

# EL APRENDIZAJE DE LA REFLEXIÓN EN GEOMETRÍA ENTRE ESTUDIANTES DE PRIMARIA

Claudia Margarita Acuña Soto. Centro de investigación y estudios avanzados del IPN.

**Avelina Englandi Martínez Victoria**. Centro de investigación y estudios avanzados del IPN.

## PLANTEAMIENTO

Las transformaciones isométricas juegan un papel importante en el aprendizaje de la geometría y en el desarrollo de habilidades como la percepción espacial, la visualización y el dibujo. En el nivel básico en lo que respecta a la simetría axial se espera que los estudiantes la manejen como si fuese un espejo, también se hace uso del doblado de papel para sugerir la reflexión.

Algunos resultados como la falta de conservación de invariantes, así como, el conflicto que representa el eje de reflexión oblicuo, han sido anteriormente observados por otros autores. En este trabajo nos dirigimos hacia la detección de los referentes espaciales que son utilizados por los estudiantes de cuarto grado de primaria para orientar el objeto geométrico, deseamos determinar si existen patrones de comportamiento en esta tarea. Esta información nos permitiría mirar el proceso desde el punto de vista de la organización espacial que hace el estudiante, además de permitirnos incidir en la toma de decisiones del estudiante respecto a los referentes usados.

Las preguntas de investigación son entonces las siguientes: ¿Detectan los estudiantes de cuarto grado de primaria (9 años en promedio) las relaciones invariantes? ¿Qué elementos de referencia utilizan? De ser así ¿hay patrones detectables?

## MARCO TEÓRICO

Algunos trabajos importantes que se conocen en los que se analizan las dificultades de las isometrías del plano son los de Williford (1972) y Schultz & Austín (1983), en donde el primero hace una reflexión acerca de los efectos de la instrucción sobre transformaciones en niveles básicos de aprendizaje sobre las habilidades espaciales de los estudiantes, encontrando que los estudiantes aprenden a ejecutar procedimientos manuales para producir la transformación de imágenes pero que aún no pueden llevar a cabo la transformación de manera mental. Los segundos, estudian la influencia de diversos factores perceptivos en la habilidad para realizar las transformaciones, mediante la manipulación de figuras con las cuales deben realizar el

movimiento indicado de manera operacional, es decir, indicando el volteo, el deslizamiento o el giro de la figura, ellos encontraron que el tipo de transformación así como la dirección del movimiento afecta el entendimiento de los estudiantes relativo a las transformaciones, siendo esto más evidente cuando la transformación se lleva a cabo con un eje diagonal.

El fenómeno que consiste en ignorar la inclinación del eje de reflexión ha sido ampliamente referido en la literatura de investigación, Jaime (1995), muchos de nuestros estudiantes simplemente reflejan horizontalmente. Los motivos de este fenómeno bastante generalizado, se apoyan por un lado, en la natural disposición horizontal-vertical de los objetos en la naturaleza y, por otro lado, en la complejidad que representa imaginar espacialmente la reflexión cuando no tenemos referentes horizontal-vertical, para ello se requiere de movilizar un objeto de conjunto en donde las partes que lo conforman pierden, en el sentido usual, sus referentes.

Por otra parte Kidder (1976) investigó la habilidad de los niños para: a) Formarse representaciones mentales de figuras planas, llevar a cabo operaciones mentales de esas representaciones, y entonces construir la imagen de la transformación en la posición apropiada, b) Mantener la invariante de la longitud. En este sentido menciona que la evolución de los procedimientos de las relaciones espaciales se da a dos niveles uno a nivel perceptual, en donde la percepción es el conocimiento de los objetos resultante del contacto directo con ellos y otro al nivel de representación o imaginación que es la evocación del objeto en su ausencia. Uno de sus resultados es que uno de los errores más frecuentes al realizar las transformaciones fue que no conservan la dimensión de la longitud (no construyen imágenes congruentes de la figura original) y que los niños a este nivel no pueden llevar a cabo las transformaciones a un nivel de representación, es decir, que no pueden incorporar factores que no son dados por la sola observación directa, algunos de los cuales es necesario profundizar debido a que unos permanecen constantes mientras que otros varían.

Gutiérrez (1992) menciona que los elementos básicos relacionados con la percepción visual son las representaciones mentales que las personas pueden hacer de objetos físicos, relaciones, conceptos etc.

Otro componente de la visualización son las habilidades utilizadas por los individuos para la creación y procesamiento de imágenes visuales<sup>1</sup>. Del Grande (1990) hace una relación de las habilidades que pueden integrar la percepción espacial de un individuo:

Habilidad	Descripción
1. Coordinación visomotora	Habilidad para seguir con los ojos el movimiento de los objetos de forma hábil y eficaz.
2. Identificación visual	Habilidad para reconocer una figura aislándola de su contexto.
3. Constancia perceptual	Habilidad para reconocer que un objeto posee propiedades invariantes.
4. Percepción de la posición en el espacio	Habilidad de relacionar la posición de un objeto lámina o imagen mental, con uno mismo (observador) o con otro objeto que actúa como punto de referencia.
5. Percepción de relaciones espaciales entre objetos	Habilidad para ver dos o más objetos simultáneamente en relación con uno mismo y entre sí.
6. Discriminación visual	Habilidad que permite comparar varios objetos identificando sus semejanzas o diferencias visuales.
7. Memoria visual	Habilidad de recordar las características visuales y de posición que tenían en un momento dado objetos que estaban a la vista pero que ya no se ven o que han sido cambiados de posición.

Tabla 1. Descripción de Habilidades según Del Grande

Las habilidades mencionadas forman parte de un todo, que permite al estudiante percatarse de la figura geométrica y las propiedades invariantes. Estas habilidades son una base para poder manipular la figura matemáticamente.

Desde el punto de vista de la visualización semiótica “Lo propio de la visualización, es producir una representación que da lugar a una aprehensión simultánea y casi inmediata, pero sin que esta representación constituya una aprehensión de los objetos representados”... “hecho que permite disociar las formas y los objetos cuya "yuxtaposición"... es imposible de ver en la realidad”, Duval (2003) p 45. Llegar a construir una representación desde la primera mirada al objeto geométrico, requiere de un proceso de abstracción intencional, mismo que debe ser desarrollado por el estudiante, este debe pasar de ver la figura geométrica completa a considerarla como la suma de sus partes, para poder hacer una reflexión adecuada se requiere mirar la figura cómo un todo a la vez que debe ser considerada como formada por sus partes.

<sup>1</sup> En nuestro trabajo respetamos los nombres asignados por los autores citados a la actividad mediante la cual se aprehende información figural de una representación externa y gráfica, pese a que se le llame elaboración de representaciones mentales, imágenes visuales, imágenes o representaciones se trata en todos los casos de las ideas relacionadas con el objeto geométrico.

Bajo esta consideración detectamos entre los estudiantes por lo menos dos estrategias o procedimientos ajenos frente a las tareas de construcción de figuras reflejadas, una era aquella en la que la figura será movilizada de conjunto con poco error en las dimensiones y forma, y aquella otra en la que es posible reflejar primero los vértices como elementos que permiten reconstruir la figura, en donde la figura como un todo es perdida de vista por un momento hasta que puede ser recuperada con la unión de segmentos.

La primera estrategia se refiere a el uso de la habilidad para seguir con los ojos el movimiento (imaginario en la construcción de la nueva figura) de los objetos en su conjunto (1), Habilidad de relacionar la posición de un objeto o imagen mental, con otro objeto que actúa como punto de referencia (4) (el eje entre dos figuras reflejadas, en nuestro caso).

En tanto que la segunda estrategia se apoya en una aplicación de la habilidad visomotora (1) pero aplicada a los puntos, en lugar de al conjunto, y de la memoria visual (7) debido a que los elementos reflejados sólo son una parte de la figura original.

Si el estudiante hiciese una revisión de la pertinencia de su dibujo, debería usar prácticamente todas las habilidades mencionadas bajo la consideración de la conservación de los invariantes de tamaño y posición entre la figura original y la reflejada.

## METODOLOGÍA

*Sujetos:* Las tareas fueron aplicadas a 19 niños entre los 8 y 9 años de edad de una escuela oficial urbana, ubicada en Nezahualcoyotl, Estado de México que cursaban en el momento de la aplicación el 4° grado. Los estudiantes ya habían recibido instrucción con respecto a la simetría axial como lo marca planes y programas de la SEP para tercer grado (1993). La aplicación fue individual y dirigida por su profesor habitual durante la clase de matemáticas, se llevó a cabo en un día normal de clases con una duración de 60 minutos.

*Tareas:* En las actividades relacionadas con la reflexión parece haber tres aspectos importantes:

1. Los procedimientos que en particular podemos pensarlos como reflexión mediante doblado y reflexión punto a punto.
2. La conservación de invariantes en el tamaño, forma y distancia del objeto al eje de simetría.
3. Un uso adecuado de la orientación una vez que se percata el estudiante de que la figura no cambia de tamaño sino de posición.

El procedimiento que implica el doblado requiere de una representación sobre el papel que no siempre permite mirar la figura reflejada (depende del material utilizado) este procedimiento propicia mirar a la figura de conjunto.

Hemos propuesto a nuestros estudiantes 3 tipos de tareas: una en donde tienen que expresar por escrito la idea que tienen acerca de lo que es un eje de simetría, otra tarea que implica el trazado de ejes de simetría y una tarea de reflexión en la que deben anticipar la posición que toman los objetos reflejados para dibujar la imagen resultante sobre una superficie punteada en la que se pueden apoyar para conservar las distancias invariantes.

Los objetivo de estas tareas son observar si los estudiantes de cuarto grado observan los invariantes asociados a la reflexión a partir de los antecedentes de instrucción con que cuentan; si los invariantes no son detectados, cuales son los referentes determinantes para ellos en esta tarea y por supuesto tratar de detectar si existen patrones en la elección de estos referentes o cómo adecuan la imagen reflejada a la situación determinada por la composición y los espacios disponibles para su tarea.

Ésta última tarea presentaba algunas variantes como son la posición del eje de reflexión (horizontal, vertical y oblicuo), reflexión con respecto a cuatro ejes, forma del objeto a reflejar y espacio para realizar la construcción de la figura debido a que consideramos que las respuestas estaban influidas por esta variable, las tareas se muestran enseguida:

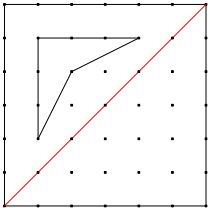
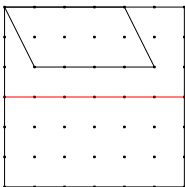
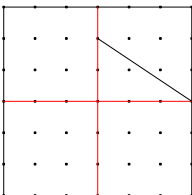
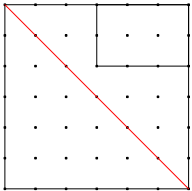
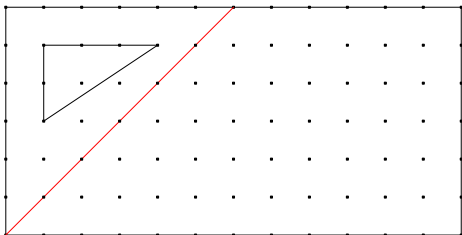
<p>Ejercicio a</p> 	<p>Ejercicio b</p> 	<p>Ejercicio c</p> 
<p>Ejercicio d</p> 	<p>Ejercicio e</p> 	

Tabla 2. Ejercicios de reflexión propuestos a los estudiantes

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El análisis de resultados se llevó a cabo de manera cualitativa observando el desempeño de los estudiantes al resolver las tareas, los resultados se comentan enseguida:

Tarea 1: No están en condiciones de responder a la pregunta que solicita explicar qué es un eje de simetría, por lo que pasan a describirlo. Lo describen como un trazo adicional sobre la figura (*rayitas, lados*) y hacen referencia a su posición (*lo de afuera*) o características figurales (*la línea que los divide; un eje de simetría es si la figura se puede doblar*). Pero más frecuentemente es confundida con las partes de figuras (*lados, las esquinas (vértices), los puntos cardinales, la orilla*) o figuras completas (*triángulo; tiene la misma forma; lo que tiene la figura; la figura*).

Tarea 2: En el trazado de los ejes de simetría de figuras que eran o no simétricas, enfocan su atención hacia la construcción de líneas sobre algunos lados, líneas que atraviesan de lado a lado la figura; hacia el contorno de la figura o dibujan diagonales dentro del marco que encuadra la figura.

En los casos donde se observó que trazaron ejes de simetría coincidió que las figuras eran conocidas en clases anteriores en donde se habló de reflexión como en el caso de un rombo, un triángulo, una casita y una mariposa, en su mayoría, los estudiantes colocaron los ejes de simetría de manera adecuada en estas figuras, pero en otras como la circunferencia y el hexágono que contienen letras o flechas en sus diseños tuvieron más dificultades para reconocerla. En general las respuestas de la tarea 1 y 2 fueron coherentes.

Tarea 3: En general los estudiantes no logran la identificación de los invariantes de la simetría cuando llevan a cabo la construcción de la figura simétrica. Los resultados nos sugieren que ellos usan la estrategia en la que consideran toda la figura para reflejarla y no la que se apoyan en la reflexión de los puntos separándolos de la figura.

La reflexión de las figuras completas tiene el inconveniente de ocultar la importancia de los invariantes, puede fomentar la reflexión “a ojo”, esto provoca una importante inconsistencia en la elaboración de los dibujos, por ejemplo, en la tabla 3, mostramos los siguientes tipos de errores:

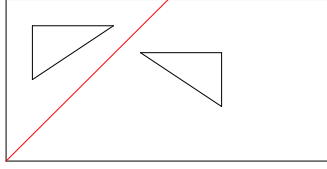
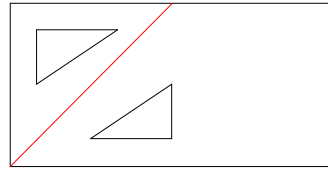
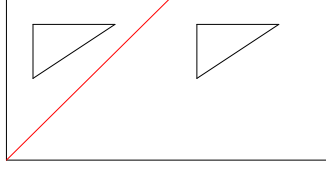
		
Estudiante 3, 7 y 17 Reflexión eje vertical	Estudiante 4, 5, 14 y 15 Rotación	Estudiante 9, 10, 12, 13, 18 y 19. Traslación

Tabla 3. Tipos de errores en la tarea 7e.

Mientras que los estudiantes 3, 4, 5, 10, 14 y 17, entre otros, respondieron correctamente a la pregunta 7a conservando la orientación de la figura reflejada y los invariantes, incluyendo la distancia al eje.

Observamos además, que la dificultad en la reflexión también se relaciona con la forma del objeto a reflejar, ésta se incrementaba cuando la figura tenía lados oblicuos como en el caso de 7a.

Otra fuente de confusión se relaciona con la composición espacial de las figuras, es decir, con la manera como éstas están dispuestas entre si. En los ejercicios en donde la diferencia esencialmente era el espacio disponible para hacer la reflexión, como en 7a y 7e, como hemos visto antes, las respuestas muestran los esfuerzos de los estudiantes por adaptarse al espacio disponible para realizar la tarea.

En el ejercicio 1d (figura 1) llamó especialmente nuestra atención, todos los estudiantes, independientemente de su desempeño anterior en las diferentes tareas, obtienen la misma imagen resultante de la reflexión. En esta respuesta aparece el rectángulo reflejado acomodado en la esquina inferior del marco propuesto para el dibujo. Los estudiantes usaron el entorno e hicieron una interpretación cómoda de la reflexión, incluso con la fantasía de mantener la misma distancia al eje. Ellos parecen caer en una especie de trampa óptica armada por el entorno visual. La situación de composición de este ejercicio es muy influyente.

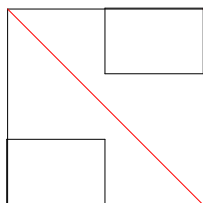


Figura 1. Respuesta única al ejercicio d

## CONCLUSIONES

Los resultados nos sugieren que hay una gran confusión entre la idea de figuras idénticas y figuras reflejadas, los estudiantes tienen una idea que podríamos llamar “rígida” porque no pueden imaginarla en una reflexión oblicua pero se esfuerzan por adaptarla a la composición de los objetos de la tarea, no detectando la conservación homogénea de las relaciones invariantes de la reflexión.

Consideramos que los estudiantes de cuarto grado no observan los invariantes asociados a la reflexión a partir de los antecedentes de instrucción, en especial porque reflejan la figura completa sin percatarse de la importancia de conservarlos, sobre todo la distancia al eje de reflexión.

Los referentes determinantes para ellos, en estas tareas, se pueden considerar como internos y externos. En cuanto a los primeros, los trazos que forman salientes agudas son mejor considerados que aquéllos que no se destacan de la figura. Externamente los referentes se sitúan en el marco y espacio propuesto para la realización de la tarea, ya que adecuan la imagen reflejada a la situación determinada por la composición y los espacios disponibles para su tarea.

Nuestra investigación sugiere que los estudiantes toman puntos de referencia que sobresalen de las figuras y que, si bien conservan el tamaño y la forma de los objetos reflejados, no así la distancia de la figura al eje de simetría. La aparición de otros movimientos rígidos en lugar de la reflexión no es un comportamiento homogéneo, de manera que concluimos que los estudiantes buscan premeditadamente una representación gráfica que se ajuste a las necesidades de cada situación.

## REFERENCIAS

- Del Grande, J.** (1990). Spatial Sense, *Arithmetic Teacher*. Vol. 37 (6). 14-20.
- Duval R.** (2003), Voir en Mathématiques, *Matemática Educativa, aspectos de la investigación actual*, Coordinador Eugenio Filloy, Fondo de Cultura Económica pp. 41-76.
- Gutierrez, A.** (1992). Procesos y habilidades en visualización espacial. Memorias del tercer simposio internacional sobre investigación en Educación Matemática: Geometría. 44-59.
- Jaime, A. Gutierrez, A.** (1995). Guidelines for teaching Plane Isometries in Secondary School, *The mathematics teacher* 88.7, pp.591-597.
- Kidder, F. R.** (1976). Elementary and middle school children's comprehension of Euclidean transformations. *Journal for Research in Mathematics Educations*. Vol. 7 (1). 40 – 52.
- Schultz, K. A. & Austin, J. D.** (1983). Directional effects in transformation tasks. *Journal for Research in Mathematics Educations*, Vol. 14 (2), 95 – 101.
- SEP** (1993). *Plan y programas de estudio*. Educación básica primaria. Dirección general de materiales y métodos educativos de la subsecretaría de Educación Básica y Normal. México.
- Williford, H.** (1972). A study of transformational geometry instruction in the primary grades. . *Journal for Research in Mathematics Educations*. Vol. 3 (4). 260 – 271.

Palabras clave: visualización, imaginación espacial, simetría.