

NORSK MATEMATISK TIDSSKRIFT

ORGAN FOR NORSK MATEMATISK FORENING

(UTKOMMER ÅRLIG MED 4 HEFTER)

REDAKTØRER:

THORALF SKOLEM · KAY PIENE

34. ÅRGANG
1952

OSLO
TRYKT HOS GRØNDAHL & SØN
1952

INNHOOLD

	Side
<i>Aubert, K. E.</i> : Funksjoner som fremstiller primtall	42
—«— : Kontinuitet og diskrete funksjoner	33
<i>Bang, Thøger</i> : En Funktion som fremstiller alle Primtall	117
<i>Kasch, Friedrich</i> : Über die eindeutige Primelementzerlegung	10
—»— : Zur Erzeugung separablen Algebren	97
<i>Ljunggren, Wilhelm</i> : New Solution of a Problem proposed by E. Lucas	65
<i>Piène, Kay</i> : Geometriske steder i matematikkundervisningen	100
<i>Rose, Allan</i> : Extensions of some theorems of Schmidt and McKinsey I..	1
<i>Selmer, Ernst S.</i> : On the Dixon elliptic functions in the equianharmonic case	105
<i>Skolem, Th.</i> : Anvendelse av 3-adisk analyse og «bikropper» til bevis for noen satser angående visse kubiske ubestemte ligninger	45
—»— : On a certain connection between the discriminant of a polynomial and the number of its irreducible factors mod p	81
—»— : The general congruence of 4th degree modulo p , p prime	73
<i>Mindre meddelelser.</i>	
<i>T. Nagel, Tor Schaug-Pettersen, Andreas Ystad</i>	13, 63, 93
<i>Nyberg, Michael</i> : Matematikk og poesi	32
Faktortabeller utarbeidet av <i>Michael Nyberg</i>	99
<i>Norsk Matematisk Forening.</i>	
Generalforsamling i Norsk Matematisk Forening	17
Resultatet av oppgavekonkurransen for gymnaselever 1951	18
Kronikk	9, 64, 96, 125
Norsk Matematisk Tidsskrift 1919—1952	126
Mathematica Scandinavica	128
<i>Eksamensoppgaver.</i>	
Universitetet i Oslo 1949 II, 1950 I, 1950 II, 1951 I, 1951 II, 1952 I	30, 57, 121
Norges tekniske Høgskole mai 1952	122
<i>Oppgaver til løsning.</i>	
<i>K. E. Aubert, Alfred Moessner</i>	56, 89

Oppgaver for gymnaselever.

Michael Nyberg og ved redaksjonen..... 51

Løste oppgaver.

A. Lodemel: Oppg. 9, 1951..... 61
 Tor Schaug-Pettersen: Oppg. 10, 1951 62
 S. Halvorsen: Oppg. 11, 1951 95
 Tor Schaug-Pettersen: Oppg. 12. 1951..... 63

Bokmeldinger,

Andersen, A. F. og Mogensen, Poul: Lærebog i Matematik for Gymna-
 siets matematisk-naturvidenskabelige Linie II, III, IV, anm. av
 Kay Piene 29, 85, 118
 Ayre, H. Glenn: Basic Mathematical Analysis, anm. av Kay Piene... 119
 Becker, O. & Hofmann, J. E.: Geschichte der Mathematik, anm. av
 Viggo Brun 54
 Bieberbach, L.: Einführung in die analytische Geometrie, anm. av
 Sigmund Selberg 27
 Dávid, L. v.: Die beiden Bolya, anm. av Kay Piene 88
 Fleckenstein, J. O.: Johann und Jakob Bernoulli, anm. av Viggo Brun 21
 Gebelein, H.: Zahl und Wirklichkeit, anm. av Kay Piene 118
 Hoheisel, Guido: Gewöhnliche Differentialgleichungen, anm. av R. Tambs
 Lyche 87
 Itard, J.: Pierre Fermat, anm. av Viggo Brun 53
 Lietzmann, Walther: Methodik des mathematischen Unterrichts, anm.
 av Kay Piene..... 25
 —»— : Schulreform und mathematischer Unterricht, anm.
 av Kay Piene..... 24
 Malsch, Fritz: Zahl und Raum, II, III, IV, anm. av Kay Piene 119
 Nagell, Trygve: Introduction to Number Theory, anm. av Sigmund Selberg 87
 Næss, Almar: Regnestaven, anm. av Kåre Dalen..... 23
 Næss, Arne: Symbolsk logikk, I og II, anm. av K. E. Aubert 19
 Pihl, H. J. og Rubinstein, P.: Lærebog i Matematik for det matema-
 tisk-naturvidenskabelige Gymnasium I, anm. av Kay Piene..... 120
 Sneddon, Ian N.: Fourier Transforms, anm. av J. E. Fjeldstad 21
 Taton René: Gaspard Monge, anm. av O. P. Arvesen 22

Über die eindeutige Primelementzerlegung.

Von

Friedrich Kasch in Göttingen.

Es sei R_n der Ring der ganzen Potenzreihen in den Unbestimmten z_1, z_2, \dots, z_n mit Koeffizienten aus dem Körper R der komplexen Zahlen. In der Literatur (siehe z. B. C. L. Siegel, *Analytic Functions of Several Complex Variables*, Lectures delivered at the Inst. for Advanced Study 1948; Bochner and Martin, *Several Complex Variables*, Princeton University Press 1948) gibt es mehrere Beweise dafür, dass in R_n die eindeutige Primelementzerlegung existiert. Diese Beweise benutzen neben dem Vorbereitungssatz von Weierstrass die Tatsache, dass sich die eindeutige Primelementzerlegung eines Integritätsbereiches I auf den Polynomring $I[z]$ überträgt.

Hier soll ein Beweis gegeben werden, der diese Tatsache nicht voraussetzt, sondern sogleich mitbeweist. Auch in diesem Fall scheint mir der folgende Beweis gegenüber den mir aus der Literatur bekannten den Vorteil zu besitzen, dass er nicht die Konstruktion des Quotientenkörpers benutzt und doch recht kurz ist.

Die eindeutige Primelementzerlegung ist bekanntlich eine unmittelbare Folge des Euklidischen Lemmas. Auf Grund des Vorbereitungssatzes von Weierstrass genügt es, dies in der folgenden Fassung zu beweisen

Es seien $a, b \in R_{n-1}[z_n]$, $c \in R_n$, $(a, b) = 1$ und a/bc . Dann ist a/c .

Bemerkung: Kommt es nur auf den Beweis an, dass sich die eindeutige Primelementzerlegung von einem Integritätsbereich I auf den Polynomring $I[z]$ überträgt, so setze man im folgenden $R_n = I[z]$ und schliesse wie beim Induktionsschluss für n .

Der Beweis erfolgt durch Induktion über die Zahl der Unbestimmten n . Der Induktionsbeginn ist gültig, denn in R_1 existiert bis auf assoziierte nur das Primelement z_1 . Der Induktionsschluss für n wird durch Induktion über den Grad r von a in Bezug auf z_n geführt. Von R_{n-1} wird dabei nur benutzt, dass es ein Integritätsbereich mit eindeutiger Primelementzerlegung ist.

Ist $r = 0$, also $a \in R_{n-1}$, so ist die Behauptung nichts anderes als der Gauss'sche Satz für Potenzreihen, der wörtlich ebenso bewiesen werden kann, wie für Polynome. Dabei wird die Voraussetzung $b \in R_{n-1}[z_n]$ nicht benutzt, was im folgenden zu berücksichtigen ist.

Die Behauptung gelte für Grad $a < r$. a/bc besagt, dass es ein Element $d \in R_n$ mit

$$(1) \quad ad = bc$$

gibt. In $R_{n-1}[z_n]$ existiert der Euklidische Algorithmus derart, dass es Elemente $\gamma \in R_{n-1}$ und $e \in R_{n-1}[z_n]$ gibt, für die

$$(2) \quad \gamma b - ea = f$$

mit Grad $f < \text{Grad } a = r$ gilt. Es werde bezeichnet $(a, \gamma) = \beta$, $a = a^*\beta$, $\gamma = \gamma^*\beta$, $\gamma^*b - ea^* = f^*$. Dann wird behauptet: $(a^*, f^*) = 1$. Ein gemeinsamer Teiler g von a^* und f^* müsste nämlich γ^*b teilen; es gäbe also ein h mit $gh = \gamma^*b$. Dabei ist $\gamma^* \in R_{n-1}$ und $(\gamma^*, g) = 1$. Also muss auf Grund der Induktionsvoraussetzung γ^*/h sein. Da R_n nullteilerfrei ist, folgt g/b . Dies ist aber wegen $(a, b) = 1$ nur möglich für $g \sim 1$.

Aus (1) folgt unmittelbar

$$a^*d_1 = f^*c \quad (\text{mit } d_1 = \gamma d - ec),$$

ferner ist $\text{Grad } f^* = \text{Grad } f < \text{Grad } a$, $a^* \in R_{n-1}[z_n]$ und es gilt $(a^*, f^*) = 1$. Aus der Induktionsvoraussetzung erhält man also f^*/d_1 und folglich a^*/c , d. h. $a^*k = c$. Dies in (1) eingesetzt ergibt:

$$\beta d = bk.$$

Wegen $\beta \in R_{n-1}$ und $(\beta, b) = 1$ folgt β/k , also ist insgesamt $a = a^*\beta/c$ wie im Satz behauptet.

Zum Schluss sei bemerkt, dass man die eindeutige Primelementzerlegung ebenso für Euklidische Integritätsbereiche, also

Integritätsbereiche in denen eine Euklidische Normfunktion $N(a)$ existiert, beweisen kann. Der Beweis wird dann noch wesentlich kürzer, nämlich so: Man hat jetzt nur Induktion über $N(a)$ zu führen, bei der einerseits der Induktionsbeginn für $N(a) = 1$ trivial ist; andererseits fällt im Induktionsschluss beim Euklidischen Algorithmus (2) der Faktor γ weg, sodass unmittelbar f/d_1 und daraus wie behauptet a/c folgt.

**Rettelse side 110 forrige årgang av Norsk
Matematisk Tidsskrift.**

Midt på side 110 står feilaktig, at polynomet $k(t)$ skal velges av grad $m - 1$. Det skal være $m + l - 1$, hvor $l = \max(h, k)$. Derved blir antallet av ukjente koeffisienter i ligning (9) i alt

$$4m + h + k + l + 3,$$

mens antallet av ligninger mellom disse ukjente koeffisienter som må oppfylles, for at (9) skal være en identitet i t blir

$$m + 3n + l - r - s.$$

Den videre utvikling blir som før.

Th. S.
