ESTUDIO DEL TRABAJO GEOMÉTRICO: UNA MIRADA AL PROFESOR

Romina Menares, Elizabeth Montoya
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile
menares.romina@gmail.com, emontoya@ucv.cl

Resumen: El presente estudio atiende fundamentalmente a las concepciones que tienen los docentes sobre las demostraciones, específicamente en Geometría.

La investigación tuvo como objetivo fundamental estudiar la epistemología del profesor frente al trabajo geométrico; conocer cuáles argumentaciones constituyen para él una demostración.

El análisis realizado se sustenta en un marco en el cual se articulan dos teorías: la de Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Geométrico, de Houdement y Kuzniak, y la teoría de Razonamiento de Duval, y se llevó a cabo mediante un cuestionario a profesores de enseñanza básica y media en ejercicio.

Palabras clave: Epistemología del profesor, paradigmas geométricos.

Abstract: The present study attends fundamentally to the conceptions that the teachers have on the demonstrations, specifically in Geometry.

The investigation had as fundamental aim the study of the epistemology of the teacher in the geometric work; to know which argumentation constitutes for them a demonstration.

The analysis we have done is sustained in a frame in which two theories are articulated: Geometric Paradigms and Geometric Working Space, of Houdement and Kuzniak, and the theory of Duval's Reasoning, and they were carried out by means of a questionnaire applied to a total of 50 teachers of basic and average education currently working.

Key words: Teacher epistemology, geometric paradigms.

Introducción

El presente escrito se enmarca en mi trabajo de tesis de magíster: *"Estudio del Trabajo Geométrico, Tipos de Argumentaciones y Demostración en Geometría: La Mirada al Profesor"*. El estudio atiende fundamentalmente a las concepciones de los docentes sobre las demostraciones en el eje Geometría.

El actual marco curricular chileno propone que:

> La formación matemática debe enfatizar el desarrollo del pensamiento creativo y crítico para la formulación de conjeturas (...) resolver, formular conjeturas, verificar la validez de procedimientos y relaciones; para casos particulares o en forma general-en cuyo caso se usará el verbo demostrar-está en el núcleo de las experiencias de aprendizaje deseables. (MINEDUC, 2009, p. 146)

Sin embargo, en nuestra experiencia como docentes en postítulos para profesores de enseñanza básica y media y observaciones de clases, hemos evidenciado que las tareas que proponen a sus estudiantes tienen objetivos muy distintos a los de demostrar, e incluso escasamente se pide argumentar, validar, comprobar o formular conjeturas.

Por otro lado, en diversos estudios sobre los resultados de los estudiantes chilenos en pruebas nacionales e internacionales, como SIMCE y TIMSS 2003, se han detectado dificultades en Matemática, específicamente, en el área de Geometría, además se hace referencia a la poca confianza que sienten algunos profesores a la hora de enseñar Geometría (MINEDUC, 2004, 2009).

La investigación tiene como objetivo general estudiar la epistemología del profesor frente al trabajo geométrico; si el docente da lugar a las construcciones en geometría, si realiza manipulaciones con material concreto, conocer cuáles son los argumentos que considera válidos, y cuáles constituyen para él una demostración en este eje.

Problemática

En la enseñanza de la Matemática es incuestionable que el profesor es una pieza fundamental. Informes de la OCDE afirman que para mejorar la calidad de la educación se debe mejorar la formación de los docentes, pues lo que suceda en una situación de enseñanza depende directamente de sus propias decisiones.

En el colectivo escolar chileno, un discurso usual es que los profesores suelen dejar de lado la geometría (Montoya, 2009), el trabajo geométrico es desplazado y se tiende a dejar para el final del curso o simplemente no se trata.

Diversas evaluaciones nacionales, entre ellas el SIMCE 2003, han revelado que de los contenidos evaluados en cuarto año de enseñanza básica (estudiantes de 9 a 10 años) y en segundo año de enseñanza media (estudiantes de 15 a 16 años), el 68% de los profesores de cuarto año básico se sienten “muy bien preparados” para enseñar matemática. Cuando se pregunta por los contenidos de manera detallada, en cuarto año se observa que el contenido más débil es orientaciones en el espacio, versus el más alto con 86%, correspondiente a adición y sustracción, (MINEDUC, 2003).

Según el mismo estudio, en cuarto básico la formación de figuras a partir de triángulos y cuadriláteros fue trabajado completamente solo por un 29% de los docentes, lo mismo ocurre con la construcción combinando cuerpos. En el caso de los profesores de segundo Año Medio, un 33% declaró no haber enseñado geometría y probabilidades. Los porcentajes fueron los siguientes para algunos contenidos de geometría: criterios de semejanza en figuras planas: 31%, reconocimiento de figuras semejantes: 38%, resolución de problemas aplicando el Teorema de Thales: 36% y ángulos en la circunferencia: 29%. Además estas unidades, que son las que los profesores enseñan menos, coinciden con aquellas que declaran sentirse menos preparados, (MINEDUC, 2003).

Según el actual estudio de evaluación de aula en enseñanza básica y media realizado por el Ministerio de Educación, "los contenidos asociados con Geometría reciben una menor atención, especialmente en 2° y 4° básico. Desde 6° básico a 2° medio reciben una dedicación algo mayor, para ser luego evaluado de manera prácticamente nula en 4° medio" (MINEDUC, 2009, p. 8).

En relación a lo anterior, algunas de las conclusiones de la participación de Chile en el TIMSS 2003 señalan que los propios docentes chilenos aseveran que su énfasis en el proceso de enseñanza está en la ejercitación numérica, privándose a los alumnos del estudio de aspectos importantes del currículum, como Álgebra y Geometría. Este estudio revela que en Chile, el 73% de los maestros afirma que privilegia la enseñanza de las 4 operaciones matemáticas básicas sin calculadora, mientras que el promedio internacional es de 62%.

Por otro lado, el actual marco curricular chileno propone que resolver, formular conjeturas, verificar la validez de procedimientos y relaciones para casos particulares o en forma general debe ser central en la enseñanza; incluso ya desde Tercer Año Básico aparecen habilidades como "Formular y verificar conjeturas, acerca de la relación entre la adición y la multiplicación (...)", y específicamente en Geometría: "(...) acerca de la posibilidad de construirlos (los cuerpos geométricos) a partir de ellas (de las redes)"(Ibíd, p.156) , sin embargo, en nuestra experiencia como docentes en postítulos para profesores de enseñanza básica y media y observaciones de clases, hemos evidenciado que las tareas que los profesores proponen a sus estudiantes tienen objetivos muy distintos a los de demostrar, e incluso escasamente se pide argumentar, validar, comprobar o formular conjeturas.

Creemos que la estrecha relación que tiene la Geometría que se trata a nivel escolar con la realidad, hace que las representaciones de los objetos se ajusten muy cercanamente al objeto en cuestión, entonces surge el problema de confundir demostraciones con las comprobaciones mediante mediciones o el uso de otro tipo de instrumentos, en casos particulares.

La investigación tiene como objetivo fundamental estudiar la epistemología del profesor frente al trabajo geométrico; conocer cuáles son los argumentos que considera válidos, y las concepciones de los docentes sobre las demostraciones. En este último aspecto investigaciones dan cuenta de que esta noción no es única entre matemáticos. (Dreyfus, 2000, Barra, 2010)

El estudio realizado por Araya (2008), evidencia que en no se realizan demostraciones matemáticas ni razonamiento deductivo en las clases. En este trabajo, se caracterizaron los saberes pedagógicos y el conocimiento de la disciplina en profesores de Enseñanza Básica y de Enseñanza Media en Chile. En el estudio se analizaron 720 videos (autorizados voluntariamente) de clases de matemáticas de profesores que se sometieron a la evaluación docente en el año 2005.

Por otro lado, problemáticas asociadas a la argumentación y demostración han sido objeto de estudio por diferentes grupos de investigación (Duval 1995, Balacheff 1987) con perspectivas cognitivas, lingüísticas como también epistemológicas. La revista en línea "La letra de la prueba" y tesis doctorales muestran el interés en esta temática. Por otro lado, el congreso ICMI Study 19: Proof and Proving in Mathematics Education, fue totalmente consagrado al estudio de las demostración y las pruebas en Matemáticas. Se aprecia en este congreso una variedad de trabajos en cuanto a la enseñanza de la demostración en el curriculum escolar, y en desarrollar una cultura frente a la demostración en el aula en todos los niveles educativos.

Para dar las directrices a nuestra investigación, planteamos las siguientes preguntas: ¿Cuáles son los argumentos considerados válidos por el profesor?, ¿qué tipo de argumento es considerado como una demostración por el profesor?, ¿existe un tránsito en el trabajo geométrico del profesor por distintas formas de argumentar, pasando desde la manipulación con material concreto, el uso de otro tipo de instrumento geométrico, hasta el razonamiento matemático? A continuación presentaremos el marco teórico que sustenta nuestro estudio y la metodología usada para llevarlo a cabo.

Marco Teórico

El análisis realizado se sustenta en un marco en el cual se articulan dos teorías: La primera es la de "Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Geométrico" de C. Houdement y A. Kuzniak (1996, 1999, 2000, 2006), que se refiere a los paradigmas como una forma de desarrollar el conocimiento de la geometría en una comunidad escolar, caracterizando los problemas y ejemplos que se entregan a los estudiantes, reconociendo tres Geometrías: Geometría Natural GI, Geometría Axiomática Natural GII, y Geometría Axiomática Formal GIII. Kuzniak (2004, 2011) propone que ser geómetra es no confudir una evidencia nacida de la intuición con una información nacida de la experimentación, y el resultado de una experimentación con la conclusión de un razonamiento.

La segunda teoría que sustenta la investigación es la de Razonamiento de R. Duval (1995), donde el estudio se centró en cuáles son para el profesor argumentaciones válidas y cuáles considera demostración.

El concepto de paradigma geométrico se compone de tres ejes, inspirados por distintas corrientes; por un lado la de Kuhn, que apunta a una mirada filosófica, por otro lado la epistemológica, tanto de la matemática como de la organización de esta en el sistema escolar, y finalmente la de Gonseth, enfocada a lo cognitivo.

Estos tres ejes nos permitirán definir tres paradigmas geométricos que de igual modo co-existen en el sistema escolar. Centrándonos en el ambiente didáctico, la teoría propone que se reconozca la existencia de diversos paradigmas geométricos, y que los estudiantes transiten intencionadamente entre estos. (Kuzniak, 2004, 2011)

Paradigmas geométricos

a) Geometría natural (GI):

Permite la relación con el mundo real y sensible como fuente de validación. En esta Geometría los argumentos que apoyan una afirmación se basan en la experimentación y la deducción. Existe poca distinción entre el modelo y la realidad y se permiten todos los argumentos para justificar una afirmación o convencer a otros de lo contrario. Las afirmaciones son probadas mediante un ir y venir entre el modelo y la realidad; lo más importante aquí es desarrollar argumentos convincentes. Las pruebas pueden apoyarse en dibujos o en observaciones realizadas con el uso de instrumentos de medición, tales como regla, compás o transportador. Los dobleces o cortes de dibujos también son permitidos como pruebas visuales. El desarrollo de esta geometría fue motivado históricamente por problemas prácticos y la perspectiva de esta geometría es de carácter tecnológico.

b) Geometría axiomática natural (GII):

La Geometría II, cuyo arquetipo es la Geometría euclidiana clásica, es construida sobre un modelo cercano a la realidad. Una vez que los axiomas se establecen, las pruebas deben ser desarrolladas dentro del sistema de axiomas para ser válidas, pero el sistema de axiomas puede ser incompleto y parcial: el proceso axiomático es un trabajo en curso. En esta Geometría, objetos como figuras existen solo mediante su definición, incluso si esta definición está basada en algunas características de objetos verdaderos y existentes. Al igual que la Geometría I, tiene un vínculo estrecho con el mundo real, pero de diferente forma.

c) Geometría axiomática formal (GIII):

Para la Geometría III es central el sistema de axiomas; la desconexión con la realidad. El sistema de axiomas es completo e indiferente a cualquier uso posible en el mundo real. Está más preocupado de problemas lógicos y tiende a completar axiomas "intuitivos" sin ninguna "llamada" a evidencias perceptivas. Además, los axiomas son organizados en familias que estructuran propiedades geométricas: afín, euclidiano, descriptivo, etc.

Cada una de estas geometrías manifiesta diferentes formas de abordar el problema geométrico, lo que genera un ambiente o espacio de trabajo geométrico (ETG), que se define como un ambiente organizado por y para el geómetra mediante la articulación de tres componentes, a saber: el modelo geométrico, el espacio local y real y los artefactos, que son descritas a continuación:

- *Espacio local y real*: relacionado con la intuición y la abstracción que se hace del objeto.
- *Espacio referencial teórico:* conjunto de propiedades y definiciones articuladas por los axiomas, lo que determina el modelo geométrico.
- *Artefactos:* todo lo que el geómetra utilice para manipular los objetos.

Las componentes solas no son suficientes para comprender el espacio de trabajo ya que va a depender de la concepción que el utilizador le atribuya. Este espacio depende fuertemente de una dimensión cognitiva (plano cognitivo), estructurado en términos de tres procesos: *Visualización, prueba y construcción.*

Dependiendo de la relación que el geómetra tenga con la geometría y la función de su reflexión cuando se enfrenta a un problema, se distinguirán tres diferentes espacios de trabajo geométricos.

- *ETG de referencia:* entorno a la relación con el saber. Es considerado como el ETG de la comunidad de matemáticos. (Montoya, 2010)
- *ETG idóneo*: espacio definido en términos didácticos, el utilizador natural de este es el profesor. Este ETG se relaciona básicamente con la organización didáctica que hace la institución o bien el profesor a nivel micro. (Montoya, 2010).

ETG personal: espacio fruto de la reflexión entre lo aprendido previamente y la puesta en práctica de ello de acuerdo a sus conocimientos matemáticos y sus capacidades cognitivas. (Montoya, 2010)

Como ya se mencionó, articulamos la teoría de Houdement y Kuzniak con la de Razonamiento de Duval para enriquecer el estudio del plano cognitivo.

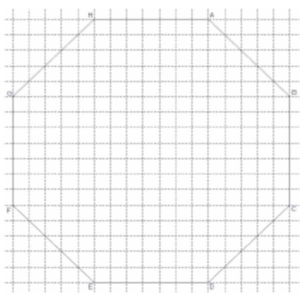
Duval reconoce dos tipos de razonamiento: inferencia explícita y actos de exploración. Las actividades de razonamiento de inferencia explícita, están ligadas al lenguaje; permiten redactar información, rechazar o aceptar una proposición, por otro lado se encuentran los actos de exploración los cuales no están ligados al lenguaje, son acciones, manipulaciones y operaciones concretas. Una de las formas de razonamientos ligadas al lenguaje es la argumentación, que tiene como característica esencial no tener restricciones de organización que les sean inherentes en toda práctica espontánea del discurso. La organización discursiva de una argumentación obedece a criterios de pertinencia y no a criterios de validez. Hay una ruptura cognitiva profunda entre los razonamientos argumentativos que tratan de convencer, y los razonamientos demostrativos que prueban; aquellos que tiene un funcionamiento lógico y un razonar válido, es decir existe deducción que no está ligada al valor epistémico del enunciado. (Duval, 1995)

Metodología

Para recopilar información, se elaboró una encuesta que fue aplicada el mes de mayo de 2009 a 48 profesores de Enseñanza Básica y Media que dictan o han dictado el curso de Matemática y que cursaban un Postítulo de Matemática del Programa de Educación Continua para el Magisterio, de la Universidad de Chile. Cada pregunta apuntaba a conocer: la relevancia que el profesor otorga al estudio de la unidad de Geometría frente a las otras unidades en Matemática y la importancia que le da el profesor a la demostración en Geometría a nivel escolar, qué tipos de argumentos el profesor considera válidos en preguntas genéricas; si permite el uso de instrumentos y de cuáles, si privilegia el uso de propiedades y teoremas. En la última pregunta el profesor fue enfrentado a una demostración, para conocer su propio trabajo geométrico. A continuación se presentará una de las preguntas planteadas en este cuestionario, donde se les pide a los profesores que evaluaran estas respuestas y señalaran cuáles de ellas las catalogaría como demostración.

En una clase se presentó el siguiente problema:

La figura se ha dibujado sobre un papel cuadriculado. El octógono ABCDEFGH, ¿es regular?



Las respuestas de tres estudiantes fueron las siguientes:

1. Julia
   Con el compás, se constata que GH = HA = AB = BC = CD = DE = EF = FG donde los lados del 8 lados del octógono tienen el mismo largo. Trazamos 4 diámetros de círculo: $\overline{HD}$, $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$. Sea O el punto de intersección de estos diámetros. Trazamos el círculo de centro 0 y radio OH y podemos ver que todos los puntos, H, A, B, C, D, E, F están sobre el círculo. Entonces el octógono está inscrito en el círculo.

2. Carlos
   Utiliza en un primer momento el teorema de Pitágoras y llega a la conclusión que $5\sqrt{2} \approx 7$ y entonces AB = CB
   Después borra esta demostración y propone una demostración que pasa por la construcción de las diagonales y el centro del circulo circunscrito

3. Silvia
   En la figura 2 el octógono es regular. En efecto, sus 8 vértices tienen el mismo ángulo de 135° y sus lados la misma medida 2,1 cm. Además, está inscrito en un círculo, donde el centro es la intersección de los segmentos que unen todos los vértices opuestos.

Extraído de Seminario de Graduación. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

A priori pensamos que el profesor no considerará distintos tipos de argumentaciones y que no haría la diferencia entre prueba y demostración. Además pensamos que el profesor seleccionará como demostración un argumento donde exista un buen uso de los instrumentos, como que si se tratase, que una buena construcción valida y conforma una demostración. También pensamos que podían existir casos en los que el docente solo considerará como argumento válido el encadenamiento de axiomas, propiedades y definiciones.

Resultados

Respecto a los resultados obtenidos, se pudo concluir que la mayoría de los profesores no hace la distinción entre una argumentación y una demostración, sino más bien para ellos un buen uso de los instrumentos de medición conformará una demostración. De los profesores encuestados, alrededor del 16% hace una diferencia entre usar solo regla y compás y utilizar el transportador; la primera la aceptan como demostración, mientras que rechazan la segunda como medio para demostrar. Por ejemplo, el profesor P17 señala sobre una producción donde solo se utiliza compás: *"es una demostración pues comprueba con Pitágoras y demuestra con construcciones",* o el profesor P10 afirma: *"es demostración, pues ha utilizado compás y regla no graduada".* Un grupo de aproximadamente el 22% de los profesores encuestados, califican los argumentos según el buen o mal uso de propiedades; validan el argumento, y lo consideran demostración, cuando se han verificado las hipótesis de las propiedades y teoremas y se concluye con ellos, sin importar el instrumento utilizado. Por ejemplo, el profesor P19 afirma que la producción de Julia *"es demostración porque está fundamentada en propiedades de un polígono regular",* mientras que de la producción de Carlos señala que *"no está claro cuál o cuáles son los fundamentos requeridos".* El profesor P18 afirma que la producción de Carlos no es una demostración pues *"faltan antecedentes para el uso de propiedades"*, mientras que para él, la producción de Julia sí es una demostración.

De los 48 profesores encuestados, solo el 18% aproximadamente, señala que las producciones que usan instrumentos geométricos no son demostraciones, más bien las califican como "comprobaciones" o "verificaciones". Por ejemplo, El profesor P25 afirma sobre la producción de Julia: *"no es una demostración, es una verificación porque llega a la conclusión luego de tomar medidas y verificar con los elementos que posee"*. Cabe aclarar que a los profesores solo se les pregunta si se trata o no de demostraciones, por lo tanto, explícitamente no sabemos si estas argumentaciones las consideran válida o no.

Solo 33 de los 48 profesores encuestados respondieron a la pregunta que apuntaba a su propio trabajo geométrico. Dentro de los resultados se observan frecuentemente dificultades en el reconocimiento de las hipótesis y la tesis; existen confusiones en "lo que se tiene" y "lo que se quiere demostrar". Aproximadamente el 20 % de los 33 profesores responden la pregunta por medio de la visualización, se observan respuestas como: "*las rectas son paralelas porque jamás se cortarán*", y alrededor del 15% profesores responden a la pregunta midiendo con instrumentos. Otro 15% aproximadamente, realiza una demostración, y lo hacen por reducción a lo absurdo. Además existe un grupo que intenta demostrar utilizando teoremas y propiedades pero fracasan, sin embargo esto nos dice que al parecer los docentes, en su propio trabajo geométrico, reconocen la diferencia entre un razonamiento "pragmático" y una demostración, pero la exigencia no es la misma para sus alumnos. Se podría decir entonces que la mayoría de los profesores trabaja en el paradigma GI, mientras que solo el 15% lo hace en el paradigma GII.

A nivel de las pruebas, la concepción de demostración no es única y es influenciado por la visualización y el empleo de artefactos. Los docentes conforman un espacio de trabajo geométrico donde distintos paradigmas cohabitan (conscientes o no de ello) lo que permitiría que sus propios estudiantes no logren un tránsito intencionado y profundidad del trabajo geométrico.

Conclusiones

Luego de realizado el trabajo podemos reflexionar acerca del aporte de clasificar los problemas planteados en geometría. La intención de transitar por los distintos paradigmas posiciona al trabajo geométrico en distintos ambientes; por un lado, reconoce la relación de la geometría tratada a nivel escolar con la realidad, promoviendo el uso de artefactos manipulables y formas de argumentar a través de la experiencia y permite además tratar a la geometría como parte de la matemática.

Referencias bibliográficas

Araya, R. (2008). *Saber Pedagógico y Conocimiento de la Disciplina Matemática en Profesores de Educación General Básica. Proyecto FONIDE.* Santiago: Departamento de Estudios y Desarrollo. Ministerio de Educación.

Balacheff, N. (1987), Processus de preuve et situations de validation, *Educational studies in mathematics, 18,* n°2,147-176.

Barra, M. (2010). *El rol que cumple la demostración en el aula, desde la mirada del profesor que imparte cursos de matemática, en las carreras de Ingeniería, Pedagogía en Matemática y Licenciatura en Matemática.* Tesis de maestría no publicada, Instituto de Matemática de la PUCV. Chile.

Dreyfus, T. (2000). La demostración como contenido a lo largo del curriculum. En Gorgorió, N., Deulofeu, A. y Bishop, A. (Coords.). *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional.* Barcelona: Graó, S. L., 125-133.

Duval, R. (1995). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Paris: PeterLang S.A. Editions scientifiques européennes.

Houdement C., Kuzniak A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives. 11*. 175-193. IREM de Strasbourg.

Houdement C., Kuzniak A. (1999). Géométrie et paradigmes géométriques. *Petit x. 51*. 5-21. Ed. IREM de Grenoble.

Houdement, C. Kuzniak A. (1996). Autours des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques, *Recherches en didactique des mathématique*, *16*(3), 289-321.

Kuzniak, A. (2004). *Paradigmes et espaces de travail géométriques. Note pourl'habilitation à diriger des recherches*. Paris: IREM Paris 7.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16,* 9-24.

Kuzniak, A. (2011). Understanding geometric work through its development and its transformations. *Laboratoire de Didactique André Revuz, University Paris-Diderot, Paris, France.*

MINEDUC (2003; 2007; 2009), *Presentación Sistema de Medición de la Calidad de la Educación*. Santiago: SIMCE por la Unidad de Currículo y Evaluación. Ministerio de Educación.

MINEDUC (2004). Resultados de los estudiantes chilenos de Octavo Básico en el TIMSS 2003, Santiago de Chile.

Menares, R. (2009). *Estudio del Trabajo Geométrico, Tipos de Argumentaciones y Demostración en Geometría: La Mirada al Profesor.* Tesis de Maestría no publicada, Instituto de Matemática de la PUCV. Chile.

Montoya E. (2010). *Etude de la transformation des connaissances géométriques dans la formation universitaire des professeurs de lycée de mathématiques au Chili*. Tesis de Doctorado no publicada, Université París Diderot-Paris 7.

OCDE. (2003). *Informe de las políticas educacionales en Chile*. Recuperado el 01 de marzo de 2009 de http://www.mineduc.cl/biblio/documento/Texto_Libro_OCDE1.pdf