XII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Querétaro, Qro. México. 15-18 Julio de 2007

CUANDO X = X, NO SIGNIFICA LO MISMO.

Andrea L. López Pineda
Universidad Autónoma de Querétaro

De acuerdo a Heidegger y Wittgenstein, las matemáticas constituyen una manera de pensar el mundo. Sin embargo no pueden ser consideradas como la *única* manera de pensar, y por tanto, pueden entenderse como un fenómeno social, como construcciones culturales y por ende falibles (Ernest, 1994, 1996, Moslehian, 2003).

Si las matemáticas son, una forma de interpretar el mundo y éstas no son la única manera de pensar, cabe considerar que en los espacios educativos se abrirían diversas posibilidades, sin embargo en el ámbito educativo parecieran considerarse como únicas y acabadas lo que puede dirigir a los estudiantes a una particular manera de interpretar el mundo.

Uno de los aspectos esenciales en el trabajo en matemáticas es la aceptación del principio de identidad, esto es X=X. Este principio se ha considerado, en los ámbitos educativos como verdad absoluta. Desde una perspectiva psicogenética se asume que los jóvenes acceden a éste como producto del desarrollo cognitivo (Piaget, 1985). Sin embargo, ante posturas filosóficas como la falibilista y dialógica (Ernest (2004), Sierpinska y Lerman (1996), este principio puede ser reconsiderado

La intención de este trabajo es doble, por un lado, determinar si en matemáticas, el principio de identidad puede ser evidente y asequible para los estudiantes de bachillerato, si éste se interpreta de manera unívoca y canónicamente o conlleva otras posibles interpretaciones, y por otro, explorar si esta aprehensión tiene relación con su desempeño en la materia.

Marco Teórico

Ernest (1994,1996), Moslehian (2000,2004), Sierpinska y Lerman (1996), Handal (2003) y Alemán (2001), entre otros, han caracterizado las diversas posiciones en torno a la naturaleza de las matemáticas. Estos autores señalan generalmente en su descripción, dos conjuntos de visiones filosóficas acerca de la naturaleza de las matemáticas y su forma de proceder. Estas perspectivas reciben designaciones variadas, entre las que se encuentran: Fundacionalistas, Absolutistas vs. Falibilistas, cuasi-empiricistas (Handal, 2003); Modernismo, Estructuralismo vs. Posmodernismo; Monológicas vs. Dialógicas (Ernest, 1994, Skovsmose, 1996); Descriptivistas vs No Descriptivistas (Alemán, 2001).

Las aproximaciones absolutistas, fundacionalistas, monólogicas, descriptivistas y modernas no obstante tener sus particularidades, coinciden al concebir a las matemáticas como verdades absolutas, independientes del hombre, y cuya certeza de verdad no puede ser refutada. Un aspecto relevante en la descripción de tales posturas lo constituyen los principios lógicos, en estas perspectivas dichos principios son considerados principios fundamentales de verdad y una forma incuestionable de expresar el pensamiento del hombre.

En el transcurso del siglo pasado, surgieron una serie de cuestionamientos en torno a las tendencias anteriormente citadas, los cuales permitieron el desarrollo de nuevas aproximaciones a la naturaleza y modo de proceder de la matemática. Nos referimos a las perspectivas posmodernas, cuasi-empiricistas, dialógicas, falibilistas, no descriptivistas.

Moslehian (2004) caracteriza al posmodernismo como una aproximación en la cual se rechaza la idea de objetividad y la existencia de verdades absolutas fundadas en la racionalidad. Es una propuesta en la que la incertidumbre y la ambigüedad son partes esenciales en el mundo, por ello no caben las oposiciones. El posmodernismo cuestiona la lógica aristotélica, y asume una lógica difusa en el cual las decisiones están basadas en "grados de verdad" en lugar de "falso-verdadero". Una interpretación posmoderna de las matemáticas, implica que el conocimiento matemático ha surgido, antes que por cualquier sentido de verdad objetiva, por motivos pragmáticos, sociales, culturales e históricos.

Tanto las perspectivas modernas como las posmodernas coexisten en nuestro tiempo, manteniendo una productiva discusión.

En otro plano, dentro de la psicología encontramos una perspectiva de gran impacto en el sistema educativa mexicano, nos referimos al constructivismo. Esta aproximación tiene una gran cercanía con la lógica. Específicamente, al referirse al principio de identidad, argumenta su existencia como producto del desarrollo cognitivo (Piaget y otros, 1985). Con respecto de esta aproximación, Skovsmose (1994), a diferencia de Handal (2003), señala que es monológica antes que dialógica, en la medida en que explica el desarrollo del pensamiento matemático a partir de la abstracción reflexiva, la cual es totalmente realizada por el sujeto epistémico de manera individual, y no en relación al diálogo con otros, lo que implica que la fuente del desarrollo del conocimiento es la deducción mediante el racionalismo y la inducción a partir de la experiencia.

Este trabajo se inscribe en las tensiones entre posturas filosóficas absolutistas, o fundacionalistas y las posiciones posmodernas, particularmente en relación a uno de los principios lógicos, el principio de identidad. Los resultados se analizan en función de ambas propuestas.

Metodología

Con la intención de acercarse a las posibles interpretaciones por parte de los estudiantes sobre el principio de identidad, se elaboraron dos cuestionarios referidos a la relación entre dicho principio en figuras geométricas básicas y su representación algebraica.

El primer cuestionario estuvo compuesto por cuatro reactivos de respuesta restringida, cuya finalidad fue determinar si podrían marcar la identidad (expresada en 1=1 ó x=x) en figuras únicas, e igualmente saber qué relaciones podrían establecer entre figuras geométricas iguales y diferentes con diversas expresiones. Las indicaciones para cada uno de los cuatro reactivos que componían la prueba, las figuras y las opciones de incisos fueron:

"A continuación se presenta una serie de figuras y a su derecha un conjunto de expresiones, tacha el inciso o incisos que correspondan a la figura, puedes marcar una o más opciones. Proporciona la justificación".

Figura 1

a. 1 = 1

b. 1

c. x = x

d. x = y

e. Otra (escríbela)________________

Por qué?

Se presentaron igualmente: en la figura 2 un triángulo, en la figura 3 dos círculos y por último en la figura 4 un cuadrado y un rectángulo. Se aplicó a 40 estudiantes de 5º semestre de bachillerato de una institución estatal en la ciudad de Querétaro, México.

El segundo cuestionario se aplicó a 92 estudiantes de tres grupos correspondientes a los semestre 1º, 3º y 5º de otra institución pública en la misma ciudad. La intención fue determinar si los estudiantes podrían identificar que la literal puede interpretarse de diversas maneras –como incógnita, número generalizado y en relación funcional- de acuerdo al tipo de expresión, y considerando esta identificación, saber si reconocen la identidad de la literal en una expresión algebraica, ello implicaría que pudieran advertir que, independientemente del número de veces que aparezca la literal, tendría el mismo valor o el mismo papel dentro de la expresión. Se compararon los resultados de quienes reconocían la identidad de la literal y quienes la ignoraban con relación a las calificaciones finales semestrales mediante la prueba *t* de Student

Resultados

Los resultados del primer cuestionario, muestran para el primer reactivo, que el 65% de los estudiantes dan como única respuesta la unidad, lo cual parece mostrar que no hacen referencia a la identidad, ya que en ninguno de estos casos se incluyó como posible respuesta 1=1 o x=x. Incluso sus justificaciones hacían alusión a que “no se estaba comparando con nada”, como se muestra en los siguientes ejemplos:

- Ø *Porque es sólo una línea*
- Ø *Porque no estas igualando nada y es solamente uno*
- Ø *La figura no iguala nada sino solo representa una unidad*

Pareciera ser que estos estudiantes en términos generales encuentran sentido a las expresiones 1=1 y x=x cuando tienen dos elementos y no caben cuando se tiene sólo un elemento.

Otros toman en cuenta aspectos particulares de la figura como el ser una recta, en donde x = x serían los puntos en donde empieza y donde termina la recta, lo cual rompe con la convencionalidad tanto para la identidad e igualdad, como para la misma ecuación de la recta ya que el punto inicial no sería igual o idéntico al punto final. Sin embargo para algunos jóvenes esto podría ser así

. Un joven parece considerar que una literal (x) sin tener coeficiente tiene el valor de 1 y por tanto para él parece que pudiera expresarse como 1=1 o x=x, que coincide con las argumentaciones mostradas por algunos estudiantes en otro trabajo (López, 1996), referidos a que la literal cuando no tiene coeficiente, o exponente vale 1.

Por último se podría afirmar que sólo dos estudiantes muestran la posibilidad de expresar la identidad ante una figura determinada, En relación al triángulo sólo el 40% marca como respuesta única la unidad. Si consideramos lo anteriormente expuesto, parece que para la mayor parte de los estudiantes se requiere tener dos elementos para comparar y no es evidente de manera inmediata que algo pueda compararse consigo mismo. Así entonces las justificaciones para indicar que la expresión sería sólo "1" son entre otras:

- *La figura no representa otras cantidades, no iguala nada y veo a la figura como un todo así que sólo representa 1 unidad.*
- *Porque sólo existe el triángulo y no hay otro elemento con que compararlo*

Posiblemente por este motivo, encontramos en esta figura, que las respuestas que marcan como "1=1", "x=x" u "Otra", se refirieran a "un lado igual a otro lado", como se señala en los siguientes ejemplos:

Estudiante	*Respuestas ante la recta*	*Justificación*
Yanelit	*1 = 1 y x = x*	*Todos los lados son iguales*
Denice	*x = x*	*Porque un lado es igual a los otros lados y así me imagino la representación de que un lado = lado, x=x*

Otros estudiantes marcaron como opción "Otra", haciendo alusión a la conjunción de los tres lados o ángulos, sin considerar la identidad simbolizada por las expresiones "1=1"y "x=x" como se muestra en las siguientes respuestas:

Carolina	*1 = 1 y Otra (1+1+1)*	*Porque 3 líneas conforman un triángulo*
Fulgencio	*Otra (x=3)*	*Porque tiene tres lados*

Por último sólo una estudiante continuó señalando correctamente la identidad:

Liliana	*1 = 1 y 1*	*Porque la figura sólo es una figura (triángulo y no es igual a nada aunque pudiera ser que esa figura es igual a su misma figura, así que puede ser la resp 1 y la 2*

Para la igualdad entre los círculos 18 estudiantes (45%) dan dos respuestas 1=1 y x=x, indicando que puede ser una igualdad entre la unidad o entre cualquier valor. 7 jóvenes (17.5 %) marcan sólo x=x que indicaría que los círculos pueden tomar cualquier valor; 3 (7.5%) señalan la expresión 1 = 1 y dos; 5 % señalan tanto "2" como "x = x". Las respuestas (de cinco estudiantes) que llamaron nuestra atención fueron las que incluyeron la expresión "x=y" entre las justificaciones que dieron se citan:

> *Sheila:* "x=y" *"Porque aunque tienen las mismas formas no son iguales (porque 1 fue diseñada a un tiempo y el otro a "otro" tiempo…por lo mismo NO son iguales*
>
> *Karina:* "x=y" *no hay diferencia entre los 2 y son iguales*
>
> *F.J.:* "x=y" *es similar hablando en figura porque no es igual.*
>
> *Alee:* "x=y" *porque si estuviera expresada en valores el valor o la expresión sería la misma.*
>
> *Brenda:* "x=y" *una es igual a la otra*

Entre estas respuestas observamos dos argumentos que parecen contrarios, uno de ellos manifiesta que son iguales pero pueden representarse como "x=y" (Karina, Alee y Brenda) y otro en los que se asume que son semejantes pero no iguales (F.J.), y finalmente Sheila quien ya en los ejercicios anteriores había mencionado la identidad, aquí marca la inquietud por la imposibilidad de que fuera lo mismo, (por tiempo de diseño)

En los resultados registrados hasta aquí, podemos observar que la identidad no es un elemento considerado generalmente al establecer las relaciones entre las figuras y las expresiones citadas. También cabe señalar que las posibilidades de interpretación por parte de los estudiantes son muy amplias y que en algunos casos muestran una clara divergencia con las normas canónicas del trabajo escolar en la materia.

La figura incluida en el reactivo 4, fue muy controvertida, ya que ante la igualdad entre dos figuras que no son iguales, la mayoría de los jóvenes (63%) da como respuesta "x=y", justificada por una diferencia de tamaño entre las figuras e interpretan el signo de igualdad como una relación de cuadriláteros.

Sin embargo la presentación de este reactivo parece haber obligado a los estudiantes a proponer una expresión que involucrara la igualdad señalada. Creemos que el signo de igual en el cuestionario pudo haber sesgado las respuestas de los estudiantes, sin embargo, este reactivo resultó muy fructífero ya que permitió observar que al parecer, para los jóvenes la expresión "x = y" implican dos elementos que son semejantes en algo, pero que no son iguales, con ello muestran ignorar el signo igual, y atender sólo la diferencia entre las literales. Como se manifiesta en las siguientes justificaciones:

Estudiante	*Respuesta*	*Justificación*
José	*x= y*	*las figuras no son iguales y no representan cantidades, no es 1 = 1 sino x = y porque la figura "y" no es una figura proporcional a la figura "x".*
José	*x= y*	*Como es diferente la letra señalada, las dos son diferentes como el cuadro o rectángulo*

A partir de estas justificaciones podríamos pensar que los estudiantes interpretan en la expresión "x = y", no como igualdad, sino una relación de semejanza, en donde "x" representa un valor, una cantidad o una figura en tanto que "y" puede representar otra cantidad, valor o figura que se relaciona de alguna manera con "x" pero que no necesariamente es la misma, lo que lleva en algunos caso a contradicciones. Pareciera que la misma forma de proceder les lleva también a una simbolización diferente (x=x) para elementos diferentes, como se muestra en las respuestas de las siguientes jóvenes:

Angela	*x = x*	*Siguen siendo la misma figura, solo que con diferente tamaño*
Laura	*1=1 y x=x*	*Representan lo mismo aunque con diferente tamaño*

Sólo una estudiante marca "Otra : x≠ y porque son de diferente tamaño".

Al realizar un análisis del segundo cuestionario para determinar la existencia de alguna diferencia entre los estudiantes que señalan que la literal dentro de la misma expresión tendría más de un valor, con respecto a quienes si parecen considerarlo, los resultados muestran que aquellos jóvenes que no reconocieron que la literal tendría el mismo valor dentro de la expresión, tienen un menor puntaje en la calificación semestral que aquellos que parecen asumirla. Esta distinción es significativa en el primer y quinto semestres (t= 1.954, p= 0.0296, gl. = 33 y t= 1.916, p=0.68, g.l.= 23, respectivamente) pero no para el tercer semestre (t=1.054, p= 0.301, g.l. 28)

Por lo tanto el principio de identidad se pudiera considerar un factor que incide en el desempeño adecuado en el manejo del contenido matemático, para el primer y quinto semestre, ya que para poder operar una expresión algebraica es necesario tener siempre presente que la literal en una expresión siempre será la misma, ya sea en cuanto a su valor o en cuanto a la función que tenga dentro de dicha expresión.

Conclusiones

Estos resultados abren la posibilidad a considerar que el principio de identidad no es asumido como verdad absoluta por parte de los estudiantes, y no puede por ello representar un logro del desarrollo cognitivo en los jóvenes en la etapa formal. No obstante en la escuela se asume que los estudiantes aceptarían sin más dicho principio, ignorando cualquier otra interpretación. Con ello parece abrirse una brecha entre el discurso del profesor y los estudiantes.

Cabe señalar que la forma de proceder en la enseñanza de las matemáticas generalmente pasa por alto las múltiples interpretaciones de los estudiantes, tanto en el discurso del profesor como en los contenidos incluidos en los programas y material didáctico, la diferencia entre igualdad e identidad pocas veces se aborda. Parece asumirse que los estudiantes han aceptado el principio de identidad sin mayor cuestionamiento y además con la flexibilidad suficiente para moverse entre identidad e igualdad en función del contexto en donde se encuentre, pero como muestran las respuestas, los estudiantes de estos grupos no sólo parecen ignorar dicho principio o a la necesidad de enunciarlo como $x = x$, sino también ante la expresión de igualdad ($x=y$) no necesariamente están atendiendo a una igualdad sino a una semejanza, lo que se contrapone a la convencionalidad de dichos simbolismos.

Es importante resaltar que el signo igual se utiliza tanto para la identidad como para la igualdad, es decir, no tiene un significado unívoco. Sin embargo estas posibilidades de significado, generalmente se omiten en las clases de matemáticas, pareciera darse por hecho que los estudiantes podrían identificar de manera obvia cuando se refiere a un significado y cuando a otro.

Los resultados anteriores señalan una multiplicidad de interpretaciones que no son consideradas en el salón de clases y que además involucran el conflicto entre la normatividad establecida convencional e históricamente y las formas de pensar el mundo y la realidad de los estudiantes.

Referencias

Alemán, Anastasio. (2001). *Lógica, matemáticas y realidad*. Edit. Tecnos. España.

Ernest, Paul (1994) *The Dialogical Nature of mathematics*., en Mathematics, Education and Philosophy: An International Perspective. Paul Ernest. The Falmer Press.

Ernest, Paul (1996) The nature of mathematics and teaching, en ***Philosophy of Mathematics Education Journal***. No. 9, November, 1996.

Ernest, P. (2004). What is the Philosophy of Mathematics Education? *Philosophy of Mathematics Education Journal***.** No. *18. http:www.ex.ac.uk/~PErnest/pome18/contents.htm.*

Handal, B. (2003). Philosophies and Pedagogies of Mathematics. *En Philosophy of Mathematics Education Journal*. No. 17. May 2003

López, A. (1996). *Construcción de la noción de variable algebraica en alumnos de nivel medio superior*. Tesis de maestría. Universidad Autónoma de Querétaro. México.

Moslehian, M. S. (2003) A Glance at postmodern Pedagogy of Mathematics. En **Philosophy of Mathematics Education Journal,** No. 17. Mayo 2003

Moslehian, Mohammad Sal. Posmodern View of Humanistic Mathematics. **Philosophy of Mathematics Education Journa**l. No. 18 October 2004.

Piaget, Jean y otros (1985) **Epistemología y Psicología de la Identidad**. México. Paidos,

Sierpinska, A y Lerman, S. (1996) Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education en Bishop, A. J**. International Handbook of Mathematics Education**, 827-876. Netherlands. Kluwer.

Skovsmose y Nielsen. (1996) Critical Mathematics Education. En Bishop, A. J. *International Handbook of Mathematics Education*, 827-876. Kluwer Academic Publisher, Netherlands.

Palabras clave: principio de identidad, algebra, bachillerato.