NORSK MATEMATISK TIDSSKRIFT

ORGAN FOR NORSK MATEMATISK FORENING

(UTKOMMER ÅRLIG MED 4 HEFTER)

REDAKTØRER:

THORALF SKOLEM · KAY PIENE

34. ÅRGANG
1952

OSLO
TRYKT HOS GRØNDAHL & SØN
1952

INNHOLD

Side

Oppgaver for gymnaselever.

Løste oppgaver.

Bokmeldinger,

Über die eindeutige Primelementzerlegung.

Von

Friedrich Kasch in Göttingen.

Es sei R_n der Ring der ganzen Potenzreihen in den Unbestimmten $z_1, z_2, \ldots, z_n$ mit Koeffizienten aus dem Körper R der komplexen Zahlen. In der Literatur (siehe z. B. C. L. Siegel, Analytic Functions of Several Complex Variables, Lectures delivered at the Inst. for Advanced Study 1948; Bochner and Martin, Several Complex Variables, Princeton University Press 1948) gibt es mehrere Beweise dafür, dass in R_n die eindeutige Primelementzerlegung existiert. Diese Beweise benutzen neben dem Vorbereitungssatz von Weierstrass die Tatsache, dass sich die eindeutige Primelementzerlegung eines Integritätsbereiches I auf den Polynomring $I[z]$ überträgt.

Hier soll ein Beweis gegeben werden, der diese Tatsache nicht voraussetzt, sondern sogleich mitbeweist. Auch in diesem Fall scheint mir der folgende Beweis gegenüber den mir aus der Literatur bekannten den Vorteil zu besitzen, dass er nicht die Konstruktion des Quotientenkörpers benutzt und doch recht kurz ist.

Die eindeutige Primelementzerlegung ist bekanntlich eine unmittelbare Folge des Euklidischen Lemmas. Auf Grund des Vorbereitungssatzes von Weierstrass genügt es, dies in der folgenden Fassung zu beweisen

Es seien $a, b \varepsilon R_{n-1}[z_n]$, $c \varepsilon R_n$, $(a, b) = 1$ und a/bc. Dann ist a/c.

Bemerkung: Kommt es nur auf den Beweis an, dass sich die eindeutige Primelementzerlegung von einem Integritätsbereich I auf den Polynomring $I[z]$ überträgt, so setze man im folgenden $R_n = I[z]$ und schliesse wie beim Induktionsschluss für n.

Der Beweis erfolgt durch Induktion über die Zahl der Unbestimmten n. Der Induktionsbeginn ist gültig, denn in R_1 existiert bis auf assoziierte nur das Primelement z_1. Der Induktionsschluss für n wird durch Induktion über den Grad r von a in Bezug auf z_n geführt. Von R_{n-1} wird dabei nur benutzt, dass es ein Integritätsbereich mit eindeutiger Primelementzerlegung ist.

Ist $r = 0$, also $a \varepsilon R_{n-1}$, so ist die Behauptung nichts anderes als der Gauss'sche Satz für Potenzreihen, der wörtlich ebenso bewiesen werden kann, wie für Polynome. Dabei wird die Voraussetzung $b \varepsilon R_{n-1}[z_n]$ nicht benutzt, was im folgenden zu berücksichtigen ist.

Die Behauptung gelte für Grad $a < r$. a/bc besagt, dass es ein Element $d \varepsilon R_n$ mit

$$ad = bc \tag{1}$$

gibt. In $R_{n-1}[z_n]$ existiert der Euklidische Algorithmus derart, dass es Elemente $\gamma \varepsilon R_{n-1}$ und $e \varepsilon R_{n-1}[z_n]$ gibt, für die

$$\gamma b - ea = f \tag{2}$$

mit Grad $f <$ Grad $a = r$ gilt. Es werde bezeichnet $(a, \gamma) = \beta$, $a = a^*\beta$, $\gamma = \gamma^*\beta$, $\gamma^* b - ea^* = f^*$. Dann wird behauptet: $(a^*, f^*) = 1$. Ein gemeinsamer Teiler g von a^* und f^* müsste nämlich $\gamma^* b$ teilen; es gäbe also ein h mit $gh = \gamma^* b$. Dabei ist $\gamma^* \varepsilon R_{n-1}$ und $(\gamma^*, g) = 1$. Also muss auf Grund der Induktionsvoraussetzung γ^*/h sein. Da R_n nullteilerfrei ist, folgt g/b. Dies ist aber wegen $(a, b) = 1$ nur möglich für $g \sim 1$.

Aus (1) folgt unmittelbar

$$a^* d_1 = f^* c \qquad (\text{mit } d_1 = \gamma d - ec),$$

ferner ist Grad $f^* =$ Grad $f <$ Grad a, $a^* \varepsilon R_{n-1}[z_n]$ und es gilt $(a^*, f^*) = 1$. Aus der Induktionsvoraussetzung erhält man also f^*/d_1 und folglich a^*/c, d. h. $a^* k = c$. Dies in (1) eingesetzt ergibt:

$$\beta d = bk.$$

Wegen $\beta \varepsilon R_{n-1}$ und $(\beta, b) = 1$ folgt β/k, also ist insgesamt $a = a^*\beta/c$ wie im Satz behauptet.

Zum Schluss sei bemerkt, dass man die eindeutige Primelementzerlegung ebenso für Euklidische Integritätsbereiche, also

Integritätsbereiche in denen eine Euklidische Normfunktion $N(a)$ existiert, beweisen kann. Der Beweis wird dann noch wesentlich kürzer, nämlich so: Man hat jetzt nur Induktion über $N(a)$ zu führen, bei der einerseits der Induktionsbeginn für $N(a) = 1$ trivial ist; andererseits fällt im Induktionsschluss beim Euklidischen Algorithmus (2) der Faktor γ weg, sodass unmittelbar f/d_1 und daraus wie behauptet a/c folgt.

Rettelse side 110 forrige årgang av Norsk Matematisk Tidsskrift.

Midt på side 110 står feilaktig, at polynomet $k(t)$ skal velges av grad $m - 1$. Det skal være $m + l - 1$, hvor $l = \max(h, k)$. Derved blir antallet av ukjente koeffisienter i ligning (9) i alt

$$4m + h + k + l + 3,$$

mens antallet av ligninger mellom disse ukjente koeffisienter som må oppfylles, for at (9) skal være en identitet i t blir

$$m + 3n + l - r - s.$$

Den videre utvikling blir som før.

Th. S.
