

Uma abordagem da lógica fuzzy no ensino médio

Catharina O. Corcoll Spina (Univ. Estadual Paulista e Fundação Ed. de Barretos - São Paulo/Brasil)

Rodney Carlos Bassanezi (Universidade Federal de Santo André – São Paulo/Brasil)

Maria do Carmo Santos Domite (Universidade Federal Paulista – USP – São Paulo/Brasil)

Resumo:

O uso cada vez mais intenso de conceitos subjetivos - provenientes da lógica fuzzy - aplicados a problemas reais nos motivou a desenvolver procedimentos para a introdução destas idéias no âmbito do ensino médio. O projeto propõe inicialmente o estudo de conjuntos fuzzy que podem ser entendidos com exemplos - de variação populacional, de controle de pragas e de epidemias. Posteriormente, usar as “operações fuzzy” $\text{Sup}(\Lambda)$ e $\text{Inf}(\Lambda)$ em produtos de matrizes para realizar diagnósticos e avaliações subjetivas. As situações abordadas já estão na literatura (Barros e Bassanezi, 2006), entretanto não como fonte para o Ensino Médio. Um dos objetivos principais deste trabalho é contrapor a crença de exatidão da matemática clássica com os resultados provenientes de lógica subjetiva, utilizando conceitos apropriados para os estudantes destas séries: teoria dos conjuntos, relações e funções, matrizes, equações de diferenças e outros.

Palavras Chave: Lógica Fuzzy, Educação Matemática, Desenvolvimento do pensamento matemático.

Introdução:

A *certeza* ou *verdade* assim como a *dúvida* ou *incerteza* tem estado no centro das atenções da epistemologia do conhecimento. Na filosofia grega, Platão localiza a *certeza* no “mundo das idéias” em contraponto com o “mundo sensível” (dos sentidos), no qual teríamos somente aproximações de resultados obtidos no mundo das idéias. Os sofistas, por exemplo, tinham como objetivo transformar modos de argumentação em *verdades* – uma postura cética diante do conhecimento como absoluto/objetivo.

Neste movimento de busca da essência do conhecimento, a Matemática tem sido como instrumento - uma linguagem - para esclarecer/analisar as teorizações. De todo modo, a busca da *verdade* ou *certeza* tem levado, inúmeras vezes, ao desenvolvimento de evidências opostas, proporcionando estudos (matemáticos) de distintos tipos de *incertezas*. A *incerteza*, proveniente da aleatoriedade de eventos, ocupa um lugar de destaque no elenco da matemática com ênfase na área de estudos probabilísticos. A Teoria da Probabilidade tem como foco central a explicação da possível ocorrência de cada evento, baseada numa distribuição de ocorrências passadas. Nesta perspectiva, quando modelamos certas situações

da realidade, as variáveis lingüísticas estão, muitas vezes, carregadas de subjetividade - não dispondo de distribuições estatísticas ou aleatórias. Nestes casos, as qualificações de tais variáveis são distinguidas por meio de graduações ou de meias-verdades.

É neste contexto de *incerteza* que a lógica fuzzy tem contribuído com sua linguagem conjuntista, na qual cada elemento é provido de um grau de pertinência ao conjunto. Tal idéia, formalizada por Zadeh em 1965, tem evoluído muito em termos de aplicações em problemas da realidade, dada a sua característica de graduar soluções como medida de credibilidade. Assim, a solução de um modelo matemático não é reconhecida como *boa* ou *ruim* - como na lógica aristotélica bivalente - mas, sim, aceita com algum grau de credibilidade pelo usuário.

Lógica Fuzzy como modelos de situações

No cotidiano, as ações humanas controlam os mais diversos sistemas do mundo real por meio de informações imprecisas. Cada indivíduo funciona como uma “caixa preta”: recebe informações que são interpretadas segundo seus parâmetros e então decide qual atitude tomar. (Barros e Bassanezi, 2006).

Os sistemas baseados em regras fuzzy permitem o tratamento e manipulação de informações incertas e imprecisas, as quais estão representadas por uma família de conjuntos fuzzy. Tais sistemas oferecem uma forma sistemática para a modelagem de processos cujas informações a respeito dos mesmos são fornecidas de forma qualitativa.

Dentro deste contexto, a representação do sistema pode ser feita através de variáveis lingüísticas representadas por números fuzzy que expressam o comportamento do sistema.

Para obter a formulação matemática de um conjunto fuzzy, Zadeh baseou-se no fato de que qualquer conjunto clássico pode ser caracterizado por sua função característica χ_A

expressa por:
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}.$$

O objetivo desta função é indicar se um elemento x de U pertence ou não a A , dependendo da imagem em $\{0, 1\}$. Assim, a função característica descreve completamente o conjunto A , uma vez que indica quais elementos do conjunto U são elementos de A (Silva, 2005).

Porém, em alguns casos, esta relação de pertinência representa uma simplificação da realidade. Uma relação entre duas espécies de animais, por exemplo, designada como presa-predador considera que, nas relações entre estas espécies essas características podem estar associadas com a sua idade. Isto significa que esses animais seriam considerados presa ou predador com mais ou menos intensidade de acordo com a sua idade. Sendo assim, duas

espécies, podem se relacionar com diferentes graus. Neste caso podemos dizer que estes conjuntos e estas relações serão fuzzy.

Deste modo, nos conjuntos fuzzy a idéia de pertinência é flexibilizada generalizando-se a função característica de modo que ela possa assumir um número infinito de valores diferentes no intervalo [0,1].

Na figura 1 buscou-se representar o conjunto fuzzy das presas referentes ao sistema presa-predador já mencionado. Verifica-se que quando menor for a idade dos animais, maior será o grau de pertinência ao conjunto. Entretanto, na idade adulta o grau de pertinência a este conjunto é bem menor que anterior. Contudo, ao envelhecer poderão ser mais facilmente predados elevando novamente o grau de pertinência ao conjunto, superando aquele da idade jovem. Análise semelhante pode ser efetuada para o conjunto dos predadores, figura 2.

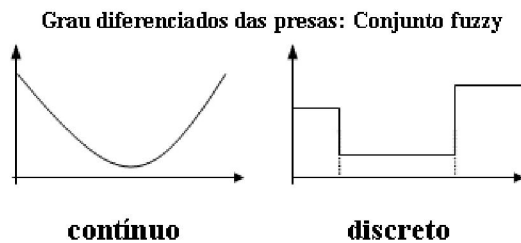


Fig. 1

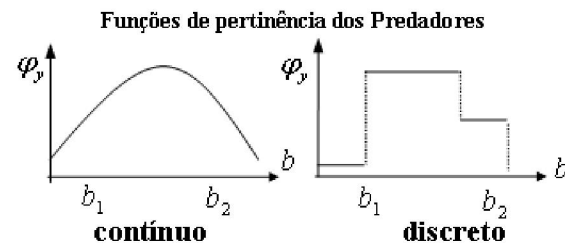


Fig. 2

A função que define o grau de pertinência de um determinado elemento em um conjunto fuzzy é definida como função de pertinência. Assim, um conjunto fuzzy A no universo U é um conjunto de pares ordenados $A = \{(x, \varphi_A(x)), \text{ com } x \in U\}$ onde φ_A é a função de pertinência de x em A. Desta forma, a função de pertinência associa com cada elemento x pertencente a U um número real $\varphi_A(x)$ no intervalo [0, 1], que representa o grau de possibilidade de que o elemento x venha a pertencer ao conjunto A.

As funções de pertinência que representam os conjuntos união, intersecção e complementar de conjunto fuzzy são dadas por:

$$(\varphi_{A \cup B})(x) = \max_{x \in U} \{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} = \varphi_A(x) \vee \varphi_B(x)$$

$$(\varphi_{A \cap B})(x) = \min_{x \in U} \{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} = \varphi_A(x) \wedge \varphi_B(x)$$

$$\varphi_{A^c}(x) = 1 - \varphi_A(x), \quad x \in U, \text{ respectivamente.}$$

Particularmente, se A e B forem conjuntos clássicos, então as funções características das respectivas operações acima definidas satisfazem estas igualdades mostrando a coerência destas definições.

Para descrever o conhecimento sobre os fenômenos em estudo utiliza-se variáveis lingüísticas ou variáveis fuzzy. Estes termos, traduzidos por conjuntos fuzzy, estão relacionados através de uma proposição fuzzy. Estas proposições conectam as variáveis através de operadores lógicos como: *e*, *ou*, *então* e compõem um conjunto de regras fuzzy conhecido como base de regras. Desta forma por exemplo, para modelarmos as leis que descrevem o crescimento de populações baseado em regras fuzzy teremos para a variável lingüística população o conjunto de termos (modificadores lingüísticos) relacionados a ela: baixa (B), média (M), alta (A) altíssima (AL) podemos compor a seguinte base de regras:

- R₁: Se a população (X) é “baixa” (B) então a variação é “baixa” (B)
- R₂: Se a população (X) é “média” (M) então a variação é “média” (M)
- R₃: Se a população (X) é “alta” (A) então a variação é “alta” (A)
- R₄: Se a população (X) é “altíssima” (AL) então a variação é “alta” (A)

A partir desta é possível estabelecer um conjunto de relações ou operações que consiste em combinar um ou mais conjuntos fuzzy visando a obtenção de um único conjunto fuzzy (conjunto solução). As operações básicas referentes às relações fuzzy são especificadas similarmente àquelas definidas para os conjuntos fuzzy.

O raciocínio aplicado para obtenção do conjunto solução agrega por meio do operador lógico *ou*, modelado pelo operador máximo \vee e, em cada regra, os operadores lógicos *e* e *então* são modelados pelo operador mínimo \wedge . O processo descrito é denominado de método de inferência de Mandani. Por fim, há uma transformação inversa do domínio fuzzy para o domínio do mundo real, para que ocorra o acoplamento entre saídas do algoritmo fuzzy e as variáveis de atuação (Shaw e Simões, 1999). Para tanto, pode-se utilizar o método do centro de gravidade. As figuras 3 e 4 ilustram este processo.

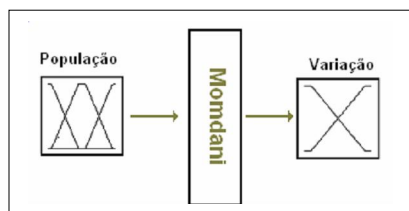


Fig. 3

$$B(u) = V_{\{x \in X\}} \{M(x, u) \cap A(x)\}$$

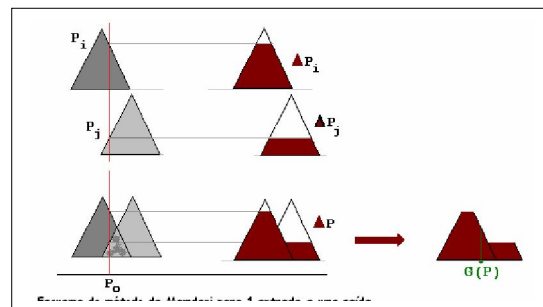


Fig. 4

Na modelagem de fenômenos reais se além de quantificar seus elementos quisermos quantificar as características que os determinam devemos incorporar parâmetros fuzzy aos modelos clássicos. Desta forma, por exemplo, para modelos discretos de dinâmica

populacional (de Malthus) os parâmetros fuzzy serão introduzidos através de equações de diferenças da forma $P_{n+1} = P_n + \Delta P_n$ onde a variação ΔP_n da população com base na densidade da mesma é uma função baseada em proposições fuzzy. Através da tabela e do gráfico (figuras 5 e 6) comparamos as soluções obtidas através do modelo fuzzy e do modelo determinístico. Estes resultados evidenciam que ao utilizarmos parâmetros subjetivos na modelagem de fenômenos obtemos resultados similares aos obtidos com dados reais.

Período	Censo demog.	Modelo fuzzy
1940	41.236	41.236
1950	51.944	48.2607
1960	70.992	67.5385
1970	93.139	93.0035
1980	119.003	118.5385
1991	146.825	146.5885
1996	156.804	156.7885
2000	169	169.5385

Fig. 5

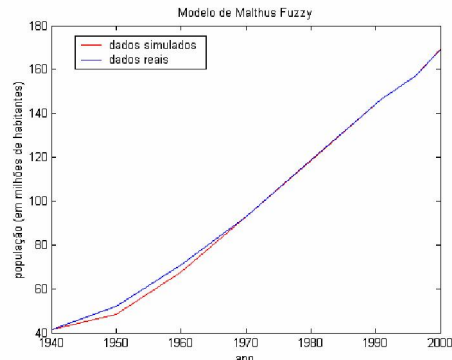


Fig. 6

O modelo SI de epidemiologia, utilizado para descrever a dinâmica de doenças transmitida diretamente através da interação entre indivíduos suscetíveis e infectados também pode ser modelado através de equações de diferenças, $x_{t+1} - x_t = f(x_t)$, em que a função $f(x) = \Delta x$ é definida por parâmetros fuzzy tendo como base de regras proposições do tipo:

R₁: Se infeccioso é B então a variação é pequena

R₂: Se infeccioso é A então a variação é pequena,

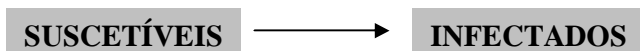


Fig. 7

O diagrama acima (Figura 7) representa este modelo onde S é a proporção de indivíduos suscetíveis e I é a proporção de indivíduos infectados.

No modelo presa-predador os parâmetros fuzzy são determinados a partir do potencial de presa e do potencial de predador. O esquema abaixo (figura 8) ilustra a dinâmica presa-predador e os parâmetros (taxas) a serem considerados na elaboração do modelo.

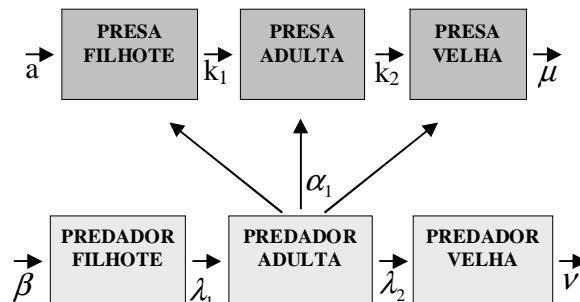


Fig. 8

a : Taxa de natalidade de presas, i : Taxa de comilança (mortalidade de presas em cada estágio i), k_i : Taxa de transferência do estágio i para $(i+1)$ para presas, β : Taxa de natalidade de predadores (taxa de transformação de massa), α_i : Taxa de transferência do estágio i para $(i+1)$ para predadores, μ : Taxa de mortalidade natural das presas, ν : Taxa de mortalidade natural dos predadores e x_1 = filhote de presa, x_2 = presa adulto (jovem), x_3 =presa velho ou doente, y_1 = filhote de predador, y_2 =predador jovem e y_3 =predador velho.

Sendo: $P_x = P_{x_1}x_1 + P_{x_2}x_2 + P_{x_3}x_3$ (potencial de presa)

$P_y = P_{y_1}y_1 + P_{y_2}y_2 + P_{y_3}y_3$ (potencial de predador)

$\alpha_i = \alpha P_y P_{x_i}$ (taxa de comilança)

$\beta P_y \sum_i \alpha_i P_{x_i} x_i = f(y_2)$

As equações que modelam a dinâmica acima descrita, podem ser expressas por:

$$x_1(i+1) = a x_2(i) - \alpha_1 x_1(i) - k_1 x_1(i)$$

$$y_1(i+1) = \beta P_y \sum_i \alpha_i P_{x_i} x_i - \nu y_1(i) - y_1(i)$$

$$x_2(i+1) = k_1 x_1(i) - \alpha_2 x_2(i) - k_2 x_2(i)$$

$$y_2(i+1) = \nu y_1(i) - \nu y_2(i) - y_2(i)$$

$$x_3(i+1) = k_2 x_2(i) - \alpha_3 x_3(i) - \mu x_3(i)$$

$$y_3(i+1) = \nu y_2(i) - \nu y_3(i)$$

Os gráficos (figuras 9, 10 e 11) ilustram este modelo.

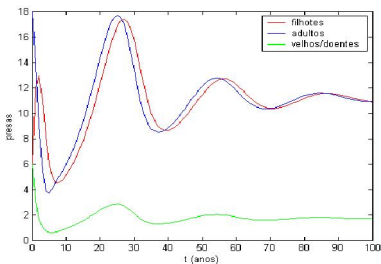


Fig. 9

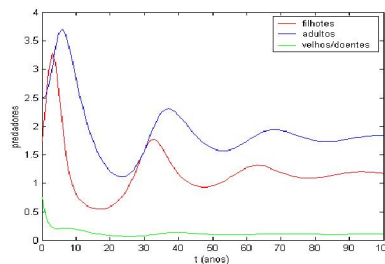


Fig. 10

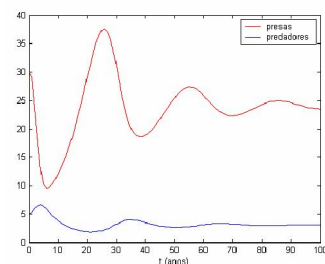


Fig. 11

A seguir desenvolvemos um exemplo completo do processo de modelagem através de um modelo de controle fuzzy de pragas.

O esquema abaixo (figura 12) representa esquematicamente um sistema fuzzy discreto.

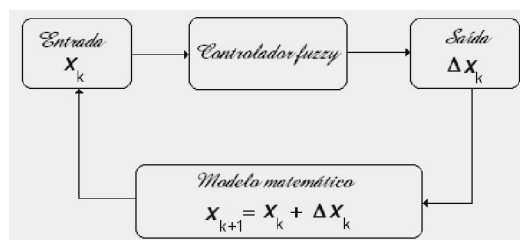


Fig. 12

Adotamos para variáveis de entrada a: Densidade de árvores infestadas: P e a Variação da Densidade de Infestação: ΔP .

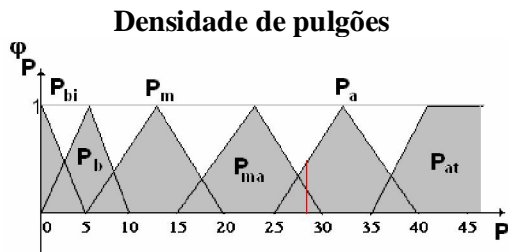
As variáveis P e ΔP são dadas em porcentagem p e podem assumir valores entre 0% e 100%.

A partir de informações obtidas com especialistas definimos as variáveis em termos lingüísticos e as modelamos por subconjuntos fuzzy triangulares e por suas funções de pertinências.

O conjunto de termos associados a cada variável fuzzy do processo é dada por:

Dens. Árvores infestadas:P	Var. da dens. de infestação: ΔP	Controle da Infestação: (C)
Densidade baixíssima (P_{bi})	Varição de densidade quase nula (V_o)	Controle nulo (C_o)
Densidade muito baixa (P_b)	Varição de densidade muito baixa (V_{bi})	Controle muito baixo (C_{bi})
Densidade baixa (P_m)	Varição de densidade baixa (V_b)	Controle baixo (C_b)
Densidade média (P_{ma})	Varição de densidade média (V_m)	Controle médio (C_m)
Densidade média alta (P_a)	Varição de densidade alta (V_a)	Controle médio alto (C_{ma})
Densidade alta (P_{at})	Varição de densidade muito alta (V_{at})	Controle alto (C_a)
		Controle muito alto (C_{at})
Variáveis de entrada do modelo		Variáveis de saída do modelo

Funções de Pertinência para Controle de Pulgões:

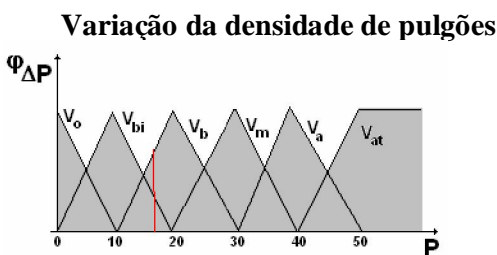


$$\varphi_{P_{ma}} = \begin{cases} \frac{p-15}{7,5} & \text{se } p \in [15; 22,5] \\ \frac{30-p}{7,5} & \text{se } p \in [22,5; 30] \\ 0 & \text{se } p \notin [15; 30] \end{cases}$$

Expressão 1

$$\varphi_P(27) = 0,27 / \varphi_{P_{ma}} \oplus 0,4 / \varphi_{P_a}$$

Fig. 13



Se $20 < \Delta p < 30$ então:

$$\varphi_{\Delta P}(\Delta p) = \frac{30 - \Delta p}{10} / V_b \oplus \frac{\Delta p - 20}{10} / V_m$$

Fig. 14

Funções de pertinência do controle

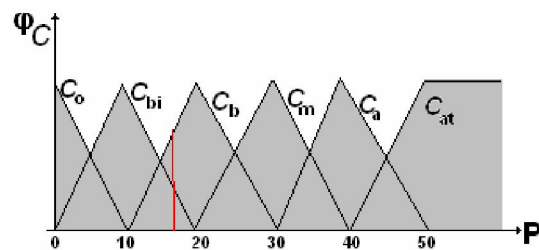


Fig. 15

As regras fuzzy do sistema possuem o seguinte formato, se P é densidade média alta (P_{ma}) e ΔP é variação densidade média (V_m) então o controle é médio alto (C_{ma}).

A tabela que sintetiza todas as possíveis regras fuzzy é dada por:

P/P	P _{bi}	P _b	P _m	P _{ma}	P _a	P _{at}
V _o	C _o	C _o	C _{bi}	C _b	C _m	C _{ma}
V _{bi}	C _o	C _{bi}	C _b	C _m	C _{ma}	C _a
V _b	C _o	C _{bi}	C _b	C _m	C _{ma}	C _a
V _m	C _{bi}	C _b	C _m	C _{ma}	C _a	C _{at}
V _a	C _{bi}	C _b	C _m	C _{ma}	C _a	C _{at}
V _{at}	C _b	C _m	C _{ma}	C _a	C _{at}	C _{at}

Base de regras

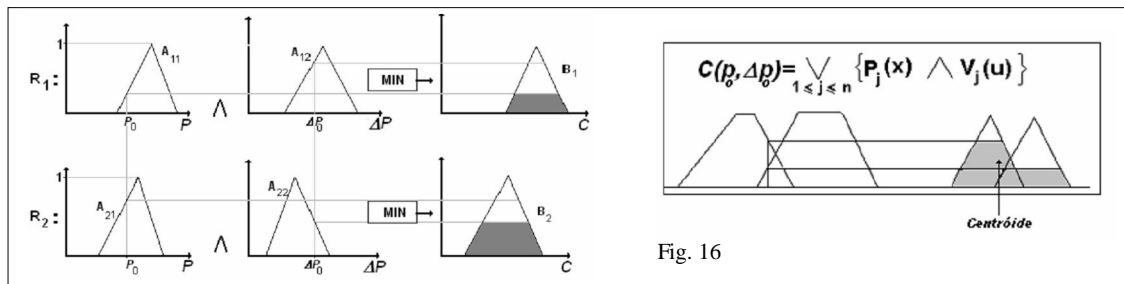


Fig. 16

Os cálculos contidos nas figuras 13, 14 e 15 tem o objetivo de ilustrar o processo de inferência fuzzy de Mandani (fig. 16). Por exemplo, se $P=27$ os únicos conjuntos fuzzy atingidos são P_{ma} e P_a . Para achar o grau de pertinência de 27% ao conjunto P_{ma} utilizamos a função de pertinência dada pela expressão 1 desta forma, para $P=27$ teremos $\varphi_{ma}(27) = \frac{30-27}{7,5} = 0,4$. Procedimento análogo é efetuado para obtenção dos demais graus de pertinência. O símbolo \oplus não indica qualquer tipo de adição apenas conecta os conjuntos atingidos. Em seguida aplicamos o operador MAX-MIN para obtenção da resposta desejada. Observe o exemplo numérico a seguir:

Po=18 (18% das árvores estão infestadas em t_0)

$$\varphi P(18)=[0,27/ P_m + 0,4/ P_{ma}]$$

Seja $\Delta p_0=38$ (janeiro) então

$$\varphi \Delta p(38)= [0,2/V_m + 0,8/V_a]$$

Logo:

$$\varphi_{P_m} \wedge \varphi_{V_m} = \min \{ \varphi_{P_m}, \varphi_{V_m} \} = \min \{ 0,27; 0,2 \} = 0,2 / C_m$$

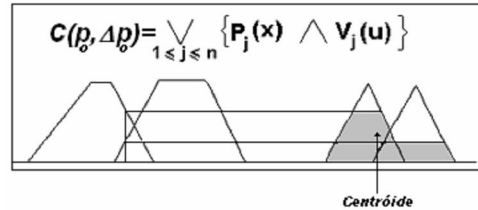
$$\varphi_{P_m} \wedge \varphi_{V_a} = \min \{ \varphi_{P_m}, \varphi_{V_a} \} = \min \{ 0,27; 0,8 \} = 0,27 / C_m$$

$$\varphi_{P_{ma}} \wedge \varphi_{V_m} = \min \{ \varphi_{P_{ma}}, \varphi_{V_m} \} = \min \{ 0,4; 0,2 \} = 0,2 / C_{ma}$$

$$\varphi_{P_{ma}} \wedge \varphi_{V_a} = \min \{ \varphi_{P_{ma}}, \varphi_{V_a} \} = \min \{ 0,4; 0,8 \} = 0,4 / C_{ma}$$

que da origem a

$$\varphi_C(c) = \sup [\min \{\varphi_P, \varphi_V\}; \min \{\varphi_P, \varphi_V\}] IC_m \oplus \sup [\min \{\varphi_P, \varphi_V\}; \min \{\varphi_P, \varphi_V\}] IC_{ma}$$



$$c = [(0,2 + 0,27) \max C_m + (0,2 + 0,4) \max C_{ma}] / [(0,2 + 0,27) + 0,2 + 0,4] = 35,6$$

Procurando dar uma maior abrangência a utilização das idéias contidas nesta teoria dentro de um contexto de ensino regular, através de um exemplo de diagnóstico médico podemos trabalhar a noção de produto cartesiano através de um produto cartesiano fuzzy e das principais operações (Max-Min) sobre matrizes para compor os relacionamentos lógicos entre os termos das variáveis lingüísticas.

O diagrama abaixo representa, de maneira simplificada, os procedimentos para a realização destes diagnósticos.



Os dados que irão compor a base de conhecimentos que será expressa por meio de relação fuzzy encontra-se especificado no quadro abaixo:

U=conjunto dos pacientes; V=conjunto dos sintomas; W=conjunto das doenças.
 Pacientes P₁, P₂, P₃ e P₄, com sintomas s₁, s₂, s₃, s₄, s₅, s₆, s₇, s₈, s₉, s₁₀ e s₁₁, e apresentaram os diagnósticos d₁, d₂, d₃ e d₄, onde:
 s₁= febre; s₂= cefaléia; s₃= garganta inflamada; s₄= exantema; s₅=gânglio;
 s₆=coriza; s₇=conjuntivite; s₈= língua de morango; s₉=fotofobia; s₁₀=tosse seca;
 s₁₁=vômito; d₁=scarlatina; d₂= rubéola; d₃= sarampo; d₄= gripe.

A base de conhecimento é composta pelas relações fuzzy S e T, cujas matrizes são as seguintes:

Pacientes/Sintomas: S										
P/S	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	S ₆	S ₇	S ₈	S ₉	S ₁₀
P ₁	.8	.4	.5	.8	.2	.1	.1	.9	.1	.1
P ₂	.3	.1	.4	.8	.9	.2	.1	.1	.1	.1
P ₃	.8	.3	.5	.8	.1	.2	.9	.1	.6	.3
P ₄	.8	.7	.7	.2	.1	.9	.1	.1	.1	.9

Pacientes/Doenças: T				
P/S	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄
P ₁	.9	.3	.4	.2
P ₂	.3	.9	.1	.1
P ₃	.4	.1	.9	.3
P ₄	.2	.1	.3	.9

Sintoma/Doença: R=S ⁻¹ oT				
S/d	d ₁	d ₂	d ₃	d ₄
S ₁	.2	.1	.1	.1
S ₂	.2	.1	.3	.2
S ₃	.2	.1	.1	.1
S ₄	.3	.1	.1	.1
S ₅	.3	1.0	.1	.1
S ₆	.2	.1	.1	.1
S ₇	.4	.1	1.0	.3
S ₈	1.0	.3	.4	.2
S ₉	.4	.1	1.0	.3
S ₁₀	.2	.1	.3	1.0
S ₁₁	.1	.1	.1	.1

Cada elemento da relação $\mathbf{R}=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{oT}$ indica o grau de envolvimento de cada sintoma com as diversas doenças consideradas. Como o modelo matemático que adotado para diagnosticar foi o SoR, então para obter o diagnóstico do paciente P_1 , supondo que $[P_1]$ é a matriz com os sintomas do paciente P_1 basta calcularmos $[P_1]_o\mathbf{R}$. Desta forma o resultado obtido será dado por:

$$R(P)(d) = \sup_{\{s \in V\}} [\min[R(s, d), P(s)]]$$

$$R(P) = (0,9;0,3;0,4;0,2) \quad (\text{Doença scarlatina})$$

Da mesma maneira podemos obter o diagnóstico para os demais pacientes.

Conclusão:

A partir dos exemplos desenvolvidos pudemos constatar que para os sistemas que utilizam a Lógica Fuzzy o processamento de informações consiste em operações que são realizadas sobre conjuntos fuzzy. Estes conjuntos são mais abrangentes uma vez que um conjunto clássico é um caso particular de conjuntos fuzzy. Apesar disto, as operações entre estes conjuntos mantém similaridade com as operações realizadas entre conjuntos clássicos. Finalmente, esta teoria permite a utilização de informações subjetivas na modelagem de diversos fenômenos. Apesar disto, verifica-se que os resultados obtidos através dos modelos fuzzy são coerentes com os resultados obtidos através de modelos clássicos (determinísticos).

Referências Bibliográficas:

- CHACIN, R. J. O. *Sociedad e Investigación: Borrosidad*. Universidad Central de Venezuela, Comisión de Estudios Interdisciplinarios Publicaciones, año 2, n.4, octubre.1999.
- AMENDOLA, M. e SOUZA,A.L. *Manual do uso da teoria dos conjuntos fuzzy no MATLAB 6.1*. FEAGRI/UNICAMP, 2003.
- BARROS, L.C., BASSANEZI, R. C. *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*. Coleção IMECC. Textos Didáticos. Vol 5. Campinas: UNICAMP, 2006.
- SHAW, I. S. e SIMÕES, M. G. *Controle e Modelagem Fuzzy*. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, São Paulo,1999.
- SILVA, J.D.M. *Análise de estabilidade de sistemas dinâmicos p-fuzzy com aplicações em biomatemática*. Tese de Doutorado, IMECC-Unicamp, Campinas,2005.
- KOSKO,B. *Fuzzy Thhinking – the new science of fuzzy logic*. Hiperion, New York,1993.