Un análisis epistemológico de la variable aleatoria

Blanca R. Ruiz Hernández y J. Armando Albert Huerta
ITESM, Campus Monterrey

Planteamiento

La investigación sobre el aprendizaje de la variable aleatoria es muy escasa a pesar de ser uno de los temas base en los cursos de estadística universitarios. Heitele (1975) la situó como una de las ideas fundamentales dentro de la enseñanza escolarizada porque, de acuerdo a su marco epistemológico de referencia, puede desarrollarse a través de un currículo en espiral con diferentes estadios cognitivos y niveles de profundización, pero conservando su estructura. Actualmente, sin embargo, es enseñada mayoritariamente como un preámbulo a las funciones de distribución.

Un análisis cognitivo (Ruiz, 2004) previo nos ha mostrado algunas de las dificultades con las que estudiantes universitarios se enfrentan al estudiar este tema y la necesidad de realizar un análisis epistemológico sobre él con la finalidad de plantear una situación didáctica que permita proponer sus estadios de aprendizaje. En particular nos centramos en el análisis epistemológico histórico del concepto. La variable aleatoria, como muchos otros conceptos científicos, ha surgido progresivamente a través de su historia y ha presentado etapas de mayor o menor desarrollo las cuales están delimitadas por eventos que marcan algún progreso en su conceptualización como el ente matemático que conocemos actualmente. Este conocimiento proporciona herramientas sobre como se llegó a comprender y penetrar en el concepto, así como la forma en que algunas dificultades en su conceptualización han sido superadas por otras personas en la historia.

Marco teórico

La investigación que realizamos está sustentada en la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995) que, a su vez, se sustenta en la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1997) y en la Transposición Didáctica (Chevallard, 1985/1991). Este marco sostiene la necesidad de un análisis preliminar del concepto desde las perspectivas cognitiva, didáctica y epistemológica, alimentándose una y otra mutuamente sin olvidar el carácter sistémico del fenómeno didáctico. Dentro de este marco, el análisis preliminar puede llegar a comprender varias investigaciones amplias que profundicen en la naturaleza del concepto matemático desde cada uno de sus componentes principales (cognitivo, didáctico y epistemológico) y sus interrelaciones, aunque también es el preámbulo para la investigación del aprendizaje de los estudiantes en el aula. Por sí misma, la penetración en cada componente puede proporcionar resultados de investigación valiosos. Es posible utilizar una metodología apropiada en cada una de las investigaciones de sus componentes, acorde con la filosofía de la teoría de situaciones didácticas y a través de la cual sea factible obtener elementos que permitan la definición de las variables de observación en el aula desde cada una de las perspectivas. Brousseau (1997) define el análisis epistemológico como esencial en el diseño de las situaciones didácticas puesto que a través de él se obtienen los posibles obstáculos epistemológicos, en los que se basa la construcción del conocimiento de los individuos.

En nuestra investigación consideramos la prefiguración como un pilar en la búsqueda de indicios históricos que nos aporten elementos para la detección de variables de observación en el aula. Las prefiguraciones son utilizadas por Heitele (1975) para definir las concepciones que perfilan el concepto en la mente de los individuos. De acuerdo con su análisis, en las prefiguraciones de un concepto se mantiene la esencia del concepto, pero difieren en sus niveles cognitivos y en la complejidad de su estructura. Las prefiguraciones pueden ser intuiciones (de acuerdo con Fischbein, 1975) o elaboraciones más complejas. En un estudio epistemológico no puede esperarse que la prefiguraciones conlleven necesariamente a una estructura única, puede haber retrocesos, ciclos o ramificaciones truncadas. Nuestro objetivo no está sólo en delinear la estructura que dio lugar al concepto actual, sino también en conocer y analizar todas las ramificaciones posibles.

Fischbein (1994) acepta que algunas de las intuiciones que obstaculizan el proceso de enseñanza, sobre todo en el área de probabilidad, pueden devenir de obstáculos epistemológicos. Consideramos que las intuiciones no sólo son importantes en la enseñanza y aprendizaje de un individuo sino que también pudieron presentarse durante el desarrollo del concepto y que pueden llegar a marcar etapas históricas de conocimiento.

Metodología

En este trabajo se profundiza en la componente epistemológica del concepto desde su desarrollo histórico. Se trata de delimitar el saber sabio (Chevallard, 1985/1991) para conocer su naturaleza e interrelaciones de acuerdo a la forma en cómo el concepto ha surgido históricamente, las dificultades a las que se ha enfrentado y sus distintas acepciones a lo largo de su desarrollo hasta su definición actual.

En particular el concepto de variable aleatoria es difícil de seguir a lo largo del tiempo debido a la especificidad de su definición, a lo ambiguo de su intuición, a su uso cotidiano frecuente pero poco perceptible, a lo complejo de las herramientas matemáticas necesarias para formalizarlo, a la cercanía (en el tiempo) de su definición formal y a que la variable aleatoria está vinculada con problemas que la teoría de la probabilidad todavía no resuelve. En este análisis nos guiamos por las prefiguraciones del concepto de variable aleatoria que percibamos en la historia de la probabilidad, por las propiedades distintivas de su formalización y por las representaciones que se emplean en su definición y en sus aplicaciones.

Resultados

Pudimos identificar dos paradigmas importantes en torno al desarrollo histórico de la variable aleatoria, ambos vigentes, e incluso en convivencia, en las distintas prácticas ingenieriles y de ciencias: el *Paradigma de magnitudes aleatorias* y el *Paradigma de variables aleatorias*.

El *paradigma de las magnitudes aleatorias* está sustentado principalmente en las ideas de Parzen (1960/1971), quien le dio gran importancia a los *fenómenos aleatorios de resultados numéricos.* Otros indicios de este paradigma se encuentran en los trabajos de Laplace (1812/1886 y 1778/1893) y Poisson (1837). Se caracteriza por considerar a la variable aleatoria como un valor observado en el fenómeno aleatorio. La probabilidad está directamente definida sobre la variable aleatoria puesto que los valores que ésta puede tomar se corresponden directamente con el espacio muestral. En muchas situaciones el concepto de variable aleatoria llega a carecer de importancia porque el conocimiento y delimitación del espacio muestral es suficiente para la correcta aplicación de la herramienta estadística. Miller (1998) critica ampliamente este tratamiento en la escuela puesto que se genera la impresión de que los datos no pueden existir sin la presencia del fenómeno aleatorio. Sin embargo en el manejo de distribuciones de probabilidad en niveles prácticos no especialistas generalmente la variable aleatoria es tratada de esta forma.

El *paradigma de las variables aleatorias* sirve de sustento a la teoría de la probabilidad y su definición justifica el paso del manejo de relaciones entre conjuntos en el espacio de probabilidad al tratamiento de los números reales en todas las funciones de probabilidad y por lo tanto, del análisis dentro de la herramienta estadística. En este paradigma queda definida la naturaleza funcional de la variable aleatoria como una función conjunto de valor real. Gracias a esta definición es posible la demostración de teoremas complicados, como la ley débil de los grandes números (Heitele, 1975) y la axiomatización de la teoría de la probabilidad. La gran aportación de este paradigma es la generalización del concepto tanto a casos en donde el espacio muestral es finito o infinito, discretas o continuas porque no se requiere la numeración de todos los casos posibles como en el paradigma de los magnitudes aleatorias. Aquí sobresalen los trabajos de Kolmogorov (1933/1956) y Petrov (Petrov y Mordecki, 2002).

Estos paradigmas contribuyeron a la delimitación de 9 momentos históricos del desarrollo de la variable aleatoria:

1. Se asocian valores numéricos discretos a resultados de experimentos aleatorios, como el es caso de varios problemas planteados por Huygens (citado por Hald, 1990). En esta investigación a esos resultados numéricos les llamaremos magnitudes aleatorias (un anacronismo válido tomando en cuenta que corresponde a un análisis histórico, no a un relato histórico).
2. Se identifican probabilidades asociadas a las magnitudes aleatorias discretas y sus distribuciones de probabilidad, principalmente en los trabajos de J. Bernoulli (citado por Hald, 1990).
3. Comienzan las primeras operaciones entre magnitudes aleatorias como uso de la suma, el cociente y la convergencia de sucesiones de variables aleatorias, aunque no siempre explícitas. Aparece la condición de independencia entre magnitudes aleatorias. Esto lo observamos en la Ley de los grandes números en Ars Conjectandi de J. Bernoulli (Hald, 1990).
4. Se vinculan las magnitudes aleatorias con problemas reales como errores de medición o problemas de sobrevivencia (De Moivre, Laplace y Galton). Nace la magnitud aleatoria continua, así como su probabilidad identificada como la integral en un intervalo dado. Se identifican distribuciones de probabilidad para magnitudes aleatorias continúas. Particularmente la Normal y la Exponencial. Hay un auge del uso del cálculo infinitesimal en Probabilidad. Primeros enunciados del Teorema central del límite. Era común considerar la Probabilidad como un mal menor ante nuestra incapacidad de conocer con certeza. Esto se observa en los trabajos de De Moivre (Pearson, 1924) y Laplace (1812/1886 y 1778/1893) entre otros.

5. Aparecen los primeros indicios explícitos de asociación de resultados no-numéricos de experimentos aleatorios con ciertas magnitudes con asignación de probabilidades (Poisson, 1837).
6. Se trabaja con muchas propiedades de las magnitudes aleatorias y rigor matemático Esto se observa en los trabajos de Chebyshef, (Tchebyshef, 1867/1899) y Markov(citado por Maistrov, 1974) e incluso Lyapunov en algunos trabajos las denomina "variables aleatorias" (Hazewinkel, 2002).
7. Se mira las magnitudes aleatorias como un caso particular de las variables aleatorias. Éstas últimas son definidas como una función conjunto de valor real dentro de un espacio de probabilidad y que toma valores de un espacio de medible. Esto se observa en los trabajos de Borel, Bernstein (citados por Maistrov, 1974) y Kolmogorov (1933/1956).
8. Se multiplican las aportaciones a la Teoría de las variables aleatorias con Lévy (1939 y 1959), Feller (1973), Meyer (1970/1973) y Petrov (2002). El nuevo paradigma de las variables aleatorias hace que se desarrolle teoría en probabilidad y que se tenga un mayor detalle en la definición de los conceptos estadísticos.
9. Hay un nuevo equilibro entre paradigmas (Parzen, 1960/1971). El paradigma de magnitudes aleatorias surge de nuevo como una forma de introducir y manipular de forma más simple los problemas con fenómenos aleatorios de resultado numérico. La convivencia entre ambos paradigmas subsiste hasta la actualidad.

En estos nueve momentos identificamos cuatro etapas que marcan saltos cualitativos en la conceptualización de la variable aleatoria:

Primero. Desde la probabilidad en un contexto de teoría de juegos hasta problemas de aplicaciones como sobrevivencia, o teoría de errores (Huygens –De Moivre y Laplace).

Segundo. Desde resultados numéricos de un fenómeno aleatorio hasta el reconocimiento semiótico de la variable aleatoria y operaciones básicas (Chebyshev a Liapunov).

Tercero. Desde estadio anterior al reconocimiento funcional de la variable aleatoria y su formulación formal en base a teoría de la medida (Borel y Kolmogorov).

Cuarto. Desarrollo de la teoría formal de la variable aleatoria: sumas, productos, convergencia de sucesiones y series de variables aleatorias (Lévy, Petrov).

Conclusiones

La definición de variable aleatoria es sencilla en apariencia. Al profundizar sobre sus interacciones y concepciones surge una complejidad epistémica que también se puede observar en el surgimiento histórico del concepto.

Identificamos algunos obstáculos para el surgimiento y desarrollo del concepto de variable aleatoria, que son prospectos a ser obstáculos epistemológicos:

El predominio del Paradigma magnitudes aleatorias ha dificultado el surgimiento de un paradigma nuevo basado en variables aleatorias.

Dificultad en la naturaleza funcional de la variable aleatoria y la composición de funciones vinculada con ella y la probabilidad. Tradicionalmente ha sido más tratada como *variable* (magnitud aleatoria) que como función.

Dificultad para reconocer la existencia de la variable aleatoria al hacer composición entre variables aleatorias. (por ejemplo, Bernoulli en la Ley de los grandes números). Las dificultades planteadas por la Física cuántica y otras ciencias, como el caso de las funciones discontinuas, las paradojas de teoría de conjuntos, la matemática formal y los problemas planteados por Hilbert, pusieron en crisis la teoría de la probabilidad. Lo que dio paso a una nueva era con las aportaciones de la Escuela de San Petersburgo, particularmente de Kolmogorov.

Complejidad con sus operaciones. Se ha tenido que desarrollar la teoría de conjuntos y de la medida para plantear formalmente a la variable aleatoria y abordar más profundamente sus operaciones como la suma entre variables aleatorias, producto y convergencia de sucesiones y series de variables aleatorias, teoremas límite.

Así mismo, de manera general y en concordancia con lo expuesto por Heitele (1975) se encontraron tres aplicaciones importantes en el desarrollo del concepto de la variable aleatoria, que son en su esperanza, en la definición de su función de distribución y en las operaciones entre variables aleatorias. Encontramos en ellas un campo abierto para exploraciones epistemológicas alrededor de ellas.

Referencias

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 39-59). México: Iberoamericana.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics. Didactique des mathématiques, 1970-1990*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica* (Trad. C. Gilman). Argentina: Aique. (Original en francés, 1985).

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel Publishing Co.

Fischbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. En R. Biehler, R. W. Scholzz y R. Winkelmann (Eds.), *Didactic of Mathematics as a Scientific Discipline*, 231-245. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hald, A. (1990). *A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*. New York: John Wiley & Sons.

Hazewinkel, M. (Ed.). (2002), *Encyclopaedia of Mathematics* [en línea]. Springer. Obtenido el 18 de junio de 2006 de: http://eom.springer.de/L/l061200.htm.

Heitele, D. (1975). An epistemological view of fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics* 6, 187-205.

Kolmogorov A. (1956). *Foundations of the Theory of Probability* (2ª Ed). (Trad. N. Morrison). New York: Chelsea Publishing Company. (Original en alemán, 1933).

Laplace P. S. (1893). Mémoire sur les probabilités. En L'Académie des sciences (Ed.), *Oeuvres complètes de Laplace* (Vol. 9). Paris: Gauthier-Villars. (Original publicado en 1778).

Laplace P. S. (1886). Théorie Analytique des Probabilités. En L'Académie des sciences (Ed.), *Oeuvres complètes de Laplace* (Vol. 7). Paris: Gauthier-Villars. (Original publicado en 1812).

Lévy, P. (1939). L'addition des variables aléatoires définies sur une circonférence. *Bulletin de la S. M. F. , 67,* 1-41. Obtenido el 21 de marzo de 2006 de: http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1939__67__1_0.

Lévy, P. (1959). Esquisse d'une théorie de la multiplication des variables aléatoires. *Annales scientifiques de l' É. N. S., 3 série,* 76 (1), 59-82. Obtenido el 22 de mayo de 2006 de: http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1959_3_76_1_59_0

Maistrov L. E. (1974). *Probability Theory. A historical sketch* (Trad. S. Kotz). New York : Academic Press. (Original en ruso, 1967).

Meyer, P. (1973). *Probabilidad y aplicaciones estadísticas* (Trad. C. Prado). México: Fondo Educativo Iberoamericano. (Original en inglés, 1970).

Miller, T.K. (1998). The random variable concept in introductory statistics. In L. Pereira- Mendoza (Ed.). *Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics*. (pp. 1221-1222). Singapore: IASE.

Pearson, K. (1924). Historical Note on the Origin of the Normal Curve of Errors. *Biometrika*, 16 (3/4), 402-404.

Petrov, V. y Mordecki, E. (2002). *Teoría de probabilidades*. Moscú: Editorial URSS.

Poisson, S. D. (1837). Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile. Paris: Bachelier. Obtenido el 23 de junio de 2006 de: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k110193z.pagination.

Parzen, E. (1971). *Teoría Moderna de Probabilidades y sus aplicaciones* (Trad. E. Berumen). México: Limusa. (Original en inglés, 1960).

Ruiz, B. (2004). *Exploración cognitiva sobre la variable aleatoria en situación de modelación*. Memoria del tercer ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.

Tchebychef P. L. (1899). Des Valeurs Moyennes (Trad. M. N. De Khanikof). En A. Markoff y N. Sonin (Eds.) *Oeuvres de P. L. Tchebychef* (Tomo I). St. Petesburgo: Académie Imperiale des Sciences (pp. 687-694). (Original en ruso, 1867). Obtenido el 12 de junio de 2006 de la University of Michigan Historical Math Collection. http://name.umdl.umich.edu/AAS7805.0001.001.

Palabras clave: probabilidad, variable aleatoria, análisis epistemológico.