche sulle triadi infatti:

Definizione 1.10. *Sia $(M; V_0, V_1)$ una triade ed f una funzione su M tale che $f(V_0) = \min f$ ed $f(V_1) = \max f$ e che tutti i punti critici di f siano non degeneri e nessuno di essi stia in ∂M allora chiamiamo f funzione di Morse sulla triade $(M; V_0, V_1)$.*

La nozione di punto critico e di valore critico rimane esattamente la stessa. Esiste una classe particolare di funzioni di Morse di cui ci occuperemo in seguito:

Definizione 1.11. (Funzione di Morse auto-indicizzante)

Sia $(M; V_0, V_1)$ una triade allora una funzione f si chiama funzione di Morse auto-indicizzante se è una funzione di Morse ed inoltre, posto $\dim M = n$, vale che:

1. $f : M \rightarrow [-\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}]$;
2. $f(V_0) = -\frac{1}{2}$, $f(V_1) = n + \frac{1}{2}$;
3. $f(p) = \text{indice di } p$, per ogni punto critico p di f .

Nel caso di funzioni di Morse, non auto-indicizzanti, possiamo sempre supporre che l'immagine di f sia l'intervallo chiuso $[0, 1]$ essendo M compatta. Data una triade $(M; V_0, V_1)$ un risultato molto importante che per brevità non dimostreremo è che:

Teorema 1.7. *Ogni triade $(M; V_0, V_1)$ possiede una funzione di Morse.*

Grazie a questo teorema, per la cui dimostrazione rimandiamo a [Mil63, Theorem 2.5], possiamo enunciare senza indugi la seguente definizione:

Definizione 1.12. *Data una triade $(M; V_0, V_1)$ chiamiamo $\mu(M; V_0, V_1)$ il numero di Morse della triade $(M; V_0, V_1)$ il minimo su tutte le funzioni di Morse f del numero di punti critici di f .*

Come anticipato, la trattazione della Teoria di Morse nel caso delle triadi è strettamente legata allo strumento dei cobordismo. Introduciamolo:

Definizione 1.13. (Cobordismo)

Date due varietà chiuse M_0 e M_1 , tali che siano compatte e $\partial M_0 = \partial M_1 = \emptyset$. Chiameremo cobordismo da M_0 a M_1 la 5-tupla, $(M; V_0, V_1; h_0, h_1)$, dove $(M; V_0, V_1)$ è una triade e $h_i : V_i \rightarrow M_i$ è un diffeomorfismo, $i = 0, 1$.

Possiamo dunque vedere un cobordismo come un'operazione tra due varietà senza bordo, inoltre possiamo definire una relazione tra due cobordismi:

Definizione 1.14. (Equivalenza di cobordismi)

Due cobordismi $(M; V_0, V_1; h_0, h_1)$ e $(M'; V'_0, V'_1; h'_0, h'_1)$ entrambi da M_0 a M_1 si dicono equivalenti se esiste il diffeomorfismo $g : M \rightarrow M'$ che porta V_0 in V'_0 e V_1 in V'_1 tale che per $i = 0, 1$ il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc}
 V_i & \xrightarrow{g|_{V_i}} & V'_i \\
 & \searrow h_i & \swarrow h'_i \\
 & M_i &
 \end{array}$$

Tale relazione è evidentemente una relazione di equivalenza.

Definizione 1.15. (Cobordismo banale)

Una triade $(M; V_0, V_1)$ è detta cobordismo banale se è equivalente alla triade $(V_0 \times [0, 1]; V_0 \times 0, V_0 \times 1)$.

Finalmente attraverso le ultime due definizioni possiamo definire la *categoria dei cobordismi*.

Definizione 1.16. *Definiamo la categoria dei cobordismi come la categoria tale che:*

- $\mathfrak{Obj} = \{\text{Varietà chiuse}\}$
- $\mathfrak{Mor} = \{\text{Cobordismi tra varietà chiuse}\} / \sim$, dove $c \sim c'$ se e solo se c è equivalente a c' .
- $\circ : \mathfrak{Mor} \times \mathfrak{Mor} \rightarrow \mathfrak{Mor}$ è definita nel seguente modo:
Se c è cobordismo da M_0 ad M_1 e $(M; V_0, V_1; h_0, h_1)$ un suo rappresentante e c' è cobordismo da M_1 ad M_2 e $(M'; V'_0, V'_1; h'_0, h'_1)$ un suo rappresentante allora definiamo la composizione di c e c' , cc' , come il cobordismo rappresentato dalla 5-upla $(M \cup_g M'; V_0, V'_1; h_0, h_2)$ dove $g = h'_0 \circ h_1 : V_1 \rightarrow V'_0$ è un diffeomorfismo che porta V_1 in V'_0 .

È facilmente verificabile che tale categoria è ben data, ossia la composizione è associativa ed esiste l'elemento neutro, il quale è nient'altro che il cobordismo banale.

Dato un diffeomorfismo della varietà M , $h : M \rightarrow M$, possiamo considerare il cobordismo $c_h = (M \times [0, 1]; M \times \{0\}, M \times \{1\}; j, \hat{h})$ dove $j(x, 0) = x$ e $\hat{h}(x, 1) = h(x)$. La proprietà dei cobordismi così costruiti è che formano un monoide, essendo vero che $c_h c_g = c_{hg}$. In particolare ci si può chiedere dati due diffeomorfismi h, g quando risulta che $c_h = c_g$. Introduciamo allora:

Definizione 1.17. (Diffeomorfismi isotopi e pseudo-isotopi)

Chiameremo $h_0, h_1 : M_0 \rightarrow M_1$ pseudo-isotopi se esiste il diffeomorfismo $g : M_0 \times I \rightarrow M_1 \times I$ tale che:

$$g(x, i) = (h_i(x), i) \text{ per ogni } i = 0, 1.$$

Due diffeomorfismi $h_0, h_1 : M_0 \rightarrow M_1$ sono isotopi (in maniera continua) se esiste una funzione differenziabile $f : M_0 \times I \rightarrow M_1$ tale che

1. Per ogni $f_t(x) := f(x, t)$ è un diffeomorfismo;
2. $f_0 = h_0$ e $f_1 = h_1$.

Nota: Due diffeomorfismi $h_0, h_1 : M_0 \rightarrow M_1$ isotopi sono anche pseudo-isotopi, se infatti consideriamo f la funzione che da l'isotopia, allora $g(x, t) = (f(x, t), t)$ è diffeomorfismo da $M_0 \times I$ ad $M_1 \times I$. Il viceversa invece è vero solo se $\dim M \geq 8$.

Quello che succede è che:

Teorema 1.8. Sia M una varietà e h, g due diffeomorfismi da M in se stessa. I cobordismi c_h e c_g coincidono se e solo se h, g sono pseudo-isotopi.

Sfrutteremo in seguito, quando ci occuperemo di modificare alcuni cobordismi, tale importante proprietà.

Enunciamo ora con questo nuovo linguaggio la definizione di numero di Morse:

Definizione 1.18. Dato un cobordismo c tra V_0 e V_1 rappresentato dalla 5-upla $(M; V_0, V_1; i_{V_0}, i_{V_1})$ chiamiamo $\mu(c)$ il numero di Morse del cobordismo c il minimo su tutte le funzioni di Morse f definite sulla triade $(M; V_0, V_1)$ del numero di punti critici di f .

È facilmente verificabile che tale definizione è ben data, ossia il numero di Morse di c è indipendente dalla scelta del rappresentante. Dunque possiamo definire:

Definizione 1.19. Un cobordismo c tale che abbia numero di Morse $\mu(c)$ uguale a 1 è detto cobordismo elementare.

Consideriamo ora una funzione di Morse $f : (M; V_0, V_1) \rightarrow ([0, 1]; 0, 1)$ se a è un punto non critico di f allora $f^{-1}[0, a]$ ed $f^{-1}[a, 1]$ sono due sotto-varietà di M con bordo rispettivamente $V_0 \cup f^{-1}(a)$ e $f^{-1}(a) \cup V_1$ dove le unioni in entrambi i casi sono disgiunte. Allora possiamo considerare il cobordismo da V_0 a V_1 , $(M; V_0, V_1; i_{V_0}, i_{V_1})$ come composizione di due cobordismi, il primo da

V_0 a $f^{-1}(a)$ ed il secondo da $f^{-1}(a)$ a V_1 . Ovviamente può succedere che due punti critici p, q abbiano stesso valore per fortuna ma in questo caso ci viene in aiuto il Teorema 1.3, perciò, data una funzione di f , a meno di modificarla con approssimazioni, abbiamo che se p, q sono punti critici allora $f(p) \neq f(q)$ e dunque otteniamo che:

Teorema 1.9. *Ogni cobordismo può essere espresso come composizione di cobordismi elementari.*

In particolare si ha che:

Lemma 1.6. *Sia $(M; V_0, V_1)$ una triade se il suo numero di Morse è uguale a 0 allora $(M; V_0, V_1)$ è un cobordismo banale, i.e. $(M; V_0, V_1)$ è equivalente a $(V_0 \times [0, 1]; V_0 \times \{0\}, V_0 \times \{1\})$.*

Risulta evidente da questi teoremi come il legame tra funzioni di Morse e cobordismi sia molto forte e come si possa utilizzare l'uno per ottenere risultati per l'altro e viceversa.

1.4 Il simil-gradiente

Data una funzione di Morse f è naturalmente definito il campo di vettori *gradiente di f* , tuttavia è possibile considerare un campo di vettori che non sia esattamente il gradiente di f , ma ne mimi le proprietà più importanti per quanto riguarda le funzioni di Morse:

Definizione 1.20. (Campo di vettori simil-gradiente)

Sia f una funzione di Morse per una triade $(M; V_0, V_1)$. Un campo di vettori ξ è chiamato campo di vettori simil-gradiente per f se si verifica che:

1. $\xi(f) > 0$ in tutto l'insieme dei punti non critici di f ;
2. Dato p punto critico di f esiste un sistema di coordinate in un intorno centrato U di p abbastanza piccolo, $(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, \dots, x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_n)$, tale che:

$$f = f(p) - \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2,$$

ed inoltre ξ ha vettore $(-x_1, \dots, -x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_n)$ in U .

D'ora in poi lavoreremo principalmente con questo tipo di campi di vettori per cui vale il Lemma di Morse 1.2 e rispetto a cui rimane invariato l'indice di ogni punto critico.

È legittimo chiedersi se tale tipo di campo di vettori esista per ogni funzione di Morse, la risposta è per fortuna positiva:

Lemma 1.7. *Data f una funzione di Morse sulla triade $(M; V_0, V_1)$ esiste un campo di vettori simil-gradiente ξ .*

Date due triadi $(M; V_0, V_1)$ e $(M'; V'_0, V'_1)$ allora se abbiamo un diffeomorfismo $h : V_1 \rightarrow V'_0$ sappiamo che esiste un'unica struttura differenziabile su $W \cup_h W'$, compatibile con quelle date di M, M' e tale che $(M \cup M'; V_0, V'_1)$ sia una triade. Abbiamo di più però, infatti date due funzioni di Morse f su $(M; V_0, V_1)$ e f' su $(M'; V'_0, V'_1)$ otteniamo che le due funzioni possono essere *incollate* anche loro fornendo una funzione di Morse \tilde{f} sulla triade, operando così in

maniera opposta a come abbiamo fatto nel paragrafo precedente. Analogamente succede per i due campi di vettori simil-gradiente ξ e ξ' definiti rispettivamente su $(M; V_0, V_1)$ e $(M'; V'_0, V'_1)$, che possono essere incollati in maniera unica su $M \cup_h M'$ in modo tale da dare un campo di vettori simil-gradiente $\tilde{\xi}$. Da ciò discende che:

Corollario 1.8. *Date due triadi $(M; V_0, V_1)$ e $(M'; V'_0, V'_1)$, un diffeomorfismo $h : V_1 \rightarrow V'_0$ e la triade $(M \cup_h M'; V_0, V'_1)$ allora è vero che:*

$$\mu(M \cup_h M'; V_0, V_1) \leq \mu(M; V_0, V_1) + \mu(M'; V'_0, V'_1).$$

Letto nel linguaggio dei cobordismi questo implica che dati due cobordismi c e c' la loro composizione avrà numero di Morse minore od uguale alla somma dei loro numeri di Morse.

Sappiamo dal Teorema 1.10 che ogni cobordismo può essere visto come composizione di cobordismi elementari, perciò sposteremo la nostra attenzione solo su tali cobordismi.

Sia dunque c un cobordismo con rappresentante $(M; V, V'; h, h')$ ed f una funzione di Morse definita sulla triade $(M; V, V')$ tale che abbia un unico punto critico p , con $f(p) = c$ e λ indice di p e sia $\xi(f)$ un campo di vettori simil-gradiente per f . Dalla Definizione 1.20 (2) sappiamo che per un ϵ abbastanza piccolo esiste un intorno centrato U di p e il diffeomorfismo $g : D_\epsilon^n \rightarrow U$. Possiamo inoltre scegliere a e b , numeri reali abbastanza vicini a c in modo tale che sia l'unico valore critico in $[a, b]$, poniamo $V_0 = f^{-1}(a)$ e $V_1 = f^{-1}(b)$, formando così la triade $(f^{-1}[a, b]; V_0, V_1)$.

Definiamo inoltre $V_{-\epsilon} = f^{-1}(c - \epsilon^2)$ e $V_\epsilon = f^{-1}(c + \epsilon^2)$, dove ϵ è abbastanza piccolo affinché $V_{-\epsilon}$ giaccia tra V_0 e $f^{-1}(c)$ ed allo stesso modo V_ϵ giaccia tra V_1 e $f^{-1}(c)$, richiediamo inoltre che $U \cap V_{\pm\epsilon} \neq \emptyset$. Facciamo notare che dunque in $f^{-1}[c - \epsilon^2, c + \epsilon^2]$ l'unico punto critico sarà p .

Dati questi insiemi costruiamo il seguente embedding

$$\varphi^- : S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V_{-\epsilon},$$

dato dall'espressione:

$$\varphi^-(u, \theta v) = g(\epsilon u \cosh \theta, \epsilon v \sinh \theta).$$

Chiamiamo dunque:

$$\gamma^- : \varphi^-(S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}) \subset V_{-\epsilon} \rightarrow V_0.$$

La mappa che associa ad ogni punto dell'immagine di φ^- il punto di V_0 ottenuto seguendo la curva integrale, non-singolare, di ξ che parte dal punto $\varphi^-(u, \theta v) \in V_{-\epsilon}$ fino ad un punto di V_0 .

Una costruzione analoga può essere fatta con V_1 e V_ϵ ottenendo l'embedding:

$$\varphi^+ : B^\lambda \times S^{n-\lambda-1} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V_\epsilon,$$

dove

$$\varphi^+(\theta u, v) = g(\epsilon u \sinh \theta, \epsilon v \cosh \theta).$$

E la mappa:

$$\gamma^+ : \varphi^+(B^\lambda \times S^{n-\lambda-1}) \subset V_\epsilon \rightarrow V_1.$$

Stavolta associando ad ogni punto dell'immagine di φ^+ il punto di V_1 ottenuto seguendo la curva integrale, non-singolare, di ξ che parte dal punto $\varphi^+(u, \theta v) \in V_\epsilon$ fino ad un punto di V_1 .

Possiamo allora costruire i seguenti oggetti:

Definizione 1.21. (Sfera destra e sinistra)

Dato p punto critico di f funzione di Morse su M varietà e siano definiti come sopra gli insiemi V_0, V_1, V_ϵ e $V_{-\epsilon}$, gli embedding φ^- e φ^+ e le mappe γ^- e γ^+ . Allora sia:

$$\varphi_L = \gamma^- \circ \varphi^- : S^{\lambda-1} \times B^{n-\lambda} \rightarrow V_0,$$

e

$$\varphi_R = \gamma^+ \circ \varphi^+ : B^\lambda \times S^{n-\lambda-1} \rightarrow V_1.$$

Definiamo Sfera sinistra S_L di p in V_0 l'immagine tramite φ_L di $S^{\lambda-1} \times \{0\}$ e Sfera destra S_R di p in V_1 l'immagine tramite φ_R di $\{0\} \times S^{n-\lambda-1}$.

Ciò che stiamo facendo è immergere un manico in $V_{\pm\epsilon}$ ed allungarlo fino a V_0 , risp. V_1 , quindi S_L , risp. S_R , è bordo del disco immerso in modo liscio definito come unione di tutti i segmenti delle curve integrali che partono da p e finiscono in S_L , risp. S_R , chiameremo tale disco *disco sinistro di p* , D_L , risp. *disco destro di p* , D_R . Da ciò discende che S_L , risp. S_R , è l'intersezione di V_0 , risp. V_1 , con tutte le curve integrali di ξ che portano al punto critico p .

Dato ora un cobordismo elementare abbiamo la seguente proprietà:

Teorema 1.10. Sia $(M; V_0, V_1)$ triade rappresentante di un cobordismo elementare e f una funzione di Morse su di essa con un solo punto critico p di indice λ . Sia ξ un campo di vettori simil-gradiente e D_L il disco sinistro di p associato a ξ . Allora $V_0 \cup D_L$ è un retratto di deformazione di M .

Discende da questa proprietà che:

Corollario 1.9. Nelle ipotesi del Teorema 1.10 è vero che $H_*(M, V_0; \mathbb{Z})$ è isomorfo al gruppo \mathbb{Z} degli interi in dimensione λ e zero altrimenti. Un generatore di $H_\lambda(M, V_0)$ è rappresentato da D_L .

Ora però supponiamo che f possieda diciamo k punti critici $\{p_1, \dots, p_k\}$ e sia D_i il disco sinistro relativo a p_i rispetto ad un certo ξ , allora $V_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_k$ in maniera analoga si dimostra essere retratto di deformazione di M . Se inoltre $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = \lambda$, dove λ_i è l'indice di p_i in f , allora otteniamo che $H_*(M, V_0; \mathbb{Z})$ è isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ con k addendi in dimensione λ e 0 altrimenti.

1.5 Teoremi di ordinamento

L'obbiettivo di questo paragrafo è riuscire a "ordinare" i cobordismi, e dunque le funzioni di Morse. Sappiamo già che un cobordismo può essere visto come composizione di cobordismi elementari. Dato un cobordismo elementare $(M; V_0, V_1)$ una triade tale che $(M; V_0, V_1; H_1, h_1)$ sia un rappresentante della classe di c allora sappiamo che esiste una funzione di Morse f sulla triade tale che f abbia un solo punto critico p di indice λ , diremo allora che c ha indice λ , in formula $\text{indice}(c) = \lambda$. Grazie al Teorema 1.10 sappiamo che tale definizione è ben

definita.

Quello che vorremmo dunque fare è ordinarli in maniera tale che se c è cobordismo tale che:

$$c = c_1 \dots c_m$$

Allora $\text{indice}(c_i) \leq \text{indice}(c_{i+1})$.

Consideriamo la composizione cc' di due cobordismi elementari e supponiamo sia equivalente alla composizione dd' di due altri cobordismi elementari d e d' , in maniera che:

$$\begin{aligned} \text{indice}(c) &= \text{indice}(d') \\ \text{indice}(c') &= \text{indice}(d) \end{aligned}$$

Allora diremo che la composizione cc' può essere ordinata. Ovviamente quello che ci piacerebbe è che questa operazione fosse possibile anche nel caso di composizioni più lunghe in maniera tale che potessimo per l'appunto ordinare tutta la sequenza di composizioni di un dato cobordismo c . Fortunatamente la risposta è che:

Teorema 1.11. *Ogni cobordismo può essere espresso come composizione di*

$$c = c_0 c_1 \dots c_m$$

Dove ogni c_i cobordismo ammette una funzione di Morse con solo un livello critico e tutti i punti di indice k_i

Ovviamente utilizzando il Teorema 1.3 possiamo scomporre ogni c_i in tanti cobordismi elementari quanto vale il suo numero di Morse, tutti con indice k_i . Mostriamo dunque come arrivare a tale risultato. Iniziamo con il seguente teorema:

Teorema 1.12 (Teorema Preliminare di Arrangiamento). *Sia $(M; V_0, V_1)$ una triade con funzione di Morse f tale che abbia esattamente due punti critici p, q . Supponiamo che esista un campo di vettori simil-gradiente ξ tale che il compatto K_p formato dalle traiettorie che partono da p o finiscono in p , sia disgiunto dal compatto K_q , costruito come K_p . Se $f(M) = [0, 1]$ e $a, b \in (0, 1)$, allora esiste la funzione di Morse g tale che:*

1. *Il campo di vettori ξ è un simil-gradiente per g ;*
2. *I punti critici di g sono ancora p, q e vale che $g(p) = a$ e $g(q) = b$;*
3. *Inoltre g coincide con f vicino a $V_0 \cup V_1$ ed è uguale a f più una costante in un intorno di p ed in un intorno di q*

Il teorema in realtà è valido in maniera più generale se consideriamo al posto di due soli punti p, q due insiemi di punti, $p = \{p_1, \dots, p_n\}$ e $q = \{q_1, \dots, q_n\}$, tali che ogni punto in p abbia lo stesso valore $f(p_i)$ e ogni punto di q stesso valore $f(q_i)$.

Finora non abbiamo dovuto ragionare particolarmente sulle dimensioni delle varietà considerate, ora è necessario farlo, dunque per evitare di appesantire il discorso utilizzeremo la notazione M^m per indicare che M è una varietà (differenziabile) di dimensione m .

Definizione 1.22. (Intorno prodotto)

Un intorno aperto U di una varietà $M^m \subset V^v$ tale che sia diffeomorfo a $M^m \times \mathbb{R}^{v-m}$ e che tale diffeomorfismo porta $M^m \subset U$ in $M^m \times \{0\}$, è chiamato intorno prodotto di M^m in V^v .

Lemma 1.10. Supponiamo M^m e N^n due sotto-varietà della varietà V^v . Se M^m ha un intorno prodotto in V^v e vale che $n < v - m$, allora esiste un diffeomorfismo h di V^v in se stesso isotopo all'identità, tale che inoltre $h(M^m)$ sia disgiunto da N^n .

Supponiamo di avere un cobordismo cc' con una data funzione di Morse g , composizione di due cobordismi elementari c e c' tali che il loro numero di Morse sia rispettivamente λ e λ' . Possiamo considerare due funzioni di Morse f ed f' definite su c e c' , ossia sulle triadi $(M_0; V_0, V)$ ed $(M_1; V, V_1)$ dove M_0 ed M_1 sono tali che $M_0 \cup_{\text{Id}_V} M_1$ è diffeomorfo a M , tali che il loro attaccamento ci dia g . Ora siano p e q i due punti critici di f ed f' avremo che la sfera destra di p giace in V ed analogamente fa la sfera sinistra di q . Quello che ci piacerebbe mostrare è che possiamo utilizzare i teoremi enunciati per “spostare” leggermente queste due sfere in modo tale che non si intersechino.

Abbiamo il seguente Lemma:

Lemma 1.11. Sia M una varietà compatta con bordo allora esiste un intorno di ∂M , chiamato intorno collare, diffeomorfo a $\partial M \times [0, 1)$.

Tale Lemma ci permette di prendere un collare di V in M_0 , $V \times (-1, 0]$, e un collare sempre di V , $V \times [0, 1)$, in M_1 allora il cobordismo c può essere visto come c_0c_1 e il cobordismo c' come $c'_0c'_1$ dove in c_0 giace p e in c'_1 giace q , mentre c_1 e c'_0 sono cobordismi elementari in cui giacciono i rispettivi collari di V . Dato h un diffeomorfismo di V isotopo all'identità, possiamo sostituire c_1, c'_0 con c_h, c'_h in c e c' rispettivamente. Il nostro percorso sarà dunque trovare h , un diffeomorfismo isotopo all'identità che riesce a separare la sfera destra di p e la sfera sinistra di q e di conseguenza costruire un campo di vettori simil-gradiente ξ in relazione ad h tale che le due nuove sfere ottenute attraverso ξ coincidano con l'immagine di quelle originarie attraverso h .

Indichiamo con S_R^p la sfera destra di p e S_L^q la sfera sinistra di q , se vale che $\dim V > \dim S_R^p + \dim S_L^q$, o anche posto $m = \dim M$, equivalentemente $m - 1 > (m - \lambda - 1) + (\lambda' - 1)$, allora $\lambda \geq \lambda'$ ed è possibile trovare l'isotopia che cerchiamo.

Teorema 1.13. Se $\lambda \geq \lambda'$ allora è possibile alterare in U , un intorno dato abbastanza piccolo di V , il simil-gradiente dato di g , ξ , ottenendone un altro $\bar{\xi}$, tale che con le sue curve integrali la nuova sfera destra di p in V , S_R^p , e la nuova sfera sinistra di q , S_L^q , non si intersechino.

Dimostrazione. La sfera S_R^p ha intorno prodotto in V , U , grazie a φ_R (cf. Definizione 1.21) ed il Lemma 1.10 ci da un diffeomorfismo $h : V \rightarrow V$ isotopo all'identità, per cui $h(S_R^p) \cap S_L^q = \emptyset$. L'isotopia sarà usata per alterare il simil-gradiente ξ .

Possiamo supporre senza perdita di generalità che $g(p) < \frac{1}{2} < g(q)$ e che $V = f^{-1}(\frac{1}{2})$. Sia ora $a < \frac{1}{2}$ abbastanza piccolo affinché $f^{-1}\left[a, \frac{1}{2}\right]$ ricada in

U. Le curve integrali di $\hat{\xi} = \xi/\xi(f)$ determinano un diffeomorfismo:

$$\varphi : [a, \frac{1}{2}] \times V \rightarrow f^{-1}[a, \frac{1}{2}]$$

Dove φ è definita in modo tale che $f(\varphi(t, x)) = t$, e $\varphi(\frac{1}{2}, x) = x$. Definiamo allora un altro diffeomorfismo H di $[a, \frac{1}{2}] \times V$ in se stesso ponendo $H(t, x) = (t, h_t(x))$, dove $h_t(x)$ è l'omotopia tra $[a, \frac{1}{2}] \times V$ e V dall'identità ad h costruita in modo tale che h_t sia l'identità vicino ad a e $h_t = h$ vicino a $\frac{1}{2}$. Dunque il campo di vettori su $f^{-1}[a, \frac{1}{2}]$

$$\xi' = (\varphi \circ H \circ \varphi^{-1})_* \hat{\xi}$$

coincide con $\hat{\xi}$ vicino ad $f^{-1}(a)$ e vicino ad $f^{-1}(\frac{1}{2}) = V$, inoltre vale che $\xi'(f) = 1$ identicamente. Consideriamo dunque $\bar{\xi}$ campo di vettori su M tale che coincida con $\xi(f)\xi'$ in $f^{-1}[a, \frac{1}{2}]$ e con ξ altrove, allora $\bar{\xi}$ è un simil-gradiente per f .

Ora per ogni $x \in V$, $\varphi(t, h_t(x))$ al variare di t descrive una curva integrale di $\bar{\xi}$ da $\varphi(a, x)$ in $f^{-1}(a)$ a $\varphi(\frac{1}{2}, h(x)) = h(x)$ in $f^{-1}(\frac{1}{2}) = V$. Dunque la sfera destra $\varphi(a \times S_R)$ di p in $f^{-1}(a)$ viene traslata ad $h(S_R)$ in V . Dunque $h(S_R)$ sarà la nuova sfera destra di p rispetto ad $\bar{\xi}$, indichiamola con \bar{S}_R . Ora $\bar{S}_L = S_L$ e dunque $\bar{S}_R \cap \bar{S}_L = h(S_R) \cap S_L = \emptyset$ come richiesto. \square

Come prima il teorema può essere enunciato in maniera più generale considerando il cobordismo cc' dove $p = \{p_1, \dots, p_k\}$ sono i punti critici di f , funzione di Morse del cobordismo c , tutti di indice λ , e $q = \{q_1, \dots, q_k\}$ i punti critici di f' , funzione di Morse di c' , tutti di indice λ' , allora è sempre possibile alterare il simil-gradiente ξ per g , funzione di Morse di cc' , ottenendo in un dato intorno abbastanza piccolo di V che le nuove sfere costruite con il nuovo simil-gradiente $\bar{\xi}$ siano disgiunte a coppie.

Possiamo finalmente enunciare il seguente:

Lemma 1.12. *Data la triade $(M; V_0, V_1)$ con funzione di Morse f e un simil-gradiente ξ , sia $V = f^{-1}(b)$ un livello non critico, i.e. dove non vi è nessun punto critico, e $h : V \rightarrow V$ un diffeomorfismo isotopo all'identità. Se $f^{-1}[a, b]$, con $a < b$, non contiene punti critici, allora possiamo costruire un nuovo simil-gradiente $\bar{\xi}$ per f tale che:*

1. Fuori da $f^{-1}(a, b)$ coincida con ξ ;
2. $\bar{\varphi} = h \circ \varphi$ dove φ e $\bar{\varphi}$ sono i diffeomorfismi da $f^{-1}(a)$ a V ottenuti seguendo le traiettorie di ξ e $\bar{\xi}$ rispettivamente.

Sostituendo f con $-f$ è possibile dedurre un lemma simile dove è alterato $f^{-1}(b, c)$, con $b < c$, intorno a destra invece che a sinistra di V .

Ricordiamo che ogni cobordismo c può essere espresso come composizione finita di cobordismi elementari (vedi Teorema 1.10) perciò se applichiamo il Teorema 1.13 e successivamente il Teorema di Arrangiamento Preliminare 1.12 in maniera iterata otteniamo che c ha scomposizione in cobordismi elementari $c_1 \dots c_r$ dove $\text{indice}(c_i) \leq \text{indice}(c_{i+1})$, per ogni $i = 1, \dots, r$. Se componiamo tra loro i cobordismi elementari con stesso indice otteniamo il Teorema 1.11 enunciato all'inizio del paragrafo.

La proposizione nel linguaggio delle funzioni di Morse sarà dunque:

Teorema 1.14. *Data una funzione f di Morse sulla triade $(M; V_0, V_1)$ esiste una funzione g di Morse tale che g sia auto-indicizzante ed inoltre se p è punto critico di indice λ per f allora p è punto critico di indice λ anche per g .*

Tale proposizione è dimostrabile anche senza l'aiuto dei cobordismi, per una tale dimostrazione si rimanda a [Sma61] e [Wal60].

1.6 Teoremi di cancellazione

Data una funzione f di Morse su una triade $(M; V_0, V_1)$ abbiamo già visto che i punti critici di indice λ per f limitano superiormente il numero λ -esimo di Betti dell'omologia di M relativa a V_0 . Ci piacerebbe saper abbassare questo limite in modo da poter studiare più precisamente la nostra varietà. In questo paragrafo ci occuperemo di studiare quando sia possibile e in che modo si eliminino alcuni punti critici di una data funzione di Morse f . Iniziamo con la definizione di intersezione trasversa, l'elemento principale che ci permetterà di fare ciò.

Definizione 1.23. (Intersezione trasversa)

Due varietà $M^m, N^n \subset V^v$ si dice che hanno intersezione trasversa se per ogni punto $q \in M \cap N$ lo spazio tangente a V di q , $T_q V$ viene generato dai vettori tangenti a M ed N .

Se $M \cap N = \emptyset$ ovviamente otteniamo intersezione trasversa, tuttavia se così non fosse deve accadere che $m + n \geq v$. Pensiamo alla situazione del paragrafo precedente, otteniamo che con le notazioni introdotte, le due sfere S_R^p e S_L^q relative ai due punti critici p, q possono avere intersezione (non vuota) trasversa in V , che ha dimensione $n - 1$, se $\dim S_R^p + \dim S_L^q \geq n - 1$. Posto $\text{indice}(p) = \lambda$ e $\text{indice}(q) = \lambda'$ allora l'equazione di prima ci dice che $n - \lambda - 1 + \lambda' - 1 \geq n - 1$ e dunque $\lambda' \geq \lambda + 1$. Il caso che analizzeremo e per cui sarà possibile eliminare coppie di punti critici sarà quello in cui vi è uguaglianza, ossia quando $\lambda' = \lambda + 1$. Consideriamo perciò due punti critici p, q di indice rispettivamente $\lambda, \lambda + 1$ e S_R^p e S_L^q la loro sfera destra e sinistra in V , rispettivamente di dimensione $n - \lambda - 1$ e λ . Allora abbiamo il seguente:

Teorema 1.15. *È possibile scegliere un simil-gradiente ξ tale che le due sfere S_R^p e S_L^q abbiano intersezione trasversa in V .*

Sappiamo già che S_R^p ed S_L^q sono tali che $\dim S_R^p + \dim S_L^q = \dim V$ perciò se inoltre hanno pure intersezione trasversa allora la loro intersezione sarà composta da un numero finito di punti isolati. Questo perché è possibile trovare un intorno centrato U abbastanza piccolo di $x \in S_R^p \cap S_L^q$ in V ed un sistema di coordinate in U , $\varphi = (x_1, \dots, x_{n-1})$, dove $U \cap S_R^p = \{x_1 = \dots = x_\lambda = 0\}$ e $U \cap S_L^q = \{x_{\lambda+1} = \dots = x_{n-1} = 0\}$, e dunque $U \cap S_R^p \cap S_L^q = \{q\}$, essendo V chiuso in M , e dunque compatto, abbiamo che i punti dell'intersezione devono essere finiti ed inoltre isolati.

Con la stessa notazione abbiamo anche che:

Teorema 1.16 (Primo Teorema di Cancellazione). *Se S_R^p ed S_L^q sono trasverse ed inoltre la loro intersezione consiste in un unico punto, allora il cobordismo dato da f su $(M; V_0, V_1)$ è equivalente ad un cobordismo banale.*

Non mostreremo tale dimostrazione in quanto lunga e particolarmente tecnica, rimandiamo [Mil65] per una attenta dimostrazione. La dimostrazione si basa sull'utilizzo del fatto che in un intorno U abbastanza piccolo della traiettoria da p a q , costituita da un arco da p a $S_R^p \cap S_L^q$ ed un arco da $S_R^p \cap S_L^q$ a q , è possibile alterare il simil-gradiente dato ξ in modo da ottenere in U un simil-gradiente ξ non-nullo. Estendendo in maniera continua questo simil-gradiente a tutto M in modo tale che lontano da U coincida con ξ otterremo un simil-gradiente con nessun punto critico e quindi un cobordismo con numero di Morse 0, e per il Teorema 1.6, il nostro nuovo cobordismo è equivalente ad un cobordismo banale.

Consideriamo la triade $(M^m; V_0, V_1)$ e due sottovarietà N^n e W^w tali che $n+w = m$ ed abbiano intersezione trasversa con $W \cap N = \{p_1, \dots, p_s\}$. Supponiamo che N sia orientata e lo sia anche $\nu(W)$, il fibrato normale di W in M . Per ogni $i = 1, \dots, s$ consideriamo p_i e una sezione ξ_1, \dots, ξ_n di vettori linearmente indipendenti che generano $T_{p_i}N$, l'intersezione in p_i è trasversa perciò questi vettori rappresentano anche una base per la fibra di $\nu(W)$ in p_i . Possiamo dunque definire:

Definizione 1.24. (Numero d'intersezione)

Con le notazioni appena introdotte definiamo il numero d'intersezione di N e W in p_i come:

$$\epsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{Se la base } \xi_1, \dots, \xi_n \text{ è una base orientata positiva per } \nu_{p_i}(W) \\ -1 & \text{Se la base } \xi_1, \dots, \xi_n \text{ è una base orientata negativa per } \nu_{p_i}(W) \end{cases}$$

Chiamiamo inoltre il numero di intersezione di N e W il numero $W \cdot N$ definito come somma di tutti gli ϵ_i .

Facciamo notare che $N \cdot W \neq W \cdot N$ in generale, si ricava facilmente tuttavia che $N \cdot W = (-1)^{nw} W \cdot N$. Possiamo ora enunciare il caso generale del Teorema 1.15 che servirà per dimostrare un secondo teorema di cancellazione:

Teorema 1.17. *Sia M^m una varietà senza bordo ed N^n, W^w due sotto-varietà di M tali che $n+w = m$. Supponiamo che N^n sia orientata e che lo sia anche il fibrato normale di W^w in M^m . Si supponga inoltre che $m \geq 5$ e $w \geq 3$, e, nel caso in cui $n = 1, 2$, si supponga che l'inclusione indotta $\pi_1(M \setminus W) \rightarrow \pi_1(M)$ sia 1-1.*

Dati $p, q \in N \cap W$ due punti con numeri di intersezione opposti tali che esista un laccio γ contraibile in M consistente di un arco da p a q immerso in maniera continua in N e da un arco da q a p immerso in maniera continua in W dove entrambi gli archi hanno intersezione nulla con $N \cap W \setminus \{p, q\}$.

Allora esiste un isotopia $h_t, 0 \leq t \leq 1$, dell'identità $\text{Id}_V : V \rightarrow V$ tale che

1. *L'isotopia coincida con Id_V vicino ad $M \cap M' \setminus \{p, q\}$;*
2. *$h_1(M) \cap M' = M \cap M' \setminus \{p, q\}$.*

Per la dimostrazione del Teorema rimandiamo a [Mil58], noi dimostreremo il seguente lemma che fornisce al Teorema le restrizioni sulle dimensioni:

Lemma 1.13. *Se M^m è una varietà tale che $m \geq 5$ e N una sua sotto-varietà di codimensione al massimo 3, allora un laccio in $M \setminus N$ contraibile in M è contraibile anche in $M \setminus N$*

Enunciamo prima i seguenti due lemmi di supporto dimostrati in [Mil58]:

Lemma 1.14. *Sia $f : M_1 \rightarrow M_2$ una mappa continua tra due varietà tale che sia liscia in $A \subset M_1$, sotto-insieme chiuso di M_1 . Allora esiste una mappa liscia su tutto M_1 , $g : M_1 \rightarrow M_2$, omotopa a f e che coincida con f in A .*

Se $\dim M_2 \geq 2 \dim M_1 + 1$ abbiamo un risultato più forte:

Lemma 1.15. *Sia $f : M_1 \rightarrow M_2$ una mappa liscia tra due varietà che è un embedding in $A \subset M_1$, sotto-insieme chiuso di M_1 . Se $\dim M_2 \geq 2 \dim M_1 + 1$ allora esiste un embedding su tutto M_1 , $g : M_1 \rightarrow M_2$, omotopo ad f tale che coincida con f su A .*

Siamo quindi pronti a dimostrare il Lemma 1.13.

Dimostrazione. Sia $f : (D^2, S^1) \rightarrow (M, M \setminus N)$ una mappa continua tale che dia la restrizione in M di un laccio γ contenuto in $M \setminus N$, ossia dato laccio $\gamma : S^1 \rightarrow M \setminus N$ e $H : [0, 1] \times M \rightarrow M$ la sua contrazione in M allora f è definito come segue

$$f(\rho\theta) = H(1 - \rho, \gamma(\theta)).$$

Dalle ipotesi però $\dim(M \setminus N) \geq 5 > 2 \dim S^1 + 1$ dunque per il Lemma 1.14 ed il Lemma 1.15 esiste la mappa $g : (D^2, S^1) \rightarrow (M, M \setminus N)$ tale che sia embedding su tutto D^1 e la sua restrizione ad S^1 sia omotopa alla restrizione di f a S^1 , i.e. γ . Ora $g(D^2)$ è contraibile in M dunque il suo fibrato normale in M è triviale, perciò possiamo costruire un embedding $K : D^2 \times \mathbb{R}^{n-2} \rightarrow U \subset M$ tale che $K(\rho\theta, 0) = g(\rho\theta)$. Si prenda U_0 intorno di S^1 nel bordo di $D^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$, i.e. $U_0 = S^1 \times B_\epsilon^{n-2}$, tale che se $x \in U_0$ allora $K(x) \in M \setminus N$, si ponga inoltre $N_0 = N \cap K(D^2 \times B_\epsilon^{n-2})$ e $h = \pi \circ K^{-1}|_{N_0}$, dove $\pi : D^2 \times B_\epsilon^{n-2} \rightarrow B_\epsilon^{n-2}$ è la proiezione sulla seconda coordinata del prodotto cartesiano. Questa costruzione implica che $K(D^2 \times x)$ è in N_0 , e dunque in N , se e solo se $x \in h(N_0)$.

Per costruzione $h : N_0 \rightarrow B_\epsilon^{n-2}$ e $\dim N_0 < n - 2$, essendo la codimensione di N in M maggiore di 2 allora dal Teorema di Sard otteniamo che $h(N_0)$ ha misura nulla in B_ϵ^{n-2} , perciò possiamo scegliere un x_0 in $B_\epsilon^{n-2} \setminus h(N_0)$ tale che $K(D^2 \times x_0) \cap N = \emptyset$. Discende che in $M \setminus N$ avremo $g|_{S^1} = K|_{S^1 \times 0} \cong K|_{S^1 \times x_0}$, ma noi sappiamo che per la scelta di x_0 che $K|_{D^2 \times x_0} \subset M \setminus N$ e dunque $K|_{S^1 \times x_0}$ è contraibile in $M \setminus N$. Perciò ricordando che $\gamma = f|_{S^1} \cong g|_{S^1}$ avremo l'omotopia stavolta in $M \setminus N$ tra un punto e il laccio γ . \square

Abbiamo però un secondo teorema di cancellazione:

Teorema 1.18 (Secondo Teorema di Cancellazione). *Sia data una triade $(M^n; V_0, V_1)$ e una funzione di Morse su di essa f che possieda solo due punti critici p, q di indice rispettivamente λ e $\lambda + 1$. Supponiamo M, V_0 e V_1 semplicemente connessi e che $\lambda \geq 2$ e $\lambda + 1 \leq n - 3$. Costruite la sfera destra di p rispetto ad un dato simil-gradiente ξ , S_R^p , e in maniera simile la sfera sinistra di q , S_L^q , se $S_R^p \cdot S_L^q = \pm 1$ allora M è diffeomorfa a $V_0 \times [0, 1]$.*

Come nel caso del Teorema 1.16 non dimostreremo il Secondo Teorema di Cancellazione. Facciamo notare comunque che la traccia della dimostrazione rimane quasi la stessa. Tramite il Lemma 1.15 possiamo fare in modo che S_R^p e S_L^q abbiano intersezione trasversa, se il loro numero di intersezione è non nullo allora il numero di punti dell'intersezione è dispari ed inoltre esistono almeno

due punti p_0, q_0 con numero di intersezione opposto e dunque tramite il Teorema 1.17 possiamo alterare ξ in maniera tale che vicino a V l'intersezione delle due sfere S_R^p ed S_L^q non contenga più p_0, q_0 , ed allora in maniera ricorsiva possiamo ricondurci alle ipotesi del Teorema 1.16.

Corollario 1.16. *Il Secondo Teorema di Cancellazione vale anche con le seguenti restrizioni:*

$$\lambda \geq 3, \lambda + 1 \leq n - 2$$

Il Corollario è una conseguenza del fatto che se f è una funzione di Morse su $(M; V_0, V_1)$ allora anche $-f$ su $(M; V_1, V_0)$ lo è. Ora siano p, q punti critici rispettivamente di indice $\lambda+1$ e λ allora per $-f$ saranno di indice rispettivamente $\lambda' = n - \lambda - 1$ e $\lambda' + 1 = n - \lambda$, dunque il Teorema 1.18 è vero se $\lambda' \geq 2$ e $\lambda' + 1 \leq n - 3$ ossia $n - \lambda - 1 \geq 2$ e $n - \lambda \leq n - 3$, da cui le ipotesi del Corollario.

1.7 Eliminazione di punti critici di indice 0 e 1

Purtroppo il Teorema 1.18 non copre il caso in cui $\lambda = 0, 1$. Sarà nostro compito in questo paragrafo studiarlo.

Se consideriamo come al solito la triade $(M^n; V_0, V_1)$, per i ragionamenti fatti precedentemente possiamo supporre che sia definita su di essa una funzione auto-indicizzante f e un simil-gradiente ξ . Definiamo allora le sotto-varietà:

$$M_k = f^{-1}\left[-\frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right],$$

e

$$V_{k+} = f^{-1}\left(k + \frac{1}{2}\right), k = 0, 1, \dots, n$$

Allora otteniamo che:

Lemma 1.17. *Con le notazioni appena introdotte se S_R^p è la sfera destra di dimensione $n - 2$ di p punto critico per f contenuta in V_{1+} , allora esiste sempre una 1-sfera immersa in V_{1+} che abbia intersezione trasversa con S_R^p consistente di un solo punto ed inoltre non incontri nessun'altra sfera destra.*

E quindi il teorema principale per il caso $\lambda = 0, 1$.

Teorema 1.19. *Sia data una triade $(M^n; V_0, V_1)$ e una funzione di Morse f su di essa. Se $H_0(M^n, V_0) = 0$, allora i punti critici di indice 0 possono essere cancellati in numero uguale ai punti critici di indice 1, i.e. il Teorema 1.18 è valido anche per $\lambda = 0$.*

Se invece M^n e V_0 sono semplicemente connessi e $n \geq 5$ ed f non possiede punti critici di indice 0 allora dato p_0 punto critico di indice 1 è possibile inserire una coppia di punti critici ausiliari p, q rispettivamente di indice 2 e 3 ed eliminare p_0 .

Facciamo notare che se M^n e V_0 sono semplicemente connessi allora $H_0(M^n, V_0) = 0$ quindi possiamo prima eliminare i punti critici di indice 0, eliminando in contemporanea lo stesso numero di punti critici di indice 1, e successivamente “scambiare” ogni punto critico rimanente di indice 1 con due punti di indice 2 e 3.

Ci occuperemo dunque in questa parte finale di dimostrare come data una triade $(M; V_0, V_1)$ e una funzione di Morse f su di essa si possa dimostrare che il λ -esimo gruppo di omologia di M relativa a V_0 sia isomorfo al gruppo libero generato da $m_\lambda(f)$ elementi.

Sappiamo già tramite le notazioni di inizio paragrafo che:

$$V_0 = M_{-1} \subset M_0 \subset \cdots \subset M_n = M$$

Prendiamo allora la sequenza esatta corta:

$$0 \rightarrow A/D \xrightarrow{i} B/D \xrightarrow{\pi} B/A \rightarrow 0, \quad (1.3)$$

dove $A = C_*(M_{\lambda-1}, \mathbb{Z})$, $D = C_*(M_{\lambda-2}, \mathbb{Z})$ e $B = C_*(M_\lambda, \mathbb{Z})$, complessi di catene naturalmente definiti con l'operatore di bordo ∂ .

Sia $K : H_n(B/A) \rightarrow H_{n-1}(A/D)$ l'operatore costruito attraverso la sequenza di Mayer-Vectoris. Preso il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A_n/D_n & \xrightarrow{i} & B_n/D_n & \xrightarrow{\pi} & B_n/A_n \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 0 & \longrightarrow & A_{n-1}/D_{n-1} & \xrightarrow{i} & B_{n-1}/D_{n-1} & \xrightarrow{\pi} & B_{n-1}/A_{n-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow
 \end{array}$$

utilizzando con la notazione classica $Z_n(B/A)$ per indicare $\ker_n(B/A) = \{c \in (B/A)_n \mid \partial c = 0\}$ e $B_n(B/A)$ per indicare $Im_{n+1}(B/A) = \{\partial c \mid c \in (B/A)_{n+1}\}$, il Teorema di Mayer-Vectoris ci dice in dettaglio come agisce K . E d'obbligo avvisare il lettore che la scrittura si appesantirebbe notevolmente se ponessimo le parentesi quadre per indicare le classi quoziente, dunque con un abuso di notazione lasciamo sottinteso che nelle varie operazioni che faremo ci riferiamo sempre a dei rappresentanti di tali classi, i quali vivono tutti in B , ma le cui classi quoziente tuttavia non sempre vivono nello stesso spazio.

Preso $c \in Z_n(B/A)$ abbiamo infatti $K(c) = a$ dove $a \in Z_{n-1}(A/D)$ è tale che $i(a) = \partial b$ per un $b \in B_n(B/D)$ con la proprietà che $\pi(b) = c$. A causa della particolarità della nostra sequenza otteniamo che $a - \partial b \in D_{n-1}$ mentre $b - c \in A_n$, dunque $\partial(b - c) \in A_{n-1}$. Ora per ogni n abbiamo $D_n \subset A_n \subset B_n$ dunque $a - \partial b \in D_{n-1} \subset A_{n-1}$, ma allora $a - \partial b + \partial b - \partial c = a - \partial c \in A_{n-1}$. In B/A allora le classi quoziente di ∂c e $K(c) = a$ coincidono.

Definiamo $C_\lambda = H_\lambda(M_\lambda, M_{\lambda-1})$ allora fissato $n = \lambda$ definiamo

$$\tilde{\partial} := K : H_\lambda(B/A) = C_\lambda \rightarrow H_{\lambda-1}(A/D) = C_{\lambda-1}.$$

Possiamo allora definire:

Definizione 1.25. *Sia M una varietà e f una funzione di Morse auto-indicizzante, utilizzando le notazioni di inizio paragrafo, sia $C_\lambda = H_\lambda(M_\lambda, M_{\lambda-1})$, allora definiamo il complesso di catene $C_* = \oplus C_\lambda$ con l'operatore di bordo*

$$\tilde{\partial} : C_\lambda \rightarrow C_{\lambda-1},$$

ricavato della sequenza esatta lunga in omologia della tripletta $M_{\lambda-2} \subset M_{\lambda-1} \subset M_\lambda$ per ogni λ .

Grazie al fatto che K coincide nelle classi quoziente con ∂ è triviale verificare che $\tilde{\partial}$ è un operatore di bordo ben definito.

Lemma 1.18. *Dato $(C_*, \tilde{\partial})$ costruito come nella Definizione 1.25 allora è vero che $H_\lambda(C_*) \cong H_\lambda(M, V_0)$, dove il gruppo dei coefficienti è sottinteso essere \mathbb{Z} .*

Dimostrazione. Sappiamo che $H_i(M_\lambda, M_{\lambda-1}) = 0$ se $i \neq \lambda$ poiché non vi sono che punti critici di indice λ in $M_\lambda \setminus M_{\lambda-1}$ mentre se $i = \lambda$ allora $H_\lambda(M_\lambda, M_{\lambda-1})$ è uguale a $\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ con tanti addendi diretti quanti sono i punti critici di ordine λ , come da Teorema 1.10. Per brevità scriveremo $H_k^{i,j}$ per indicare $H_k(M_i, M_j)$ dunque consideriamo il diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \dots & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 & & & H_{\lambda}^{\lambda-1, \lambda-2} & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 \dots & \longrightarrow & H_{\lambda+1}^{\lambda+1, \lambda-2} & \longrightarrow & H_{\lambda+1}^{\lambda+1, \lambda} & \xrightarrow{f} & H_{\lambda}^{\lambda, \lambda-2} & \longrightarrow & H_{\lambda}^{\lambda+1, \lambda-2} & \longrightarrow & H_{\lambda}^{\lambda+1, \lambda} & \longrightarrow & \dots \\
 & & & & & & \downarrow & & & & & & & \\
 & & & & & & K & & & & & & & \\
 & & & & & & H_{\lambda}^{\lambda, \lambda-1} & & & & & & & \\
 & & & & & & \downarrow & & & & & & & \\
 & & & & & & H_{\lambda-1}^{\lambda-1, \lambda-2} & & & & & & & \\
 & & & & & & \downarrow & & & & & & & \\
 & & & & & & H_{\lambda-1}^{\lambda, \lambda-2} & & & & & & & \\
 & & & & & & \downarrow & & & & & & & \\
 & & & & & & H_{\lambda-1}^{\lambda, \lambda-1} & & & & & & & \\
 & & & & & & \downarrow & & & & & & & \\
 & & & & & & \dots & & & & & & &
 \end{array}$$

Dove la sequenza orizzontale è la sequenza esatta in omologia della tripletta $(M_{\lambda+1}, M_{\lambda}, M_{\lambda-2})$ mentre quella verticale discende dalla tripletta $(M_{\lambda}, M_{\lambda-1}, M_{\lambda-2})$, inoltre l'operatore K è quello che ricaviamo dall'Equazione Equazione 1.3, e dunque coincide nelle classi quoziente con ∂ , ed f è l'operatore la cui esistenza è garantita dal Teorema di Mayer-Viectoris. Ora con le nuove notazioni $H_{\lambda}^{i, i-1} = 0$ se $i \neq \lambda$ e $H_{\lambda}^{\lambda, \lambda-1} = C_{\lambda}$, allora il diagramma sopra può essere semplificato come segue:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & H_{\lambda+1}^{\lambda+1, \lambda-2} & \longrightarrow & C_{\lambda+1} & \xrightarrow{f} & H_{\lambda}^{\lambda, \lambda-2} \longrightarrow H_{\lambda}^{\lambda+1, \lambda-2} \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & C_{\lambda} & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & K & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & C_{\lambda-1} & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & H_{\lambda-1}^{\lambda, \lambda-2} & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & &
 \end{array}$$

Dunque per le proprietà delle sequenze esatte otteniamo che $H_{\lambda}^{\lambda, \lambda-2} \cong \ker K|_{C_{\lambda}}$ ed inoltre $H_{\lambda}^{\lambda+1, \lambda-2} \cong \operatorname{coker} f|_{C_{\lambda+1}}$. Ora però per l'operatore f possiamo fare esattamente lo stesso discorso fatto per l'operatore K (cf. Equazione Equazione 1.3) ponendo stavolta $A = C_*(M_{\lambda+1}, \mathbb{Z})$, $B = C_*(M_{\lambda}, \mathbb{Z})$ e $D = C_*(M_{\lambda-2}, \mathbb{Z})$, dunque otteniamo che anche f coincide nelle classi quoziente con $\tilde{\partial}$, nel caso particolare di $H_{\lambda+1}^{\lambda+1, \lambda} = C_{\lambda+1}$ coincide con $\tilde{\partial}$. Ma allora $H_{\lambda}^{\lambda+1, \lambda-2} \cong \ker \tilde{\partial}|_{C_{\lambda}} / \operatorname{Im} \tilde{\partial}|_{C_{\lambda+1}} \cong H_{\lambda}(C_*)$.

Se dimostriamo che $H_{\lambda}(M, V_0) \cong H_{\lambda}^{\lambda+1, \lambda-2}$ avremo la tesi.

1. Se $i > \lambda$ allora $H_i(M_{\lambda}, V_0) = 0$;
2. Se $i < \lambda$ allora $H_i(M_{\lambda}, V_0) \cong H_i(M_{\lambda+1}, V_0) \cong H_i(M, V_0)$;
3. $H_{\lambda}(M_{\lambda+1}, M_{\lambda-2}) \cong H_{\lambda}(M, V_0)$;

1) Sicuramente $H_i(M_{-1}, V_0) = 0$ per $i > -1$ dunque consideriamo la sequenza:

$$\cdots \rightarrow H_i(M_{\lambda-1}, V_0) \rightarrow H_i(M_{\lambda}, V_0) \rightarrow H_i(M_{\lambda}, M_{\lambda-1}) \rightarrow H_{i-1}(M_{\lambda-1}, V_0) \rightarrow \dots$$

Supponiamo per induzione che se $i > \lambda - 1$ allora $H_i(M_{\lambda-1}, V_0) = 0$, otteniamo da tale ipotesi e dalla sequenza che se $i > \lambda$ allora $H_i(M_{\lambda}, V_0) \cong H_i(M_{\lambda}, M_{\lambda-1})$, perciò $H_i(M_{\lambda}, V_0) = 0$ se $i > \lambda$.

2) Prendiamo la sequenza:

$$\cdots \rightarrow H_{i+1}(M_{\lambda+1}, M_{\lambda}) \rightarrow H_i(M_{\lambda}, V_0) \rightarrow H_i(M_{\lambda+1}, V_0) \rightarrow H_i(M_{\lambda+1}, M_{\lambda}) \rightarrow \dots,$$

otteniamo che quando $i < \lambda$ è vero che $H_i(M_\lambda, V_0) \cong H_i(M_{\lambda+1}, V_0)$. Iterando risulta che $H_i(M_\lambda, V_0) = H_i(M, V_0)$.

3) Sia data la sequenza:

$$\cdots \rightarrow H_\lambda(M_{\lambda-2}, V_0) \rightarrow H_\lambda(M_{\lambda+1}, V_0) \rightarrow H_\lambda(M_{\lambda+1}, M_{\lambda-2}) \rightarrow H_{\lambda-1}(M_{\lambda-2}, V_0) \cdots,$$

dalle relazioni precedenti la si può riscrivere come

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow H_\lambda(M, V_0) \rightarrow H_\lambda(M_{\lambda+1}, M_{\lambda-2}) \rightarrow 0 \cdots$$

Possiamo dunque concludere che $H_\lambda(M, V_0) \cong H_\lambda(M_{\lambda+1}, M_{\lambda-2})$.

Combinando questo risultato con l'isomorfismo tra $H_\lambda(M_{\lambda+1}, M_{\lambda-2})$ e $H_\lambda(C_*)$ otteniamo che $H_\lambda(C_*) \cong H_\lambda(M, V_0)$. \square

Capitolo 2

Teoria di Morse Discreta

Il termine “Teoria di Morse” fino a pochi decenni fa era utilizzato per indicare solamente l’analisi di varietà differenziabili attraverso lo studio delle funzioni di Morse. Negli anni novanta Robin Forman introduce un analogo strumento per i CW-complessi, la *Teoria di Morse discreta* (si guardi [For95]). Tale teoria studia particolari funzioni sui CW-complessi che emulano le proprietà possedute dalle funzioni di Morse nel caso continuo. Il seguente capitolo verterà sull’introdurre e mostrare tali proprietà in tale ambito discreto, limitandosi tuttavia al caso più semplice dei complessi simpliciali.

Definiremo una funzione di Morse f su un complesso simpliciale M e mostreremo come tramite essa si possano dimostrare risultati analoghi a quelli che abbiamo visto nel capitolo precedente per la teoria di Morse continua.

Facciamo notare che alcune dimostrazioni verranno omesse per brevità, per questa parte ci siamo riferiti principalmente al lavoro di Forman [For95] e rimandiamo dunque ad esso per eventuali approfondimenti.

2.1 Introduzione e primi concetti

In questo paragrafo introdurremo i primi concetti della Teoria di Morse discreta. È doveroso far notare che nella nostra trattazione abbiamo preferito non utilizzare il linguaggio dei CW-complessi, malgrado in letteratura sia quello con cui vengono espressi i teoremi principali. Piuttosto utilizzeremo il linguaggio dei complessi simpliciali, essi sono infatti strutture più semplici dei CW-complessi, ma permettono attraverso modifiche minori di passare comunque al caso generale dei CW-complessi. Consigliamo ad ogni modo al lettore interessato di consultare [LW69] per un’introduzione alla teoria dei CW-complessi e il lavoro di Forman [For95] per l’estensione dal caso simpliciale al caso dei CW-complessi. Incominciamo con l’introdurre le strutture principali con cui lavoreremo.

Ricordiamo che una p -cella è uno spazio topologico σ omeomorfo ad una p -palla, dove per p -palla intendiamo lo spazio $D^p = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x\| \leq 1\}$. Data σ una p -cella e $h : D^p \rightarrow \sigma$, l’omeomorfismo con D^p , denoteremo la frontiera di σ con $\partial\sigma = h(S^p)$, dove $S^p = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x\| = 1\}$.

Sia M un CW-complesso (cf. Definizione 1.7), su di esso abbiamo un ordine parziale naturalmente definito sulle sue celle, l'inclusione, che denoteremo con $<$. Se $\sigma < \tau$ diremo che σ è una *faccia* di τ e che τ *co-faccia* di σ . Consideriamo ora $h : D^p \rightarrow M$ l'embedding di τ in M . Chiameremo σ una *faccia regolare* di τ se:

- (i) $h : h^{-1}(\sigma) \rightarrow \sigma$ è un omeomorfismo
- (ii) $h^{-1}(\sigma)$ è una r -palla chiusa per un certo r

Se σ è una faccia di τ ma non è regolare la chiameremo semplicemente *faccia irregolare* di τ .

Nota: Per semplificare la notazione d'ora in avanti scriveremo semplicemente σ^p quando σ è una cella di dimensione p in M . Indicheremo inoltre con K_p l'insieme delle celle di dimensione p di M e con K l'insieme di tutte le celle di M .

Un *simplexso* è un politopo di dimensione p inviluppo convesso di $p + 1$ vettori linearmente indipendenti in \mathbb{R}^{p+1} . Un *complesso simpliciale* è dunque un CW-complesso finito dove ogni p -cella è omeomorfa ad un p -simplexso, in particolare in un complesso simpliciale si ha che se σ è faccia di τ allora σ è faccia regolare di τ .

D'ora in poi a meno che non venga specificato diversamente quando ci riferiamo a un complesso intendiamo riferirci a un complesso simpliciale.

Possiamo quindi passare ad introdurre le prime definizioni della Teoria di Morse discreta:

Definizione 2.1. Una funzione di Morse su M è una funzione

$$f : K \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che per ogni $\sigma^p \in K$ risulta vero che:

1. Se σ^p è una faccia irregolare di τ^{p+1} allora $f(\sigma^p) < f(\tau^{p+1})$;
2. $\#\{\tau^{p+1} > \sigma^p \mid f(\tau^{p+1}) \leq f(\sigma^p)\} \leq 1$;
3. Se v^{p-1} è una faccia irregolare di σ^p allora $f(\sigma^p) > f(v^{p-1})$;
4. $\#\{v^{p-1} < \sigma^p \mid f(v^{p-1}) \geq f(\sigma^p)\} \leq 1$.

Per ogni complesso è sempre possibile trovare una funzione di Morse su di esso, un esempio banale è la funzione $f(\sigma^p) = p$.

Nota: Un complesso simpliciale è sempre un complesso regolare e dunque presa una tripletta $v < \sigma < \tau$ esiste sempre una $\tilde{\sigma} \neq \sigma$ tale che $v < \tilde{\sigma} < \tau$. Se esistessero $v < \sigma < \tau$ tali che $f(v) \geq f(\sigma) \geq f(\tau)$ allora avremmo dalla Definizione 2.1 che $f(\tilde{\sigma}) \geq f(v)$ e $f(\tau) \geq f(\tilde{\sigma})$ e perciò $f(\tilde{\sigma}) \geq f(v) \geq f(\sigma) \geq f(\tau) \geq f(\tilde{\sigma})$. Avremo dunque che $f(\tau) = f(\sigma) = f(\tilde{\sigma})$ in contraddizione con la Definizione 2.1, perciò in realtà è possibile riassumere le condizioni espresse nella Definizione 2.1 in un'unica espressione:

$$\forall \sigma \in K \quad \#\{\tau > \sigma \mid f(\sigma) \geq f(\tau)\} + \#\{v < \sigma \mid f(\sigma) \leq f(v)\} \leq 1. \quad (2.1)$$

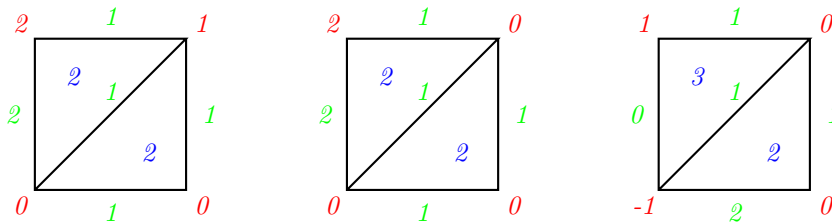
D'ora in poi lavoreremo sempre con funzioni di Morse. Un concetto fondamentale della Teoria di Morse è il concetto di punto critico:

Definizione 2.2. Data una funzione $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una cella $\sigma^p \in K$ è un punto critico di indice p per f se:

$$\begin{aligned} \#\{\tau^{p+1} > \sigma^p \mid f(\tau^{p+1}) \leq f(\sigma^p)\} &= 0 \\ \#\{v^{p-1} < \sigma^p \mid f(v^{p-1}) \geq f(\sigma^p)\} &= 0. \end{aligned}$$

Il valore $f(\sigma^p)$ viene chiamato valore critico per f e con $m_p(f)$ indichiamo il numero di punti critici di indice p .

Esempio 2.1. (Funzioni di Morse)



Di queste tre funzioni solo quella a destra è una funzione di Morse. Infatti nella funzione a sinistra il vertice in alto a destra è tale che $\#\{\sigma > v \mid f(\sigma) \leq f(v)\} = 3$ mentre in quella centrale lo spigolo sinistro viola l'Equazione 2.1.

La definizione che abbiamo dato non è l'unica che si trova in letteratura. Vi è un'altra definizione che viene utilizzata e in certi casi è più utile.

Definizione 2.3. Sia M un complesso e K l'insieme delle sue celle. Una funzione di Morse discreta è una funzione $f : K \rightarrow \mathbb{Z}$. Tale che:

1. Se $\sigma < \tau$ allora $f(\sigma) \leq f(\tau)$;
2. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$ la cardinalità di $f^{-1}(z)$ è al massimo 2;
3. Se $f(\sigma) = f(\tau)$, allora o $\sigma < \tau$ altrimenti $\tau < \sigma$

Possiamo dunque riscrivere la definizione di punto critico, che rimane identica, come segue:

σ^p è un punto critico di indice p per f se la cardinalità della controimmagine di $f(\sigma)$ è 1.

Le due definizioni sono in realtà differenti, ma dal punto di vista della Teoria di Morse discreta i risultati che si ottengono sono gli stessi, come dimostreremo nel Capitolo 2.4.

2.2 Il Teorema Principale

Consideriamo M un complesso ed f una funzione di Morse, sia c un numero reale, allora possiamo definire il sotto-livello di f per c come:

$$M(c) := \bigcup_{f(\tau) \leq c} \bigcup_{\sigma \leq \tau} \sigma.$$

Quello che vogliamo mostrare è che attraverso lo studio dei vari $M(c)$ al variare di c possiamo studiare l'omologia di M . Per fare ciò dovremo dimostrare che se due complessi di questo tipo differiscono solo per punti non critici allora sono uno il retratto di deformazione dell'altro, mentre ciò non succede se differiscono di un punto critico.

Iniziamo dunque ad introdurre il concetto di collassamento:

Definizione 2.4 (Collassamento). Sia M un complesso ed N un suo sotto-complesso. Diciamo che N è un collassamento elementare di M , $M \searrow N$ se esistono due celle τ^{p+1}, σ^p tali che:

- σ^p è una faccia di τ^{p+1}
- σ^p non è faccia di altre celle
- $M = N \cup \sigma^p \cup \tau^{p+1}$.

In maniera analoga diremo che M collassa in N se esiste una sequenza finita di collassamenti elementari $M \searrow M_1 \searrow \cdots \searrow M_n \searrow N$, in questo caso scriveremo anche $M \searrow N$.

Nota: Se N è un collassamento di M allora la loro omologia è la stessa. Per induzione possiamo limitarci a mostrare che vale per un collassamento elementare. Siano τ^{p+1} e σ^p le celle coinvolte nel collassamento, sappiamo che τ^{p+1} è omeomorfa ad una $(p+1)$ -palla, σ^p ad una p -palla e $\partial\tau^{p+1}$ ad una $(p+1)$ -sfera, perciò M può essere riscritto come $N \cup_{\partial\tau^{p+1} \setminus \sigma^p} \tau^{p+1}$. Dunque otteniamo che N è un retratto di deformazione di M ottenuto tramite la retrazione di τ^{p+1} su $\partial\tau^{p+1} \setminus \sigma^p$ ciò implica che M ed N hanno la stessa omologia.

A volte per brevità se in M σ è l'unica faccia di τ allora diremo che σ è *faccia libera di τ in M* .

La domanda a cui vogliamo rispondere ora è:

Sia $a < b$ tali che $M(b) \setminus M(a)$ contiene solo punti non critici allora la loro omotopia è la stessa?

La risposta è contenuta in questo lemma:

Lemma 2.1. *Se $a < b$ sono due numeri reali tali che $[a, b]$ contiene unicamente valori non critici per f allora:*

$$M(b) \searrow M(a).$$

Dunque l'omologia di $M(b)$ coincide con quella di $M(a)$.

Dimostrazione. Consideriamo f funzione di Morse secondo la Definizione 2.3. Se $f^{-1}[a, b]$ è vuoto allora non c'è nulla da provare essendo $M(b) = M(a)$. Supponiamo allora che $f^{-1}[a, b] \neq \emptyset$ allora $f^{-1}[a, b] = \{\sigma_1, v_1, \dots, \sigma_n, v_n\}$ dove per ogni i abbiamo che $\sigma_i > v_i$ e $f(\sigma_i) = f(v_i) < f(\sigma_{i+1})$. Possiamo suddividere l'intervallo $[a, b]$ in intervalli più piccoli $a = a_1 < b_1 = a_2 < \dots < b_{n-1} = a_n < b_n = b$ tali che valga che $f^{-1}[a_i, b_i] = \{\sigma_i, v_i\}$. Se dimostriamo che $M(b_n) \searrow M(a_n) = M(b_{n-1})$ allora per iterazione otterremo la tesi. Eliminando per brevità i pedici possiamo riscrivere $f^{-1}[a, b] = \{\sigma, v\}$.

Dovremo dimostrare che v è faccia solo di σ in $M(b)$, ma qualsiasi co-faccia di v diversa da σ , $\tilde{\sigma}$, per la Definizione 2.3 ha valore maggiore di $f(v) = f(\sigma)$ e dunque di b , dunque non sta in $M(b)$. Perciò $M(b) = M(a) \cup \sigma \cup v$ e v è faccia solo di σ in $M(b)$, ossia $M(b) \searrow M(a)$. \square

Dunque se consideriamo $a < b$ e i due complessi $M(b)$ e $M(a)$ tali che $M(b) \setminus M(a)$ non contiene punti critici allora il tipo di omologia di $M(a)$ coincide con quella di $M(b)$, diversamente accade per il caso in cui $M(b) \setminus M(a)$ contenga punti critici:

Lemma 2.2. *Supponiamo σ^p punto critico con $f(\sigma^p) \in [a, b]$, dove $f^{-1}([a, b])$ non contiene ulteriori punti critici. Allora $M(b)$ è omotopicamente equivalente a*

$$M(a) \bigcup_{\partial e^p} e^p.$$

Dove e^p indica una p -cella con frontiera ∂e^p

Dimostrazione. Come nella dimostrazione precedente consideriamo f funzione di Morse secondo la Definizione 2.3. Abbiamo quindi che

$$f^{-1}[a, b] = \{\sigma_1, \tau_i, \dots, \sigma_{i-1}, \tau_{i-1}, \sigma_i = \sigma^p, \sigma_{i+1}, \tau_{i+1}, \dots, \sigma_n, \tau_n\},$$

dove solo $\sigma_r = \sigma^p$ è critico ed inoltre $f(\sigma_j) = f(\tau_j) < f(\sigma_{j+1}) = f(\tau_{j+1})$ per ogni $j \neq i, i+1$. Dividiamo dunque $[a, b]$ in intervalli più piccoli $a = a_1 < b_1 = a_2 < \dots < a_n < b_n = b$ tali che $f^{-1}[a_j, b_j] = \{\sigma_j, \tau_j\}$ e $f^{-1}[a_i, b_i] = \{\sigma_i\}$. Dal Lemma 2.1 abbiamo che $M(a_i) \searrow M(a)$ ed inoltre $M(b) \searrow M(b_i)$ dunque il nostro lemma si riduce a dimostrare che $M(b_i)$ è omotopicamente equivalente a $M(a_i) \cup_{e^p} e^p$.

Ora σ^p è critico, se τ^{p+1} è una co-faccia di σ^p allora $f(\tau^{p+1}) > b_i > f(\sigma^p)$ e se $v^{p-1} < \sigma^p$ allora $f(v^{p-1}) < a_i < f(\sigma^p)$. Otteniamo allora che ogni faccia di σ^p sta in $M(a_i)$, ossia $\partial\sigma^p \subset M(a_i)$, ma anche che $\sigma^p \not\subset M(a_i)$ perciò vale che $M(b_i) = M(a_i) \cup_{\partial\sigma^p} \sigma^p$, dove la mappa di attaccamento è l'identità e σ^p è una p -cella come richiesto. \square

Possiamo quindi concludere combinando i due lemmi appena dimostrati con quello che è probabilmente il teorema principale della teoria di Morse:

Teorema 2.1. *Sia M un complesso e f una funzione di Morse allora M è omotopicamente equivalente a un CW-complesso con tante p -celle quanto vale $m_p(f)$.*

Il seguente teorema è esattamente l'analogo discreto del Teorema 1.4 enunciato per la Teoria di Morse continua.

2.3 Teorema della Sfera

In questo paragrafo approfondiremo, usando l'equivalenza omotopica appena vista, come la teoria di Morse discreta possa dare dei risultati concreti dal punto di vista dello studio di un complesso. Mostreremo infatti che sotto alcune restrizioni un complesso n -dimensionale che ammette una funzione di Morse f con solo due punti critici di indice 0 ed n sia omeomorfo ad una n -sfera.

Inizieremo studiando quando un complesso ammette una funzione di Morse tale che $m_0(f) = 1$ e $m_n(f) = 1$, ossia quella che viene chiamata *funzione polare*. Per mostrare ciò abbiamo bisogno di controllare come le funzioni di Morse si comportino rispetto alla restrizione ed all'estensione ossia:

Dato un complesso M e N un suo sotto-complesso, se f è una funzione di Morse su M , risp. N , la sua restrizione su N , risp. la sua estensione ad M , esiste come funzione di Morse?

Per quanto riguarda la restrizione la risposta è immediata:

Teorema 2.2. *Sia M un complesso e $N \subset M$ un sotto-complesso, se f è una funzione di Morse su M allora la sua restrizione ad N è una funzione di Morse.*

Nota: Il teorema appena enunciato è una diretta conseguenza della definizione di funzione di Morse, sia essa la Definizione 2.1 o la Definizione 2.3. Concentriamoci la nostra attenzione ora su come cambia l'insieme dei punti critici.

Supponiamo di avere $\sigma \in \partial N$ e $\tau \in M \setminus N$ tali che $\tau > \sigma$ e $f(\tau) \leq f(\sigma)$, i.e. σ non è critico in M per f . La restrizione di f su N non è definita su τ perciò σ sarà critica in N .

Nel caso dell'estensione abbiamo invece il seguente teorema:

Teorema 2.3. *Sia M un complesso ed $N \subset M$ un sotto-complesso. Allora qualsiasi funzione di Morse su N può essere estesa ad una funzione di Morse su M , i.e. dato g , una funzione di Morse su N , esiste f , funzione di Morse su M , tale che:*

$$g(\sigma) = f(\sigma)$$

per ogni σ in N .

Dimostrazione. Consideriamo g funzione di Morse secondo la Definizione 2.1. Sia $c = \max_{\sigma \subseteq N} g(\sigma)$, sia allora f una funzione di M definita come segue:

$$f(\sigma) = \begin{cases} g(\sigma) & \text{se } \sigma \subseteq N \\ c + \dim \sigma & \text{se } \sigma \not\subseteq N \end{cases}$$

La funzione f è per costruzione una funzione di Morse secondo la Definizione 2.1. \square

Osserviamo che stavolta g ed f hanno gli stessi punti critici di in N ed inoltre ogni cella di $M \setminus N$ è critica. Se N è un collassamento di M possiamo eliminare questa eccessiva quantità di punti critici.

Teorema 2.4. *Sia M un complesso ed $N \subseteq M$ un sotto-complesso. Consideriamo g funzione di Morse su N , se $M \searrow N$ allora g può essere estesa ad una funzione di Morse f definita su M tale che rispetto ad f in $M \setminus N$ non vi siano punti critici e che valga:*

$$M(c) = N$$

Dove $c = \max_{\sigma \subseteq N} g(\sigma)$.

Dimostrazione. Dalle definizioni di collassamento abbiamo che se $M \searrow N$ allora esiste una sequenza finita di collassamenti elementari da M fino a N . Se dimostriamo il caso N collassamento elementare di M allora la tesi seguirà per induzione.

Dunque sia N collassamento elementare di M , i.e. $M = N \cup \sigma^p \cup \tau^{p+1}$, e g funzione di Morse secondo la Definizione 2.1. Posto $c = \max_{\sigma \subseteq N} g(\sigma)$, definiamo la funzione f su M nella seguente maniera:

0

$$f(v) = \begin{cases} g(v) & \text{se } v \neq \sigma^p, \tau^{p+1}, \\ c + 2 & \text{se } v = \sigma^p, \\ c + 1 & \text{se } v = \tau^{p+1}. \end{cases}$$

La funzione f è una funzione di Morse su M e sia σ^p che τ^{p+1} non sono punti critici di f essendo $f(\tau^{p+1}) < f(\sigma^p)$, dunque l'enunciato è vero nel caso di un collassamento elementare e dunque per induzione nel caso in cui M sia collassamento di N . \square

Per questa ultima parte del paragrafo introduciamo un oggetto più generale del complesso simpliciale, i poliedri.

Definizione 2.5. *Un poliedro è un CW-complesso tale che possa essere immerso in uno spazio Euclideo in maniera tale che ogni sua p -cella sia convessa e giaccia in un solo sottospazio affine di dimensione p .*

Ovviamente un complesso simpliciale è un poliedro ed inoltre possiamo estendere i teoremi sulla restrizione e sull'estensione di funzioni di Morse dal caso simpliciale al caso dei poliedri senza alcuna modifica.

Definizione 2.6. *Sia M un n -poliedro e f una funzione di Morse discreta su M . Diciamo che f è una funzione polare se:*

$$m_0(f) = m_n(f) = 1$$

Il nostro obiettivo sarà dimostrare che per certi tipi di poliedri è sempre possibile definire una funzione polare ed inoltre che se un poliedro ammette una funzione polare con due soli punti critici allora esso, sotto alcune restrizioni, è effettivamente omeomorfo ad una sfera n -dimensionale per un certo n . Iniziamo quindi col determinare per quali poliedri possiamo sempre definire una funzione polare.

Teorema 2.5. *Sia M un poliedro connesso. Allora M possiede una funzione di Morse f con $m_0(f) = 1$, inoltre se v è un vertice di M , allora f può essere scelto in modo tale che v sia l'unico punto critico di f di indice 0.*

Dimostrazione. Sia M_1 l'1-scheletro di M allora M_1 sarà un grafo connesso. Sia dunque \mathcal{T} un suo albero massimale, \mathcal{T} sarà un sotto-grafo connesso di M_1 che contiene ogni vertice di M_1 e perciò di M . Sia v un vertice, sappiamo che essendo un albero \mathcal{T} è contraibile, i.e. $\mathcal{T} \searrow v$. Dal Teorema 2.4 data g funzione su $\{v\}$ possiamo costruire f funzione di Morse su \mathcal{T} tale che i punti critici di g siano gli stessi di f . Ora però v è l'unico punto critico di indice 0 di g , e dunque lo stesso varrà per f .

Usiamo il Teorema 2.3 dunque per costruire una funzione di Morse su tutto M , \tilde{f} . Sappiamo che $\mathcal{T} \subset M_1 \subset M$ allora possiamo estendere f prima ad M_1 e poi ad M . In $M_1 \setminus \mathcal{T}$ ed $M \setminus M_1$ non sono presenti celle di dimensione 0 dunque $m_0(\tilde{f}) = m_0(f) = m_0(g) = 1$. \square

Siamo quindi pronti per enunciare e dimostrare quando un poliedro ammette una funzione polare.

Teorema 2.6. *Sia M un poliedro connesso che è topologicamente una varietà compatta di dimensione n con bordo. Allora esiste una funzione di Morse su M ed inoltre se v è un vertice e σ una cella di dimensione n esiste una funzione polare tale che v sia l'unico punto critico di indice 0 e σ sia l'unico punto critico di indice n .*

Dimostrazione.

Se $n = 0$ allora $M \equiv v^0$ e dunque ogni funzione di Morse su M è polare.

Se $n = 1$ allora M dev'essere omeomorfo a un cerchio. Sia $N = M \setminus \sigma^1$, allora $N \searrow v^0$ e dunque N possiede una funzione di Morse f con un solo punto critico di indice 0, diciamo v^0 . Se usiamo il Teorema 2.3 otteniamo che la funzione g , estensione di f su M , possiede due punti critici che sono v^0 e σ^1 , l'unica cella di $M \setminus N$.

Se infine $n \geq 2$ consideriamo $N = M \setminus \sigma^n$. N sarà un poliedro connesso che è topologicamente una varietà di dimensione n con bordo. Consideriamo un collassamento $N \searrow L$ ottenuto considerando la retrazione di ogni n -faccia di N lungo una sua $(n - 1)$ -faccia libera. Ora però se L fosse di dimensione n ,

ossia contenesse delle celle di dimensione n allora L avrebbe bordo non vuoto. Consideriamo infatti τ^n in L e un'altra faccia n -dimensionale di M che non sta in L , $\tilde{\tau}^n$. Allora possiamo considerare una sequenza finita di n -celle, $\{\tau^n = \tau_0^n, \tau_1^n, \dots, \tau_{k-1}^n, \tilde{\tau}^n = \tau_k^n\}$, tali che condividano un bordo, *i.e.* $\tau_i \cap \tau_{i+1} = \sigma_i^{n-1}$. Per un certo j dovrà accadere che τ_j^n non sia più in L ed allora otterremo che σ_{j-1}^n è la faccia in comune tra τ_{j-1}^n e τ_j^n e poiché solo τ_{j-1}^n sta in L allora σ_{j-1}^{n-1} in L sarà faccia libera di τ_{j-1}^{n-1} in L e dunque potremmo ancora collassare n -celle in contraddizione con la costruzione di L (vedi [Gla70, Lemma II.7]).

Dunque L è un sotto-complesso di dimensione $n-1$ e contiene N_{n-2} , l' $(n-2)$ -scheletro di N , che non viene modificato dai collassamenti di n -celle. Ora L è connesso e dunque ha una funzione di Morse con solo un punto critico di dimensione 0, diciamo v^0 . Possiamo estendere f a tutto N senza aggiungere altri punti critici. Dunque se poniamo

$$f(\sigma) = \max_{\tau \subseteq N} f(\tau) + 1$$

Otteniamo una funzione di Morse con un solo punto critico di indice 0 e uno solo di indice n . \square

Siamo dunque arrivati a quello che viene chiamato *Teorema della Sfera*:

Teorema 2.7 (Teorema della Sfera).

1. Sia M un poliedro con una funzione di Morse f con solo due punti critici. Allora M è omotopicamente equivalente ad una sfera.
2. Se inoltre M è un poliedro finito che è topologicamente una varietà n -dimensionale senza bordo allora M è omeomorfo a S^n .
3. Infine se M è una varietà PL compatta n -dimensionale senza bordo allora M è PL equivalente ad una n -sfera PL. Ossia M è PL equivalente a $\partial\Delta^{n+1}$, dove Δ^{n+1} è l' $(n+1)$ -simplexso, con la triangolazione standard.

Per la comprensione degli oggetti PL rimandiamo al Capitolo 3, ma non daremo dimostrazione di tale Teorema, reperibile in [For95].

Il primo enunciato è conseguenza diretta dei Teoremi enunciati precedentemente, mentre facciamo notare che il secondo e il terzo si basano principalmente sul Teorema di Whitehead degli intorni regolari (cf. [Whi38] e [Gla70]) esteso poi da Stallings ai poliedri, (cf. [Sta68]).

A chiusura di questo capitolo vogliamo menzionare senza tuttavia approfondire cosa succede nel caso dei poliedri con bordo. Benedetti, cf. [Ben10], introduce infatti il concetto di *funzione equatoriale*:

Definizione 2.7. Sia M un poliedro con bordo e f una funzione di Morse su di esso. Se f è tale che ogni cella in ∂M è critica ed in $M \setminus \partial M$ una sola cella di dimensione n è critica allora f è detta *funzione equatoriale*.

Nota: Se f è tale che ∂M è composta da soli punti critici, viene chiamata *critica al bordo*. Per brevità indicheremo con $m_i^{int}(f)$ il numero di celle critiche

nel complesso $M \setminus \partial M$.

In modo analogo alle funzioni polari è vero che:

Teorema 2.8 ([Ben10, Lemma 3.1]). *Se M è un poliedro connesso ed è topologicamente una varietà compatta n -dimensionale con bordo, allora M ammette una funzione equatoriale. Inoltre se σ^n è una cella interna di M allora esiste una funzione equatoriale tale che σ^n è l'unica cella n -dimensionale critica in $M \setminus \partial M$.*

2.4 Il Gradiente V

Da questo capitolo in poi la nostra attenzione verterà non più sulle funzioni di Morse in sé ma quanto più sulle relazioni che esse inducono sulle celle del complesso simpliciale su cui sono definite. Attraverso queste relazioni siamo infatti capaci di definire un campo di vettori discreto V che emuli il gradiente naturalmente definito per funzioni differenziabili su varietà.

Consideriamo $C(f)$ l'insieme dei punti critici di f , sia σ^p una cella non in $C(f)$, allora grazie all'Equazione 2.1 esiste una faccia v^{p-1} tale che $f(v^{p-1}) \geq f(\sigma^p)$ od altrimenti una co-faccia τ tale che $f(\sigma^p) \geq f(\tau^{p+1})$. Dunque possiamo considerare due insiemi:

$$C(f) = \{\sigma^p \in K \mid \sigma^p \text{ è punto critico di } f\}$$

$$P(f) = \{(\sigma^p, \tau^{p+1}) \in K \times K \mid f(\sigma^p) \geq f(\tau^{p+1}), \sigma^p < \tau^{p+1}\}$$

Rappresentiamo allora quest'ultimo insieme con un vettore per ogni coppia (σ^p, τ^{p+1}) in $P(f)$ che vada da σ^p a τ^{p+1} . In tal modo i due insiemi si riscrivono come segue:

$$C(f) = \{\sigma^p \in K \mid \sigma^p \text{ non è nè punta nè base di alcun vettore}\}$$

$$P(f) = \{(\sigma^p, \tau^{p+1}) \in K \times K \mid \text{esiste un vettore con base } \sigma^p \text{ e punta } \tau^{p+1}\}$$

In questa maniera abbiamo definito una sorta di gradiente discreto di una funzione di Morse. Rendiamo più formale questa costruzione:

Consideriamo il gruppo libero generato da tutte le celle orientate di dimensione p in K

$$C_p(M, \mathbb{Z}) = \left\{ \sum_j a_j \sigma_j^p \mid \sigma_j^p \in K_p, a_j \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Su $C_p(M, \mathbb{Z})$ possiamo definire un prodotto scalare in modo tale che date due celle σ, τ valga $\langle \sigma, \tau \rangle = (-1)^\epsilon$ se e solo se $\sigma = (-1)^\epsilon \tau$ altrimenti $\langle \sigma, \tau \rangle = 0$, dove il $(-1)^\epsilon$ tiene conto dell'orientazione.

Su $C_p(M, \mathbb{Z})$ è definito inoltre in maniera naturale l'operatore di bordo ∂ :

$$\partial : C_p(M, \mathbb{Z}) \rightarrow C_{p-1}(M, \mathbb{Z}).$$

Possiamo dunque definire in modo formale il gradiente discreto:

Definizione 2.8 (Gradiente Discreto). *Sia $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di Morse su M , dove rammentiamo K è l'insieme delle celle di M . Per ogni cella orientata σ^p si definisca:*

$$V(\sigma^p) = \begin{cases} (-1)^\epsilon \tau^{p+1} & \text{se } \sigma^p \text{ è una cella non critica, } \tau^{p+1} > \sigma^p \text{ e } f(\tau^{p+1}) \leq f(\sigma^p) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dove ϵ è tale che $\langle \partial V(\sigma^p), \sigma^p \rangle = -1$.

Estendiamo linearmente V in $C_p(M, \mathbb{Z})$, chiameremo gradiente discreto di f l'operatore:

$$V : C_*(M, \mathbb{Z}) \rightarrow C_{*-1}(M, \mathbb{Z}).$$

In modo simile al caso continuo, dato il gradiente di f possiamo definire il flusso gradiente di f .

Definizione 2.9 (Flusso Gradiente Discreto). *Definiamo per ogni cella orientata, σ :*

$$\Phi(\sigma) = \sigma + \partial(V(\sigma)) + V(\partial\sigma).$$

Estendiamo linearmente Φ a $C_*(M, \mathbb{Z})$, chiameremo flusso gradiente discreto di f l'operatore:

$$\Phi : C_*(M, \mathbb{Z}) \rightarrow C_*(M, \mathbb{Z}).$$

I due operatori appena definiti, V e Φ , hanno diverse proprietà:

Lemma 2.3. *Dato M complesso e f funzione di Morse siano costruiti tramite f i due operatori V e Φ allora è vero che:*

1. V è nilpotente di ordine 2: $V^2 = 0$
2. V induce una partizione su K simile a quella che induce l'Equazione 2.1:
 $K = \{\sigma \mid V(\sigma) \neq 0\} \cup \{\sigma \mid \sigma \in \text{Im } V\} \cup \{\sigma \mid \sigma \text{ è critica}\}$
3. Φ è un operatore di catene, i.e. commuta con l'operatore di bordo ∂ :
 $\partial\Phi = \Phi\partial$
4. Per ogni p l'endomorfismo $\Phi : C_p(M, \mathbb{Z}) \rightarrow C_p(M, \mathbb{Z})$ rispetto alla base $K_p = \{\sigma_i^p\}_i$, è tale che per la sua matrice $M_p(\Phi) = (a_{ij})$ soddisfa le seguenti:

$$\begin{aligned} a_{ii} &= 1 && \text{se e solo se } \sigma_i \text{ è critica} \\ a_{ij} &= 1 && \text{se e solo se } i \neq j \text{ e } f(\sigma_j) < f(\sigma_i). \\ a_{ij} &= 0 && \text{altrimenti.} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dimostrazione. Considereremo f funzione di Morse secondo la Definizione 2.3 per semplicità.

1. Supponiamo $V(v) = \sigma$ allora dall'Equazione 2.1 ogni co-faccia τ di σ deve soddisfare $f(\tau) > f(\sigma)$ e perciò $V(\sigma) = 0$.
2. Dall'Equazione 2.1 abbiamo due possibilità:
 - $\#\{\tau > \sigma \mid f(\sigma) = f(\tau)\} + \#\{v < \sigma \mid f(\sigma) = f(v)\} = 0$ e dunque σ è critica

- $\#\{\tau > \sigma \mid f(\sigma) = f(\tau)\} + \#\{v < \sigma \mid f(\sigma) = f(v)\} = 1$ e perciò o $V(\sigma) \neq 0$ o $\sigma \in \text{Im}(V)$

3. Deriva da un semplice conto:

$$\begin{aligned}\Phi(\partial) &= \partial + V(\partial^2) + \partial V(\partial) = \\ &= \partial + 0 + \partial V(\partial) = \\ &= \partial + \partial^2 V + \partial V(\partial) = \\ &= \partial(1 + V(\partial) + \partial V) = \partial\Phi\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato che $\partial^2 = 0$.

4. Possiamo dividere le possibilità:

- σ è critica, dunque $V(\sigma) = 0$

$$\Phi(\sigma) = \sigma + \sum_{v < \sigma} \langle \partial\sigma, v \rangle V(v).$$

σ è critica dunque se $\tilde{\sigma} = V(v) \neq 0$ allora $\tilde{\sigma} \neq \sigma$. Ora se $(v, \tilde{\sigma})$ è una coppia in $P(f)$, avremo che σ e $\tilde{\sigma}$ sono due co-facce di v dunque l'Equazione 2.1 ci dice che $f(\tilde{\sigma}) = f(v) < f(\sigma)$.

- $\sigma \in \text{Im } V$, perciò $V(\sigma) = 0$

$$\Phi(\sigma) = \sigma + \sum_{\tilde{v} < \sigma} \langle \partial\sigma, \tilde{v} \rangle V(\tilde{v}).$$

Nella sommatoria avremo un $v < \sigma$ tale che $V(v) = \sigma$, e dunque $\langle \partial\sigma, v \rangle V(v) = -\sigma$. Per $\tilde{v} < \sigma$ diverso da v tale che $0 \neq \tilde{\sigma} = V(\tilde{v})$ dall'Equazione 2.1 discende che $f(\tilde{\sigma}) = f(v) < f(\sigma)$. Dunque se riscriviamo $\Phi(\sigma)$ come $\sum_{\tilde{\sigma}} a_{\tilde{\sigma}} \tilde{\sigma}$ otteniamo che: $a_{\tilde{\sigma}} \neq 0$ se e solo se $f(\tilde{\sigma}) < f(\sigma)$.

- Infine possiamo avere che $V(\sigma) = -\langle \partial\tau, \sigma \rangle \tau \neq 0$, dunque per ogni $v < \sigma$ o $V(v) = 0$ o $V(v) = \tilde{\sigma} \neq \sigma$. Poiché $\partial\tau = \sum_{\sigma \neq \tilde{\sigma} < \tau} \langle \partial\tau, \tilde{\sigma} \rangle \tilde{\sigma}$ otteniamo che

$$\Phi(\sigma) = \sum_{v < \sigma} \langle \partial\sigma, v \rangle V(v) - \langle \partial\tau, \sigma \rangle \sum_{\tilde{\sigma} < \tau} \langle \tilde{\sigma}, \partial\tau \rangle \tilde{\sigma}.$$

Dall'Equazione 2.1 deriva che se $\tilde{\sigma} < \tau$ allora $f(\tilde{\sigma}) < f(\tau) = f(\sigma)$.

□

Supponiamo ora di percorrere i vettori di V , in maniera da formare una sequenza $\sigma_1, \tau_1, \sigma_2, \dots, \tau_{n-1}, \sigma_n$, dove ogni (σ_i, τ_i) è una coppia in $P(f)$, e $\sigma_{i+1} < \tau_i$. Chiameremo la sequenza delle p -celle percorse $\gamma = \sigma_1 \dots \sigma_n$ cammino di p -celle da σ_1 a σ_n .

Possiamo dunque enunciare un'altra proprietà di V :

Lemma 2.4. *Data f funzione di Morse su M complesso allora il gradiente discreto V di f non possiede cammini chiusi, i.e. tali che $\sigma_n = \sigma_1$.*

Dimostrazione. Consideriamo f funzione di Morse secondo la Definizione 2.3. Sappiamo che ogni (σ_i, τ_i) è una coppia in $P(f)$ segue che $f(\tau_i) = f(\sigma_i)$ inoltre dall'Equazione 2.1 abbiamo che ogni faccia $\tilde{\sigma}$ di τ_i diversa da σ_i ha valore $f(\tilde{\sigma})$ minore di $f(\tau_i)$. Dunque unendo queste due informazioni possiamo costruire questa sequenza di disequazioni:

$$f(\sigma_n) < f(\tau_{n-1}) = f(\sigma_{n-1}) < \cdots < f(\sigma_2) < f(\tau_1) = f(\sigma_1).$$

Perciò $f(\sigma_n) < f(\sigma_1)$ che implica $\sigma_n \neq \sigma_1$. \square

Ci occuperemo ora di mostrare come tramite la Definizione 2.1 e la Definizione 2.3 otteniamo un equivalente Teoria di Morse discreta.

Consideriamo le due funzioni f ed $f + 1$, dove $(f + 1)(\sigma) = f(\sigma) + 1$. È facile vedere che gli insiemi $C(f)$ ed $C(f + 1)$ coincidono così come i due insiemi $P(f)$ ed $P(f + 1)$. Dunque f ed $f + 1$ definiscono un identico gradiente V e di conseguenza lo stesso Φ . Più in generale diremo che due funzioni di Morse sono *equivalenti* se definiscono lo stesso gradiente V . Utilizziamo questa notazione perché è tramite V e Φ che otteniamo i risultati della Teoria di Morse discreta, perciò se due funzioni di Morse definiscono il medesimo V e dunque il medesimo Φ allora i risultati che otteniamo sono identici.

Mostreremo perciò come sia possibile costruire una funzione di Morse secondo la Definizione 2.1 partendo da una funzione di Morse equivalente secondo la Definizione 2.3 mantenendo invariati gli insiemi $C(f)$ e $P(f)$ e dunque V e il viceversa.

Una funzione di Morse secondo la Definizione 2.3 è per definizione una funzione di Morse per la Definizione 2.1. Il caso inverso invece necessita di più attenzione.

Lemma 2.5. *Sia f una funzione di Morse secondo la Definizione 2.1 allora è possibile costruire g , una funzione di Morse secondo la Definizione 2.3, equivalente ad f .*

Dimostrazione. Per ogni p indicizziamo K_p in modo tale che se $K_p = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{s_p}\}$ allora:

- $\sigma_1, \dots, \sigma_{k_p}$ sono p -celle tali che per ogni $i = 1, \dots, k_p$ esiste $v_{j_i} \in K_{p-1}$ faccia di σ_i tale che $(v_{j_i}, \sigma_i) \in P(f)$;
- $\sigma_{k_p+1}, \dots, \sigma_{t_p}$ sono p -celle critiche;
- $\sigma_{t_p+1}, \dots, \sigma_{s_p}$ sono p -celle tali che per ogni $i = t_p + 1, \dots, s_p$ esiste $\tau_{j_i} \in K_{p+1}$ co-faccia di σ_i tale che $(\sigma_i, \tau_{j_i}) \in P(f)$.

Posto $c_{p-1} = \sum_{k=0, \dots, p-1} s_k$, definiamo dunque la funzione g :

$$g(\sigma_i^p) = \begin{cases} g(v_{j_i}^{p-1}) & \text{se } (v_{j_i}^{p-1}, \sigma_i^p) \in P(g) \\ c_{p-1} + i & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si noti che per ogni σ^p critica abbiamo che $g(\sigma^p) < c_p$ ed inoltre che per ogni cella σ^p è vero che $g(\sigma^p) > c_{p-2}$ poiché:

- Se non esiste v^{p-1} faccia di σ^p tale che $(v^{p-1}, \sigma^p) \in P(g)$ allora $g(\sigma^p) > c_{p-1} > c_{p-2}$;

- Se invece esiste v^{p-1} faccia di σ^p tale che $(v^{p-1}, \sigma^p) \in P(g)$ allora dalle proprietà di f otteniamo che v^{p-1} non possiede facce s^{p-2} tali che $(s^{p-2}, v^{p-1}) \in P(g)$ e dunque $g(\sigma^p) = g(v^{p-1}) > c_{p-2}$.

Mostriamo dunque che g è una funzione di Morse in accordo con la Definizione 2.3.

1. Se $\sigma^p < \tau^{p+1}$ allora $g(\sigma^p) \leq g(\tau^{p+1})$
Supponiamo che σ^p sia critica e $\tilde{\sigma}^p$ sia un'altra faccia di τ^{p+1} .
 - Se $(\tilde{\sigma}^p, \tau^{p+1}) \in P(g)$ allora $g(\sigma^p) < g(\tilde{\sigma}^p) = g(\tau^{p+1})$.
 - Supponiamo $(\sigma^p, \tau^{p+1}) \in P(g)$ allora $g(\sigma^p) = g(\tau^{p+1})$.
 - Se esiste $v^{p-1} < \sigma^p$ tale che $(v^{p-1}, \sigma^p) \in P(g)$ allora $g(\sigma^p) = g(v^{p-1}) < c_{p-1} < g(\tau^{p+1})$.
2. $g^{-1}(c)$ ha cardinalità al massimo 2 per ogni $c \in \mathbb{Z}$.
In ogni K_p ogni cella ha valore differente dunque l'unica possibilità è che esistano tre celle $v^{p-1} < \sigma^p < \tau^{p+1}$ con stesso valore, questo però implicherebbe per la costruzione di g che sia (v^{p-1}, σ^p) che (σ^p, τ^{p+1}) sono in $P(g)$ che a sua volta implica $f(\tau^{p+1}) \leq f(\sigma^p) \leq f(v^{p-1})$ in contraddizione con l'Equazione 2.1.
3. Se $g(\sigma) = g(\tau)$ allora o $\sigma < \tau$ o $\tau < \sigma$.
Se $g(\sigma) = g(\tau)$ allora o $(\sigma, \tau) \in P(g)$ o $(\tau, \sigma) \in P(g)$, questo implica dalla definizione di $P(g)$ che o $\sigma < \tau$ o $\tau < \sigma$.

Dunque g è una funzione di Morse per la Definizione 2.3, rimane da verificare che sia equivalente ad f . Ricordiamo che $C(g) = \{\sigma | g^{-1}(g(\sigma)) = \sigma\}$ e $P(g) = \{(\sigma, \tau) | g(\sigma) = g(\tau), \tau > \sigma\}$. Dunque dalla costruzione di g otteniamo che $P(g)$ coincide con $P(f)$ e lo stesso accade per $C(g)$ ed $C(f)$. \square

2.5 Equivalenza Omologica

Ci occuperemo ora di dimostrare come l'esistenza di una funzione di Morse f non solo fornisce risultati dal punto di vista dell'omotopia, come visto nel Teorema 2.1, ma anche dal punto di vista dei gruppi di omologia.

Dato il complesso delle catene di M , $C_*(M, \mathbb{Z})$, dimostreremo che è omologicamente equivalente al complesso delle catene Φ -invarianti di $C_*(M, \mathbb{Z})$, $C_*^\Phi(M, \mathbb{Z})$, chiamato *complesso di Morse*. Successivamente dimostreremo che per ogni p , $C_p^\Phi(M, \mathbb{Z})$ è isomorfo al gruppo libero generato dalle p -celle critiche di f , \mathcal{M}_p . Chiuderemo dotando \mathcal{M} di un operatore di bordo e dimostrando infine l'equivalenza omologica tra \mathcal{M} ed M e quelle che vengono chiamate *Disuguaglianze di Morse*, che abbiamo già visto nel caso continuo, Equazione 1.1 ed Equazione 1.2.

Iniziamo con l'introdurre formalmente il complesso di Morse:

Definizione 2.10 (Complesso di Morse). *Data una funzione di Morse f sul complesso M e costruito l'operatore Φ chiameremo Complesso di Morse il sottogruppo di $C_*(M, \mathbb{Z})$ delle catene Φ -invarianti:*

$$C_*^\Phi(M, \mathbb{Z}) = \{c \in C_*(M, \mathbb{Z}) | \Phi(c) = c\}.$$

L'operatore di bordo di tale complesso sarà $\partial_{C_*^\Phi(M, \mathbb{Z})}$, dove ∂ è l'operatore di bordo di $C_*(M, \mathbb{Z})$.

Nota: Posto $C_p^\Phi(M, \mathbb{Z}) = \{c = \sum a_\sigma \sigma^p \mid \Phi(c) = c\}$ allora è vero che $C_*^\Phi = \bigoplus C_p^\Phi(M, \mathbb{Z})$.

L'operatore ∂ è un operatore di bordo anche per $C_*^\Phi(M, \mathbb{Z})$ grazie al fatto che $\Phi\partial = \partial\Phi$.

Per quanto riguarda la prima equivalenza abbiamo bisogno di una proprietà particolare di Φ :

Lemma 2.6. *Consideriamo l'operatore*

$$\Phi^\infty : C_*(M, \mathbb{Z}) \rightarrow C_*^\Phi(M, \mathbb{Z}),$$

dove $\Phi^\infty(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^n(c)$.

Allora esiste un N intero grande abbastanza tale che $\Phi^\infty = \Phi^N$.

La dimostrazione di questa proprietà, reperibile in [For95, Theorem 7.2], è possibile essenzialmente grazie al fatto che il nostro complesso è finito.

Possiamo quindi enunciare il seguente teorema:

Teorema 2.9. *Per ogni p si considerino i due operatori:*

$$\begin{aligned} \Phi^\infty : C_p(M, \mathbb{Z}) &\rightarrow C_p^\Phi(M, \mathbb{Z}), \\ i : C_p^\Phi(M, \mathbb{Z}) &\rightarrow C_p(M, \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Allora i_* e Φ_*^∞ sono isomorfismi uno l'inverso dell'altro.

Dimostrazione. Sappiamo che $\Phi^\infty \circ i = \text{Id}$ dunque $\Phi_*^\infty \circ i_* = \text{Id}_*$. Per dimostrare che $i_* \circ \Phi_*^\infty = \text{Id}_*$ la via che scegliamo è trovare un operatore di omotopia tra Id ed $i \circ \Phi^\infty$. Ora:

$$\begin{aligned} \text{Id} - i \circ \Phi^\infty &= \text{Id} - i \circ \Phi^N \\ &= \text{Id} - \Phi^N && \text{poiché } i \circ \Phi = \Phi \\ &= (\text{Id} - \Phi) \circ (\text{Id} + \Phi + \dots + \Phi^{N-1}) && \Phi = \text{Id} + \partial V + V\partial \\ &= -(V\partial + \partial V) \circ (\text{Id} + \Phi + \dots + \Phi^{N-1}). \end{aligned}$$

L'operatore di omotopia che stiamo cercando è $K := -V \circ (\text{Id} + \Phi + \dots + \Phi^{N-1})$. Infatti se è vero che $-V \circ \partial(\text{Id} + \Phi + \dots + \Phi^{N-1}) = K\partial$ allora avremo che $\text{Id} - i \circ \Phi^\infty = \partial K + K\partial$ e questo implica che le mappe Id_* e $i_* \circ \Phi_*^\infty$ coincidono. Ora però Φ commuta con ∂ , perciò:

$$\partial\Phi = \Phi\partial \Rightarrow \partial\Phi^i = \Phi^i\partial \Rightarrow \partial\left(\sum_i \Phi^i\right) = \left(\sum_i \Phi^i\right)\partial.$$

Dunque è vero che $\partial(\text{Id} + \Phi + \dots + \Phi^N) = (\text{Id} + \Phi + \dots + \Phi^N)\partial$ e perciò $V \circ \partial(\text{Id} + \Phi + \dots + \Phi^N) = K\partial$. \square

Definiamo dunque:

Definizione 2.11. Sia f una funzione di Morse sul complesso M definiamo per ogni p il gruppo:

$$\mathcal{M}_p = \{\sigma^p \in K \mid \sigma^p \text{ è critica per } f\}$$

Sia dunque $\mathcal{M} = \bigoplus \mathcal{M}_p$.

Siamo ora a metà del nostro percorso, rimane da introdurre un operatore di bordo su \mathcal{M} e dimostrare dunque l'equivalenza omologica tra C_*^Φ e \mathcal{M} . Per quanto riguarda le celle critiche di M abbiamo un'altra proprietà di Φ^∞ :

Lemma 2.7. Se σ è una p -cella critica e $\tilde{\sigma}$ un'altra cella critica allora è vero che:

$$\langle \Phi^\infty(\sigma), \tilde{\sigma} \rangle = \langle \sigma, \tilde{\sigma} \rangle.$$

Consideriamo una catena $c \in \mathcal{M}_p$, $c = \sum_\sigma a_\sigma \sigma$ dove la sommatoria è intesa sulle p -celle critiche per f , allora grazie alla linearità di Φ^∞ e di $\langle \cdot, \cdot \rangle$ otteniamo che:

$$\langle \Phi^\infty(c), \tilde{\sigma} \rangle = \langle \sum_\sigma a_\sigma \Phi^\infty(\sigma), \tilde{\sigma} \rangle = \sum_\sigma a_\sigma \langle \Phi^\infty(\sigma), \tilde{\sigma} \rangle = a_{\tilde{\sigma}} = \langle c, \tilde{\sigma} \rangle.$$

Consideriamo ora la mappa Φ^∞ ristretta a \mathcal{M} :

$$\Phi^\infty : \mathcal{M} \rightarrow C_*^\Phi(M, \mathbb{Z}).$$

Allora è vero che:

Teorema 2.10. Sia M un complesso e f una funzione di Morse su di esso. Consideriamo Φ il flusso gradiente di f e $\Phi^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^n$. Allora si ha che

$$\Phi^\infty : \mathcal{M}_p \rightarrow C_p^\infty(M, \mathbb{Z})$$

è un isomorfismo per ogni p .

Dimostrazione.

Iniettività

Supponiamo che esista una catena $c \in \mathcal{M}_p$ tale che $\Phi^\infty(c) = 0$. Sappiamo che data σ una p -cella critica vale che $\langle \Phi^\infty(c), \sigma \rangle = \langle c, \sigma \rangle$, ma ciò implica che per ogni σ , cella critica, valga che $\langle c, \sigma \rangle = \langle \Phi^\infty(c), \sigma \rangle = \langle 0, \sigma \rangle = 0$. Dunque deve valere che $c = 0$.

Suriettività

Dato $c \in C_p^\Phi(M, \mathbb{Z})$ definiamo la sua proiezione su \mathcal{M}_p :

$$\tilde{c} = \sum_{\sigma \text{ critical}} \langle c, \sigma \rangle \sigma \in \mathcal{M}_p.$$

Abbiamo allora che $\langle \Phi^\infty(\tilde{c}), \sigma \rangle = \langle \tilde{c}, \sigma \rangle = \langle c, \sigma \rangle$ per qualsiasi p -cella critica σ . Sia dunque $d = \Phi^\infty(\tilde{c}) - c$ che per costruzione sarà una p -catena Φ -invariante ed inoltre ortogonale a tutto \mathcal{M}_p . Vorremo mostrare che $d = 0$ in modo tale da ottenere la tesi.

Supponiamo $d \neq 0$, allora varrà che $d = \sum_\sigma a_\sigma \sigma$, dove la sommatoria è intesa sulle p -celle di M . Ora sappiamo che d è ortogonale a \mathcal{M} dunque possiamo considerare in realtà la sommatoria solo sulle p -celle non critiche di M .

Indicizziamo le σ tali che $\langle d, \sigma \rangle \neq 0$ in modo che $f(\sigma_i) > f(\sigma_{i+1})$, i.e. $d = \sum_{i=1, \dots, r} a_i \sigma_i$ con $a_i = \langle d, \sigma_i \rangle \neq 0$. Ricordiamo dall'Equazione 2.2 che $\langle \Phi(\sigma), \sigma \rangle = 0$ se σ non è critica, ed inoltre $\langle \Phi(\sigma), \tilde{\sigma} \rangle \neq 0$ solo se $f(\tilde{\sigma}) < f(\sigma)$. In $\Phi(d) = \sum_{i=1, \dots, r} a_i \Phi(\sigma_i)$ non può comparire σ_1 essendo $f(\sigma_1) > f(\sigma_i)$ e dunque $\langle \Phi(\sigma_i), \sigma_1 \rangle = 0$ per ogni $i = 1, \dots, r$. Abbiamo perciò che $a_1 = \langle d, \sigma_1 \rangle = \langle \Phi(d), \sigma_1 \rangle = 0$ in contraddizione con l'ipotesi che $a_1 = \langle d, \sigma_1 \rangle$ fosse diverso da 0, dunque d deve essere uguale a 0. \square

In \mathcal{M} tuttavia manca ancora un operatore di bordo. Purtroppo ∂ non è ben definito in \mathcal{M} , non è infatti detto che il bordo di una cella critica sia costituito solo da celle critiche. Tuttavia possiamo sfruttare l'isomorfismo dato da Φ^∞ per definire una sorta di deformazione di ∂ :

$$\tilde{\partial} : \mathcal{M}_p \rightarrow \mathcal{M}_{p-1}$$

con

$$\tilde{\partial}\sigma = \sum_{\tilde{\sigma} \in \mathcal{M}_{p-1}} \langle \partial \Phi^\infty \sigma, \tilde{\sigma} \rangle \tilde{\sigma}.$$

$\tilde{\partial}$ è ben definito per costruzione, rimane solo da vedere che $\tilde{\partial}^2 = 0$. Sappiamo che Φ commuta con ∂ dunque per ogni $\sigma, \tilde{\sigma}$ ed un N abbastanza grande otteniamo che:

$$\langle \tilde{\partial}\sigma, \tilde{\sigma} \rangle = \langle \partial \Phi^\infty \sigma, \tilde{\sigma} \rangle = \langle \partial \Phi^N \sigma, \tilde{\sigma} \rangle = \langle \Phi^N \partial \sigma, \tilde{\sigma} \rangle = \langle \Phi^\infty \partial \sigma, \tilde{\sigma} \rangle.$$

Dunque questo implica che

$$\langle \tilde{\partial}\tilde{\partial}\sigma, \tilde{\sigma} \rangle = \langle \Phi^\infty \partial \tilde{\partial}\sigma, \tilde{\sigma} \rangle = \langle \Phi^\infty \partial \Phi^\infty \partial \sigma, \tilde{\sigma} \rangle = \langle \Phi^\infty \partial \partial \sigma, \tilde{\sigma} \rangle = 0.$$

Dotato il nostro complesso di un operatore di bordo possiamo quindi enunciare la seconda equivalenza:

Teorema 2.11. *Il complesso di Morse $(C_*^\Phi(M, \mathbb{Z}), \partial)$ è isomorfo al complesso di catene*

$$0 \rightarrow \mathcal{M}_n \xrightarrow{\tilde{\partial}} \mathcal{M}_{n-1} \xrightarrow{\tilde{\partial}} \dots \xrightarrow{\tilde{\partial}} \mathcal{M}_1 \xrightarrow{\tilde{\partial}} \mathcal{M}_0 \rightarrow 0$$

Dimostrazione di questo teorema si può trovare in [For95, Theorem 8.2]. Abbiamo dunque la seguente catena di isomorfismi:

$$H_*(\mathcal{M}, \mathbb{Z}) \cong H_*(C^\Phi(M), \mathbb{Z}) \cong H_*(M, \mathbb{Z})$$

Se consideriamo ora $\mathcal{M} \otimes F$, dove F è un campo, dal *Teorema dei Coefficienti Universali* otteniamo che:

$$H_*(\mathcal{M} \otimes F) \cong H_*(\mathcal{M}, F)$$

Possiamo dunque concludere enunciando il seguente teorema:

Teorema 2.12. *Sia M un complesso e f una funzione di Morse su di esso. Consideriamo $\mathcal{M} = \bigoplus \mathcal{M}_p$, dove ogni \mathcal{M}_p è il gruppo libero generato dalle p -celle critiche di f e F un campo, allora l'omologia di M a coefficienti nel campo F isomorfa all'omologia del complesso differenziale di spazi vettoriali su F , $\mathcal{M} \otimes F$. Inoltre $\dim_F \mathcal{M}_p \otimes F = m_p(f)$.*

Discende da questo Teorema quelle che sono chiamate le *Disuguaglianze di Morse*:

Corollario 2.8. *Sia M un complesso, f una funzione di Morse discreta su di esso M e F un qualsiasi campo. Indicato con $m_i(f)$ il numero di i -celle critiche di f e con $b_i(f)$ la dimensione su F di $H_i(M, F)$, allora è vero che:*

$$m_i(f) - m_{i-1}(f) + \cdots \pm m_0(f) \geq b_i - b_{i-1} + \cdots \pm b_0 \quad \forall i. \quad (2.3)$$

Ed inoltre che

$$\begin{aligned} m_i(f) &\geq b_i, \\ b_0 - b_1 + \cdots \pm b_n &= m_0(f) - m_1(f) + \cdots \pm m_n(f). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Nota: Queste due disequazioni sono chiamate rispettivamente *Disuguaglianza forte di Morse*, l'Equazione 2.3, e *Disuguaglianza debole di Morse*, l'Equazione 2.4. La dimostrazione di esse segue gli stessi passi del caso continuo e dunque non la dimostreremo.

2.6 Funzioni di Morse auto-indicizzanti

Abbiamo già visto che una funzione di Morse f definisce in maniera naturale due insiemi:

$$\begin{aligned} C(f) &= \{\sigma \in K \mid \sigma \text{ è un punto critico di } f\} \\ P(f) &= \{(\sigma^p, \tau^{p+1}) \mid \sigma^p < \tau^{p+1}, f(\sigma^p) \geq f(\tau^{p+1})\}. \end{aligned}$$

Attraverso questi insiemi abbiamo definito il gradiente discreto di f , V , ed il flusso gradiente di f , Φ . Viene da chiedersi se sia possibile dato un campo di vettori discreto W su un complesso simpliciale M costruire una funzione di Morse f di cui W sia il gradiente. Per rispondere a questo quesito mostreremo che tipo di condizioni è necessario imporre su W affinché, tramite esso, sia possibile costruire una funzione di Morse ed inoltre come ottenere in tale processo un particolare tipo di funzioni di Morse, le funzioni di Morse *auto-indicizzanti*. Per prima cosa introduciamo la definizione di campo di vettori su un complesso:

Definizione 2.12. *Dato M un complesso e K l'insieme delle sue celle orientate, allora la mappa $W : K \rightarrow K \cup \{0\}$ è un campo di vettori discreto su M se:*

- Per ogni p , $W(K_p) \subseteq K_{p+1} \cup \{0\}$;
- Per ogni $\sigma^p \in K_p$, o $W(\sigma) = 0$ o σ è una faccia regolare di $W(\sigma)$;
- Se $\sigma \in \text{Im } W$, allora $W(\sigma) = 0$;
- Per ogni $\sigma^p \in K_p$

$$\#\{v^{p-1} \in K_{p-1} \mid W(v) = \sigma\} \leq 1.$$

- Per ogni σ^p vale che $W(\sigma) = (-1)^{\epsilon} \tau$,

dove ϵ è tale che $\langle \sigma, \partial W(\sigma) \rangle = -1$.

Nota: La definizione di gradiente di una funzione di Morse f è consistente con la definizione di campo di vettori discreto.

Abbiamo visto che per V gradiente di f possiamo definire un V -cammino di p -celle, possiamo definirlo anche nel caso di un generico campo di vettori discreto:

Definizione 2.13. *Sia W un campo di vettori combinatorio. Un W -cammino di dimensione p è una sequenza di p -celle*

$$\gamma = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_r.$$

Dove

- Se $W(\sigma_i) = 0$ allora $\sigma_{i+1} = \sigma_i$
- Se $W(\sigma_i) \neq 0$ allora $\sigma_{i+1} \neq \sigma_i$ ed $\sigma_{i+1} < W(\sigma_{i+1})$

Diremo che γ è un W -cammino chiuso se $\sigma_r = \sigma_0$ mentre γ si chiamerà non-stazionario se $\sigma_1 \neq \sigma_0$.

Introduciamo ora un particolare tipo di classi di funzioni di Morse:

Definizione 2.14. (Funzione di Morse auto-indicizzante)

Sia M un complesso e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di Morse su di esso. Se $f(M) = [\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}]$ ed è vero che per ogni σ^p critica $f(\sigma^p) = p$ allora f è detta funzione di Morse auto-indicizzante.

Possiamo dunque enunciare sotto quali condizioni un campo di vettori discreto permette di costruire una funzione di Morse di cui è gradiente e che tipo di funzioni di Morse troviamo in questo procedimento.

Teorema 2.13. *Sia W un campo di vettori discreto, allora esiste f una funzione di Morse tale che W coincide con il gradiente di f , V , se e solo se W non ha cammini chiusi non-stazionari. Inoltre f può essere scelta tale che sia auto-indicizzante.*

Proveremo questo teorema nella forma più generale di triadi cellulari nel prossimo capitolo, tuttavia facciamo notare che il Teorema 2.13 appena enunciato ci dice che data una funzione di Morse qualsiasi f possiamo sempre deformarla in una funzione di Morse auto-indicizzante. Se consideriamo f e V_f il suo gradiente, V_f soddisfa le condizioni del Teorema 2.13 e dunque esiste \tilde{f} funzione di Morse auto-indicizzante tale che $V_{\tilde{f}}$ ne sia gradiente, e dunque equivalente ad f , ossia tale che i suoi punti critici siano gli stessi di f .

2.7 Triadi Cellulari

In questo capitolo ci occuperemo principalmente di riprodurre nel caso discreto il macchinario del h -cobordismo che abbiamo già visto nel caso continuo. Lo strumento principale per fare ciò sono le triadi cellulari, attraverso queste infatti è possibile enunciare il Teorema 1.14 e il Teorema 1.6 nel caso discreto. Introduciamo dunque questo potente strumento:

Definizione 2.15. Una triade cellulare $(M; N^-, N^+)$ consiste in un complesso M e due sotto-complessi disgiunti N^- e N^+ tali che per ogni cella $\sigma^p \subseteq N^+ \cup N^-$ esiste un'unica cella τ^{p+1} , faccia di σ^p che non stia in $N^+ \cup N^-$. Inoltre si richiede che per tale τ^{p+1} la cella σ^p sia una faccia regolare di τ^p .

Se M è un poliedro e $\partial M = N^- \cup N^+$ dove N^- e N^+ sono due sotto-poliedri disgiunti allora chiameremo $(M; N^-, N^+)$ triade poliedrale. Possiamo definire una funzione di Morse discreta anche sulle triadi cellulari:

Definizione 2.16. Sia $(M; N^-, N^+)$ una triade cellulare e $K(M)$ l'insieme delle celle di M , una funzione di Morse discreta f su $(M; N^-, N^+)$ con immagine $[a, b]$ è una funzione

$$f : K(M) \rightarrow [a, b].$$

Tale che valga

- $f^{-1}(a) = N^-$;
- $f^{-1}(b) = N^+$;
- Per ogni $\sigma^p \in K_p(M)$, $\sigma \not\subseteq N^- \cup N^+$:
 1. Se σ^p è una faccia irregolare di τ^{p+1} allora $f(\tau) > f(\sigma)$,
 2. $\#\{\tau^{p+1} > \sigma \mid f(\tau) \leq f(\sigma)\} \leq 1$
 3. Se v^{p-1} è una faccia irregolare σ^p allora $f(v) < f(\sigma)$,
 4. $\#\{v^{p-1} < \sigma \mid f(v) \geq f(\sigma)\} \leq 1$.

Nota: Quello che richiediamo ad una funzione di Morse su una triade cellulare è che fuori da $N^+ \cup N^-$ la funzione f sia una funzione di Morse nel senso della Definizione 2.1, mentre per quanto riguarda N^- e N^+ chiediamo che *limitino* l'immagine di f . Ne discende che fuori da $N^+ \cup N^-$ valgono tutte le proprietà già viste per una funzione di Morse su un complesso, ad esempio vale l'Equazione 2.1.

Di seguito introdurremo i concetti principali della teoria di Morse visti nel caso di un complesso rielaborandoli nel linguaggio delle triadi cellulari.

Definizione 2.17 (Punto critico). Sia $(M; N^-, N^+)$ una triade cellulare e f funzione di Morse su $(M; N^-, N^+)$ con immagine $[a, b]$ allora diremo che σ^p è un punto critico di indice p se

- $\sigma^p \not\subseteq N^- \cup N^+$;
- $\#\{\tau^{p+1} > \sigma \mid f(\tau) \leq f(\sigma)\} = 0$;
- $\#\{v^{p-1} < \sigma \mid f(v) \geq f(\sigma)\} = 0$.

Definizione 2.18 (Gradiente). Sia $(M; N^-, N^+)$ una triade cellulare e f una funzione di Morse su di essa con immagine $[a, b]$. Posta un'orientazione su ogni

cella di M , definiamo per ogni σ^p :

$$V(\sigma^p) = \begin{cases} 0 & \text{se } \sigma^p \in N^- \\ (-1)^{\epsilon} \tau^{p+1} & \text{se } \sigma^p \in N^+ \text{ e } \tau^{p+1} \text{ è l'unica co-faccia di } \sigma^p \\ & \text{non in } N^- \cup N^+ \\ (-1)^{\epsilon} \tau^{p+1} & \text{se } \sigma^p \notin N^- \cup N^+ \text{ ed esiste } \tau^{p+1} > \sigma^p \\ & \text{tale che } f(\tau^{p+1}) \geq f(\sigma^p) \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove ϵ , nel caso in cui $V(\sigma^p) \neq 0$, è scelto tale che $\langle \partial V(\sigma^p), \sigma^p \rangle = -1$. Estendiamo per ogni p l'operatore V linearmente a $C_p(M, \mathbb{Z})$. Chiameremo $V : C_*(M, \mathbb{Z}) \rightarrow C_{*+1}(M, \mathbb{Z})$ gradiente di f in M .

Infine abbiamo una generalizzazione al caso di una triade della definizione di funzione auto-indicizzante:

Definizione 2.19. Sia $f : K(M) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di Morse su una triade cellulare $(M; N^-, N^+)$ allora se $f(K(M)) = [-\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}]$ e per ogni cella σ^p critica vale che $f(\sigma^p) = p$ allora f è detta funzione di Morse auto-indicizzante.

Possiamo dunque dimostrare il Teorema 2.13 nella forma più generale delle triadi cellulari:

Teorema 2.14. Sia $(M; N^-, N^+)$ una triade cellulare e W un campo di vettori discreto su M tale che:

- W non possiede cammini non-stazionari chiusi;
- Per ogni $\sigma^p \subseteq N^-$ vale che $W(\sigma) = 0$;
- Per ogni $\sigma^p \subseteq N^+$ è vero che $0 \neq W(\sigma) \not\subseteq N^- \cup N^+$

Allora esiste una funzione di Morse su $(M; N^-, N^+)$ tale che W ne sia il gradiente. Inoltre f può essere scelta auto-indicizzante.

Dimostrazione. La dimostrazione del teorema si basa su una costruzione induttiva sui p -scheletri di M . Per ogni p infatti sia M_p il p -scheletro di M , i.e. il sotto-complesso costituito da tutte le celle con dimensione minore od uguale a p . Se consideriamo W_p campo di vettori su M_p così definito:

$$W_p(\sigma^l) = \begin{cases} W(\sigma^l) & \text{se } l < p \\ 0 & \text{se } l = p \end{cases}$$

Sia allora:

$$\begin{aligned} N_p^- &= N^- \cap M_{p-1} \\ N_p^+ &= N^+ \cap M_{p-1} \end{aligned}$$

Allora per ogni p , $(M_p; N_p^-, N_p^+)$ è una triade cellulare e W_p soddisfa le ipotesi del teorema. Perciò proveremo in modo induttivo che per ogni p esiste una funzione di Morse f_p su $(M_p; N_p^-, N_p^+)$ con immagine $[-\frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}]$ tale che:

1. $f_p^{-1}(-1/2) = N_p^-$;
2. $f_p^{-1}(p + 1/2) = N_p^+$;

3. Se σ^l è un punto critico di f allora $f_p(\sigma) = l$.
4. $W_p = V_{f_p}$

Caso 0

In questo caso, M_0 è lo 0-scheletro di M , W_0 mappa ogni vertice in 0 ed inoltre abbiamo che $N_0^- = N_0^+ = \emptyset$. La funzione f_0 è tale che $f_0(v) = 0$ per qualsiasi vertice v , dunque soddisfa le proprietà enunciate.

Caso p

Supponiamo di avere f_{p-1} funzione di Morse definita nella triade $(M_{p-1}; N_{p-1}^-, N_{p-1}^+)$ con immagine $[-\frac{1}{2}, p - \frac{1}{2}]$ tale che:

1. $f_{p-1}^{-1}(-1/2) = N_{p-1}^-$
2. $f_{p-1}^{-1}(p - 1/2) = N_{p-1}^+$
3. Se σ^l è un punto critico di f_{p-1} allora $f_{p-1}(\sigma) = l$
4. $W_{p-1} = V_{f_{p-1}}$

Dobbiamo quindi estendere la nostra funzione su tutto M_p senza cambiare il valore dei punti critici di indice minore di p . Senza perdita di generalità possiamo supporre $\dim M = p$, dunque scriveremo in seguito N^+ , N^- , M ed f eliminando gli indici.

Divideremo in tre casi la definizione di $f(\sigma^l)$:

- $l \leq p - 2$

Sia:

$$f(\sigma^l) = \begin{cases} f_{p-1}(\sigma^l) & \text{se } \sigma^l \notin N^+ \\ p + \frac{1}{2} & \text{se } \sigma^l \subseteq N^+ \end{cases}$$

- $l = p - 1$

Per ogni σ^{p-1} sia

$$d(\sigma) = \max \{r \mid \exists \text{ un } W\text{-cammino } \sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_r, \text{ dove } \sigma_{r-1} \neq \sigma_r, W(\sigma_r) = 0\},$$

dove $d(\sigma)$ è sempre finito poiché W non ha cammini chiusi.

Definiamo inoltre $D = \max_{\sigma^{p-1}} d(\sigma)$ e poniamo:

$$f(\sigma) = \begin{cases} f_{p-1}(\sigma) + \frac{d(\sigma)}{2D+1} & \text{se } \sigma \notin (N^- \cup N^+) \\ p + \frac{1}{2} & \text{se } \sigma \subseteq N^+ \\ -\frac{1}{2} & \text{se } \sigma \subseteq N^- \end{cases}$$

- $l = p$

Essendo p la dimensione di M abbiamo che $W(\sigma) = 0$ solo se σ è critica.

Supponiamo $\sigma \notin \text{Im}(W)$ allora $f_p(\sigma) = p$. Se $\sigma = W(v)$ allora $f(\sigma) = f(v)$.

Dobbiamo dunque verificare che questa funzione sia una funzione di Morse e che W coincida con il gradiente di f .

Consideriamo le celle di dimensione p :

- Se σ^p è critica allora $f(\sigma^p) = p$ e per ogni v^{p-1} abbiamo che $f(v^{p-1}) < p - \frac{1}{2}$ e perciò $f(\sigma^p) > f(v^{p-1})$ per qualsiasi $v^{p-1} < \sigma^p$.
- Se σ^p non è critica allora esiste v^{p-1} tale che $W(v^{p-1}) = \sigma^p$ e dunque $f(\sigma^p) = f(v^{p-1})$. Per ogni $v \neq \tilde{v}^{p-1} < \sigma^p$ deve verificarsi che $f(\tilde{v}^{p-1}) < f(v^{p-1})$.

Abbiamo sicuramente che \tilde{v} non può stare in N^+ , se infatti $\tilde{v} \subset N^+$ allora esiste un'unica p -cella di cui è faccia, σ^p . Questo implica per le ipotesi del Teorema che $W(\tilde{v}^{p-1}) = \sigma^p = W(v^{p-1})$ e dunque v, \tilde{v}, v sarebbe un W -cammino chiuso non-stazionario che per ipotesi non esiste.

Se $v \subset N^+$ allora per definizione $f(v^{p-1}) = p + \frac{1}{2} > f(\tilde{v}^{p-1})$. Supponiamo che $v \not\subset N^+$ allora per ogni cammino $\tilde{v}, v_1, \dots, v_r$ esiste il cammino $v, \tilde{v}, v_1, \dots, v_r$ e perciò $d(v^{p-1}) > d(\tilde{v}^{p-1})$, che implica $f(v^{p-1}) > f(\tilde{v}^{p-1})$.

Dunque per le p -celle l'Equazione 2.1 è verificata.

Passiamo ora alle celle di dimensione $p - 1$.

Dimostreremo che se $v^{p-2} < \sigma^{p-1}$ allora:

$$f(\sigma^{p-1}) \leq f(v^{p-2}) \iff f_{p-1}(\sigma^{p-1}) \leq f_{p-1}(v^{p-2}),$$

da cui discenderebbe, essendo f_{p-1} di Morse per induzione, che anche f è di Morse.

- Se $v^{p-2} \subseteq N^+$ abbiamo che $f(\sigma^{p-1}) < f(v^{p-2}) = p + \frac{1}{2}$ e $f_{p-1}(\sigma^{p-1}) < f_{p-1}(v^{p-2}) = p - \frac{1}{2}$ dunque la proprietà vale.
- Se invece $v^{p-2} \not\subseteq N^+$ allora $f(v^{p-2}) = f_{p-1}(v^{p-2})$ ed inoltre $f(\sigma^{p-1}) \geq f_{p-1}(\sigma^{p-1})$. Dunque $f_{p-1}(\sigma^{p-1}) > f_{p-1}(v^{p-2})$ implica che $f(\sigma^{p-1}) > f(v^{p-2})$.
Viceversa se $f_{p-1}(\sigma^{p-1}) \leq f_{p-1}(v^{p-2})$ allora $W(v^{p-2}) = \sigma^{p-1}$ da cui $W(\sigma^{p-1}) = 0$ e $d(\sigma^{p-1}) = 0$ perciò $f(\sigma^{p-1}) = f_{p-1}(\sigma^{p-1})$ e la proprietà è valida anche in questo caso.

Per costruzione $f(N^+) = p + \frac{1}{2}$ e $f(N^-) = -\frac{1}{2}$ dunque abbiamo che f è una funzione di Morse sulla triade $(M; N^-, N^+)$.

Resta da dimostrare che W è gradiente di f e che f è auto-indicizzante.

Per dimostrare che W è gradiente di f basta dimostrare che se $v^{l-1} < \sigma^l$ allora:

$$f(v^{l-1}) \geq f(\sigma^l) \iff W(v^{l-1}) = \sigma^l$$

- Per il caso $l = p$ abbiamo che il ragionamento è lo stesso fatto sopra per dimostrare che f è di Morse nelle p -celle;
- Nel caso $l \leq p-1$ abbiamo per induzione su p che $f_{p-1}(v^{l-1}) \geq f_{p-1}(\sigma^l) \iff \sigma = W_{p-1}(v) = W(v)$ e dunque la proprietà è verificata.

Infine resta da dimostrare che f è auto-indicizzante.

Per induzione se $l < p - 1$ abbiamo che σ^l è critica allora $f(\sigma^l) = f_{p-1}(\sigma^l) = l$. Se $l = p - 1$ è vero che $d(\sigma^l) = 0$ e di nuovo $f(\sigma^l) = f_{p-1}(\sigma^l)$. Infine nel caso $l = p$ per costruzione se σ^p è critica $f(\sigma^p) = p$. \square

Nota: Facciamo notare che la costruzione di f implica che:

- Se $\sigma^l \in \text{Im}(W)$ allora $f(\sigma^l) \in (l-1, l - \frac{1}{2})$
- Se $W(\sigma^l) \neq 0$ allora $f(\sigma^l) \in (l, l + \frac{1}{2})$
- Se σ^l è critica allora $f(\sigma^l) = l$.

Tramite la definizione di punto critico per una funzione f definita su una triade $(M; N^-, N^+)$ possiamo costruire nuovamente il complesso

$$\mathcal{M} = \left\{ \sum_{\sigma_i} a_i \sigma_i \mid a_i \in \mathbb{Z}, \sigma_i \text{ è un punto critico per } f \right\},$$

dotato dell'operatore di bordo $\tilde{\partial}$ come precedentemente definito. In questo caso tuttavia abbiamo che:

Teorema 2.15. *Data una funzione di f definita sulla triade $(M; N^-, N^+)$ allora costruito il complesso \mathcal{M} la sua omologia è isomorfa all'omologia di M relativa a N^- .*

Dimostrazione. Per evitare ambiguità scriveremo g per denotare la funzione f vista come funzione di Morse su M . Ora $\mathcal{M}_p(f)$ e $\mathcal{M}_p(g)$ sono gruppi abeliani liberi generati dai punti critici di indice p di f e rispettivamente g . Dunque se per ogni p dimostriamo che g non ha punti critici di indice p in N^+ otteniamo la tesi, i.e. $\{\text{punti critici di indice } p \text{ per } f\} = \{\text{punti critici di indice } p \text{ per } g \text{ in } M\} \setminus \{\text{punti critici di indice } p \text{ per } g \text{ in } N^-\}$.

Procediamo per assurdo e supponiamo esista una cella σ^p in N^+ tale che sia critica per g . Dalla Definizione 2.15 abbiamo che esiste un'unica τ^{p+1} co-faccia di σ^p e dalla Definizione 2.16 discende che $f(\sigma^p)$ deve anche essere il massimo di f e dunque di g . Questo implica che $f(\sigma^p) \geq f(\tau^{p+1})$ e questo è in contraddizione con la definizione di punto critico per quanto riguarda le co-facce di σ^p :

$$\#\{\tau^{p+1} > \sigma^p \mid g(\sigma^p) \geq g(\tau^{p+1})\} = 0.$$

Dunque N^+ è formata da punti non critici per g . Allora otteniamo che $H_*(\mathcal{M}(f), \mathbb{Z}) = H(\mathcal{M}(g)/\mathcal{N}^-(g), \mathbb{Z}) = H_*(M, N^-; \mathbb{Z})$, dove con $\mathcal{N}^-(f)$ stiamo indicando il gruppo libero generato dai punti critici per g in N^- . \square

In particolare otteniamo che:

Teorema 2.16. *Sia $(M; N^-, N^+)$ una triade cellulare e f una funzione di Morse su di essa. Se f non ha punti critici allora $M \searrow N^-$, se in aggiunta $(M; N^-, N^+)$ è una triade poliedrale allora $M \cong N^- \times I$, dove I è l'intervallo $[0, 1]$ in \mathbb{R} .*

Per la prima parte del Teorema basta rifarsi al caso senza triadi, essendo f senza punti critici e avendo già dimostrato che N^+ non ne può contenere discende che $M \searrow N^-$. Mentre per quanto riguarda la seconda parte del Teorema invece facciamo riferimento alla teoria degli intorni regolari di un sotto-complesso, abbiamo infatti che M è un intorno regolare di N^- ma se consideriamo M' il complesso leggermente ingrossato dalla parte di N^- , ossia con un

$N^- \times I$ attaccato, otteniamo che in M' sia M che $N^- \times I$ sono intorni regolari di N^- e dunque per il Teorema degli Intorni Regolari di Whitehead otteniamo che sono PL omeomorfi (vedi [Gla70]).

2.8 Eliminazione di punti critici e suddivisione

Data una funzione di Morse f su un complesso M sappiamo che il numero di punti critici di indice p , $m_p(f)$, limita superiormente il p -esimo numero di Betti di M . Il nostro obiettivo è studiare M e dunque anche la sua omologia. Ci piacerebbe data una funzione di Morse f , deformarla in modo da eliminare alcuni punti critici ed abbassare così questo limite, senza dover cambiare totalmente la funzione.

Nella prima parte di questo paragrafo mostreremo quando e come è possibile eliminare, o sostituire, punti critici attraverso modifiche minori non tanto della funzione in sé quanto piuttosto del gradiente V di f . Nella seconda parte del paragrafo ci occuperemo invece di mostrare come sia possibile data una funzione di Morse su un complesso M , definire una funzione di Morse su una sua suddivisione \tilde{M} tale che per ogni p sia vero che $m_p(f) = m_p(\tilde{f})$.

Iniziamo dunque ad esaminare quando e come sia possibile eliminare punti critici:

Teorema 2.17. *Sia $(M; N^-, N^+)$ una triade cellulare e f una funzione di Morse su di essa. Supponiamo τ^{p+1} e σ^p punti critici di f tali che:*

- *Esiste una faccia regolare $\tilde{\sigma}^p$ di τ^{p+1} , e un cammino gradiente di p -celle da $\tilde{\sigma}^p$ a σ^p :*

$$\gamma : \tilde{\sigma}^p = \sigma_0^p, \sigma_1^p, \dots, \sigma_{r-1}^p, \sigma_r^p = \sigma^p$$

tale che per ogni $i = 0, \dots, r-1$, σ_{i+1}^p è una faccia regolare di $V(\sigma_i^p)$;

- *Non esiste nessun altro cammino gradiente da un qualsiasi altra p -faccia di τ^{p+1} a σ^p .*

Allora esiste una funzione di Morse auto-indicizzante f sulla triade $(M; N^-, N^+)$ tale che:

$$\{\text{punti critici di } \tilde{f}\} = \{\text{punti critici di } f\} \setminus \{\sigma^p, \tau^{p+1}\}$$

Inoltre, $V_f = V_{\tilde{f}}$ tranne lungo il V_f -cammino da $\tilde{\sigma}^p$ a σ^p

Dimostrazione. Definiamo il campo di vettori W nel seguente modo:

$$\begin{cases} W(v) = V_f(v) & \text{se } v \notin \{\tilde{\sigma}^p, \sigma_1^p, \dots, \sigma_r^p\} \\ W(\sigma_i^p) = V_f(\sigma_{i-1}^p) & \text{per } i = 1, \dots, r \\ W(\tilde{\sigma}^p) = \tau^{p+1} \end{cases}$$

Si noti che nessuna delle celle $\tilde{\sigma}^p, \sigma_1^p, \dots, \sigma_{r-1}^p, \sigma^p, V(\tilde{\sigma}^p), V(\sigma_1^p), \dots, V(\sigma_{r-1}^p)$ appartiene ad $N^- \cup N^+$. Ora W soddisfa le ipotesi del Teorema 2.14. Infatti W è un campo di vettori essendolo V_f . Inoltre W non ha cammini chiusi non stazionari.

Supponiamo infatti δ sia un W -cammino chiuso non-stazionario, poiché V_f non

definisce cammini di questo tipo, δ deve essere composta da p -celle ed inoltre includere almeno una p -faccia di γ ed almeno una p -faccia non in γ . Dunque, δ deve contenere un segmento $\tilde{\delta}$ del tipo:

$$\tilde{\delta} : \sigma_i^p, v_0^p, v_1^p, \dots, v_r^p, \sigma_j^p$$

Dove $r \geq 0$ ed $v_k^p \notin \{\sigma_0^p, \dots, \sigma_r^p\}$ per ogni k , notiamo che σ_i^p potrebbe essere uguale a σ_j^p . Poiché $W(v_k^p) = V_f(v_k^p)$, allora la sequenza di p -celle:

$$v_0^p, v_1^p, \dots, v_r^p, \sigma_j^p$$

è un V_f -cammino. Inoltre, se $i \neq 0$, allora $v_0^p \neq \sigma_{i-1}^p, \sigma_i^p$ e $v_0^p < W(\sigma_i^p) = V_f(\sigma_{i-1}^p)$ dunque anche la seguente sequenza:

$$\tilde{\sigma}^p = \sigma_0^p, \sigma_1^p, \dots, \sigma_{i-1}^p, v_0^p, v_1^p, \dots, v_r^p, \sigma_j^p, \sigma_{j+1}^p, \dots, \sigma_r^p = \sigma^p$$

è un V_f -cammino da $\tilde{\sigma}^p$ a σ^p e per ipotesi non può esistere.

Se invece $i = 0$ allora

$$\tilde{\sigma}^p \neq v_0^p < W(\tilde{\sigma}^p) = \tau^{p+1}.$$

Dunque potremo costruire un V_f -cammino da $\tilde{\sigma}^p$ a σ^p .

$$v_0^p, v_1^p, \dots, v_r^p, \sigma_j^p, \sigma_{j+1}^p, \dots, \sigma_r^p = \sigma^p.$$

Dunque avremo di nuovo una contraddizione.

Perciò W soddisfa le ipotesi del Teorema 2.14, da esso è possibile costruire una funzione di Morse auto-indicizzante \tilde{f} tale che $W = V_{\tilde{f}}$.

I punti critici di \tilde{f} sono le celle v tali che $v \in \ker(W)$ e $v \notin \text{Im}(W)$, ma:

$$\begin{cases} \ker(W) = \ker(V_f) \setminus \{\sigma^p\} \\ \text{Im}(W) = \text{Im}(V_f) \cup \{\tau^{p+1}\} \end{cases}$$

Dunque come richiesto:

$$\{\text{punti critici di } \tilde{f}\} = \{\text{punti critici di } f\} \setminus \{\sigma^p, \tau^{p+1}\}$$

□

Passiamo dunque all'analizzare le suddivisioni di un complesso. Di nuovo preferiamo considerare come oggetto di studio i poliedri, in quanto per essi possiamo definire in modo naturale un tipo particolare di suddivisione, la bisezione.

Definizione 2.20 (Bisezione). *Dato uno spazio vettoriale V possiamo definire la bisezione di V come la tripletta $(P; H^-, H^+)$ dove P è un iperpiano e H^-, H^+ le due metà di V determinate da P .*

Nel caso di un poliedro allora possiamo definire:

Definizione 2.21. *Dato un poliedro M e una sua cella σ^p , sia h l'embedding di M in uno spazio Euclideo e V il sottospazio affine di dimensione p in cui giace σ^p . Sia $(P; H^+, H^-)$ bisezione di V , allora chiameremo bisezione di M in σ^p il poliedro M' ottenuto eliminando σ^p e ponendo al suo posto le celle $h^{-1}(h(\sigma^p) \cap P)$, $h^{-1}(h(\sigma^p) \cap H^+)$ e $h^{-1}(h(\sigma^p) \cap H^-)$.*

Supponiamo perciò di avere un poliedro M e una sua bisezione M' , una funzione di Morse f su M può essere ridefinita su M' mantenendo tutti i punti critici di f , eccezion fatta per la cella coinvolta nella bisezione, abbiamo infatti il seguente:

Teorema 2.18. *Sia M un poliedro con funzione di Morse f , e σ^p una p -cella di M . Consideriamo \tilde{M} raffinamento di M tramite una bisezione.*

$$\sigma^p = \sigma_1^p \cup v^{p-1} \cup \sigma_2^p$$

Allora esiste una funzione di Morse \tilde{f} su \tilde{M} tale che:

- Se $\tau^l \neq \sigma^p$ allora:
 τ^l è un punto critico di $f \iff \tau^l$ è un punto critico di \tilde{f}
- Se σ_2^p non è un punto critico di \tilde{f} allora:
 σ^p è critico per $f \iff \sigma_1^p$ è critico per \tilde{f}
- Se $\tau_1^l, \tau_2^l \neq \sigma^p$ allora:
 $V_f(\tau_1^l) = \tau_2^l \iff V_{\tilde{f}}(\tau_1^l) = \tau_2^l$.
 Inoltre

$$\begin{cases} V_f(\sigma^p) = \tau_1^l \iff V_{\tilde{f}}(\sigma_1^p) = \tau_1^l \text{ or } V_{\tilde{f}}(\sigma_2^p) = \tau_1^l \\ V_f(\tau_1^l) = \sigma^p \iff V_{\tilde{f}}(\tau_1^l) = \sigma_1^p \text{ or } V_{\tilde{f}}(\tau_1^l) = \sigma_2^p \end{cases}$$
- Se $\tau_1^l \neq \sigma^p$ e $\tau_2^{l+1} \neq \sigma^p$ sono punti critici di f , allora:
 $\{\gamma \text{ è } V_f\text{-cammino da } \partial\tau_2^{l+1} \text{ a } \tau_1^l\} \longleftrightarrow \{\tilde{\gamma} \text{ è } V_{\tilde{f}}\text{-cammino da } \partial\tau_2^{l+1} \text{ a } \tau_1^l\}$.
- Se $\tau_1^l \neq \sigma_1^p$ e $\tau_2^{l+1} \neq \sigma_1^p$ sono punti critici di f , allora:
 $\{\gamma \text{ è } V_f\text{-cammino da } \partial\tau_2^{l+1} \text{ a } \tau_1^l\} \longleftrightarrow \{\tilde{\gamma} \text{ è } V_{\tilde{f}}\text{-cammino da } \partial\tau_2^{l+1} \text{ a } \tau_1^l\}$.

La dimostrazione del teorema è tecnica e preferiamo non inserirla, rimandiamo a [For95] per una sua attenta dimostrazione. Ciò che otteniamo ad ogni modo è che il complesso di Morse di f è canonicamente isomorfo al complesso di Morse associato ad \tilde{f} .

Ci limitiamo al caso delle bisezioni poiché nel caso di poliedri abbiamo che:

Teorema 2.19 ([Sta68, Corollary 1.10.5]). *Se \tilde{M} è una suddivisione poliedrale finita di un poliedro M allora esiste una suddivisione poliedrale finita di \tilde{M} , M' , che può essere ottenuta da M attraverso una sequenza finita di bisezioni.*

Perciò a meno di suddividere un certo numero di volte la nostra suddivisione, possiamo sempre supporre di lavorare con sequenze finite di bisezioni.

Capitolo 3

Proprietà del blocco duale

In questo capitolo mostreremo come si possano fornire informazioni su un complesso M attraverso lo studio del *blocco duale di M* con gli strumenti della Teoria di Morse. Dato un poliedro M è possibile definire il *blocco duale di M* , dove l'utilizzo della parola blocco e non di quella di complesso è dovuto al fatto che non discende dalla definizione che sia sempre un complesso. Esiste una classe di CW-complessi di dimensione finita che ci assicura che tale blocco duale sia un complesso, la classe delle varietà PL, dunque se M è una varietà PL potremo definire sul suo duale una funzione di Morse.

Introdurremo per prima cosa le principali nozioni di topologia PL, facendo riferimento al testo di Rourke e Sanderson, [RS72], e di Munkres [Mun84]. Successivamente introdurremo lo strumento delle suddivisioni su varietà PL, attraverso cui potremo definire la nozione di *blocco duale* di un poliedro. Inoltre costruiremo su tale blocco duale un complesso di catene, $\mathcal{D}(M)$, omologicamente equivalente al complesso di catene di $C_*(M, \mathbb{Z})$.

Passeremo dunque, restringendoci alla classe delle varietà PL, a studiare come data una funzione di Morse f su M si possa definire una funzione di Morse f^* sul duale M^* ed ottenere tramite f^* informazioni su M . Ci fermeremo a studiare la struttura del biduale di una varietà PL sia essa con o senza bordo, concludendo infine mostrando le relazioni tra blocco duale e le dualità di Poincarè e di Lefschetz.

3.1 Nozioni basiche

Per prima cosa ci limiteremo a lavorare in sottospazi lineari di \mathbb{R}^n e successivamente considereremo varietà immergibili in tali sottospazi attraverso mappe lineari a tratti, che sono quelle che danno il nome alla teoria PL (*piecewise-linear*). Dunque:

Definizione 3.1 (Cono ed Unione). *Siano A, B sottoinsiemi di \mathbb{R}^n , allora definiamo il joint di A e B come:*

$$A * B = \{\lambda a + \mu b \mid a \in A, b \in B, \lambda + \mu = 1\}.$$

*Se $A = \{a\}$ allora diremo che $A * B$ è il cono di B con vertice a , scritto anche come $a * B$.*

In $a * B$ chiameremo B base di $a * B$ se e solo se per ogni punto $c \in a * B$ è vero che esistono unici λ, μ tali che $c = \lambda a + \mu b$, dove $b \in B$ e $\lambda + \mu = 1$.

Nota: L'operazione di joint è un'operazione tra sottoinsiemi non vuoti di \mathbb{R}^n chiaramente commutativa ed associativa, possiamo estenderla al caso di sottoinsiemi vuoti ponendo $A * B = B$, se $A = \emptyset$.

Facciamo notare che in un cono $a * B$ dire che B è base equivale a dire che $a \notin B$ e che per ogni $b \in B$ il segmento $a * b$ è tale che $a * b \cap B = \{b\}$.

Abbiamo già accennato nel Capitolo 2 ai poliedri, approfondiremo ora tale oggetto con l'aiuto della topologia PL. Ricordiamo che:

Definizione 3.2. Un poliedro è un CW-complesso tale che possa essere immerso in uno spazio Euclideo in maniera tale che ogni sua p -cella sia convessa e giaccia in un solo sottospazio affine di dimensione p .

D'ora in poi dato un poliedro A ragioneremo direttamente nella sua immersione in un certo \mathbb{R}^n .

Definizione 3.3 (Link e Star). Sia A un poliedro immerso in \mathbb{R}^n , ed $\sigma \in A$, una cella di A , definiamo star di σ l'unione dell'interno di tutte le celle di A a cui σ appartiene, indicata con $St\sigma$. La sua chiusura sarà indicata come $\overline{St\sigma}$. Chiameremo link di σ in A l'insieme di tutte le celle appartenenti a $\overline{St\sigma}$ disgiunte da σ .

A volte in letteratura la star è definita per un vertice, in tal caso la nostra definizione per una cella σ con vertici v_0, \dots, v_r si esprimerà come:

$$St\sigma = Stv_0 \cap \dots \cap Stv_r.$$

Notiamo che $\overline{St\sigma}$ consiste di tutte le celle di M della forma $\sigma * B$ e $Lk\sigma$ dell'unione di tutte le facce B di tali celle. In particolare otteniamo che:

Lemma 3.1. Sia M un poliedro ed σ una cella di M , allora:

$$\overline{St\sigma} = \sigma * Lk\sigma$$

$$\overline{St\sigma} \setminus St\sigma = \partial\sigma * Lk\sigma$$

Possiamo inoltre definire la star di un punto $a \in A$ semplicemente come l'unione dell'interno di tutte le celle che lo contengono. Le proprietà di star e link per una cella valgono anche per un punto.

Dati ora due poliedri ci chiediamo se sia possibile costruire funzioni tra di essi tali che preservino la struttura di poliedro, ossia tali che l'immagine tramite esse di un cono o di una star rimanga un cono od una star. Tali funzioni sono le seguenti:

Definizione 3.4. Siano A e B due poliedri e una mappa $f : A \rightarrow B$, per ogni punto a di A la chiusura della star di a , $a * Lka$, è tale che $f(\lambda a + \mu x) = \lambda f(a) + \mu f(x)$, dove $x \in Lka$, $\lambda + \mu = 1$ e $\lambda, \mu \leq 0$, allora diremo che f è una mappa lineare a pezzi.

Per brevità scriveremo *PL* al posto di lineare a pezzi.

Nota: È triviale notare che le mappe lineari siano PL è inoltre chiaro che se $A \subset B$ e sono entrambi poliedri, A è insomma quello che viene chiamato un *sotto-poliedro di B*, se f è PL allora anche la sua restrizione a B sarà PL. Consideriamo allora $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$ due poliedri ed $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mappa lineare tale che $f(A) \subset B$, allora la sua restrizione $f : A \rightarrow B$ sarà PL.

Sia ora A un poliedro e $\{A_i\}$ una famiglia di sotto-poliedri compatti di A localmente finita tale che $A = \cup A_i$, allora diremo che $\{A_i\}$ è una *decomposizione localmente finita di A*. In tal caso se $f : A \rightarrow B$ è una mappa tale che per ogni i la restrizione di f a P_i è PL allora anche f è PL. Se perciò abbiamo una decomposizione localmente finita di A ed una mappa f che ristretta ad ogni sotto-poliedro della decomposizione è lineare, allora f è PL su tutto A , ed è appunto questo il significato della notazione *lineare a tratti*.

Esistono particolari classi di funzioni PL:

Definizione 3.5. Sia $f : A \rightarrow B$ una mappa PL iniettiva e suriettiva allora diremo che f è un PL omomorfismo.

Se inoltre $f(A)$ è un sotto-poliedro di B allora diremo che f è un PL embedding.

Siamo finalmente pronti ad affrontare la definizione di varietà PL:

Definizione 3.6. Una varietà PL senza bordo di dimensione n è un poliedro M tale che per ogni punto $x \in M$ esiste un intorno di x PL omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^n .

Una varietà PL con bordo di dimensione n è un poliedro M tale che per ogni punto $x \in M$ esiste un intorno di x , N , PL omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}_+^n , dove \mathbb{R}_+^n denota l'insieme $\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n \geq 0\}$. La controimmagine rispetto a questi omomorfismi di $\mathbb{R}^{n-1} \times 0$ è chiamata bordo di M e si indica con ∂M .

Nota: Si considerino i due insiemi $D^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_i \in [-1, 1]\}$ e $S^{n-1} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_i x_i^2 = 1\}$. Entrambe sono varietà PL, in particolare abbiamo che il bordo di D^n è esattamente S^{n-1} che a sua volta non possiede bordo.

Chiameremo *n-palla PL* una varietà PL che sia PL omeomorfa a D^n se invece è PL omeomorfa a S^n verrà chiamata *n-sfera PL*.

Diremo che una varietà PL compatta con bordo M è chiusa se $\partial M = \emptyset$. Inoltre data una varietà PL con bordo M indicheremo l'interno di M come $Int M = M \setminus \partial M$.

Se M è un poliedro allora le seguenti sono equivalenti:

- Per ogni $x \in M$, il Lkx è una $(n - 1)$ -sfera PL;
- M è una n -varietà PL.

Facciamo notare che un n -simpleso in \mathbb{R}^n è una varietà PL mentre il viceversa non è vero, basti pensare che un n -simpleso è sempre convesso per definizione

mentre una qualsiasi varietà PL non deve per forza esserlo. Ciò che possiamo dire è che una varietà PL compatta è unione finita di semplici, mentre in generale un poliedro è unione localmente finita di semplici. Possiamo dunque utilizzare per varietà PL le stesse notazioni riguardanti le celle introdotte nel Capitolo 2.

3.2 Il blocco duale

Ci occuperemo ora di introdurre come costruire il *blocco duale di un poliedro*. Dato un complesso localmente finito possiamo “suddividerlo” in semplici piccoli quanto vogliamo.

Definizione 3.7. *Sia M un poliedro in \mathbb{R}^n , il poliedro M' è detto essere una suddivisione di M se:*

1. *Ogni cella di M' è contenuto in una cella di M ;*
2. *Ogni cella di M è uguale all'unione finita di celle di M' .*

Possiamo notare subito come una bisezione (cf Definizione 2.20) sia in effetti una suddivisione. Inoltre i due poliedri M e M' sono PL omeomorfi. Possiamo definire alcune suddivisioni particolari:

Definizione 3.8. *Sia M un poliedro e sia data M'_p una suddivisione del p -scheletro di M . Sia σ^{p+1} una cella di M , allora $\partial\sigma^{p+1}$ è uguale a $\tau_1 \cup \dots \cup \tau_k$, dove ogni τ_i è una p -cella di M' . Per ogni σ sia w_σ un punto interno di σ , definiamo M'_{p+1} come l'unione di M'_p e, al variare di σ in M_{p+1} , delle celle $w_\sigma * \tau_i$, dove $\partial\sigma = \cup \tau_i$. Tale M'_{p+1} è detta suddivisione di M_{p+1} stellando M'_p tramite i punti w_σ .*

Ora ogni n -cella è (PL omeomorfa) all'involuppo convesso di un numero finito di vertici $\{v_0, \dots, v_n\}$, possiamo allora definire *baricentro di σ* il punto:

$$\hat{\sigma} = \sum_{i=0, \dots, n} \frac{1}{n+1} v_i.$$

Se per ogni cella σ in M poniamo $w_\sigma = \hat{\sigma}$ otteniamo una particolare suddivisione:

Definizione 3.9. *Sia M un poliedro, definiamo una sequenza di suddivisioni degli scheletri di M in maniera induttiva come segue:*

Sia $M'_0 = M_0$;

Se M'_p è una suddivisione di M_p allora M'_{p+1} è definita come suddivisione di M_{p+1} stellando M'_p tramite i punti $\hat{\sigma}$ al variare di σ in M_{p+1} .

Tale suddivisione viene chiamata prima suddivisione baricentrica di M ed indicata con $sd M$.

In particolare si ha che:

Lemma 3.2. *I complessi di $sd M$ sono uguali alla collezione di tutte le celle della forma:*

$$\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_n,$$

dove $\sigma_1 > \dots > \sigma_n$.

Tramite la suddivisione baricentrica, possiamo definire il blocco duale di M come segue:

Definizione 3.10. *Sia M un poliedro e $sd M$ la sua suddivisione baricentrica. Si definisca per una cella σ il blocco $D(\sigma)$ come l'unione di tutte le celle aperte di $sd M$ si cui $\hat{\sigma}$ è il vertice finale, i.e. :*

$$D(\sigma) = \bigcup_{\hat{\sigma}_i} \hat{\sigma}_{i_1} \dots \hat{\sigma}_{i_r} \hat{\sigma}.$$

Chiameremo $D(\sigma)$ il blocco duale di σ , e σ^* sarà la notazione per indicare la chiusura di $D(\sigma)$ in $sd M$.

La notazione di blocco non è casuale. Definiamo:

Definizione 3.11. *Sia (X, A) una coppia di spazi topologici, diremo che (X, A) è una n -varietà omologica relativa se per ogni punto $x \in X \setminus A$, è vero che $H_i(X, X \setminus x)$, il gruppo d'omologia locale, si annulla per $i \neq n$ ed è di ordine infinito se $i = n$.*

Se $A = \emptyset$ diremo che X è un n -varietà omologica.

Si verifica allora che σ^* non è per certo una cella in senso topologico, ma piuttosto una cella omologica, ossia una p -varietà omologica la cui omologia locale per ogni punto coincide per un certo p con quella di una p -cella. Nel caso in cui si lavori con una varietà PL allora si ottiene che i blocchi duali sono palle topologiche, e M^* è un CW-complesso regolare. In particolare $sd M^*$ sarà un complesso simpliciale e $sd M$ è combinatorialmente equivalente a $sd M^*$, i.e. esiste una corrispondenza 1-1, Ψ , tra l'insieme delle facce di $sd M$ e di $sd M^*$ che conservi l'inclusione.

Ciò che abbiamo in generale sarà che:

Teorema 3.1. *Sia M un complesso simpliciale localmente finito e σ^k una sua cella allora:*

1. *I blocchi duali sono disgiunti a coppie;*
2. *σ^* è un sotto-poliedro di dimensione $n - k$ in $sd M$;*
3. *$\partial\sigma^* = \sigma^* \setminus D(\sigma)$ è unione di tutti i blocchi $D(\tau)$ tali per cui $\tau > \sigma$, ed ognuno di questi blocchi ha dimensione minore di $n - k$.*
4. *σ^* è il cono $\hat{\sigma} * \partial\sigma^*$;*
5. *Se M è una n -varietà omologica allora $(\sigma^*, \partial\sigma^*)$ ha l'omologia di una $(n - k)$ -cella modulo il suo bordo.*

Grazie a tali proprietà possiamo dunque definire il *complesso duale di catene* associato a M , $\mathcal{D}(M)$ dove per ogni p

$$\mathcal{D}(M)_p = H_p(M_p^*, M_{p-1}^*).$$

L'operatore di bordo sarà l'operatore ∂_* costruito tramite la sequenza di Mayer-Vectoris associata alla sequenza esatta della tripletta $(M_p^*, M_{p-1}^*, M_{p-2}^*)$:

$$0 \rightarrow C_*(M_{p-1}^*, M_{p-2}^*) \hookrightarrow C_*(M_p^*, M_{p-2}^*) \rightarrow C_*(M_p^*, M_{p-1}^*) \rightarrow 0.$$

Abbiamo allora il seguente teorema:

Teorema 3.2. *Sia M un poliedro che è una n -varietà omologica. Sia M_p^* il p -scheletro duale di M e $\mathcal{D}(M)$ il complesso di catene duale di M allora:*

- *Il gruppo $H_i(M_p^*, M_{p-1}^*)$ si annulla se $i \neq p$ ed è un gruppo abeliano libero se $i = p$. Se $i = p$ una base di tale gruppo è ottenuta scegliendo per ogni $\sigma \in M$ i generatori del gruppo $H_p(\sigma^*, D(\sigma))$ e prendendo la loro immagine rispetto all'inclusione in $H_p(M_p^*, M_{p-1}^*)$*
- *Il complesso di catene duale $\mathcal{D}(M)$ può essere usato per calcolare l'omologia di M . Infatti, $\mathcal{D}_p(M)$ è isomorfo al sottogruppo di $C_p(\text{sd } M)$ formato da quelle catene generate dai blocchi di M_p^* il cui bordo è generate dai blocchi di M_{p-1}^* . Inoltre l'inclusione $\mathcal{D}_p(M) \rightarrow C_p(\text{sd } M)$ induce un isomorfismo in omologia con coefficienti interi, dunque induce un isomorfismo in omologia e coomologia a coefficienti in un campo qualsiasi, essendo entrambi gruppi abeliani liberi.*

Rimandiamo ad una dimostrazione di tale Teorema al lavoro di Munkreas [Mun84, Teorema 64.2].

3.3 Proprietà del blocco duale

Facciamo notare che nel caso di una varietà PL con o senza bordo vi sono delle piccole differenze riguardo al blocco duale. Per il caso senza bordo otteniamo infatti che M^* è una n -varietà PL senza bordo e le celle di M^* sono in corrispondenza 1-1 con le celle di M , *i.e.* ogni cella di M^* è della forma σ^* per un certo $\sigma \in M$

Nel caso in cui la varietà M sia con bordo abbiamo invece che la situazione è leggermente diversa.

Nella costruzione del blocco duale otteniamo due tipi di celle, abbiamo infatti che se $\sigma \in M$ è una cella che non appartiene al bordo di M allora vi è una ed una sola cella in M^* a lei associata, σ^* , se invece $\sigma \in \partial M$ allora otteniamo che vi sono due celle associate a σ , σ^* ottenuta attraverso l'analoga costruzione per le celle interne, ma in aggiunta si presenta anche σ° una cella appartenente al bordo di M^* di dimensione pari a $n - k - 1$, dove k è la dimensione di σ . Si ha in effetti che σ° è il duale di σ dentro ∂M , sotto-varietà senza bordo di M di dimensione $n - 1$. Avremo dunque che M^* può essere visto come unione di $\{\sigma^* | \sigma \in M\}$ e di $\{\sigma^\circ | \sigma \in \partial M\}$, dove quest'ultimo è effettivamente il bordo di M^* .

Sia nel caso di complesso senza bordo che con bordo abbiamo che $\sigma^* < \tau^*$ se e solo se $\sigma > \tau$ ed inoltre nel caso M abbia bordo, σ^* sarà l'unica co-faccia di σ° .

Lo stesso ragionamento può essere fatto in generale per un poliedro.

Prima di incominciare a lavorare sulle funzioni di Morse su un complesso duale di una n -varietà PL M , enunciamo il seguente risultato:

Lemma 3.3. *Sia M un n -varietà PL con bordo e sia M^* il suo blocco duale, allora M^* e $M^* \setminus (\partial M)^*$ hanno la stessa omologia. In particolare M^* collassa su $M^* \setminus (\partial M)^*$.*

Dimostrazione. Sia $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ una lista di celle di bordo di M ordinate debolmente per dimensione crescente. Partendo dalla cella di dimensione maggiore

σ_s rimuoviamo iterativamente la coppia $(\sigma_i^\diamond, \sigma_i^*)$.

Se M è PL allora ciò che stiamo facendo per ogni i è un collassamento elementare, poiché σ_i^\diamond è faccia libera di σ_i^* e dunque $M^* \searrow M^* \setminus (\partial M)^*$.

□

Nota: Se M non è una varietà PL non possiamo ragionare in termini di collassamento. Ma si dimostra comunque che i due complessi hanno la stessa omologia. Si può infatti vedere M^* costruita da $M^* \setminus (\partial M)^*$ attaccando i blocchi σ_i^* lungo il comune bordo $\partial(\sigma_i^*) \setminus \sigma_i^\diamond$. Essendo $\sigma_i^*, \sigma_i^\diamond, \partial(\sigma_i^*) \setminus \sigma_i^\diamond$ omologicamente triviali, si può concludere che l'attaccamento iterato di queste celle (omologiche) non cambia l'omologia di $M^* \setminus \partial M$. Per una dimostrazione dettagliata rimandiamo a [Ben10].

D'ora in poi supporremo sempre M varietà PL in modo tale che sia possibile definire su M^* una funzione di Morse.

Ragioniamo ora col linguaggio della Teoria di Morse discreta, ricordiamo per prima cosa una classe di funzioni di Morse a cui abbiamo accennato nel Capitolo 2:

Definizione 3.12. *Sia M un n -varietà con bordo. Sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di Morse tale che per ogni cella σ in ∂M si ha che σ è critica per f allora f è detta funzione di Morse critica al bordo.*

Ogni n -varietà con bordo M possiede una funzione di Morse critica al bordo ed in particolare come già enunciato (cf Teorema 2.8) M ammette una funzione equatoriale su di essa.

Nel caso di una n -varietà PL, M , possiamo usare il Teorema 2.4 per estendere una funzione di Morse f da $M^* \setminus (\partial M)^*$ a tutto M^* , essendo uno il collassamento dell'altro. In particolare possiamo enunciare due teoremi su come interagiscono le funzioni di Morse e il blocco duale di una n -varietà. Quello che segue è stato enunciato da Forman:

Teorema 3.3 ([For95, Theorem 4.7]). *Sia M una n -varietà senza bordo ed f una funzione di Morse su M allora esiste f^* funzione di Morse su M^* , tale che:*

$$\sigma \in C(f) \leftrightarrow \sigma^* \in C(f^*).$$

Dimostrazione. Supponiamo f funzione di Morse secondo la Definizione 2.3. Sia f^* definita come segue:

$$f^* : M^* \rightarrow \mathbb{R}, f^*(\sigma^*) = -f(\sigma).$$

Verifichiamo che f^* è di Morse:

1. Se $\sigma^* < \tau^*$ allora $f^*(\sigma^*) \leq f^*(\tau^*)$.
Ora se $\sigma^* < \tau^*$ allora $\sigma > \tau$ ed essendo f di Morse $f(\sigma) \geq f(\tau)$ dunque $-f(\sigma) \leq -f(\tau)$.
2. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$ la cardinalità di $f^{-1}(z)$ è al massimo 2.
Ovviamente per ogni $z \in \mathbb{Z}$ abbiamo che $f^{-1}(-z)$ ha cardinalità al massimo 2 dunque è vero che $(-f)^{-1}(z)$ ha cardinalità al massimo 2.

3. Se $f(\sigma) = f(\tau)$, allora $\sigma < \tau$ o $\tau < \sigma$.
 Se $f^*(\sigma^*) = f^*(\tau^*)$ allora per come è definita f^* otteniamo che $-f(\sigma) = -f(\tau)$ e dunque $\sigma < \tau$ o $\tau < \sigma$. Perciò o $\sigma^* > \tau^*$ o $\sigma^* < \tau^*$.

□

Per varietà con bordo abbiamo un risultato simile enunciato da Benedetti [Ben10, Theorem 3.10 (1)]:

Teorema 3.4. *Sia M una n -varietà PL con bordo ed f una funzione di Morse critica al bordo su M allora esiste una funzione di Morse f^* su M^* tale che:*

- Nessuna delle celle del bordo di M^* è critica per f^* ;
- Ogni cella interna σ è critica per f se e solo se σ^* è critica per f^* ;
- È vero che $m_{n-k}^{int}(f) = m_k(f^*)$.

Dimostrazione. Dal Lemma 3.3 e il Teorema 2.4 otteniamo che possiamo costruire una funzione di Morse su $N = M^* \setminus (\partial M)^*$ e successivamente estenderla ad M^* senza aggiungere punti critici. Perciò consideriamo su N la funzione di Morse g definita da $g(\sigma^*) = -f(\sigma)$.

Abbiamo allora che $m_{d-k}(g) = m_k^{int}(f)$, la sua estensione ad M^* manterrà i punti critici invariati e dunque sarà la f^* cercata. □

Un altro teorema sempre sulla relazione tra funzioni di Morse e blocco duale M^* è il seguente:

Teorema 3.5 ([Ben10, Theorem 3.10 (2)]). *Sia M una n -varietà PL con bordo e f una funzione di Morse con nessuna cella critica al bordo allora esiste una funzione di Morse critica al bordo f^* su M^* tale che:*

- Ogni cella interna σ è critica per f se e solo se σ^* è critica per f^* ;
- È vero che $m_{n-k}(f) = m_k^{int}(f^*)$.

Dimostrazione. Consideriamo la seguente funzione:

$$f^*(\tau) = \begin{cases} -f(\sigma) & \text{se } \tau = \sigma^* \text{ per una } \sigma \in M \\ \dim \sigma - P & \text{se } \tau = \sigma^\diamond \text{ per una } \sigma \in \partial M. \end{cases}$$

Per P abbastanza grande la funzione è una funzione di Morse critica al bordo cercata. □

Facciamo notare come nel Teorema 3.4 eravamo certi che σ^* non era critica quando $\sigma \in \partial M$ mentre nel Teorema 3.5 se $\sigma \in \partial M$ è critica per f allora anche σ^* è critica per f^* .

Mostreremo ora un esempio di come usare questi teoremi.

Esempio 3.1. (Struttura di M^{**})

Sappiamo già da Forman [For95, pag. 111] che ogni varietà PL senza bordo M ha la proprietà che il suo duale M^* è PL omeomorfo a M , e così varrà anche per M^{**} . In particolare in $M^* = \{\sigma^* | \sigma \in M\}$, posto $n = \dim M$, ogni cella σ^* ha dimensione uguale ad $n - \dim \sigma$, dunque se consideriamo M^{**} sarà uguale all'insieme $\{(\sigma^*)^* | \sigma \in M\}$, dove però $(\sigma^*)^* = \sigma$, e dunque avremo che M^{**} è

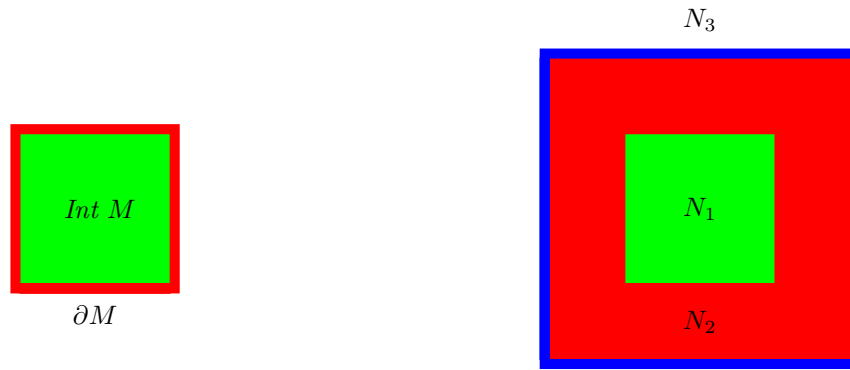
canonicamente PL omeomorfo a M .

Nel caso di varietà PL con bordo dovremo sfruttare il Teorema 3.4 e il Teorema 3.5, enunciati in questo capitolo, ma anche il Teorema 2.16 del Capitolo 2.

Sia M una varietà PL con bordo e sia $N = M^*$ il suo duale, che è costituito come segue:

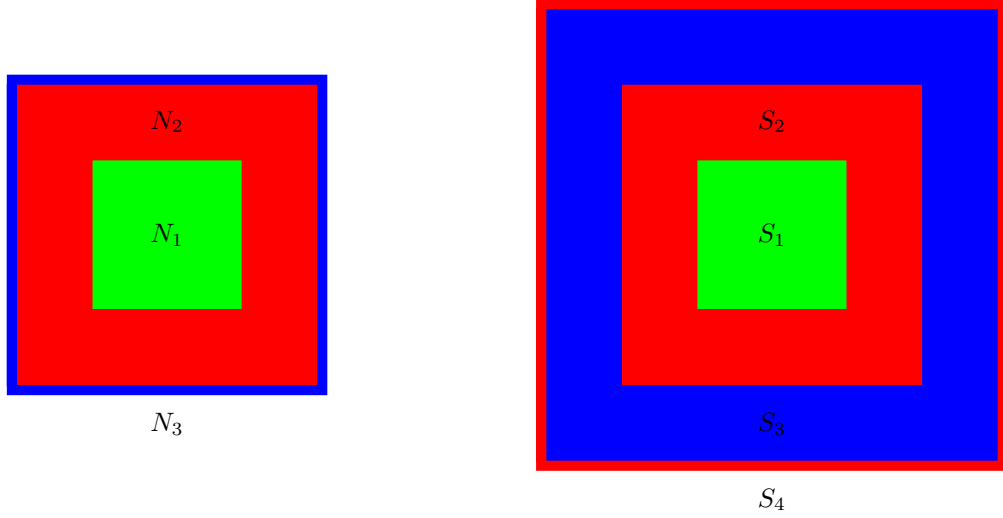
- $N_1 = \{\sigma^* | \sigma \in \text{Int } M\}$;
- $N_2 = \{\sigma^* | \sigma \in \partial M\}$;
- $N_3 = \{\sigma^\diamond | \sigma \in \partial M\}$.

Ora N è una n -varietà PL con bordo, $\partial N = N_3$.



Perciò consideriamo il duale di N , $S = N^*$, che sarà costituito a sua volta come segue:

- $S_1 = \{\tau^* | \tau \in N_1\} = \{(\sigma^*)^* | \sigma \in \text{Int } M\} = \{\sigma | \sigma \in \text{Int } M\}$
- $S_2 = \{\tau^* | \tau \in N_2\} = \{(\sigma^*)^* | \sigma \in \partial M\} = \{\sigma | \sigma \in \partial M\}$
- $S_3 = \{\tau^* | \tau \in N_3\} = \{(\sigma^\diamond)^* | \sigma \in \partial M\}$
- $S_4 = \{\tau^\diamond | \tau \in N_3\} = \{(\sigma^\diamond)^\diamond | \sigma \in \partial M\} = \{\sigma | \sigma \in \partial M\}$



Con le notazioni seguenti è vero che:

Teorema 3.6. *Data una n -varietà PL con bordo M il suo bidual M^{**} è canonicamente isomorfo a $M \cup_{\partial M} (\partial M) \times I$.*

Dimostrazione. Sappiamo che $\partial(S \setminus S_1) = S_2 \cup S_4$, dunque possiamo considerare la triade poliedrale $(S'; S_2, S_4)$. Il nucleo della dimostrazione conterà nel riuscire a costruire una funzione di Morse su tale triade tale che non possieda punti critici e dunque discenderà dal Teorema 2.16 che $S' = \partial M \times I$.

Consideriamo una funzione di Morse f su M , possiamo supporre f critica al bordo, dal Teorema 3.4 sappiamo che esiste una funzione di Morse $g = f^*$ su $N = M^*$ tale che sia N_2 che N_3 non possiedano punti critici.

Applichiamo allora ad N il Teorema 3.5, che ci dice che possiamo definire su $S = N^*(= M^{**})$ una funzione di Morse critica al bordo $h = g^*$ tale che valga:

- $\partial S = S_4$ è composta solo da punti critici per h ;
- $S_2 = N_2^*$ non possiede punti critici per h ;
- $S_3 = N_3^*$ non possiede punti critici per h .

Perciò h è un funzione di Morse su S' . Ora la triade $(S'; S_2, S_4)$ è tale che se prendiamo la funzione di Morse sulla triade coincidente con h , h' , essa non possiede punti critici, dunque il Teorema 2.16 ci dice che $S' = S_2 \times I$. Ora però S_2 è uguale a ∂M ed inoltre in M^{**} è la frontiera comune tra $S_1 \cup S_2$ ed S' . Possiamo dunque concludere che $M^{**} = M \cup_{\partial M} \partial M \times I$ \square

3.4 Alcune Equivalenze

Passiamo ora ad esaminare grazie agli strumenti della Teoria di Morse discreta le relazioni tra la dualità di Poincarè e di Lefschetz e il blocco duale.

Se consideriamo una n -varietà senza bordo avremo il seguente risultato simile alla dualità di Poincarè nel caso di varietà chiuse, dovuto a Forman [For95, Theorem 4.7].

Teorema 3.7. *Sia M un n -varietà PL senza bordo, allora per ogni p , $0 \leq p \leq n$ è vero che:*

$$H_p(M, \mathbb{Z}) \cong H_{n-p}(M, \mathbb{Z})$$

Dimostrazione. Consideriamo M^* , il duale di M , allora data f funzione di Morse su M il Teorema 3.3 ci dice che esiste una funzione di Morse f^* su di esso tale che $f^*(\sigma^*) = -f(\sigma)$ in particolare se σ^p è critico per f allora σ^* , di dimensione $n - p$, sarà critico per $-f$. Otteniamo dunque per il Teorema 2.12 che $H_p(M, \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{i=1, \dots, m_p(f)} \mathbb{Z}$ e che $H_{n-p}(M^*, \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{i=1, \dots, m_{n-p}(f^*)} \mathbb{Z}$, ma $m_{n-p}(f^*) = m_p(f)$ ed inoltre M^* è PL omeomorfo a M (Forman [For95, pag. 111]), dunque $H_p(M, \mathbb{Z}) \cong H_{n-p}(M, \mathbb{Z})$. \square

Nel caso di una varietà differenziabile tale isomorfismo discende direttamente dal fatto che se f è una funzione di Morse allora $-f$ è pure una funzione di Morse. In particolare se p è un punto critico di indice λ per f , sarà critico di indice $n - \lambda$ per $-f$, dunque utilizzando il Teorema 1.18 otteniamo che $H_\lambda(M, \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{i=1, \dots, m_\lambda(f)} \mathbb{Z}$ ora però $m_{n-\lambda}(-f) = m_\lambda(f)$ e dunque $H_{n-p}(M, \mathbb{Z}) \cong H_p(M, \mathbb{Z})$. Nel caso discreto tuttavia tale strada non era percorribile in quanto in generale $-f$ non è una funzione di Morse se f lo è.

Se M è una n -varietà PL con bordo otteniamo invece un risultato simile alla dualità di Lefschetz per varietà con bordo. Stavolta ci serviremo anche dei risultati su funzioni di Morse su una triade.

Teorema 3.8. *Sia M una n -varietà PL con bordo allora per ogni p , $0 \leq p \leq n$ è vero che:*

$$H_p(M^*, \partial M^*; \mathbb{Z}) \cong H_{n-p}(M; \mathbb{Z})$$

$$H_p(M, \partial M; \mathbb{Z}) \cong H_{n-p}(M^*; \mathbb{Z})$$

Dimostrazione. Consideriamo M^* , il duale di M , allora data una funzione di Morse f il Teorema 3.5 ci dice che esiste una funzione di Morse f^* critica al bordo tale che:

- Ogni cella interna σ è critica per f se e solo se σ^* è critica per f^* ;
- È vero che $m_{n-p}(f) = m_p^{int}(f^*)$.

Dunque se consideriamo la triade $(M^*, \partial M^*, \emptyset)$ otteniamo dal Teorema 2.15 che $H_p(M^*, \partial M^*; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ con tanti addendi quanto vale $m_p^{int}(f^*)$, inoltre il Teorema 2.12 ci dice che $H_{n-p}(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ con tanti addendi quanto vale $m_{n-p}(f)$. Ora sappiamo che $m_p^{int}(f^*) = m_{n-p}(f)$ dunque $H_{n-p}(M; \mathbb{Z}) \cong H_{n-p}(M^*, \partial M^*; \mathbb{Z})$.

Per il secondo isomorfismo invece consideriamo su M la funzione di Morse f critica al bordo allora il Teorema 3.4 ci dice che esiste una funzione di Morse f^* tale che:

- Nessuna delle celle del bordo di M^* è critica per f^* ;
- Ogni cella interna σ è critica per f se e solo se σ^* è critica per f^* ;
- È vero che $m_{n-p}^{int}(f) = m_p(f^*)$.

Dunque data la triade $(M, \partial M, \emptyset)$ otteniamo dal Teorema 2.15 che $H_p(M, \partial M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$ con tanti addendi quanto vale $m_p^{int}(f)$, inoltre il Teorema 2.12 ci dice che $H_{n-p}(M^*; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$ con tanti addendi quanto vale $m_{n-p}(f^*)$. Ora sappiamo che $m_p^{int}(f) = m_{n-p}(f^*)$ dunque $H_{n-p}(M, \partial M; \mathbb{Z}) \cong H_{n-p}(M^*; \mathbb{Z})$. Infine essendo M^* omologicamente equivalente a $M^* \setminus (\partial M)^*$ possiamo anche scrivere $H_p(M, \partial M; \mathbb{Z}) \cong H_{n-p}(M^* \setminus (\partial M)^*; \mathbb{Z})$. \square

Facciamo notare che il Teorema 3.8 si trova in Benedetti [Ben13, Corollary 3.27]. Terminiamo enunciando un risultato di equivalenza omotopica:

Teorema 3.9 ([Ben10, Theorem 3.3]). *Sia M una n -varietà PL con bordo ed f una funzione di Morse critica al bordo su M . Allora M è omotopicamente equivalente a un CW-complesso con m_{n-k}^{int} k -celle, per ogni $k = 0, \dots, n$.*

Dimostrazione. Possiamo assumere per il Teorema 2.8 $m_d^{int} = 1$ ed $m_0^{int} = 0$. Sia allora Δ l'unica n -cella interna critica per f . Per ogni $0 < p < n$, si consideri l'insieme $C_p(f) = \{\sigma_1^p, \dots, \sigma_{m_p^{int}}^p\}$ delle p -celle interne critiche per f . Possiamo allora considerare una sequenza di collassamenti e rimozioni di celle interne:

- Collassiamo le coppie (σ^{d-1}, σ^d) in $P(f)$;
- Rimuoviamo le celle in $C_{d-1}(f)$;
- Collassiamo le coppie $(\sigma^{d-2}, \sigma^{d-1})$ in $P(f)$;
- Rimuoviamo le celle in $C_{d-2}(f)$;
- ...
- Collassiamo le coppie (σ^1, σ^2) in $P(f)$;
- Rimuoviamo le celle in $C_1(f)$;
- Collassiamo le coppie (σ^0, σ^1) in $P(f)$;
- Rimuoviamo le celle in $C_0(f)$.

Alla fine di questo processo ci rimarrà solamente ∂M .

Dualiziamo il processo appena fatto. Definiamo $v_0 = \Delta^*$ e attacchiamo in maniera iterativa le celle duali a quelle che apparivano nella sequenza precedente. Ad esempio se (σ, τ) era la prima coppia rimossa allora poniamo $X_1 = v_0 \cup \tau^* \cup \sigma^*$. Avremo dunque due casi, a seconda che si voglia dualizzare il collassamento o la rimozione:

- Se (σ^p, τ^{p+1}) è una coppia di $P(f)$ collassata nel processo precedente allora l'attaccamento di σ^* , $(n-p)$ -palla, e di una sua faccia di bordo τ^* , $(n-p-1)$ -palla, non cambia l'omotopia.
- σ^p è una cella critica allora attaccare σ^* è l'attaccamento di una $(n-p)$ -palla lungo il suo intero bordo, una $(n-p-1)$ -sfera.

Ciò che otteniamo da questa sequenza di attaccamenti sarà $X = M^* \setminus (\partial M)^*$ che ha la stessa omotopia di un CW-complesso con esattamente c_{n-k}^{int} k -celle per ogni k . Applicando il Lemma 3.3 otteniamo che X è il collassamento di M^* , e dunque hanno la stessa omotopia. Ora però $sd M^* = sd M$ dunque, ricordando che una suddivisione non cambia l'omotopia di una varietà PL, otteniamo la tesi. \square

Capitolo 4

Relazioni ed Equivalenza

In questo capitolo ci occuperemo finalmente di mostrare le relazioni che vi sono fra Teoria di Morse continua e discreta. Seguendo il lavoro di Benedetti [Ben13], mostreremo come data una varietà differenziabile M e una sua decomposizione in manici con m_λ λ -manici esista una triangolazione PL di M , diciamo C , che possieda una decomposizione in m_λ λ -manici PL, tramite tali decomposizioni saremo in grado di trovare una funzione di Morse continua su M e sotto alcune restrizioni sulla dimensione di M anche una funzione di Morse discreta su C tali che entrambe possiedano m_λ punti critici di indice λ . In realtà nel caso PL sarà necessario considerare delle suddivisioni baricentriche iterate di C per definire tale funzione di Morse. Mostreremo quindi come nel caso in cui $n \leq 7$ vi sia un'equivalenza fra funzioni di Morse continue e discrete, passando dall'equivalenza fra funzioni di Morse (continue o discrete) e decomposizione (differenziabile o PL) in manici.

Successivamente ci occuperemo di mostrare come nel caso discreto le funzioni di Morse definite su una triangolazione PL non sempre sono le “migliori” dal punto di vista della decomposizione in manici, ossia data una varietà topologica X e una sua decomposizione in manici è possibile che la triangolazione di Morse su cui sia possibile trovare una funzione di Morse tale che possieda tanti punti critici di indice λ quanti sono i λ -manici della decomposizione debba essere ricercata tra quelle non-PL. A tale scopo introdurremo la varietà di Mazur, una 4-varietà topologica contraibile il cui bordo è una 3-sfera omologica, ma non una 3-sfera topologica, e dunque tale varietà non potrà essere una 4-sfera. Facciamo notare che esiste un esempio di una varietà PL che non può possedere una struttura differenziabile compatibile con essa, è la varietà 10-dimensionale di Kervaire che per motivi di brevità non inseriamo, ma rimandiamo al lavoro di Kervaire [Ker60] per un'approfondita presentazione.

Ci baseremo principalmente sul lavoro di Benedetti dunque nel caso non vi sia indicato diversamente la referenza per gli enunciati sarà [Ben13].

4.1 Dal differenziabile al PL

Incominciamo il nostro percorso partendo dalle varietà differenziabili. Ricordiamo che:

Teorema 4.1 ([Whi92]). *Data una varietà differenziabile M di dimensione n essa è diffeomorfa ad una certa sotto-varietà di \mathbb{R}^{2n} .*

Quindi possiamo ricondurci al caso di varietà differenziabili in uno spazio euclideo.

Dato un complesso simpliciale C si definisce $|C|$ lo *spazio sottostante di C* lo spazio topologico dato dall'unione dei simplessi di C . Se uno spazio topologico X è omeomorfo a $|C|$ allora diciamo che C è una *triangolazione* di X , in particolare una triangolazione C di X è detta PL se la star di ogni vertice in C è una palla PL.

Abbiamo dunque che:

Teorema 4.2 ([Cai61]). *Ogni varietà differenziabile ammette una triangolazione PL.*

Questo ci assicura che data una varietà differenziabile possiamo sempre riferirci ad un complesso PL, C , sua triangolazione. Il problema tuttavia è che tale triangolazione non è sempre unica. Facciamo inoltre notare che per una dimensione qualsiasi data una triangolazione PL non sempre esiste una struttura differenziabile compatibile con essa, quindi la corrispondenza non è in entrambi i sensi.

Attraverso delle restrizioni sulla dimensione possiamo parlare di unicità:

Teorema 4.3 ([KM63],[HM74],[Mun60]). *Sia C una varietà PL allora, posto $n = \dim C$, se $n \leq 7$ allora esiste almeno una unica struttura differenziabile compatibile con C , i.e. un unica varietà differenziabile M di cui C è triangolazione PL. Se inoltre $n \leq 6$ tale struttura è unica a meno di diffeomorfismi.*

È bene notare che non è detto che varietà n -dimensionali, con $n \leq 6$, abbiano un unica struttura differenziabile su di esse. Ciò che ci dice il Teorema 4.3 è che il numero di strutture differenziabili tra loro non diffeomorfe coincide con il numero di strutture PL tra loro non PL-omeomorfe. Nel caso in cui n sia minore di 4 otteniamo comunque che tale numero è 1, mentre per n maggiore od uguale a 4 vi può essere più d'una struttura PL compatibile.

Nel caso di una varietà topologica, i.e. uno spazio topologico di Hausdorff tale che possieda un ricoprimento in cui gli aperti sono omeomorfi ad un aperto di \mathbb{R}^d , per un certo d , è lecito chiedersi se ammetta sempre una triangolazione e se tale triangolazione sia sempre PL. La risposta è positiva solo per dimensioni basse:

Teorema 4.4 (Moise ($d \leq 3$), Perelman ($d = 4$)). *Data una varietà topologica X di dimensione n , se $n \leq 4$ allora ogni sua triangolazione è PL.*

In particolare si ha che se X ha dimensione 4 allora ammette una triangolazione se e solo se ne ammette una PL, e dunque per il Teorema 4.3 se e solo se ammette una struttura differenziabile.

Per dimensione maggiore di 4 il problema è addirittura più vasto, un quesito ancora aperto è se per ogni varietà topologica di dimensione maggiore di 4 esista una triangolazione (anche non PL).

Mostreremo ora il collegamento che vi è fra *decomposizione differenziabile in manici* e Teoria di Morse continua. Vedremo inoltre come in bassa dimensione a tale decomposizione (differenziabile) possa essere associata una *decomposizione PL in manici*.

Definizione 4.1 (*i*-Manico). *Siano X e H^i due varietà topologiche di dimensione n (risp. varietà PL, risp. varietà differenziabili) con bordo non-vuoto tali che:*

- H^i è omeomorfa (risp. PL omeomorfa, risp. diffeomorfa) ad una n -palla;
- Esistono N , $(n-1)$ -sottovarietà di ∂M , ed N' , $(n-1)$ -sottovarietà di ∂H^i , entrambe omeomorfe a $S^{i-1} \times I^{n-i}$ (risp. combinatorialmente equivalenti e omeomorfe a $S^{i-1} \times I^{d-i}$, risp. diffeomorfe a $S^{i-1} \times I^{d-i}$ dove tale diffeomorfismo può essere esteso all'interno di M e di H^i)

Considerando M' , n -varietà ottenuta attaccando M ed H^i attraverso l'identificazione di N e N' , diremo che M' è il risultato dell'attaccamento di un i -manico ad M nella categoria topologica (risp. PL, risp. differenziabile), indicato con abuso di notazione come $M' = M \cup H^i$.

Ricordiamo che due varietà PL sono combinatorialmente equivalenti se vi è una corrispondenza biunivoca fra le facce tale che rispetti l'inclusione.

Allora possiamo definire:

Definizione 4.2 (Decomposizione in manici). *Data M una n -varietà topologica (risp. PL, risp. differenziabile), chiameremo decomposizione topologica in manici di M (risp. PL, risp. differenziabile) un'espressione della forma:*

$$M = H_0^0 \cup H_1^{i_1} \cup \dots \cup H_k^{i_k},$$

dove ogni $H_j^{i_j}$ è un i_j -manico topologico (risp. PL, risp. differenziabile) attaccato all'unione di quelli precedenti.

Riprendiamo in mano ora il Capitolo 1. Sappiamo che data una varietà M ed una funzione di Morse f su di essa, possiamo scomporre l'intervallo $f(M) = [a, b]$ in intervalli più piccoli $[a_i, b_i]$ con $b_i = a_{i+1}$ tali che in ognuno di essi vi sia un solo punto critico p_i di indice λ_i . Dal Teorema 1.4 otteniamo che, posto $M_i = M^{b_i}$, M_i è omotopo a M_{i-1} con una λ_i -cella attaccata lungo il bordo di e^{λ_i} . In maniera simile è possibile dimostrare (cf. Matsumoto [Mat02]) che ogni M_i è diffeomorfo ad M_{i-1} con attaccato un λ_i -manico. Abbiamo allora che:

Teorema 4.5. *Sia M una n -varietà chiusa differenziabile ed $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di Morse con $m_\lambda(f)$ punti critici di indice λ allora M ammette una decomposizione in manici con tanti λ -manici quanto vale $m_\lambda(f)$.*

Ma è vero anche il viceversa:

Teorema 4.6. *Sia M una n -varietà chiusa differenziabile tale che ammetta una decomposizione in manici con c_λ λ -manici allora esiste $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di Morse con tanti punti critici di indice λ quanto vale c_λ .*

La linea dimostrativa di questo risultato consiste nel costruire un campo gradiente attraverso gli attaccamenti, in maniera tale che la funzione di Morse cercata sia l'antiderivata di tale campo (cf. [Cer68] e [KS77, III, 4.3]).

Dunque per il caso continuo considerare una decomposizione in manici od una funzione di Morse è equivalente, qualsiasi sia la dimensione della varietà sotto osservazione.

Da una decomposizione (differenziabile) in manici di M , varietà differenziabile,

possiamo passare ad una decomposizione PL in manici di M . Il Teorema 4.3 ci dice infatti che sia i manici che i diffeomorfismi di attaccamento possono essere PL triangolati ottenendo così una decomposizione PL in manici, il cui attaccamento sarà M e la triangolazione risultante sarà omeomorfa PL alla triangolazione di M ottenuta con il Teorema 4.3.

Non abbiamo tuttavia che data una varietà PL e una sua decomposizione in manici essa induca una ed una sola struttura differenziabile. Ponendo delle restrizioni sulla dimensione abbiamo però che:

Teorema 4.7 ([HM74],[Mun60]). *Sia C una varietà PL di dimensione $n \leq 7$ che ammette una decomposizione PL in manici con m_λ λ -manici allora esiste una struttura differenziabile M compatibile con C tale che ammetta una decomposizione differenziabile in manici con m_λ λ -manici.*

Dunque possiamo riassumere questi risultati nel seguente teorema:

Teorema 4.8 ([Ben13, Theorem 2.14]). *Sia M una varietà differenziabile di dimensione $n \leq 7$ allora le seguenti sono equivalenti:*

1. M ammette una funzione di Morse differenziabile con m_λ punti critici di indice λ ;
2. M ammette una decomposizione differenziabile in manici con m_λ λ -manici;
3. M ammette una triangolazione C tale che esiste una decomposizione PL in manici di C con m_λ λ -manici.

Se $n > 7$ allora (1) e (2) rimangono equivalenti, mentre è vero solo che (2) \Rightarrow (3).

D'ora in poi chiameremo *funzione di Morse perfetta* una funzione di Morse (continua o discreta) su una varietà (differenziabile o PL/topologica) che ammetta tanti punti critici di indice λ quanti sono i λ -manici della decomposizione (differenziabile o PL/topologica) della varietà in questione.

4.2 Dal PL al differenziabile

Per brevità diremo che una varietà M ammette vettore di Morse (m_0, \dots, m_n) se esiste una funzione di Morse differenziabile su M tale che possieda m_λ punti critici di indice λ , o equivalentemente (dal Teorema 4.8) se ammette una decomposizione differenziabile in m_λ λ -manici. In maniera analoga dato un complesso simpliciale C diremo che ha vettore di Morse discreto (m_0, \dots, m_n) se ammette una funzione di Morse discreta tale che possieda esattamente m_p punti critici di indice p . Diremo infine che una varietà PL ammette vettore di manici PL (m_0, \dots, m_n) se ammette una decomposizione PL in manici con m_i i -manici. Con queste notazioni abbiamo dalla sezione precedente che:

$$\{\text{Vettori di Morse di } M\} \subset \{\text{Vettori di manici PL di } M\},$$

dove per l'espressione *Vettori di manici PL di M* intendiamo vettori di manici PL per una triangolazione PL di M . Vi sarà uguaglianza se la dimensione di M è al massimo 7. Quello che ci prefiggiamo di fare ora è mostrare che:

$$\begin{array}{c} \{ \text{Vettori di manici PL di } M \} \\ \parallel \\ \{ \text{Vettori di Morse discreti su triangolazioni PL di } M \} \\ \cap \\ \{ \text{Vettori di Morse discreti su triangolazioni di } M \}, \end{array}$$

ossia mostrare che anche per la categoria PL vale la corrispondenza fra funzioni di Morse e decomposizioni (PL) in manici.

Inizieremo mostrando come data una varietà PL M e una funzione di Morse su M possiamo ottenere una decomposizione in manici PL di M e successivamente come da una decomposizione in manici PL di M si possa costruire una funzione di Morse su M .

Introduciamo ora un'operazione simile al collassamento, visto nel Capitolo 2, assai utile in questa sezione:

Definizione 4.3 (cf. [RS72, Pag. 40]). *Sia M un complesso simpliciale di dimensione n e Δ una sua n -faccia. Sia M' un sotto-complesso di M tale che contenga tutte le n -facce di M esclusa Δ . Se M collassa in M' , tale collassamento è chiamato *shelling elementare* di M in M' . Diremo che M' è *shelling* di M se esiste una sequenza finita di shellings da M a M' .*

Facciamo notare che lo shelling conserva come il collassamento la classe d'omotopia, ma inoltre conserva anche la classe d'omeomorfismo, cosa che il collassamento non per forza conserva.

Data una varietà PL, C , possiamo definire quella che viene chiamata r -esima suddivisione baricentrica, *i.e.* $\text{sd}^r C = \text{sd}(\text{sd}^{r-1} C)$. Tramite essa otteniamo che per le palle PL vale:

Teorema 4.9 ([AB12]). *Sia B una palla PL allora esiste un intero r tale che $\text{sd}^r B$ sia shellabile.*

Questo implica che in una decomposizione PL possiamo sempre supporre che dopo un certo numero di suddivisioni baricentriche ogni manico sia shellabile. Consideriamo una varietà topologica M e una sua triangolazione C , data la m -esima suddivisione baricentrica di un complesso C , $\text{sd}^m C$, e D un suo sotto-complesso, possiamo considerare il sotto-complesso $N^m(C, M) = \{ \sigma \in \text{sd}^m C \mid \sigma \cap \text{sd}^m D \neq \emptyset \}$, chiamato anche m -esimo intorno di D in M . Abbiamo allora che:

Teorema 4.10 (Whitehead, cf. [Gla70, Lemma III.9 e III.10]). *Sia C un sotto-complesso di una triangolazione di M , varietà topologica. Per ogni $m \geq 2$, l' m -esimo intorno di C collassa in C .*

In particolare otteniamo che se su C è definita una funzione di Morse questa può essere estesa al suo m -esimo intorno senza aggiungere punti critici.

Abbiamo inoltre che:

Teorema 4.11 (Whitehead, cf. [RS72, Theorem 3.26 e Corollary 3.27]). *Sia C un sotto-complesso di una triangolazione di M , varietà topologica. Supponiamo che C collassi in un certo sotto-complesso D allora per m abbastanza grande otteniamo che $N^m(D, M)$ è *shelling* di $N^m(C, M)$.*

Nel caso in cui non vi sia collassamento bensì attaccamento lungo il bordo otteniamo invece il seguente:

Lemma 4.1 ([Ben13, Lemma 3.10]). *Sia $k < n$ e C un sotto-complesso k -dimensionale di una n -varietà PL C . Sia D un sotto-complesso di C ottenuto rimuovendo l'interno di una k -cella σ , allora $N^2(C, M)$ è ottenuto da $N^2(D, M)$ tramite l'attaccamento di un k -manico.*

Siamo pronti allora a dimostrare il primo Teorema:

Teorema 4.12 ([Ben13, Theorem 3.2]). *Se una varietà topologica X possiede una triangolazione PL, C , su cui è definita una funzione di Morse discreta f con m_λ punti critici di indice λ allora per un certo r il complesso $\text{sd}^r C$ ammette una decomposizione in manici PL con m_λ λ -manici PL.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione.

Poniamo $c = \#\{\text{punti critici di } f\}$ e $a = \min f$, se $c = 0$ allora $C \searrow C^a$ che deve essere un punto, v , ma allora per il Teorema 4.11 esiste un m tale che $N^m(C) = \text{sd}^m C$ shella a $N^m v$ che è una PL-palla di dimensione $n = \dim C$. Lo shelling conserva la classe di omeomorfismo dunque $\text{sd}^m C \cong B^n$, che è una decomposizione in manici PL con un unico 0-manico PL.

Supponiamo ora dimostrato il Teorema per $c = k$ e supponiamo f possenga $k + 1$ punti critici. Sia $b = \max\{f(\sigma) | \sigma \text{ è critica per } f\}$ allora otteniamo per il Teorema 2.1 che $C \searrow C^b$ ed in particolare se consideriamo la funzione di Morse in esame in accordo con la Definizione 2.3 abbiamo dal Teorema 2.2 che $C^b = C^{b-1} \cup \sigma^p$, dove σ^p è la cella critica con immagine b e l'unione è fatta lungo tutto il bordo di σ^p . Dunque C^{b-1} e C^b soddisfano le ipotesi del Lemma 4.1 perciò $N^2(C^b, C)$ è ottenuta da $N^2(C^{b-1}, C)$ attraverso l'attaccamento di un p -manico PL.

Per il Teorema 2.2 f ristretta a C^{b-1} possiede c_i punti critici di indice i per $i \neq p$ e $c_p - 1$ punti critici di indice p , inoltre su $N^2(C^{b-1}, C)$, che collassa in C^{b-1} , possiamo estendere la funzione definita su C^{b-1} senza aggiungere punti critici. Allora per n abbastanza grande otteniamo per induzione che $\text{sd}^n N^2(C^{b-1}, C)$ ammette una decomposizione in manici PL, quindi anche $\text{sd}^n N^2(C^b, C)$. Ora poiché $C \searrow C^b$ varrà che $\text{sd}^{n+2} C \searrow \text{sd}^n N^2 C^b$ perciò per un m abbastanza grande $\text{sd}^{m+n+2} C$ shella ed è dunque omeomorfo a $N^m \text{sd}^n N^2(C^b, C)$ che ammette una decomposizione in manici PL, in particolare tale decomposizione sarà con c_i i -manici PL per $i \neq p$ e $c_p - 1 + 1 = c_p$ p -manici PL. \square

Per mostrare che da una decomposizione in manici PL possiamo ottenere una funzione di Morse perfetta lavoreremo sulle funzioni di Morse critiche al bordo.

La nostra varietà è PL perciò le star di ogni vertice sono delle palle PL, dunque a meno di un certo numero di suddivisioni ogni star è shellabile. Grazie a [Ben10, Theorem 3.20] è sufficiente dimostrare che la nostra triangolazione ammette una funzione di Morse critica al bordo su $\text{sd}^r C$ con c_{n-i} punti critici interni di indice i perché ammetta una funzione di Morse su $\text{sd}^{r+1} C$ con c_i punti critici di indice i , dove c_i è il numero degli i -manici della decomposizione.

Prima dimostriamo un Teorema essenziale di preparazione:

Teorema 4.13. *Sia C una n -varietà PL con bordo, supponiamo che $C = C' \cup B$ dove:*

- C' è una n -varietà PL con bordo e B una n -palla PL shellabile;
- C' ammette una funzione di Morse critica perfetta al bordo;

- $C' \cap B$ è un sotto-complesso $(n-1)$ -dimensionale di $\partial C'$ e di ∂B ;
- $C' \cap B$ è omeomorfo PL a $S^{i-1} \times I^{n-i}$ per un certo i .

Allora ogni funzione di Morse critica al bordo g su $C' \cap B$ può essere estesa ad una funzione di Morse f su $C' \cup B$. In particolare se h è la funzione di Morse critica al bordo su C' , allora f ha tanti punti critici di indice i quanti sono quelli di h e g , eccezion fatta per il caso $i = d-1$ in cui ne possiede uno in meno.

Dimostrazione. C' ammette una funzione di Morse critica al bordo perfetta, g , dunque prendiamo una cella interna τ critica per g . Possiamo ora tramite h ridurre attraverso collassamenti/eliminazioni (come nel Teorema 3.9) $C' \setminus \tau$ a $\partial C'$, in particolare le celle coinvolte nella riduzione sono tutte interne perciò $C' \setminus \tau$ può essere ridotto a $\partial C' \cup B$. Se g non possedesse punti critici interni avremo direttamente il collassamento $C' \searrow \partial C' \cup B$.

Ora consideriamo una $(n-1)$ -cella σ di $C' \cap B$, allora σ avrà una sola faccia Σ in B (vedi [Gla70, Exercise II.4]), dunque σ è faccia libera di Σ . Avremo allora che $\partial C' \cup B \searrow \partial C' \cup B \setminus \Sigma \setminus \sigma$. Ora B è shellabile dunque esiste una funzione di Morse critica al bordo tale che possieda un solo punto critico che avrà indice n (cf. [Ben10]), possiamo supporre senza perdita di generalità che sia Σ . Allora $B \setminus \Sigma$ collassa su ∂B ed in questo collassamento vengono coinvolte solo celle interne perciò otteniamo che $C' \setminus \tau$ può essere ridotto a $\partial C' \cup \partial B \setminus \sigma$.

Ora concentriamoci su $D = \partial C' \cup \partial B$. Questo complesso può essere visto come l'unione lungo il comune bordo di $\partial(C' \cup B)$ e $C' \cap B$. Ora $C' \cap B \setminus \sigma$ può essere ridotto tramite la funzione h attraverso collassamenti/eliminazioni a $\partial(C' \cap B)$, in particolare i collassamenti rimangono tali, coinvolgendo solo celle interne, anche quando attacchiamo tale complesso con $\partial(C' \cup B)$. Dunque otteniamo che $D \setminus \sigma$ può essere ridotto attraverso collassamenti/eliminazioni tramite h a $\partial(C' \cap B) \cup \partial(C' \cup B)$, dove nell'unione il secondo complesso include il primo. Perciò concludendo abbiamo che $C' \setminus \tau$ è ridotto tramite g a $\partial C' \cup B$ questo a sua volta collassa in $D \setminus \sigma$ e infine $D \setminus \sigma$ tramite h può essere ridotto a $\partial C'$.

Ora su $\partial C'$ possiamo definire una funzione composta solo da celle critiche. Percorriamo in maniera inversa i collassamenti/eliminazioni ottenuti definendo così una funzione di Morse f in maniera compatibile con i collassamenti/eliminazioni. Tramite h da $\partial C'$ otteniamo con attaccamenti, lungo tutto/una parte del bordo a seconda che siano eliminazioni/collassamenti, $D \setminus \sigma$. Possiamo estendere f da $D \setminus \sigma$ a $\partial C' \cup B$ senza aggiungere punti critici essendo un collassamento ed infine come per h da $\partial C' \cup B$ ricostruiamo $C' \setminus \tau$ attraverso i collassamenti/eliminazioni generati da g . Concludiamo riattaccando τ e imponendo che sia critica.

Avremo così una funzione f che possiede gli stessi punti critici di g meno uno di indice $n-1$, σ , più tutti i punti critici di h . \square

Siamo infine pronti a dimostrare come da una decomposizione in manici si possa costruire una funzione di Morse.

Teorema 4.14. *Sia C una n -varietà PL. Supponiamo che C abbia una decomposizione in manici con c_i i -manici allora per r abbastanza grande $sd^r M$ ammette una funzione di Morse critica al bordo con c_{n-i} punti critici interni di indice i .*

Dimostrazione. Procederemo per induzione sia sulla dimensione di C che sul numero di manici della decomposizione. Se C ha dimensione 1 allora è un segmento, un S^1 o una combinazione disgiunta dei due e la tesi è ovvia.

Supponiamo che il Teorema valga per ogni varietà PL con dimensione minore di n .

Se C consiste di un solo manico allora è omeomorfa ad una n -palla PL e dunque per un certo r è vero che $\text{sd}^r C$ è shellabile e in particolare ammette una funzione di Morse critica al bordo con una sola n -cella interna critica (cf. [Ben10]), dunque la tesi è verificata.

Possiamo dimostrare la tesi per ogni componente connessa di C , dunque supponiamo C connesso. Sia data allora una decomposizione di C in manici $H^{i_1} \cup \dots \cup H^{i_k} \cup H$, dove H è un i -manico. Posto $C' = H^{i_1} \cup \dots \cup H^{i_k}$ possiamo scrivere $C = C' \cup H$.

Supponiamo di aver dimostrato il Teorema per ogni n -varietà PL con una decomposizione in manici con al massimo k manici. Avremo allora che il Teorema vale per C' e anche per $C' \cap H$. Ora $C' \cap H$ è omeomorfo a $S^{i-1} \times I^{n-i}$ dunque ammette una decomposizione topologica in due manici $(n-1)$ -dimensionali, un 0 -manico ed un $(i-1)$ -manico, dunque per un certo t $\text{sd}^t(C' \cap H)$ ammette una decomposizione in manici PL con un 0 -manico PL e un $(i-1)$ -manico PL. Avremo dunque che per un $s > t$ abbastanza grande $\text{sd}^s(C' \cap H)$ ammette una funzione di Morse critica al bordo g con $c_{d-1-i}^{\text{int}}(h) = 0$ se $i \neq 0, j$ e $c_{d-1-(j-1)}^{\text{int}}(h) = c_{d-j}^{\text{int}}(h) = 1$. Per induzione avremo che per un r' abbastanza grande $\text{sd}^{r'} C'$ ammette una funzione di Morse g critica al bordo con $c_{d-j}^{\text{int}}(g) = c'_j$ dove c'_j è il numero di j -manici nella decomposizione di C' , in particolare $c'_j = c_j$ se $j \neq i$ e $c'_i = c_i - 1$. Per il Teorema 4.9 abbiamo inoltre che esiste un m abbastanza grande perché $\text{sd}^m H$ sia shellabile, e dunque ammetta una funzione di Morse critica al bordo con un solo punto critico interno di indice n (cf. [Ben10]). Se prendiamo r il più grande tra s, m, r' otteniamo che $\text{sd}^r C = \text{sd}^r C' \cup \text{sd}^r H$ e siamo nelle ipotesi del Teorema 4.13. Dunque abbiamo una funzione di Morse f critica al bordo su $\text{sd}^r C$, rimane da contare i punti critici.

Abbiamo quattro possibilità:

- Se $j \neq 0, 1, i$ allora $c_{n-j}^{\text{int}}(f) = c_{n-j}^{\text{int}}(g) + c_{n-j}^{\text{int}}(h) = c'_j + 0 = c_j$;
- Se $j = 0$ allora $c_n^{\text{int}}(f) = c_n^{\text{int}}(g) + c_n^{\text{int}}(h) = c'_0 + 0 = c_0$;
- Se $j = 1$ allora $c_{n-1}^{\text{int}}(f) = c_{n-1}^{\text{int}}(g) + c_{n-1}^{\text{int}}(h) - 1 = c'_{n-1} + 1 - 1 = c_{n-1}$, dove il -1 deriva dal Teorema 4.13;
- Se $j = i$ allora $c_{n-i}^{\text{int}}(f) = c_{n-i}^{\text{int}}(g) + c_{n-i}^{\text{int}}(h) = c'_i + 1 = c_i$.

□

Otteniamo dunque che:

$$\{\text{Vettori di manici PL di } M\} = \{\text{Vettori discreti su triangolazioni PL di } M\}.$$

Resta fuori da tale trattazione il caso in cui la varietà ammetta una triangolazione non-PL e tale triangolazione ammetta una funzione di Morse discreta perfetta.

Dunque concludendo otteniamo che data una n -varietà differenziabile e una sua decomposizione differenziabile in manici esiste una funzione di Morse continua con tanti punti critici di indice λ quanti sono i λ -manici della decomposizione, e viceversa. Analogamente data una varietà PL e una decomposizione PL in manici esiste una funzione di Morse discreta tale che abbia tanti punti critici di

indice λ quanti sono i λ -manici della decomposizione, e viceversa. Il Teorema 4.8 ci dice che per data M , una n -varietà differenziabile, con $n \leq 7$, ed una sua decomposizione differenziabile in manici m_λ λ -manici esiste una triangolazione di M , C , tale che possieda esattamente m_λ λ -manici. Perciò abbiamo:

Teorema 4.15. *Data una varietà differenziabile M di dimensione $n \leq 7$ per ogni funzione di Morse continua f su M esiste C una triangolazione PL di M tale che ammetta una funzione di Morse g tale che:*

$$m_\lambda(f) = m_\lambda(g).$$

Il teorema ci dice insomma che se la dimensione delle varietà in questione è minore di 8 allora la Teoria di Morse continua ha una corrispondenza biunivoca con la Teoria di Morse discreta su varietà PL. Facciamo notare che nel caso di varietà differenziabili con bordo la Teoria di Morse continua per triadi differenziabili è equivalente a quella discreta su triadi poliedrali, lo si vede facilmente attraverso l'esistenza per ogni varietà (differenziabile o PL) di una funzione di Morse (continua o discreta) auto-indicizzante. In particolare otteniamo che possiamo vedere l'*h-cobordismo* in una sua controparte discreta ottenendo i medesimi risultati stavolta enunciati ovviamente con il linguaggio PL.

Per il caso $n \leq 4$ è equivalente prendere in considerazione la Teoria di Morse su triangolazioni qualsiasi, ma per il caso generale tale equivalenza viene a mancare, ed addirittura le triangolazioni PL potrebbero non essere le migliori per avere una funzione di Morse perfetta. Di ciò ci occuperemo nel prossimo paragrafo.

4.3 Triangolazioni non-PL

Come abbiamo già fatto notare presa una varietà topologica di dimensione maggiore di 4 non è detto che esista una triangolazione PL. In questo capitolo faremo vedere come una triangolazione non-PL possa essere più adatta rispetto ad una PL a definire una funzione di Morse perfetta.

Per sfere di dimensione maggiore di 2 abbiamo che esistono triangolazioni PL non perfette dal punto di vista della Teoria di Morse, ossia:

Teorema 4.16 ([Lic91], [BZ11]). *Per ogni intero $r \geq 0$ e ogni intero $n \geq 3$, esiste una n -sfera PL S tale che $sd^r S$ non ammetta una funzione di Morse discreta perfetta.*

L'esempio che porteremo è stato costruito da Benedetti in [Ben13, Proposition 3.20] e si basa sulle proprietà della varietà di Mazur.

Ricordiamo intanto alcuni Teoremi:

Teorema 4.17 ([Per02], [Fre82], [Sma62]). *Ogni n -sfera omologica semplicemente connessa è omeomorfa alla sfera di raggio 1 in \mathbb{R}^{n+1} .*

Corollario 4.2. *Ogni n -varietà contraibile con bordo semplicemente connesso è omeomorfa alla palla di raggio 1 in \mathbb{R}^{n+1} .*

Nota: Negli enunciati di sopra la parola “omeomorfa” può essere sostituita con “diffeomorfa” se $n = 1, 2, 3, 5, 6, 12, 61$, [Mil63, KM63].

In particolare nella categoria PL abbiamo che:

Teorema 4.18 ([Per02],[Sma62],[Sta62],[Zee61]). *Ogni n -sfera PL omologica semplicemente connessa, se $n \neq 4$, è PL omeomorfa al bordo del $(n + 1)$ -simpleso.*

Di cui un corollario è:

Corollario 4.3. *Ogni n -varietà PL contraibile con bordo semplicemente connesso è omeomorfa alla n -palla PL se $n \neq 4$.*

Introduciamo dunque la varietà di Mazur.

Esempio 4.1. (Varietà di Mazur)

Date le due 4-varietà $W_1 = I^3 \times S^1$ e $W_2 = I^2 \times I^2$, consideriamo un laccio $\Gamma \subset \partial W_1$ tale che la sua classe d'omologia sia un generatore per $H_1(\partial W_1)$ e un suo intorno tubolare $\Gamma \times I^2 \subset \partial W_1$. Sia inoltre $\Gamma' \subset \partial W_2$ il laccio $\partial I^2 \times \{p\}$ per un dato $p \in I^2$ e $\Gamma' \times I^2$ un suo intorno tubolare. Avremo che Γ è combinatorialmente equivalente a S^1 e lo stesso vale per Γ' , dunque Γ e Γ' sono tra loro combinatorialmente equivalenti. Sia ora $\varphi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ l'omeomorfismo combinatorio tra tali lacci e considerati i loro intorni tubolari rispettivamente in ∂W_1 e ∂W_2 , $\Gamma \times I^2$ e $\Gamma' \times I^2$, sia $\Phi : \Gamma \times I^2 \rightarrow \Gamma' \times I^2$ l'omeomorfismo combinatorio indotto da φ . Definiamo la varietà $W_\Gamma = W_1 \cup_\Phi W_2$ con l'attaccamento dei due intorni tubolari tramite Φ . È doveroso notare che W_Γ dipende sia da Γ che da Φ e dalla scelta degli intorni tubolari, tuttavia essendo Γ l'elemento più importante preferiamo metterlo come unico pedice.

Otteniamo dunque, indicato con $2W_\Gamma$ l'attaccamento di due copie di W_Γ lungo il bordo, che:

1. $W_\Gamma \times I$ è combinatorialmente equivalente a I^5 ;
2. W_Γ è contraibile;
3. $2W_\Gamma$ è combinatorialmente equivalente a S^4 ;
4. M_Γ è una 3-sfera omologica, dove $M_\Gamma = \partial W_\Gamma$.

Dimostrazione.

1. $W_\Gamma \times I$ è combinatorialmente equivalente a I^5 :

Consideriamo $W_\Gamma \times I = W_1 \times I \cup_{\Phi^*} W_2 \times I$, dove definiamo $\Phi^*(x, y) = (\Phi(x), y)$. Ora $\Gamma' \subset S^4 = \partial(W_2 \times I)$ e $\Gamma \subset S^3 \times S^1 = \partial(W_1 \times I)$, ora però esiste un'unica immersione, a meno di diffeomorfismi, di S^1 in S^4 e di S^1 in $S^3 \times S^1$ (tale che sia generatore di $H_1(S^3 \times S^1)$). Possiamo considerare il nostro laccio $\Gamma = (0, 0, 0, \sin t, \cos t) = \Gamma'$, immaginando S^4 e $S^3 \times S^1$ in \mathbb{R}^5 , e dunque otteniamo che l'attaccamento di $W_2 \times I$ a $W_1 \times I$ è visualizzabile come il riempimento tramite $W_2 \times I$ del buco di $W_1 \times I$. Dunque $W_\Gamma \times I$ è combinatorialmente equivalente a I^5 .

2. W_Γ è contraibile:

Presi $x \in W_\Gamma \times I$, $x_1 \in W_\Gamma$ e $x_2 \in I$ allora è vero che:

$$\pi_i(W_\Gamma \times I, x) = \pi_i(W_\Gamma, x_1) \times \pi_i(I, x_2).$$

Ora però $\pi_i(W_\Gamma \times I, x) = \pi_i(I^5, \tilde{x})$ è nullo per ogni i essendo I^5 contraibile, così come vale per $\pi_i(I, x_2)$. Allora W_Γ è tale che $\pi_i(W_\Gamma, x_1) = 0$ per ogni i e dunque W_Γ è contraibile.

3. $2W_\Gamma$ è combinatorialmente equivalente a S^4 :

Se consideriamo $\partial(W_\Gamma \times I)$ abbiamo che coincide con $W_\Gamma \times \{0\} \cup M_\Gamma \times I \cup W_\Gamma \times \{1\}$, dove indichiamo ∂W_Γ con M_Γ e le unioni sono attaccamenti lungo la frontiera comune M_Γ . Ora $S^4 = \partial(I^5)$ è combinatorialmente equivalente a $\partial(W_\Gamma \times I)$ dunque otteniamo, poiché $W_\Gamma \times \{0\} \cup M_\Gamma \times I \cup W_\Gamma \times \{1\}$ è combinatorialmente equivalente a $2W_\Gamma$, che S^4 è combinatorialmente equivalente a $2W_\Gamma$.

4. M_Γ è una 3-sfera omologica:

W_Γ ha l'omologia di I^4 , infatti dalla formula di Kunnetth:

$$\tilde{H}_i(W_\Gamma \times I) = \sum_j \tilde{H}_j(W_\Gamma) \otimes \tilde{H}_{i-j}(I).$$

Ora però $\tilde{H}_i(W_\Gamma \times I) = \tilde{H}_i(I^5) = 0$ per ogni i , ed analogamente vale per I , dunque $\tilde{H}_j(W_\Gamma) = 0$ per ogni j . Ora se consideriamo la sequenza di Mayer-Vietoris per $X = W_\Gamma$ e $Y = W_\Gamma$ in $2W_\Gamma = S^4$ otteniamo:

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow H_4(M_\Gamma) \rightarrow H_4(W_\Gamma) \oplus H_4(W_\Gamma) \rightarrow H_4(S^4) \rightarrow \\ &\rightarrow H_3(M_\Gamma) \rightarrow H_3(W_\Gamma) \oplus H_3(W_\Gamma) \rightarrow H_3(S^4) \rightarrow \\ &\rightarrow H_2(M_\Gamma) \rightarrow H_2(W_\Gamma) \oplus H_2(W_\Gamma) \rightarrow H_2(S^4) \rightarrow \\ &\rightarrow H_1(M_\Gamma) \rightarrow H_1(W_\Gamma) \oplus H_1(W_\Gamma) \rightarrow H_1(S^4) \rightarrow \\ &\rightarrow H_0(M_\Gamma) \rightarrow H_0(W_\Gamma) \oplus H_0(W_\Gamma) \rightarrow H_0(S^4) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ricordando che $H_i(W_\Gamma) \neq 0$ se e solo se $i = 0$ e che $H_i(S^4) = \mathbb{Z}$ se e solo se $i = 4, 0$, otteniamo:

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow H_4(M_\Gamma) \rightarrow 0 \oplus 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \\ &\rightarrow H_3(M_\Gamma) \rightarrow 0 \oplus 0 \rightarrow 0 \rightarrow \\ &\rightarrow H_2(M_\Gamma) \rightarrow 0 \oplus 0 \rightarrow 0 \rightarrow \\ &\rightarrow H_1(M_\Gamma) \rightarrow 0 \oplus 0 \rightarrow 0 \rightarrow \\ &\rightarrow H_0(M_\Gamma) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Questo implica che $H_i(M_\Gamma) = 0$ se $i = 4, 2, 1$ mentre per $i = 3, 0$ otteniamo che $H_i(M_\Gamma) = \mathbb{Z}$ ossia M_Γ è una 3-sfera omologica.

□

In particolare quello che si può fare e sarà essenziale per il nostro controesempio è trovare un Γ tale che M_Γ non sia semplicemente connessa e non omeomorfa ad una 3-sfera. Per una trattazione approfondita della scelta di tale Γ rimandiamo al lavoro di Mazur, [Maz61].

Mostreremo che esiste una triangolazione non-PL della 5-palla B tale che ammetta una funzione di Morse perfetta.

Per mostrare che la nostra triangolazione non è PL avremo bisogno del seguente criterio di Edwards-Cannon:

Teorema 4.19 ([Can79],[Edw78, Edw06]). *Sia M una varietà omologica allora sono equivalenti:*

- M è una varietà;
- $\text{Lk } v$ in M è semplicemente connesso per ogni vertice in M

Consideriamo perciò M triangolazione PL di W_Γ e H triangolazione PL di M_Γ . Ora H è una 3-sfera PL omologica e per un'opportuna scelta di Γ H non è semplicemente connessa perciò M non è una 4-palla PL. Consideriamo p un nuovo vertice e C_0 la varietà ottenuta attaccando il cono $p * H$ a M lungo il bordo comune. Ora C_0 per il Teorema 4.19 non è una varietà PL poiché $\text{Lk } p = H$ non è una 3-sfera PL. C_0 sarà una varietà PL omologica con l'omologia di una 4-sfera, ed inoltre poiché H è connesso otteniamo che C_0 è semplicemente connesso. Consideriamo allora ΣC_0 , la sospensione di C_0 , ossia la varietà $C_1 = \{x, y\} * C_0$, dove x, y sono nuovi vertici. C_1 sarà una varietà PL omologica, vorremo mostrare che è una varietà topologica non-PL. Per farlo studieremo i $\text{Lk } v$ al variare di v , ricordando che se $a \in X$ allora $\text{Lk}(\Sigma X, a) = \Sigma \text{Lk}(X, a)$:

- Se $v = x, y$ allora $\text{Lk } v = C_0$ che è semplicemente connesso;
- Se $v \in M$ allora $\text{Lk}(C_0, v)$ è una 3-sfera e dunque $\text{Lk}(C_1, v)$ è la sospensione di $\text{Lk}(C_0, v)$ ossia una 4-sfera;
- Se $v = p$ allora $\text{Lk}(C_1, v) = \Sigma \text{Lk}(C_0, v) = \Sigma H$, ma allora da Seifert-Van Kampen applicato ai due coni $x * H$ e $y * H$, otteniamo che $\text{Lk}(C_1, v)$ è semplicemente connessa.

Dunque abbiamo che C_1 è una varietà, ma non può essere PL perché $\text{Lk } x$ è una 4-sfera omologica e non-PL. Sia S l'insieme dei punti PL-singolari per C_1 , i.e. $S = \{p \in C_1 \mid \text{Lk } p \text{ non è semplicemente connesso}\}$, allora $S = \{x, y, p\} \cup x * p \cup y * p$.

Consideriamo allora B la sotto-varietà di $\text{sd}^2 C_1$ ottenuta intersecando $\text{sd}^2 S$ con $\text{sd}^2 C_1$. Ora B collassa in S per il Teorema 4.10 ed essendo S un albero, abbiamo che B collassa in un punto. Ora però il bordo di B è l'attaccamento di $\text{Lk } x \setminus \{p\}$ e $\text{Lk } y \setminus \{p\}$ entrambi uguali ad M , lungo il bordo comune $\text{Lk } p \setminus \{x\} \setminus \{y\}$, uguale ad H , dunque ∂B è omeomorfo PL a $2M$, perciò è contraibile e semplicemente connesso, dunque dal Teorema 4.2 è una 4-sfera PL. Per il Teorema 4.3 dunque B è omeomorfo ad una 5-palla, ma non può essere PL, contenendo $\text{sd}^2 S$, ed il suo bordo ∂B dal Teorema 4.9 a meno di un certo numero di suddivisioni baricentriche è shellabile.

Costruiamo allora $X = \partial(a * B)$ dove a è un nuovo vertice. Otteniamo allora che $X = B \cup_{\partial B} (a * \partial B)$, essendo ∂B shellabile lo sarà anche la palla $D = a * \partial B$. Sia allora Δ una 5-faccia di D , avremo che $D \setminus \Delta$ collassa in $\partial D = \partial B$, ma allora anche $X \setminus \Delta$ collassa in B , che a sua volta sappiamo collassare in un punto. Abbiamo dunque una varietà topologica triangolata X tale che $X \setminus \Delta$

collassa ad un punto, allora il Teorema 2.4 ci dice che possiamo costruire su $X \setminus \Delta$ una funzione di Morse f con un solo punto critico di indice 0. Posto $c = \max\{f(\sigma) \mid \sigma \in X \setminus \Delta\}$, definisco la funzione di Morse g coincidente in $X \setminus \Delta$ con f e $g(\Delta) = c + 1$. In particolare abbiamo trovato su una triangolazione non-PL di una 5-sfera topologica una funzione di Morse perfetta, g .

Bibliografia

- [AB12] K. Adiprasito and B. Benedetti. Subdivisions, shellability and the Zeeman conjecture. <http://arXiv:1202.6606>, 2012.
- [Ben10] B. Benedetti. Discrete Morse Theory for Manifolds with Boundary. Preprint at <http://arxiv.org/abs/1007.3175>, 2010.
- [Ben13] B. Benedetti. Smoothing Discrete Morse Theory. <http://arxiv.org/abs/1212.0885v2>, 2013.
- [BZ11] B. Benedetti and G. M. Ziegler. On locally constructible spheres and balls. *Acta Math.* 206 (2011), no. 2, 205-243, 2011.
- [Cai61] S. S. Cairns. A simple triangulation method for smooth manifold. *Bull. Amer. Math. Soc.* 67 (1961) 389-390, 1961.
- [Can79] J. W. Cannon. Shrinking cell-like decompositions of manifolds. Codimension three. *Annals of Math. (2)*, vol. 110 (1979), no. 1, pp. 83-112, 1979.
- [Cer68] J. Cerf. Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois ($\Gamma_4 = 0$). Lecture Notes in Mathematics, No. 53, Springer-Verlag, Berlin, 1968.
- [Edw78] R. D. Edwards. The topology of manifolds and cell-like maps. *Proc. ICM 1978, Helsinki*, 111-127, 1978.
- [Edw06] R. D. Edwards. Suspensions of homology spheres. Preprint (publ. 2006, ma scritto attorno al 1978) <http://arXiv:math/0610573>, 2006.
- [For95] R. Forman. Morse Theory for Cell Complexes. *Advances in Mathematics* 134, 90-145, 1995.
- [Fre82] M. Freedman. The topology of four-dimensional manifolds. *J. Diff. Geom.* 17 (1982), 357-453, 1982.
- [Gla70] L. C. Glaser. Geometrical Combinatorial Topology Volume 1. *Van Nostrand Reinhold Company*, 1970.
- [HM74] M. W. Hirsch and B. Mazur. Smoothings of piecewise linear manifolds. *Princeton University Press, Annals of Mathematics Studies, No. 80*, 1974.
- [Ker60] M. A. Kervaire. A Manifold which does not admit any Differentiable Structure. *Comment. Math. Helv.* 34 (1960) 257-270, 1960.

- [KM63] M. A. Kervaire and J. W. Milnor. Groups of homotopy spheres, I. *Ann. of Math. (2)* 77 (1963), 504-537, 1963.
- [KS77] R. C. Kirby and L. C. Siebenmann. Foundational essays on topological manifolds, smoothings, and triangulations. Princeton Univ. Press, Princeton, 1977.
- [Lic91] W. B. R. Lickorish. Unshellable triangulations of spheres. *Europ. J. Combin.*, 12 (1991), 527-530, 1991.
- [LW69] A. Lundell and S. Weingram. The Topology of CW-Complexes. *Van Nostrand Reinhold Company*, 1969.
- [Mat02] Y. Matsumoto. An Introduction to Morse Theory. *Translations of Mathematical Monographs, Vol. 208, American Mathematical Society, Providence*, 2002.
- [Maz61] B. Mazur. A Note on Some Contractible 4-Manifold. *Annals of Mathematics Vol. 73, No. 1*, 1961.
- [Mil58] J. Milnor. Differential Topology. *Princeton University*, 1958.
- [Mil63] J. Milnor. Morse Theory. *Annals of Mathematic Studies AM-51*, 1963.
- [Mil65] J. Milnor. Lectures on the h -cobordism. *New Jersey Princeton University Press*, 1965.
- [Mun60] J. R. Munkres. Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms. *Ann. of Math. (2)* 72 (1960), 521-554, 1960.
- [Mun84] J. R. Munkres. Elements of Algebraic Topology. *Addison-Wesley Publishing Company, Inc.*, 1984.
- [Per02] G. Perelman. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, 2002.
- [RS72] C. P. Rourke and B. J. Sanderson. Introduction to Piecewise-Linear Topology. *Springer-Verlang Berlin Heideberg New York*, 1972.
- [Sma61] S. Smale. On Gradient Dynamical Systems. *Annals of Math, vol. 74*, 1961.
- [Sma62] S. Smale. On the structure of manifolds. *Amer. J. Math. 84 (1962)*, 387-399, 1962.
- [Sta62] J. Stallings. The piecewise-linear structure of Euclidean space. *Proc. Cambridge Philos. Soc. 58 (1962)*, 481-488, 1962.
- [Sta68] J. R. Stallings. Lectures on Polyhedral Topology. *Tata Institute of Fundamental Research, Bombay*, 1968.
- [Wal60] A. Wallace. Modifications and Cobounding Manifolds. *Canadian Journal of Math, vol. 12*, 1960.

- [Whi38] J. H. C. Whitehead. Simplicial spacs, nuclei and m -groups. *Ann. Math*, 1938.
- [Whi92] H. Whitney. Hassler Whitney Collected Papers. *Birkäuser Boston*, 1992.
- [Zee61] E. C. Zeeman. The generalised Poincaré conjecture. *Bull. Amer. Math. Soc.* 67, 270, 1961.