Propuesta de entorno computacional como apoyo a la enseñanza de las matemáticas

Cuevas Vallejo Carlos Armando CINVESTAV (Departamento de Matemática Educativa)
Zepeda Martínez Santiago Marcos CINVESTAV (Departamento de Matemática Educativa)

Palabras claves: Tutorial, Calculo, Tecnología

Planteamiento

El cálculo diferencial e integral, es materia obligada en gran parte de la curricula escolar y piedra angular en el desarrollo de la matemática. Sus aportaciones son de vital importancia para nuestro entorno. Los orígenes del cálculo se remontan a los primeros vestigios de nuestra sociedad como se constata en los papiros de Rhind y Golenischev.

A pesar de que el cálculo es curso obligado en escuelas tanto a nivel medio como superior, los reportes de problemas en su enseñanza aprendizaje son frecuentes. Esta materia presenta un alto índice de reprobación, inclusive con alumnos que recursan. Muestra de ello lo reportan instituciones como el *Colegio de Ciencias y Humanidades* de la UNAM (Moreno, 2003), la *Universidad Autónoma Metropolitana* (Andreu, 1989); la Unidad Académica Profesional Valle de Chalco (UAPVCh), UAEMEX, cuyos reportes en los ciclos escolares (2001-2002, 2002-2003), tienen respectivamente un 80% y un 75% de reprobados en la materia de Cálculo I en la carrera de Ingeniería en Computación. Esto coincide con los reportes de las universidades de educación superior en sus informes de evaluación (Anuies 2003). Esta problemática rebasa el ámbito nacional dando cuenta de ello, los reportes frecuentes como: Artigue (1991), Tall y Vinner (1981), Dreyfus (1990, 124), Skemp (1976), Orton (1983a y 1983b), Heid (1988), Oaks (1990) entre otros.

Mediante un análisis de los programas escolares para cálculo integral, a nivel medio superior y superior, además de entrevistas a docentes, se encontró que, en general, la forma de impartir esta materia, se puede separar en tres formas:

Una, que llamaremos pseudos-escolástica, inicia con una introducción medianamente formal, de propiedades de sucesiones, series y sucesiones de sumas parciales, para definir la integral como el límite de una sucesión de sumas parciales. Posteriormente se comienza a dar un enfoque completamente operativo, desarrollando las técnicas de integración que se aplican a funciones "adecuadas". Finalmente, si el tiempo lo permite, se muestran aplicaciones de la integral en el cálculo de áreas, volúmenes de sólidos de revolución, etc.

La segunda, introduce la integral como área bajo una curva. Para ello se introducen rectángulos (interiores y/o exteriores) bajo una curva, cuyas bases son iguales y sobre el eje ***X,*** la altura de cada uno de estos, queda acotada por la curva. Si las bases, de los rectángulos, se hacen cada vez de menor medida, el número de rectángulos aumenta, obteniéndose una mejor aproximación del área a calcular. Hasta aquí la explicación geométrica es clara. Sin embargo, posiblemente para evitar complicaciones con conceptos como el de límite, se visualiza la integral como antiderivada. Enseguida se presentan las fórmulas y métodos de integración y se proponen problemas en donde sea posible la aplicación de estas fórmulas. Bajo este punto de vista, lo más complejo consiste en adecuar él integrando, mediante transformaciones algebraicas y en algunos casos truculentas. Concluyendo con aplicaciones que en general, no se alcanzan a cubrir.

La tercera es una variante de la segunda, se presenta la integral como la operación inversa de la derivada, para posteriormente presentar las fórmulas y métodos de integración. Después se resuelven una serie de problemas *ad doc* que permiten la utilización de fórmulas y métodos. Y si el tiempo lo permite, finalizan con algunas aplicaciones.

Este estudio muestra una fuerte tendencia, en la educación, a visualizar el cálculo como un patrón de fórmulas y procedimientos algebraicos, dejando fuera los aspectos conceptuales. En el mismo sentido Dreyfus (1990, 124), reporta que las investigaciones en Francia exhiben la tendencia de los estudiantes a los aspectos de procedimiento algorítmicos, dejando fuera los conceptuales. En Inglaterra, Orton (1983a), reporta que los estudiantes pierden de vista las ideas fundamentales del cálculo debido a las dificultades que experimentan con el álgebra elemental. Asimismo, Davis (1986), en USA, menciona que el cálculo se enseña con fines predominantemente operativos, despreciando y marginando hasta donde sea posible los conceptos y significados precisos, lo que hace que el alumno manipule símbolos que para él carecen de significado. También Flores (1994) apunta que en la introducción de la derivada, aun persiste su presentación como regla de los cuatro pasos y asociándole escasamente un significado geométrico y físico, esto ha conducido a los estudiantes hacia una mecanización excesiva de los algoritmos del cálculo. Acerca de la integral Cordero (2003) reporta:

- A la integral se le asoció un significado por la noción de acumulación.

- Las situaciones que favorecen el pensar de la integral, son los fenómenos de cambio.
- Considerar el área bajo la curva, como modelo geométrico de la integral en una ambientación de variación continua, exige mover lo estático.

Marco teórico

Funciones Integrables: De acuerdo al desarrollo histórico del cálculo, para introducir la integral de Riemann, en este proyecto, se parte de funciones polinómicas (con coeficientes reales) y racionales (cocientes de polinomios)

Para integrar $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$), el problema, se divide es dos partes:

1. E l grado de $P(x)$ es menor al grado de $Q(x)$
2. El grado de $P(x)$, es mayor o igual al grado de $Q(x)$

Primer caso, aplicando el teorema fundamental del álgebra y el método de fracciones parciales, obtenemos que la integral de *R(x)* es: una función logarítmica, o una función arcotangente o la suma de ambas.

Segundo caso, al realizar el cociente de $P(x)$ entre $Q(x)$; se obtiene que $R(x) = S(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, donde *S(x)* es un polinomio. $P_1(x)$ un polinomio de grado menor a $Q_1(x)$, lo que nos regresa al primer caso.

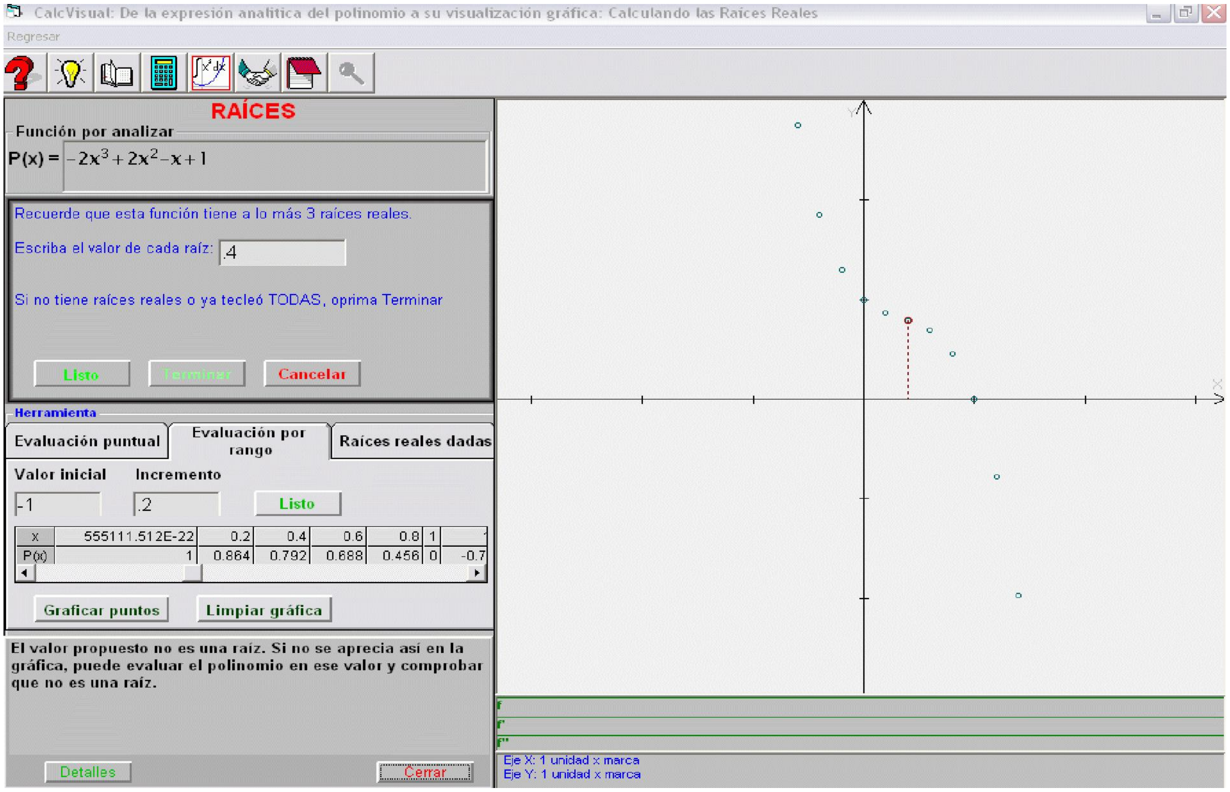
Parte Computacional: Toda acción cognitiva es una acción mediada por instrumentos materiales o simbólicos (Wertsch, 1991), la enseñanza de la matemática no es la excepción, desde hace años se emplean diversos medios como la escritura, el lenguaje, pizarrón, reglas, etc., para mediar su enseñanza. El día de hoy la tecnología, mediante instrumentos computacionales, de enorme capacidad de procesamiento numérico, gráfico y simbólico hace evidente el principio de mediación general. Este proyecto, propone a la computadora como una herramienta cognitiva en la intención de producir un aprendizaje significativo, que lleve a una destreza aceptable en la algoritmia y que promueva la comprensión de los conceptos de cálculo integral.

Con un sentido de premonición Douglas (1986) expresaba que hace más de dos décadas no se ha revisado el currículo de cálculo, ni se ha repensado desde que se dispone de computadoras de gran capacidad numérica y simbólica. Indudablemente el advenimiento de la microcomputadora y los programas computacionales de cálculo simbólico replantean el rol del docente, sobretodo con programas como *Derive, Mathematica*, etc. que pueden realizar mucha de la labor operativa en un curso de cálculo (simbólica o numérica).

¿De que manera deberá intervenir la tecnología en la educación?, pregunta que hasta el día de hoy se debate y en este sentido surgen diversas clasificaciones del uso de la computadora en educación como las de: Taylor (1980); Hatfield (1984); Solomon (1987); Hitt (1989); Cuevas (1997), por mencionar algunas. En todas las clasificaciones, y de hecho como consecuencia de los primeros programas de asistencia a la educación, aparece como una aplicación importante el desarrollo de los llamados Sistemas Tutoriales Inteligentes. El acrónimo ITS (*Intelligent Tutoring System*) acuñado por Sleeman y Brown (1982), surgió en los setentas, como resultado de la combinación de técnicas de la inteligencia artificial y técnicas cognitivas. El objetivo de los ITS, es proporcionar una mayor flexibilidad a los tutoriales manejados por computadora y lograr que éstos tengan mejor interacción con el usuario. Para lograr este objetivo, es necesario que dichos sistemas puedan "razonar" y resolver problemas en su dominio de aplicación. Además de ser operativos y mantenibles, para aplicarlos en el ambiente educativo. Diversas críticas han surgido a esta propuesta que por supuesto lleva a dos grandes paradigmas, la construcción de un modelo de enseñanza efectivo sin la necesidad de un profesor y la construcción de una teoría del conocimiento. Ambas hasta el día de hoy cuestionables.

Una propuesta diferente de ITS ha sido desarrollada en el Departamento de Matemática Educativa (CINVESTAV), por Cuevas (1994, 1997, 2003). El planteamiento debilita las premisas de un ITS tradicional. En dos aspectos fundamentales, no se pretende la sustitución total del profesor, sino proporcionar una herramienta poderosa que sirva como apoyo al profesor, en el planteamiento y resolución de problemas. De esta manera el ITS comparte con el profesor la responsabilidad docente.

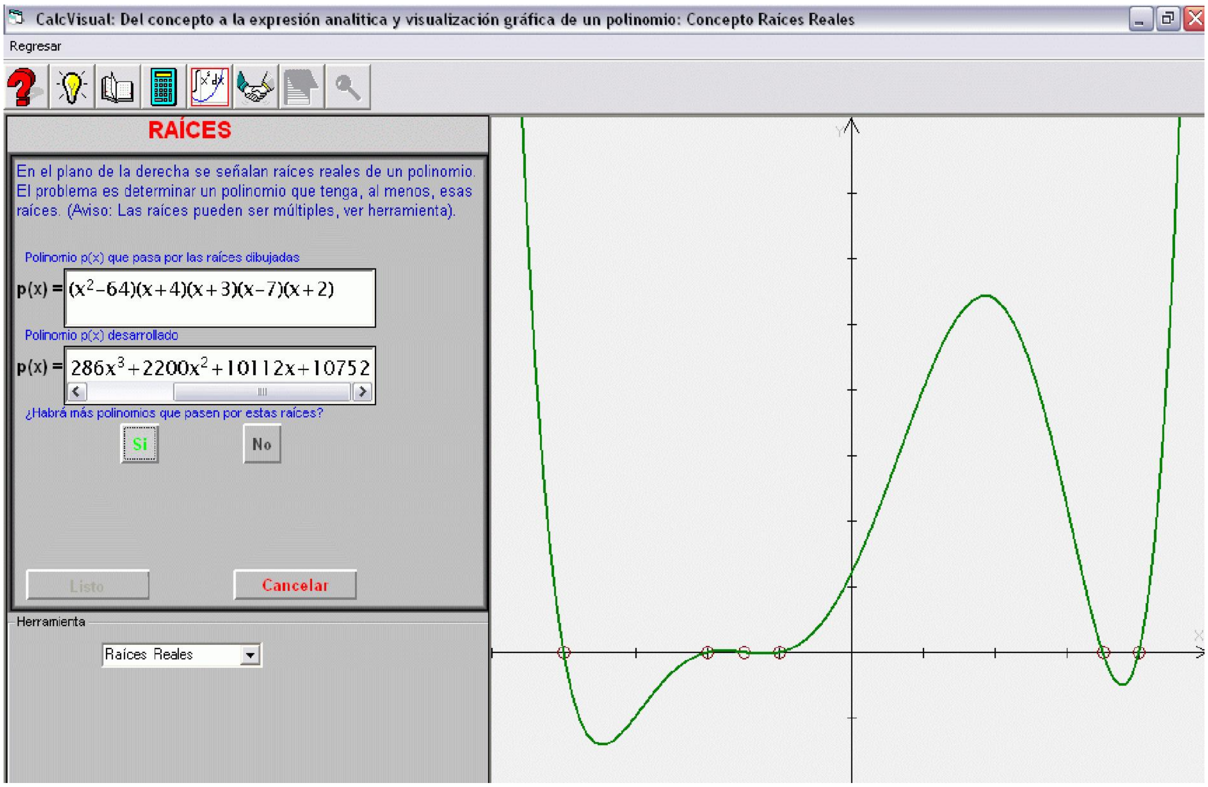
La otra consiste en que a diferencia de un modelo computacional de estudiante, se propone un modelo de error estadístico del estudiante, mediante la creación de una base estructurada que capture la expertez de un docente. Si bien este modelo no se anticipa a todas las posibles fallas de un estudiante, permite hacer un análisis de los errores más frecuentes, que se cometen al resolver un determinado problema. También presenta un tutor que jamás interrumpe el trabajo del usuario, y sus indicaciones aparecen sólo por invocación del mismo. Por último Cuevas propone que el órgano director del ITS deberá ser la didáctica. Así, las diversas facilidades y presentaciones del sistema deberán ser dictadas por una didáctica transparente para el usuario, pero fundamental para el desarrollador. Éste modelo didáctico fue definido y desarrollado por Cuevas (2002) y complementado por Pluvinage (Cuevas&Pluvinage 2004). Las principales funciones de este



modelo son: dividir el plan de enseñanza en submetas, dosificar los contenidos, guardar registro de las estrategias generales desarrolladas durante la sesión, presentar a solicitud del usuario, información pertinente y necesaria para resolver el problema propuesto. Así el alumno interactúa con el ITS en forma individualizada o bajo la tutela de un profesor. La presentación de los diversos temas, se realiza mediante problemas generados en forma aleatoria que al resolverse son evaluados por el tutor. También es responsabilidad del tutor dotar al usuario de una herramienta especial para facilitar la resolución de un determinado problema. Cabe agregar que un sistema como el anterior no compite con *Derive* o *Mathematica*, o con micromundos como *Cabri* o *Geometra*, por el contrario se complementan.

Modelos Educativos: A partir de un estudio histórico crítico y análisis de diversas corrientes en lo concerniente a la psicología del aprendizaje; Cuevas y Pluvinage llegan a un modelo didáctico para la enseñanza de la matemática. En él recogen elementos teóricos aportados por las diversas corrientes psicológicas. Por ejemplo, de la enseñanza tradicional la intuición, de la enseñanza activa la acción como elemento fundamental para el aprendizaje de las matemáticas. De Piaget,

las operaciones de la inteligencia v. gr. cada vez que se proponga un problema incluir en el mismo la operación inversa. También incluyen las aportaciones de Duval, implementando en la actividad matemática del alumno el trabajo en los diversos registros de representación semiótica.
Finalmente, haciendo un paralelismo entre las situaciones adidácticas de Broseau y de la teoría del equilibrio de Piaget, proponen problemas donde se apliquen los conceptos recién aprendidos.



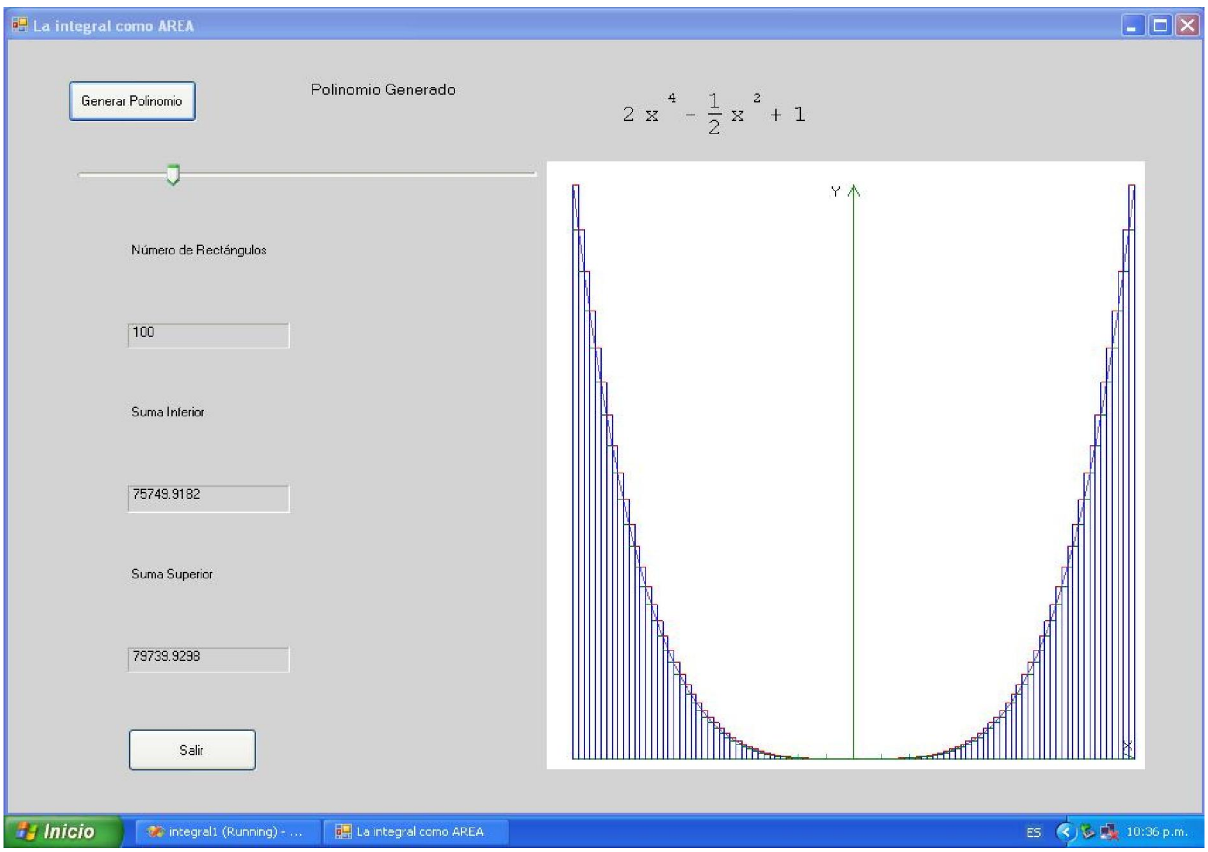
Proyecto

El proyecto que se está desarrollando consiste en la creación de un entorno computacional que promueva una mejor comprensión del concepto de integral de Riemann para el nivel medio superior y superior. Este entorno heredará características del STI propuesto por Cuevas, pero a diferencia del mismo, no sólo propondrá problemas, para mejorar la comprensión de conceptos y desarrollar la habilidad requerida, sino que también contendrá actividades que promuevan la comprensión formal del concepto matemático.

Metodología

Bajo el esquema didáctico Cuevas-Pluvinage, se introduce el concepto, de integral, mediante tres proyectos de acción práctica: La integral como área, la integral como antiderivada y la integral como valor promedio.

Para el primer caso, el sistema acepta o genera un polinomio de grado y coeficientes aleatorios; del cual se muestra su grafica en un intervalo dado. El estudiante, puede proporcionar una partición y visualizar tanto geométrica como aritméticamente la aproximación al área definida por la función y los ejes. De esta forma, el valor del área se aproxima al de la integral. La aproximación de área se hace mediante el método de sumas de Riemann. Para el segundo punto (en desarrollo) a partir de la derivada de una función, como aceleración, se construye la función velocidad. De esta manera se visualiza la integral como la antiderivada. El tercer proyecto, tiene como objetivo, calcular la velocidad promedio, para ello se proporciona la gráfica de la velocidad de un objeto en movimiento uniformemente acelerado, con el fin de calcular su velocidad promedio.



Resultados

La exploración hecha con las primeras versiones (CalcVisual) de este proyecto, fueron realizadas durante tres años consecutivos, en el segundo semestre de la Licenciatura en Informática Administrativa (LIA) en la UAPVCh. El curso contaba con 48 alumnos, donde el 80% de ellos, tenía conocimientos de cálculo. Sin embargo al realizarles una prueba exploratoria, se comprobó que el 85% no recordaba la parte operativa del cálculo. Se trabajó con el libro que acompaña al software (CalcVisual), el software, 2 horas en aula y 2 horas en laboratorio de cómputo (sin profesor). Antes del uso de Calcvisual, en la institución los índices de reprobación eran del 80%, gradualmente a lo largo de los últimos tres años ha disminuido hasta el 25%.

Conclusiones

El uso de la tecnología en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, es hoy por hoy algo incuestionable. Sin embargo, se tiene todavía un largo camino que recorrer en la utilización del mismo para que produzca un aprendizaje significativo. Los entornos de aprendizaje computacionales como el propuesto han mostrado ser de gran utilidad, como lo muestran las experimentaciones hechas con CalcVisual (Martínez, 2005).

> *A partir de los resultados obtenidos, el simple hecho de mantener con CalcVisual un nivel de aprovechamiento similar al de un curso desarrollado en forma tradicional, representa un importante logro, dado que se redujo la clase presencial al 50% y se modificó el contrato didáctico, al incluir la tecnología con los participantes naturales, profesor y alumno. Sin embargo, el hecho de que los porcentajes de aciertos muestren avances resulta muy alentador* (Martínez, 2005).

Pero no basta, es necesario que la instrumentación de la tecnología en el aula deba observar un contrato didáctico, en donde se especifique, mediante un programa didáctico, claramente el rol de los participantes, a saber: el alumno, el maestro y la tecnología. Ignorar alguno de los elementos señalados contribuiría no sólo a una deficiente comprensión, sino a la construcción de una matemática aterradora para el estudiante. También es necesario que el profesor experimente con diversos tipos de software para complementar su clase, la propuesta aquí presentada va en este sentido, este sistema debe compartir con software comercial su rol de mediación en la enseñanza de la matemática.

Referencias

Andreu Ibarra M. E.,1989, CALCDIFE: Un programa computacional de apoyo didáctico a un curso de cálculo diferencial", Tesis de Maestría, DME, Cinvestav. México

ANUIES 2003. El rendimiento escolar en Ciencias Básicas y su mejoramiento a través de condiciones de estudio apropiadas. México: ANUIES. Disponible en: http://www.anuies.mx/index800.html. Obtenido 15 octubre del 2003.

Artigue, M. 1991. “Análisis”. En D. Tall (Ed) Advanced Mathematical Thinkimg. Mathematics Educational Library. Klumer Academic Publisher.

Cordero, F., Muñoz, G & Solís, M., 2003, *La integral y la noción de variación,* Grupo Editorial Iberoamericana, México.

Cuevas V., C. A., 1994, Sistema Tutorial Inteligente LIREC", Tesis de Doctorado, 1994, DME, Cinvestav, México

Cuevas V., C. A., 1997, "Hacia una clasificación de la computación en la enseñanza de las matemáticas". F. Hitt (Ed). Didáctica II. Investigación en Matemática Educativa. Grupo Editorial Iberoamérica.

Cuevas V., C. A., 2002. Una propuesta didáctica para la enseñanza de las matemáticas. Manuscrito. DME, Cinvestav, México.

Cuevas V., C. A., 2003. Didáctica. Manuscrito. DME, Cinvestav, México.

Cuevas V., C. A. & Mejía V., H. R., 2003, *Cálculo Visual*, Oxford.

Cuevas V., C. A. & Pluvinage, F. 2004. *Una propuesta didáctica para la enseñanza de las matemáticas*. Manuscrito.

Davis, G. 1986. "Calculus at the University High School". Doouglas R. (Ed). Toward Lean and Lively Calculus (pp. 27-40).

Douglas r., 1986, "Proposal to Hold a conference/workshoop to develop alternate curricula and teaching methods for calculus at college level", Toward Lean and Lively Calculus, pp. 6-15.

Dreyfus, T. 1990. "Advanced Mathematical Thimking" P. Nesher & J. Kilpatrick (Ed). Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the Intenational Group for the Psychology of Mathematics Educations. Cambrige University Press. pp.113-134.

Flores C., D. 1994 "*Hacia una propuesta metodológica para la enseñanza de la derivada en el bachillerato*", Memorias de la VIII Reunión Centroamericana y del Caribe sobre la formación de profesores e investigadores en Matemática Educativa, San José Costa Rica, pp. 55-58.

Hatfield, L., 1984 "Toward Comprrehensive Instructional Computing in Mathematics", *Computers in Methematics Education*. YearBook, National Council of Teachers of Mathematics, pp 2-9.

Heid, M. K., 1988, "Resequencing Skills an Concepts in Applied Calculus using the computer as a tool". *Journal for Ressearch in Mathematics Education*, vol. 19, no. 1:3-25.

Hitt, F. 1989.Constructions of functions, contradiction an proof. Proceedings PME XIII.

Martínez R., M 2005. Diseño de un prototipo de entorno computacional para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas para un curso de calculo diferencial. Tesis doctoral no publicada. DME, Cinvestav. México.

Moreno G., S. 2003, Ambiente Computacional para promover una mejor comprensión de conceptos matemáticos. Caso: máximos y mínimos. Tesis doctoral no publicada. DME, Cinvestav, México.

Oaks, A.B. 1990. “Writing to learn mathematics: Why do we need it and how can it help us?”, paper presented at *Association of Mathematics Teacher* of New York State, Conference, Nov.

Orton A., 1983a. “Students' Understanding of Differentiation”, *Educational Studies in Mathematics*, vol.14, no. 3:235-250.

Orton A., 1983b. “Students' Understanding of Integration”, *Educational Studies in Mathematics*, vol.14, no. 1:1-18.

Skemp, R. 1976, “Relational Understanding and Instrumental Understanding”. *Mathematics Teaching.* Vol. 77, pp20-26.

Sleeman, C. & Brown, J. 1982 (ED) *Intelligent Tutorial System*, Academic Press Inc., Inglaterra.

Solomon, C. 1987, *Entornos de Aprendizaje con Ordenadores*, (trad. C. García, titulo original: Computer Environments for children), Ediciones Piados Ibérica, Madrid, España.

Tall, D. & Vinner, S. 1981. “Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity”. Educational Studies in Mathematics. Vol 12, pp.151-169.

Taylor, R., 1980, *The computer in the school*. Teachers College Press. USA.

Wertsch, J. 1991 *Voices of minds: a social-cultural approach to mediated action*. Cambridge, MA: harvard University Press.