LAS MATEMÁTICAS DE LOS ALUMNOS

$$\frac{4}{8} = 2; \quad \frac{n}{0} = 0; \quad (a+b)^2 = a^2 + b^2$$

Bertha Medina Flores.
Dulce Ma. Peralta González Rubio
UNAM, CCH - Sur

Palabras claves: preconceptos, aprendizaje, obstáculos.

INTRODUCCIÓN:

Presentamos aquí los avances de esta investigación orientada a la obtención de un inventario de preconceptos* que tienen los estudiantes de nuevo ingreso al bachillerato y que dificultan su aprendizaje de las Matemáticas, fundamentalmente del Álgebra. Conforme avanzamos en este estudio, obtenemos información sobre las estructuras conceptuales de nuestros pupilos, y las utilizamos para ir elaborando las directrices y criterios que normarán, tanto nuestra intervención pedagógica como el diseño de la didáctica ad-hoc que posibiliten aprendizajes significativos.

La construcción del conocimiento puede ser analizada desde dos vertientes: Los procesos psicológicos implicados en el aprendizaje y, los mecanismos de influencia educativa susceptibles de promover, guiar y orientar dicho aprendizaje. Para realizar esta indagación usamos la segunda vía y utilizamos métodos de observación directa (intra-aula), entrevista, clínica y registros escritos por los estudiantes.

Para las categorías de análisis, partimos de dos ideas importantes: 1) El aprendizaje es una construcción continua realizada a partir de las estructuras cognitivas construidas anteriormente y, 2) No existen estructuras cognitivas independientes del contenido** . Los dos puntos anteriores quieren decir que para construir un nuevo conocimiento hay que utilizar un sistema cognitivo ya elaborado que a su vez hay que transformar.

En nuestra práctica docente hemos encontrado que en los estudiantes de nuevo ingreso, existen concepciones incompletas o equivocadas acerca del Álgebra y la Aritmética. La meta es conocer con detalle qué es lo que nuestros alumnos confunden o hacen mal para orientar el diseño y desarrollo de la didáctica que atienda específicamente el qué y cómo enseñarles para que transformen sus estructuras conceptuales[***] en las adecuadas para que puedan realizar aprendizajes significativos por sí solos, en las situaciones y circunstancias que enfrentan cotidianamente (aprender a aprender).

QUE SON LAS PRECONCEPCIONES

Los alumnos llegan a la escuela con sus ideas acerca de diversos fenómenos físicos y biológicos, conceptos matemáticos, la sociedad, la familia, el mundo, su propia vida. Gran parte de esas concepciones son diferentes a las que la escuela pretende enseñar y en muchos casos son totalmente contradictorias, aunque en otros tantos pueden ser correctas o tener elementos correctos.

En su artículo *Chidren's ideas in science*, Rosalind Driver, Edith Guesne y Andreé Tiberghien señalan, como una de las características de dichas ideas, el hecho de que son personales, es decir, han sido producidas por el propio sujeto, que pueden parecer incoherentes, aunque eso es debido a que los criterios de coherencia lógica no son los mismos que utilizan los científicos y que son estables, manteniéndose incluso después de haber recibido una enseñanza diferente sobre ellas[1]. Una preconcepción puede existir porque se ajusta con otras partes de la estructura cognitiva individual.

Hay errores que son constitutivos del pensamiento del alumno, que son "*coherentes*" con el conjunto de ideas y conocimientos que el estudiante construyó con anterioridad. De la misma manera como un conocimiento correcto no está aislado, sino que forma parte de un sistema complejo que le da significación, una idea errónea es parte de un sistema que tiene una lógica interna en la cual ***no*** constituye un error.

Cuando el estudiante se enfrenta a lo que Giordan llama "*la existencia de dos sistemas explicativos paralelos*", se presenta un conflicto que obstaculiza la construcción del conocimiento científico ya que existe una incoherencia entre las representaciones[*] del alumno y los conocimientos que se le tratan de enseñar.

A esta situación hay que añadir la dificultad de comprensión derivada de los *obstáculos de aprendizaje*, los cuales no sólo provienen del desarrollo de la inteligencia, pues existen otros tipos de obstáculos que derivan de estructuras conceptuales y no del desarrollo de la inteligencia y que se denominan **obstáculos epistemológicos**.

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS

En el obstáculo epistemológico subyacen dos ideas importantes:

1. El aprendizaje no es una simple acumulación de informaciones, sino una construcción continua realizada a partir de las estructuras cognitivas construidas anteriormente.

2. No existen estructuras cognitivas independientes del contenido.

Estas ideas significan que la construcción del conocimiento y la construcción del sistema cognitivo son dos caras y dos fases simultáneas del mismo proceso, o sea que la capacidad de aprender depende de los conceptos construidos previamente y, que **construir un nuevo conocimiento significa utilizar un sistema ya elaborado que además hay que transformar.**

Las preconcepciones se encuentran en forma de conocimiento procedural en los sujetos: "*conocimiento dinámico responsable de todas nuestras actividades internas y externas y que se conforma de conceptos, estrategias, reglas y procedimientos*"[2]; *el cual es utilizado automáticamente*, por eso observamos que las concepciones persisten en las tareas, ejercicios y exámenes, al menos confrontadas, pero están ahí de manera manifiesta. Por lo tanto, los salones de clase deben ser estudiados para determinar si las preconcepciones son identificadas, traídas a un nivel consciente, y confrontadas directamente como erróneas, inadecuadas o insuficientes; pero como ya mencionamos, las preconcepciones son por lo general adecuadas para la experiencia pasada del alumno, por lo que éstas persistirán a menos que los estudiantes sean expuestos a nuevas experiencias que contradigan suficientemente su conocimiento y para las cuales, los conceptos que él posee resulten inadecuados.

Así también, cuando se trata de enseñar en clase conceptos contradictorios con las representaciones de los alumnos, éstos se encuentran ante una situación de conflicto que dificulta el aprendizaje de la ciencia, pues tienen una dura elección:

1. Olvidar las ideas que han construido fuera de la escuela, que les han sido útiles y que son coherentes con sus creencias y reemplazarlas por nuevas concepciones "impuestas" por la escuela, es decir negar lo que han construido por largo tiempo, o

2. Tratar de resguardar sus creencias y rechazar lo que se les enseña. Tomar esta alternativa sugiere por un lado, asumir una actitud activa a través del rechazo o bien una pasiva, a través de recitar todo lo que han escuchado en clase olvidándolo después.

Maher (1981) reporta que los estudiantes tienen propósitos completamente diferentes a los de sus maestros. Su objetivo esencial es realizar su tarea de acuerdo a las instrucciones del mentor para obtener la respuesta correcta. Esto induce al profesor a pensar que sus alumnos entendieron los conceptos enseñados cuando en realidad aprendieron muy poco. El resultado de la estructura conceptual[*] es diferente de lo esperado[3].

NO EXISTEN ESTRUCTURAS CONCEPTUALES INDEPENDIENTES DEL CONTENIDO, (i. e. no se puede adquirir el álgebra sin la estructura aritmética).

Sin embargo, el problema es más grave que el simple olvido de los conceptos aprendidos en la escuela; las representaciones constituyen parte de la estructura cognitiva, es decir del sistema que va a permitir incorporar nuevos elementos, darles significación, integrarlos y construir nuevos conocimientos. Si el alumno olvida o no incorpora ciertos conceptos científicos, no podrá construir toda una serie de nuevos conocimientos que están ligados a esos conceptos. El conservar ciertas representaciones significa conservar un sistema cognitivo que presenta conflictos a la construcción de ciertos conocimientos científicos. Esto explica la incapacidad de la aplicación de lo que se ha aprendido en clase a situaciones diferentes[4]. Los estudiantes son capaces de responder a las preguntas del profesor, pero no se les ocurre utilizar esos conocimientos en su vida común o en un contexto diferente al de la escuela.

Como hallazgo importante observamos que los obstáculos epistemológicos referentes al aprendizaje del cálculo más simple en la Aritmética y el Álgebra se deben, en su mayor parte, a una instrucción deficiente y a una pésima evaluación de los contenidos sobre sumas con signo, operaciones con números racionales y traducción al Álgebra de expresiones escritas en palabras.

Los estudiantes se extrañan de una *evaluación completa* que hace *énfasis en los procedimientos y en los porqués,* discuten y defienden un "resultado correcto" como un acierto aun cuando les demostremos que llegaron a través de un procedimiento incorrecto. Ilustraremos esto con un ejemplo.

Diagnóstico de errores.

Para entender las dificultades y el nivel de comprensión en un tema se debe explorar ampliamente lo que saben los estudiantes. Ilustraremos lo que entendemos por exploración amplia con los resultados obtenidos por Laura[@]:

-6 + 1 ***-5***	6 - 14 ***-8***	-15 + 3 ***-12***	1 - 5 ***-4***
-4(-1) ***4***	-4 * 3 ***-12***	5(-2) ***-10***	3 * 2 ***6***

Cuadro 1

-4 + 6 ***-2***	-3 + 4 ***-1***	-6 + 3 ***-3***

Cuadro 2

-6 - 4 + 2	-16 + 8 - 8	-3 - 8 + 10	-15 + 6 - 3
10 + 2	***24 + 8***	***11 + 10***	***- 9 - 3***
12	***32***	***21***	***12***

Cuadro 3

15 - 3	11 - 2	17 - 4
12	***9***	***13***

Cuadro 4

-7 - (-21)	-10 - (-7)	-2 - (-3)	12 + (-12)
-7 + 21	***-10 + 7***	***-2 + 3***	***12 - (12)***
-28	***-17***	***-5***	***-24***

Cuadro 5

Recorramos el proceder de Laura completo, ya que cambió su forma de operar en varias ocasiones:

a) en los dos primeros ejercicios (cuadros 1 y 2) resolvió:

-4 + 6 = -2 y -3 + 4 = -1;

b) luego cambió, suma negativos (cuadro 3) pero continúa multiplicando signos;

c) acierta en las restas, cuadro 4, (no sabemos si lo hizo correctamente).

d) en el último grupo de ejercicios (cuadro 5), después de «quitar correctamente los paréntesis»[*], ella suma los números, sin importar el signo y de todos modos multiplica los signos, con lo cual vemos que su patrón de conducta no se repite el 100% de las veces.

A Laura le sucede con la aritmética lo mismo que al estudiante que no sabe ortografía, unas veces escribe las palabras de una manera y otras de forma distinta, por ejemplo, la palabra "*fenece*", a lo largo de un escrito, si la usa varias veces, aparecerá unas veces con *c* otras con *s*, y otras con *z*, "*alguna habrá de ser correcta*" es lo que ella piensa; así, nuestra alumna Laura hace lo mismo con los signos, no reconoce, ni siquiera piensa, que el signo de la suma algebraica está determinado por el signo del número mayor. No ha incorporado a su estructura operatoria la relación de orden entre los elementos (números) de una suma, para ella *-2 + (-3) da 5* porque "*hay dos menos que dan + y un +, pues queda + "*, y -2 + 3 da -1 porque " *más y menos da menos y se resta"*.

Al preguntarle en ese ejercicio por la operación indicada contesta: —"*es una suma, y estoy mal:* -2 + 3 *da -5*" —¿Estás segura?, —sí, contesta: "2 más 3 son 5 y el menos por el más da menos, son menos cinco".

—¿Entonces tienes dos resultados para un mismo ejercicio?

R: *sí, bueno no; no sé.*

Por desgracia, el caso de Laura no es aislado. El número de muchachos que experimenta la misma confusión aritmética es bastante grande; aproximadamente 2/3 de los estudiantes que ingresan al bachillerato de la UNAM no discriminan entre suma y multiplicación algebraicas[5], si a esto aunamos el cálculo aritmético que encadena 2 o más operaciones de diferente nivel de ejecución, el porcentaje de estudiantes con respuestas incorrectas se eleva hasta en un 75%, por ejemplo: $3 + 4 \bullet 5$, para la mayoría es 35 y no 23, es decir, ignoran por completo que existe la prioridad de cálculo.

En el caso de las operaciones con signo, el conocimiento confuso que muestran los estudiantes se debe a una instrucción deficiente. En lenguaje coloquial, la enseñanza que recibieron estos alumnos fue del tipo “recetas”, o “reglas de perico”, es decir, que sólo se mal memorizan, pero él (ella) nunca llegó a construir la regla, nunca se enteró por qué se suma de este modo; no bien ha terminado de “aprender a sumar con signos” cuando el profesor ya está “enseñando” a multiplicar con signos: al cabo de un rato, el estudiante “mezcla” las reglas, sin poder distinguir cuáles se aplican en cada operación. La calculadora, que debiera funcionar como un recurso con el cual pudiera sortear esta situación, tampoco le sirve, porque para usarla con eficacia se necesita saber operarla y eso implica que el alumno conoce la operatividad con signos y el concepto de prioridad de cálculo.

Desde $a - b/c$ hasta $a - b/(c - d)^e$, es decir, desde las expresiones más sencillas donde la jerarquía de las operaciones debe ser respetada, hasta las más complejas, subsisten en los estudiantes del bachillerato respuestas que muestran una aplicación rígida de sus viejos patrones con cambios parciales, al menos, “los paréntesis se hacen primero por ser de máxima prioridad” aun cuando no discriminen si el paréntesis está indicando la base de una potencia, separando signos solamente, cambiando el orden en la ejecución de operaciones, o cumpliendo dos o más funciones a la vez.

Los cálculos aritméticos con números enteros y racionales son apenas uno de los problemas que los muchachos y profesores enfrentan en la tarea de aprender y enseñar

Matemáticas. Hasta 1993, la gran mayoría (92%) de los estudiantes manifestaba que nunca les habían enseñado la prioridad de cálculo y mucho menos a usar la calculadora en sus cursos de Matemáticas, por supuesto, hasta la fecha, en muchos cursos las calculadoras están proscritas del aula; el hecho es que pueden estar programadas de diferente manera para realizar los cálculos, algunas lo hacen respetando la convención jerárquica de las operaciones tal y como la conocemos, es decir, la máquina evaluará correctamente la secuencia $3 + 2 \bullet 4$ y dirá que es 11, en general, las llamadas "*calculadoras científicas*" operan así, sin embargo, existen en el mercado otras máquinas cuyo programa de cálculo ejecuta las operaciones según el orden en que fueron dictadas, por tanto en la misma secuencia $3 + 2 \bullet 4$, estas máquinas arrojarán un 20, porque ejecutarán la suma primero (como si hubiera un paréntesis) y al resultado de la adición lo multiplicarán por 4. El alumno ignora que los dos tipos de máquinas sirven, pero hay que saber cómo operan para dictarles las operaciones en el orden indicado, según el tipo de máquina y obtener así, el cálculo correcto.

El concepto de suma algebraica requiere de la noción o concepto de orden en los números para comprender por qué queda el signo del mayor o igual signo,. Para aplicar la prioridad de cálculo es necesario conocer con mayor profundidad, la conmutatividad, asociatividad y combinaciones de ambas propiedades, implica también, reconocer perfectamente los elementos de una operación, p. e. "tres más el doble de cuatro " es 11, y en símbolos es $3 + 2 \bullet 4$ o también $2 \bullet 4 + 3$, un sumando es $2 \bullet 4$ y el otro es 3, al no respetar la prioridad del cálculo se desconoce cuáles son los elementos de la suma e implícitamente la conmutatividad, en el caso $3 + 2 \bullet 4$ el estudiante obtiene 20 y en $2 \bullet 4 + 3$ calcula 11, es decir, no reconoce los elementos de la suma, para él las expresiones no representan lo mismo y por lo tanto no se cuestiona que den resultados distintos.

Para un profesor poco avezado en estos detalles técnicos es muy difícil contestar a las preguntas de sus pupilos cuando los resultados de las calculadoras no coinciden. Mas bien, evitará las máquinas porque él tampoco sabe porqué operan así.

EN RESUMEN, como hallazgos importantes tenemos que:

La enseñanza del álgebra, al menos en el primer año del bachillerato, debe partir siempre desde la aritmética, es decir, hay que aprovechar las estructuras conceptuales previas del estudiante y conducirlo a que las transforme, lo cual implica:

◊ Centrar los objetivos del programa de enseñanza en las habilidades de pensamiento necesarias para un aprendizaje significativo, lo cual quiere decir que junto con los conceptos se deben enseñar explícitamente, las estructuras matemáticas, por lo menos las algebraicas (de grupo) para los números reales.

◊ Elaborar textos adecuados a este enfoque[**].

◊ Realizar una evaluación fina de los aprendizajes (pedir "el por qué" o el cómo, si es válido lo que hizo, etc).

Por último, hemos encontrado también que **es necesario enseñar ambas estructuras lingüísticas: la del lenguaje materno y la algebraica**, ya que se muestran incapaces de reconocer un elemento y su función (en símbolos o en palabras) por el lugar que ocupan en la expresión estructurada, (análisis funcional y escritura correcta). La simbolización algebraica de cantidades y relaciones entre cantidades (concepto de orden), que es una aplicación directa derivada del análisis funcional tampoco se escapa a esto, nos gustaría poder ilustrarlo con más ejemplos, pero por desgracia el espacio es muy breve y debemos concluir aquí.

BIBLIOGRAFÍA

Ávila A.; Mancera E. "Diagnóstico de habilidades computacionales y actividades para remendar los errores". *Revista de Educación Matemática. Vol. 1.* Grupo Editorial Iberoamericano 1989.

Driver. R. "Students' conceptions and the learning of science". *INT. J. SCI. Education, Vol II, special issue*, pp. 481-490. 1989.

Duschl R. A. "Psychology and epistemology: match or mismatch when applied to science". *Int. J. SCI. Educ, Vol 12, Num 3,* pp. 230-243. 1990.

Jiménez Gómez, E.; Solano Martínez, I.; Marín Martínez, N. "Problemas de terminología en estudios realizados acerca de «lo que el alumno sabe» sobre ciencias", en *Enseñanza de la Ciencias*, Vol. 12, Num. 2, pp 235-245, 1994.

Kent, D. "Algunos procesos a través de los cuales se pierden las matemáticas". *Educational Research, Vol 21*, Num 1. 1986.

Kline, M. *Why Jonhy can't add: the failure of the new match*. N. York, Sn Martin's Press. 1973.

Kuhn, M. *La Estructura de las Revoluciones Científicas*. 8º Reimpresión , Num 213, Breviarios. FCE. 1991.

Maher Z. “Toward an explanation of conceptual change” ***EUR. J. SCT. Educ; Vol 8, Num. 3***, pp. 229-249. 1986.

Postic, Marcel. “El análisis de las dificultades de los alumnos a la transformación de las prácticas educativas” ***El aula Universitaria, Aproximaciones Metodológicas Cise-UNAM*** 1991. Comp. Miguel Rueda Beltrán, Gabriela Delgado Ballesteros y Miguel Ángel Campos Hernández.

Strike K. Posner. G. *A Conceptual Change View of Learning and Understanding*, copyright Academic press inc. 1985.

---

[*] En el sentido en el que lo usan J. Carrascosa y Gil Pérez (1985) i.e. es el análisis de las similitudes y discrepancias, contenidas en las respuestas de los estudiantes, entre el conocimiento del alumno y el académico referido al contenido objeto de investigación (en nuestro caso el aprendizaje del Álgebra). Son consecuencia de la aplicación de la metodología de la superficialidad. Para su modificación se requiere un cambio metodológico

[**] En el sentido de Vygotsky.

[***] En ambos sentidos: la construcción de conceptos y la de relaciones entre conceptos (redes o estructuras conceptuales).

[1]Driver, Rosalind 1989: “Student’s Conceptions and the Learning of Science”. INT. J. SCI. Educ; Vol. II, special issue, 481-490.

[*] Por “representaciones” nos referimos a las ideas y concepciones que el individuo tienen sobre el mundo y sus fenómenos, i.e. a sus representaciones mentales de las cosas.

[2]Duschl. R. A. “Psychology and epistemology: match or mismatch when applied to science”. *Int. J. SCI. Educ, Vol 12, Num 3,* pp. 230-243. 1990

[*] Estructura entendida como una serie de elementos que, una vez que interactúan, producen un resultado muy diferente de la suma de sus efectos tomados por separado.

[3]Maher Z. “Toward an explanation of conceptual change” *EUR. J. SCT. Educ; Vol 8, Num. 3*, pp. 229-249. 1986.

[4]*Ibidem*..

[@] Laura es estudiante del 3[er]. semestre de bachillerato y cursa Matemáticas en un programa especial para alumnos con rezago académico. (PAMAIR).

[*] Laura multiplica signos en una suma algebraica con paréntesis, es parte de su confusión entre operaciones aritméticas.

[5]Resultados de los exámenes de diagnóstico, 1980-1995. Fuente: Secretaría de Planeación (SEPLAN) del CCH.

[**] En la enseñanza tradicional los objetivos se fijan más en los contenidos que en las habilidades cognitivas para un aprendizaje significativo y los textos refuerzan este enfoque codificándolo.