

UM ESTUDO SOBRE COMPREENSÕES DO SINAL DE IGUALDADE: NOÇÃO OPERACIONAL E RELACIONAL DE EQUIVALÊNCIA

José Dilson Beserra Cavalcanti
UFPE / UFRPE / LICEU-UNICAP
dilsoncavalcanti@yahoo.com.br
Marcelo Câmara dos Santos
UFPE / SBEM
marcelocamaraufpe@yahoo.com.br

INTRODUÇÃO

No Brasil, o ensino de Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental é, em geral, centrado nos números e nas operações. Comumente, o primeiro contato dos alunos com o símbolo '=' acontece por meio de atividades envolvendo igualdades 'aritméticas', e, durante um bom tempo, as operações aritméticas são, particularmente, as situações que caracterizam sentido para o sinal de igualdade.

A partir da 6ª série, com a utilização de letras nos cálculos matemáticos, é introduzido o conceito de equações. Nesse momento, há, de certa forma, uma passagem de uma atividade definida mais como Aritmética para uma atividade Algébrica. A transição da Aritmética para Álgebra é permeada de aspectos peculiares e é fonte de dificuldades para os alunos (Ponte, 2005; Booth, 1995).

Algumas pesquisas, como as de Brito Lima (1996) e Lessa (1996), investigando a passagem Aritmética-Álgebra, indicaram diversas dificuldades na aprendizagem do conceito de equações. Ambos os estudos acima apontaram que, parte dessas dificuldades se deve a uma mudança de significado do sinal de igualdade.

Na literatura encontramos estudos que discutem, basicamente, duas noções diferentes do sinal de igualdade. Uma noção 'operacional', e outra relacional envolvendo a idéia de 'equivalência'. Dessa maneira, propomo-nos discutir nesse trabalho, a compreensão dos alunos da 6ª série do ensino fundamental acerca do sinal de igualdade, tendo como base as noções, 'operacional' e 'equivalência'.

MARCO TEÓRICO

Na Matemática, pode-se dizer que, unido a um conceito há um nome na língua natural e um símbolo para representá-lo. Essa conceitualização, nomeação, e simbolização da atividade matemática ocorreu com trabalho dos matemáticos através dos séculos e envolveu diversas civilizações.

Segundo Sáenz-Ludlow e Walgamuth (1998), o processo inverso de interpretar símbolos para desvelar conceitos matemáticos desafia todos os aprendizes. Todo estudante de Matemática tem que aceitar os símbolos convencionados já no lugar. Entretanto, a aceitação de um símbolo, não é sempre acompanhada por seus respectivos significados.

O processo de conceitualizar e dar sentido a um símbolo realizado pelos matemáticos, é um processo auto-organizável. Entretanto, quando os símbolos se tornam convencionados e os estudantes são aculturados na Matemática da escola, a interpretação de símbolos matemáticos não acontece de maneira simples. Sáenz-Ludlow e Walgamuth (op. cit.) afirmam que parte da complexidade na interpretação de um símbolo diz respeito à falta da correspondência entre o símbolo matemático e os significados armazenados, nessa marca particular no papel.

O sinal de igualdade, como o conhecemos atualmente (um par de traços paralelos), só foi introduzido em 1557 pelo Inglês Robert Record em seu livro *The Whetstone of Witte*, com o objetivo de substituir *aequales* (usada desde 1500) ou sua forma abreviada *aequ* (usada a partir de 1550). Abaixo, uma figura de um trecho do livro de Record na qual ele utiliza o sinal de igualdade moderno, mesmo sendo um pouco mais longo.

1. $14.ze. - | .15.9. = 71.9.$
2. $20.ze. = .18.9. = .102.9.$
3. $26.8. - | 10ze = 9.8. - 10ze - | 213.9.$
4. $19.ze - | 192.9. = 108. - | 1089 - 19ze$
5. $18.ze - | 24.9. = 8.8. - | 2.ze.$
6. $348. = 12ze = 40ze - | 4809 - 9.8.$

Figura 01. Sinal de igualdade utilizado por Record em 1557, em alguns exemplos de equações

Desde então, o símbolo ‘=’ veio ganhando espaço. Hoje esse símbolo está entre os símbolos mais importantes da Matemática, destacando-se também, como essencial à Matemática escolar nas diferentes etapas da Educação Básica. Desde a década de oitenta pesquisas têm indicado que as crianças desenvolvem uma compreensão operacional do símbolo ‘=’ antes que uma compreensão em termos de relação de equivalência (Behr, et. al., 1980; Kieran, 1981; Carpenter, et. al., 2003).

Como já mencionamos anteriormente, nas séries iniciais os alunos encontram o símbolo ‘=’ essencialmente em atividades envolvendo operações aritméticas. Nesse sentido, uma operação aritmética poder ser entendida como um filme em que os números são os atores, os operadores o *script*¹, e o sinal de igualdade, é o diretor que conduz a ação, ou, como Jones (2006) destaca, grita: “Ação!”.

Ginsburg (1977) indica que esse significado de ativador é priorizado na sala de aula através da maneira como as operações são apresentadas nos livros textos, como por exemplo:

$$5 + 7 =$$

$$7 - 3 =$$

$$3 \times 5 =$$

$$14 \div 2 =$$

Há uma tendência entre as crianças, em aceitarem o sinal de igualdade apenas em sentenças nas quais símbolos operatórios (+, -, etc.) precedem-no (Ginsburg, 1977; Behr, et. al., 1980).

De certa forma, no ensino fundamental I, há uma espécie de ‘*acordo implícito*’, em que o sinal de igualdade envolve expectativas como: antes do sinal de igualdade vem sempre uma operação, e, depois do sinal de igualdade aparece uma resposta, que, geralmente é um número. Essa espécie de ‘regra’, é geralmente reforçada por atividades tipo:

1. Resolva as operações:
- $$3 + 4 =$$
- $$8 - 5 =$$
- $$10 \div 2 =$$
- $$2 \times 6 =$$

2. Arme e efetue:

¹ No sentido de roteiro.

a) $2354 + 1658 = \underline{\hspace{2cm}}$

b) $4562 - 2413 = \underline{\hspace{2cm}}$

c) $68450 \div 2 = \underline{\hspace{2cm}}$

d) $3 \times 1257 = \underline{\hspace{2cm}}$

O exemplo '1' ilustra uma maneira de introduzir o uso do sinal de igualdade nas séries iniciais. Depois de terem resolvido muitas atividades desse tipo, os alunos vão resolver atividades do tipo do exemplo '2'. Nesse tipo de atividade, o aluno é orientado a armar, efetuar e depois voltar para o item *a*, por exemplo, e 'dar a resposta', ou 'colocar o resultado', no caso, $2354 + 1658 = \underline{4012}$. Esse tipo de instrução estabelece uma espécie de 'regra' em relação à compreensão do sinal de igualdade. Sentenças como a citada acima, ou como, $3 + 4 = ?$, conduzem as crianças a perceberem o sinal de igualdade como um símbolo *operacional* (Behr et. al., 1980) ou como uma '*instrução*' para fazer algo do lado esquerdo e para pôr a resposta sobre o lado direito.

Dessa maneira, a noção operacional do sinal de igualdade geralmente surge quando as crianças percebem o sinal de igualdade como:

- *sinal de fazer algo* (ver, Behr, Erlwanger e Nichols, 1980);
- sinal para *dar a resposta* (ver Huges, 1986);
- ação indicada do tipo, *dar ou faz...*(ver, Stacey & MacGregor, 1997);
- *operador que transforma*, por exemplo, $3 + 4$ em 7 (ver, Lessa, 1996);

As pesquisas de Kieran (1981) avançam no sentido de apontarem que a idéia do sinal de igualdade como um símbolo operacional pode persistir por todo o ensino fundamental, mesmo quando os alunos encontram situações onde o sinal de igualdade associa-se ao conceito de equações. Falkner, Levi e Carpenter (1999) sugerem que, uma compreensão da igualdade integrada a uma utilização apropriada do símbolo '=', são requisitos imprescindíveis na aprendizagem da Álgebra Escolar.

A noção relacional de equivalência do sinal de igualdade envolve a compreensão do símbolo '=' como uma relação *estática* numa igualdade aritmética ou algébrica. Uma igualdade aritmética ou algébrica deve, assim, apresentar as propriedades de equivalência (simétrica, reflexividade e transitividade).

A metáfora da balança foi bastante utilizada em estudos (Lessa, 1996) para desenvolver as noções de equivalência no contexto de equações.

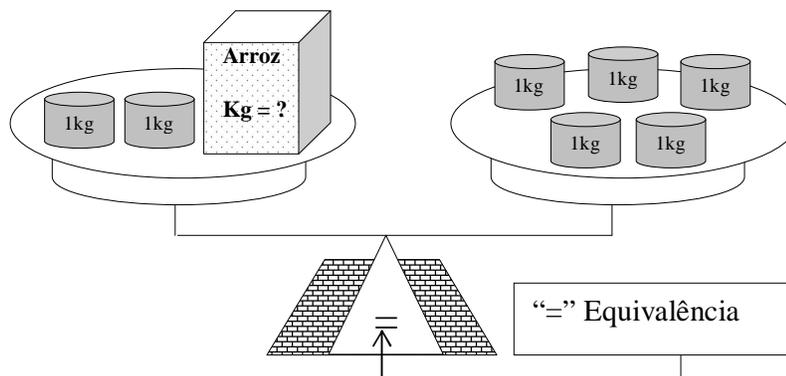


Figura 1 – balança representando a idéia de equivalência

Nessa figura, a noção de equivalência do sinal de igualdade é realçada no equilíbrio da balança. Uma compreensão adequada do significado do sinal de igualdade, como relação de equivalência, é muito importante na construção e compreensão de conceitos em Álgebra, como por exemplo, o de equações. (Lessa, 1996; Brito Menezes, 1996; Mcneil, et. al., 2006).

Num outro sentido, Clement (1980) citado por Kieran (1981) evidenciou que, mesmo estudantes de faculdade ao serem solicitados a encontrar a derivada de uma função, parecem freqüentemente utilizarem o sinal igualdade meramente como um link entre as etapas de cálculo. Entretanto, um fato que parece bem realçado nas pesquisas que focaram a passagem da Aritmética para Álgebra, é que, boa parte delas sugere que uma compreensão rica e adequada acerca do símbolo ‘=’ é indispensável para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

METODOLOGIA

Nosso estudo baseou-se em uma atividade exploratória realizada com 14 alunos cursando a 6ª série do Ensino Fundamental II. Esses alunos estudavam em uma escola da Rede Pública Estadual de Educação de Pernambuco, localizada no município de Recife-PE. É importante ressaltar que realizamos a pesquisa quase no final do ano letivo, por isso esclarecemos que os alunos já tinham sido introduzidos ao estudo do conceito de equações.

Esse artigo é um recorte de uma atividade piloto que realizamos para nossa pesquisa no mestrado em Ensino das Ciências da Universidade Federal Rural de Pernambuco. Os dados que ora discutimos nesse estudo foram obtidos por meio da aplicação de uma tarefa

composta por quatro expressões. Estas expressões faziam parte do teste piloto, sendo que duas envolviam igualdades aritméticas (item a. $14 + 8 = 22$; item b. $22 = 13 + 9$), e duas, envolviam equações (item c. $2x = 14 + 8$; item d. $13 - 9 = 2x$).

Solicitamos aos sujeitos que analisassem e respondessem como eles compreendiam o sinal de igualdade em cada expressão. Abaixo apresentamos as expressões que utilizamos para a coleta de dados.

a) $14 + 8 = 22$

1) Como você explicaria o que significa essa expressão? _____ _____
2) Como você compreende o sinal de igualdade nessa expressão? _____ _____

O item *a* apresenta uma igualdade aritmética do tipo ‘operação = resultado’. Alguns estudos como os de Behr, Erlwanger e Nichols (1980) indicam que crianças mais novas compreendem o sinal de igualdade, em sentenças semelhantes, como símbolo operacional.

b) $22 = 13 + 9$

1) Como você explicaria o que significa essa expressão? _____ _____
2) Como você compreende o sinal de igualdade nessa expressão? _____ _____

Nesse item, temos também uma igualdade aritmética. Contudo, ao invés da seqüência ‘operação = resultado’, temos a seqüência ‘número = operação’, comumente identificada como uma decomposição de um número em uma operação.

Nosso objetivo nesses dois itens foi verificar como os sujeitos compreendiam o sinal de igualdade em igualdades aritméticas diferentes.

c) $2x = 14 + 8$

1) Como você explicaria o que significa essa expressão? _____ _____
2) Como você compreende o sinal de igualdade nessa expressão? _____ _____

No item *c*, temos uma equação com operações em ambos os lados da igualdade, sendo que a incógnita encontra-se à esquerda do símbolo ‘=’, ou, no primeiro membro.

d) $13 - 9 = 2x$

1) Como você explicaria o que significa essa expressão?

2) Como você compreende o sinal de igualdade nessa expressão?

No item *d*, temos outra equação também com operações em ambos os lados da igualdade. Diferentemente da equação do item *c*, temos a incógnita no lado direito do símbolo ‘=’, ou, no segundo membro.

Nosso objetivo, com esses dois itens, foi verificar como os alunos compreendiam o sinal de igualdade em duas equações, sendo que uma tinha a incógnita no lado esquerdo (item *c*), e outra no lado direito (item *d*).

RESULTADOS

Para uma melhor visualização dos resultados apresentamos abaixo os dados em dois quadros. O primeiro quadro demonstra os resultados dos itens *a* e *b* e o segundo apresenta os resultados dos itens *c* e *d*.

Item a	<i>Compreensões do sinal de igualdade</i>			
	Operacional	Equivalência	Branco	Outras
14 + 8 = 22	43%	43%	7%	7%
Item b				
	Operacional	Equivalência	Branco	Outras
22 = 13 + 9	36%	43%	14%	7%
Média	40%	43%	10%	7%

Quadro 1 – Resultados dos itens *a* e *b*

No item *a*, a noção operacional e a noção relacional de equivalência, tiveram o mesmo percentual de respostas. No caso, 43%. No item *b*, a quantidade de respostas dos alunos que

compreenderam o sinal de igualdade como noção de relacional de equivalência permaneceu o mesmo do item *a*. Entretanto, no item *b*, houve uma diminuição de 7% do percentual indicando a noção operacional, comparando com o item *a*, e um aumento de 4% no percentual de alunos que não responderam ao item.

Considerando a compreensão dos alunos em relação às expressões representadas por igualdade aritméticas, 40% dos alunos escreveu respostas indicando a noção operacional; 43% indicando a noção relacional de equivalência; 7% escreveram outras respostas e 10% dos alunos não responderam os itens envolvendo igualdades aritméticas.

Item c	Compreensões do sinal de igualdade			
$2x = 14 + 8$	Operacional	Equivalência	Branco	Outras
	21%	37%	21%	21%
Item d				
$13 - 9 = 2x$	Operacional	Equivalência	Branco	Outras
	14%	37%	14%	35%
Média	18%	37%	17%	28%

Quadro 2 – Resultados dos itens *c* e *d*

No item *c*, os alunos escreveram respostas em que 21% foram relacionadas à noção operacional e 37% à noção relacional de equivalência. O percentual de alunos que responderam outras respostas, ou não responderam foi de 42%. O item *d* apresentou os percentuais de 14% e 37% para as noções, operacional e relacional de equivalência, respectivamente. A quantidade de alunos que não respondeu ou respondeu outras respostas foi de quase 50%. No resumo, comparando as respostas dos dois itens representando equações, houve uma diferença de 19% entre as repostas que indicaram a noção relacional de equivalência e as que indicaram a noção operacional do sinal de igualdade como compreensão do símbolo ‘=’.

CONCLUSÃO

Analisando os resultados acima à luz das noções, operacional e relacional de equivalência do sinal de igualdade, que discutimos anteriormente, tentaremos agora apresentar as principais conclusões desse estudo.

Os resultados confirmam as duas formas de compreender o sinal de igualdade discutidas na literatura (Behr, et. al., 1980; Kieran, 1981; Carpenter et. al., 1999), que correspondem à noção operacional e à noção relacional de equivalência.

A pergunta: Como você compreende o sinal de igualdade nessa expressão?, gerou respostas ao item **a** como: *'dar o resultado da expressão; significa mostrar a resposta; resposta da soma; é para dar o resultado depois da igualdade'*. Ao item **b** tivemos idéias como: *'resposta; resultado; 22 é o resultado de $13 + 9$ '*. No item **c**: *'mostrando o resultado de $2x$; o resultado'*. No item **d** tivemos por exemplo: *'resposta; o 1º termo é o valor do resultado do 2º termo'*. As respostas desse tipo nós entendemos como associadas à noção operacional do sinal de igualdade. Outras respostas que surgiram, considerando os quatro itens, foram as do tipo: *'essencial para seja uma equação; equivalência entre o primeiro e segundo membro; o lado esquerdo e direito tem o mesmo valor; mesma coisa'*, entre outras. Essas respostas, nós entendemos como associadas à noção relacional de equivalência.

Um outro tipo de resposta chamou-nos a atenção em especial. Boa parte dos alunos que indicaram outras respostas escreveram: *'igual da equação; igual da soma'*. Essas respostas parecem sugerir uma outra noção do sinal de igualdade. Essa outra noção pode ser referente a uma maneira peculiar de ver o sinal de igualdade apenas como um símbolo. Clement (1980) citado por Kieran (1981) já havia evidenciado, algo parecido com alunos de ensino superior. Em seu estudo, Clement (ibidem) aponta que os alunos parecem freqüentemente utilizarem o sinal de igualdade meramente como um link entre etapas de cálculo. Recomendamos outras pesquisas com o objetivo de melhor esclarecer essa possibilidade de compreensão do sinal de igualdade como uma outra noção diferente das noções operacional e relacional.

Uma outra consideração em relação aos resultados da compreensão do símbolo '=' em igualdades aritméticas, é, que há uma tendência maior em associar a noção operacional a expressões do tipo *'operação = resultado'*, que do tipo *'número = operação'*. Com os dados dos itens **c** e **d**, observamos que o percentual de respostas associadas à noção operacional é um terço maior nas equações na qual a incógnita 'x' encontra-se no primeiro membro.

Resumindo, os dados obtidos pelos quatros itens apontam percentuais de 29% e 40% para as noções operacional e relacional de equivalência, respectivamente. Nosso estudo confirma que a compreensão do sinal de igualdade como símbolo operacional pode persistir no início do ensino fundamental II, mesmo quando os alunos encontram situações onde o sinal de igualdade associa-se ao conceito de equações, fato já verificado por Kieran (1981).

Outro fato é que se os estudos da literatura indicam que a noção operacional surge antes que a noção relacional de equivalência (Kieran, 1981; Carpenter et. al., 2003) nossos

resultados apontam que o percentual de alunos associando o símbolo '=' à noção relacional de equivalência foi 11% maior que o percentual de alunos que o associou à noção operacional.

Por último, apontamos que outras pesquisas devem ser realizadas para investigar a compreensão do sinal de igualdade apenas como símbolo, o que parece algo que remete à perspectiva sintática, e, também sugerimos pesquisas sobre a compreensão do sinal de igualdade com estudantes do Ensino Médio, por exemplo. A exemplo de Falkner, Levi e Carpenter (1999) também concordamos que uma compreensão adequada e rica do símbolo '=' é imprescindível na aprendizagem da Álgebra Escolar.

REFERÊNCIAS

- BEHR, M., ERLWANGER, S. and NICHOLS, E. How children view the equal sign. *Mathematics Teaching*, 92, 1980. p. 13-18.
- BOOTH, L. Dificuldades das crianças que se iniciam em Álgebra. In: COXFORD, A. & SHULTE, A (orgs.). *As Idéias da Álgebra*. São Paulo, SP: Atual Editora, 1995. p. 23-37.
- BRITO LIMA, A. P. *Desenvolvimento da representação de igualdades*. Dissertação de Mestrado não publicada. Mestrado em Psicologia–UFPE. Recife-PE, 1996.
- CARPENTER, T. P., FALKNER, K. P. & LEVI, L. Children's understanding of equality: a foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics*, 6, 1999. p. 232-236.
- CARPENTER, T. P., FRANKE, M. L., E LEVI, L. *Thinking mathematically: integrating arithmetic y algebra in elementary school*. Portsmouth: Heinemann, 2003.
- CLEMENT, J. *Álgebra Word problem solutions: Analysis of a common misconception*'. Paper presented at annual meeting of American Educational Research Association, Boston, 1980.
- GINSBURG, H. *Children's arithmetic: how they learn it and how you teach it*. Texas: PROED, Inc, Austin, 1977.
- HUGHES, M. *Children and number: difficulties in learning mathematics*. Oxford: Basil, Blackwell, 1986.
- JONES, I e PRATT, D. *Three utilities for the equal sign*. Centre for New Technologies Research in Education, University of Warwick, 2006.
- KIERAN, C. Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 1981. p. 317-326.

- LESSA, M.M.L. *Balança de dois pratos e problemas verbais como ambientes didáticos para iniciação à Álgebra: um estudo comparativo*. Dissertação de Mestrado não publicada. Mestrado em Psicologia–UFPE. Recife-PE, 1996.
- McNEIL, N. M., GRANDAU, L., KNUTH, E. J., ALIBALI, W., STEPHENS, ALIBALI, A. C. S, STEPHENS, HATTIKUDUR, & KRILL, E. Krill . Middle-school Studdentes' 2006 understanding of the equal sign: the Books They Read Can' Help. *Cognition and instrucion*, 24(3), *Lawrence Erbaum Associatedes, Inc*, 2006. p. 367-385.
- PONTE, J. P. Números e Álgebra no currículo escolar. *XIV Encontro de Investigação em Educação Matemática*. Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação-Secção de Educação e Matemática. Caminha, 17-19 Abril, 2005.
- SÁENZ-LUDLOW, A. & WALGAMUTH, C. Third graders' interptetations of equality and the equal symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 35. Klwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands, 1998. p 135-187.
- STACEY, K., & MACGREGOR, M. Ideas about symbolism that students bring to algebra. *The Mathematics Teacher*, 90(2), 1997. p. 110-113.