UN ESQUEMA PARA LA COMPRENSIÓN DE LA RECTA TANGENTE EN UN ENTORNO TECNOLÓGICO

Francisco Boigues, Vicente Estruch, Abilio Orts
Universidad Politécnica de Valencia. España
fraboipl@mat.upv.es

Resumen: Presentamos una investigación cuyo objetivo es analizar la comprensión de la recta tangente en un entorno de aprendizaje en el que se puede usar un CAS. Desde las perspectivas históricas y cognitivas (APOS) analizaremos una serie textos de Bachillerato e Ingeniería que nos permitirá fijar una propuesta para la comprensión de la recta tangente como el límite de una sucesión de rectas secantes que tienen en común el punto de tangencia. Finalmente, mostramos unas herramientas diseñadas con el asistente matemático MATLAB© (génesis instrumental), accesibles online, que pueden ayudar a los estudiantes, especialmente en el registro gráfico, a construir los objetos cognitivos descritos en la descomposición genética.

Palabras clave: Comprensión, recta, tangente, tecnología

Abstract: We present a research which aim is to analyse the understanding of the tangent line in a learning environment in which CAS can be used. From historical and cognitive perspectives (APOS), we will discuss several High School and Engineering texts. That will allow us to set up a proposal for the understanding of the tangent line as limit of a sequence of secant lines that have in common the tangency point. Finally we present some tools designed with the mathematician application software MATLAB, (Instrumental Génesis), available on line. These tools can help the students to build the cognitive objects, especially in the graphic register, described in the genetic decomposition.

Key words: Understanding, straight, tangent, technology.

Introducción

Uno de los tópicos generales en el campo de la Educación Matemática es el análisis de la construcción del conocimiento matemático avanzado. En este campo, la incorporación de los sistemas de cálculo formal (CAS) ofrece un nuevo horizonte de investigación de los procesos de enseñanza-aprendizaje que pueden ayudar a mejorar la comprensión de las matemáticas. (Boigues, Estruch & Llinares, 2010). El objetivo principal de este estudio es profundizar en los mecanismos que puedan proporcionar a estudiantes de Bachillerato y de primer curso de Universidad de carreras técnicas un mejor conocimiento conceptual de las matemáticas. En concreto se aborda el concepto de recta tangente, desde una perspectiva que superando la mera manipulación algorítmica, permita al alumno mejorar sus competencias en la resolución de problemas no estandarizados.

Marco teórico

La teoría APOS (Baker, Cooley & Trigueros, 2000) es un intento de aplicar la abstracción reflexiva de Piaget a la comprensión de tópicos avanzados en matemáticas. Se concibe la comprensión como un proceso de creación por parte del individuo de elementos cognitivos que son caracterizados como *acciones, procesos y objetos*. Los diferentes elementos cognitivos relacionados con una determinada noción, son organizados de manera estructurada formando los *esquemas*. Otra de las componentes teóricas que ofrece APOS es la *descomposición genética* de una noción, que consiste en una descripción detallada de las construcciones mentales que se espera que un individuo realice al formar su propio esquema de una noción matemática concreta.

Junto a la teoría APOS, adoptamos uno de los marcos teóricos de referencia en los estudios que consideran el uso de la tecnología en la enseñanza, la génesis instrumental, la cual conjuga aspectos cognitivos con antropológicos (Artigue, Batanero & Kent, 2007. Uno de los puntos básicos de esa teoría es la diferencia entre artefacto e instrumento (Verillon & Rabardel, 1995; Lavicza, 2010). Artefacto se identifica con la herramienta propiamente dicha y hablamos de instrumento cuando con el artefacto se establece una relación significativa entre el usuario y la tarea a realizar. El proceso por el cual un artefacto se convierte en instrumento, llamado génesis instrumental (Drijvers, Kieran & Mariotti, 2010), consiste en la formación, por parte del estudiante, de esquemas instrumentales entendidos como formas estables de tratar determinadas tareas. Estos esquemas instrumentales pueden ser esquemas de uso, que son aquellas formas generales directamente relacionadas con el artefacto, o esquemas de acción instrumental, éstos últimos relacionados directamente con la actividad a realizar con el artefacto.

En base al marco teórico, con esta investigación pretendemos identificar las diferentes construcciones cognitivas que se les pueden proponer a estudiantes en lo que respecta a la noción de recta tangente, respetando su significado institucional. Como consecuencia, plantearemos una descomposición genética de la recta tangente así como los esquemas instrumentales que los estudiantes pueden poner en juego en un entorno tecnológico.

Metodología

Para fijar la descomposición genética en este estudio, que detallamos en la tabla 1, hemos utilizado una metodología siguiendo varias etapas. En primer lugar aproximarnos al significado institucional mediante un repaso de la génesis histórica del concepto (Durán, 1996; Kline, 1992).

En una segunda fase se han realizado análisis de diversos libros de texto (Contreras, Ordoñez, Luque, García, Sánchez & Ortega, 2003). En concreto se analizaron 14 libros de último curso de bachillerato y algunos textos clásicos utilizados en la docencia matemática en estudios de ingeniería. En esta fase se han considerado tres dimensiones de análisis:

a) Análisis conceptual, que aborda el modo de organizar el concepto a lo largo del texto. Se tienen en cuenta los siguientes aspectos:

a.1. El tipo de lenguaje que se utiliza: coloquial, simbólico-formal y gráfico.

a.2. El modo de argumentar o justificar los diversos pasos, que se puede clasificar en: lógico-deductivo, expositivo y heurístico (manipulación y descubrimiento).

a.3. Si existe una definición y se proponen relaciones entre los conceptos manejados a través de proposiciones.

a.4. El tipo de problemas resueltos y propuestos que se utilizan. En concreto analizamos si hay problemas no estandarizados y si se proponen ejercicios con mayor carga algebraica frente a lo numérico, y si existen problemas de tipo teórico.

b) Un análisis didáctico cognitivo que busca identificar las capacidades cognitivas que se pretende fomentar.

c) Un análisis fenomenológico, caracterizado por los problemas y aplicaciones que motivan la introducción de la noción de recta tangente.

Resultados

El estudio histórico, permite vislumbrar varias etapas en lo que respecta al tratamiento de la recta tangente. En una primera etapa, la de los clásicos griegos, se intuyen dos visiones respecto a la noción de tangente. Una visión más estática sería, por ejemplo, la propuesta por Apolonio, que formula la recta tangente como la recta que toca a una cónica en un único punto. Otra visión, más dinámica, es la de Arquímedes, que obtiene la recta tangente a una espiral identificando la dirección de la tangente con la dirección instantánea del movimiento.

En una segunda etapa, que se identifica como la de los precursores del cálculo, se mantiene la doble visión de la época clásica, pero se observa un esfuerzo mayor en la búsqueda de métodos de cálculo de la tangente. Descartes concibe la recta tangente como la posición límite de la secante y reduce el problema de determinación de la tangente a una curva al caso de la construcción de una tangente a una circunferencia. Fermat aplica su método para obtener máximos y mínimos al cálculo de la recta tangente. Torricelli, al igual que Roberval, calcula la recta tangente a la cicloide descomponiendo el movimiento. Barrow considera una curva como el límite de un polígono cuyos lados son infinitamente pequeños, y afirma que el lado del polígono infinitamente pequeño se convierte, en el límite, en la tangente a la curva

En una tercera etapa, la del nacimiento del cálculo, Newton y Leibniz desarrollan un método general y reconocen que los problemas de tangentes y cuadraturas son recíprocos. Newton tiene una concepción dinámica de las curvas, como si fueran generadas por un movimiento. Por su parte, Leibniz considera las curvas como si estuvieran formadas por segmentos indivisibles de longitud infinitesimal.

Del análisis de los libros de texto, destacan los siguientes resultados. En lo que respecta al análisis Contextual/Didáctico, se observa que el concepto de recta tangente aparece dentro del bloque de Análisis. En primer lugar se realiza un estudio, secuencial, de las funciones, de los límites, de la continuidad y tras definir la derivada, se presenta la recta tangente relacionada con la Tasa de Variación Media; a continuación las rectas secantes y la interpretación geométrica de la derivada. Formalmente no se apuesta por ninguna teoría cognitiva, aunque la cantidad de ejercicios propuestos en los textos dan a entender una concepción constructivista.

Del Análisis Fenomenológico, destaca el hecho de que no se plantean un problema-situación que permita construir la noción de recta tangente. Más bien, simplemente se plantea una manera de hallar la recta tangente. Por tanto, se nos da a entender que el alumno ya posee cierta noción de recta tangente. Pero, sobre todo, destaca el hecho de que se relaciona la pendiente de la recta tangente a una función en un punto como con la derivada de la función en dicho punto.

En lo que respecta al Análisis Conceptual, se tiene que todas las editoriales analizadas hacen uso del lenguaje coloquial, el gráfico y el algebraico. Sin embargo, no se argumenta ninguna de las afirmaciones expuestas. Se aportan nociones matemáticamente acabadas. Se suele definir la recta tangente como el límite de las rectas secantes, pero en realidad, más que una definición se aporta un método de cálculo de la tangente. La mayoría de problemas suelen consistir en cálculos algebraicos de rectas tangentes, aunque habría que puntualizar que en los manuales universitarios se resuelven cuestiones relacionadas con el cálculo de valores aproximados a una función en puntos cercanos al punto de tangencia.

Conclusión

Como conclusión, hemos detectado que la recta tangente es concebida fácilmente como la mejor aproximación lineal a una función en el entorno de un punto, en concordancia con la idea de Barrow y Leibniz (Boyer, 1986), la cual se calcula a partir del límite de una sucesión de rectas secantes. En la tabla siguiente se recogen, en detalle, los diferentes elementos que integral la descomposición genética de la recta tangente que se propone.

	ESQUEMA A
A1	Dada una función *f(x)* y un punto de la gráfica *P(x=a,f(a))* se realiza la ***acción*** de ampliar (zoom) la gráfica de *f(x)* en el punto *P*.
A2	La interiorización como ***proceso*** de A1.
A3	El encapsulamiento como ***objeto*** de A2.
	ESQUEMA B
B0	Dada una función *f(x)* y un punto de la gráfica *P(x=a,f(a))* ejecutar la ***acción*** de dibujar una recta secante que una el punto *P* con otro punto *Q(x=a+h, f(a+h))* relativamente próximos.
B1	Formar una sucesión de rectas secantes manteniendo fijo P y variando el punto Q acercándose a P (h tendiendo a 0).
B2	Interiorizar B1 como proceso.
B3	Encapsular B2 como un objeto.
	ESQUEMA C (NOCIÓN DE RECTA TANGENTE)
A=A3	
B =B3	
ARB	Identificar la tendencia de B como la mejor aproximación a A
	ESQUEMA D (EXPRESIÓN ANALITICA DE LA RECTA TANGENTE)
D1	Calculo de la recta secante: $y-f(a)=m_s(x-a)$, $m_s=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
D2	Cálculo de la recta tangente: $y-f(a)=m(x-a)$, $m=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$

Tabla 1

Propuesta de descomposición genética para la noción de recta tangente

Aplicaciones para la enseñanza:

Finalmente se presentan dos herramientas, accesibles online, útiles para el desarrollo de actividades de laboratorio virtual; las cuales han sido diseñadas utilizando recursos del asistente matemático MATLAB© (Cordero, Hueso, Martínez & Torregrosa, 2005). Dichas herramientas pueden facilitar el que los estudiantes construyan los objetos cognitivos descritos en la descomposición genética, especialmente en lo que respecta al registro gráfico. Los esquemas instrumentales fijados para las diversas actividades que los estudiantes deben realizar son los siguientes:

a) Esquemas de uso: acceder a una dirección de internet que permite usar la función zoom y la función rectas secantes. Las funciones elaboradas son accesibles en la dirección que se señala a continuación:

- ❖ Función zoom: http://hdl.handle.net/10251/10722
- ❖ Sucesión rectas secantes: http://hdl.handle.net/10251/10723

b) Esquemas de acción instrumental:

b.1 Función zoom:

Hay que introducir como entradas:

- ❖ Los coeficientes de un polinomio de tercer grado, siguiendo el orden creciente de las potencias de x, que definirá la función, f(x), a estudiar (para polinomios de menor grado se completa con ceros).
- ❖ El valor x_0 donde se estudia localmente la función.
- ❖ El radio, d, de un intervalo inicial (x_0-d, x_0+d) para el que se representará la función.
- ❖ El radio, d1, d1 < d, de un intervalo (x_0-d1, x_0+d1) encajado en el anterior, que define una ventana sobre la que se realiza el zoom.

Como salida obtenemos dos gráficos:

El primero será la representación gráfica de *f(x)* en el intervalo (x_0-d, x_0+d) sobre el que destaca, en magenta, una ventana cuya ampliación (zoom) da lugar al segundo gráfico que aparece enmarcado también en magenta (ver gráfico 1).

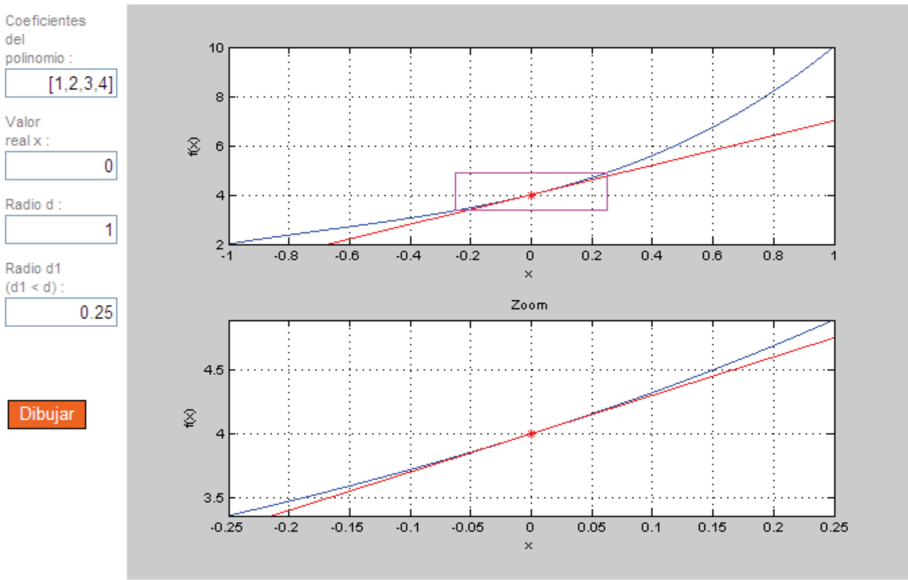

Gráfico 1.- Salida de la función "zoom"

b.2 Función recta tangente:

Hay que introducir como entradas:

- ❖ Los coeficientes del polinomio de tercer grado, siguiendo el orden creciente de las potencias de *x*., que definirá la función, *f*(*x*), a estudiar.
- ❖ El valor x_0 real tal que (x_0, f(x_0)) es el punto de tangencia, común a las rectas secantes a construir.

- ❖ El valor real h, que determina un intervalo inicial (x_0, x_0+h).

Como salida obtenemos cuatro gráficos que son aproximaciones sucesivas a la recta tangente mediante rectas secantes (rojo) con un punto en común. En todos ellos aparece la gráfica de la función *f(x)* (azul) y la recta tangente a *f*(*x*) (verde) en el punto (x_0, f(x_0)).

- ❖ En la "Aproximación 1" se tiene la recta secante a la gráfica de f(x) en los puntos (x_0,f(x_0)) y (x_0+h,f(x_0+h)).
- ❖ En la "Aproximación 2" se tiene la recta secante a la gráfica de f(x) en los puntos (x_0,f(x_0)) y (x_0+(h/2),f(x_0+(h/2)))
- ❖ En la "Aproximación 3" se tiene la recta secante a la gráfica de f(x) en los puntos (x_0,f(x_0)) y (x_0+(h/3),f(x_0+(h/3)))
- ❖ En la "Aproximación 4" se tiene la recta secante a la gráfica de f(*x*) en los puntos (x_0,f(x_0)) y (x_0+(h/10),f(x_0+(h/10))).

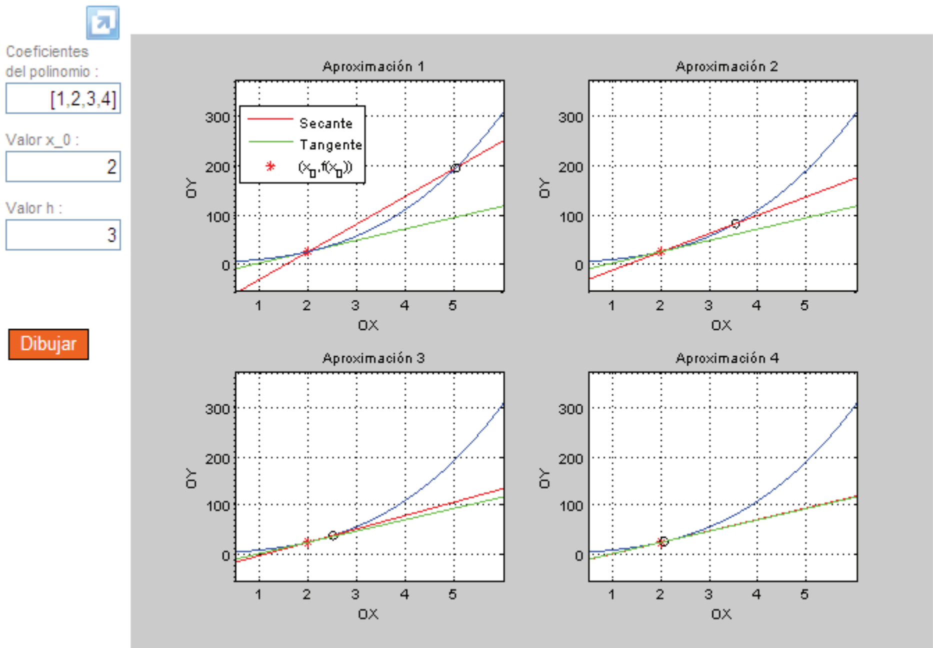

Gráfico 2.- Salida de la función "recta tangente"

Referencias bibliográficas

Artigue, M., Batanero C. & Kent, P. (2007). Mathematics thinking and learning at post secondary level. In F. Lester (ed.), *Second Handbook of research on Mathematics Teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics (pp.1011-1045)*. Charlotte, NC: Information Age Publisher.

Baker, B.; Cooley, L. & Trigueros, M. (2000). A Calculus graphing Schema. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 31(5), 557-578.

Boigues, F. J., Estruch, V. & Llinares, S. (2010). El papel de sistemas de cálculo formal en la comprensión de las matemáticas: el caso de la integral definida. *Modeling in Science Education and learning*. Vol. 3(1), 3-18.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza editorial.

Contreras, A., Ordoñez, L., Luque, L., García, M, Sánchez, C. & Ortega, M. (2003). *Análisis de manuales de 1º y 2º de bachillerato, en cuanto a los conceptos básicos del Cálculo infinitesimal derivada e integral, bajo la perspectiva de los obstáculos epistemológicos.* Proyecto de investigación del Instituto de Estudios Giennenses.

Cordero, A., Hueso, J.L., Martínez, E. & Torregrosa, J.R. (2005). *Métodos Numéricos con Matlab.* Valencia: editorial UPV.

Drijvers, P., Kieran C. & Mariotti, M. (2010). Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. In C. Hoyles y L.Lagrange (ed.), *Mathematics Education,* (pp.89-132). New York: Springer.

Durán, A. (1996). *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*. Madrid: Alianza.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático: Desde la Antigüedad a nuestros días*. (Tomo I). Madrid: Alianza editorial.

Lavicza, Z. (2010). Integrating technology into mathematics teaching at the university level. *Mathematics Education*.42, 105-119.

Verillon, P. & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrument activity. *European Journal of Psychology of Education*, 9(3), 77-101.