

## UN MODELO DE ANÁLISIS DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO: EL CASO DE LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES SOBRE LA DERIVADA

Luis R. Pino-Fan, Juan D. Godino, Walter F. Castro, Vicenç Font

Universidad de Granada

Universidad de Antioquia

Universitat de Barcelona

lrpino@ugr.es, jgodino@ugr.es, wfcastro82@gmail.com, vicencfont@ono.com

España

Colombia

España

**Resumen.** En este trabajo se presenta una propuesta de caracterización del conocimiento didáctico-matemático, sobre la derivada, que un profesor de matemáticas necesita para efectuar eficientemente su práctica. Se ilustra el uso del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) para responder a cuestiones tales como: *¿Cómo o bajo qué criterios puede ser evaluado el Conocimiento Didáctico-Matemático? ¿Cómo se relacionan los distintos componentes del Conocimiento Didáctico-Matemático? ¿Cómo los formadores de profesores pueden ayudar a los futuros profesores a desarrollar los distintos componentes del Conocimiento Didáctico-Matemático?* En este trabajo, se responde, aunque de manera parcial, a dichas preguntas, mediante el planteamiento de criterios específicos que, por medio de un cuestionario, permiten explorar el conocimiento común, especializado y ampliado del contenido de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada.

**Palabras clave:** conocimiento del profesor, enfoque ontosemiótico, derivada

**Abstract.** In this paper it's presented a characterization for the didactic-mathematical knowledge (DMK) that a teacher of mathematics required to carry out effectively his/her practice. It is shown the use of the onto-semiotic approach (OSA) to mathematics knowledge and instruction to answer questions such as: How or under which criteria can the DMK be assessed? How are related, among them, the different features of the DMK? How the teachers' educators can help the prospective teachers to develop the DMK manifold features? This work respond, though partially, such questions, by advancing specific criteria which, through a questionnaire, have allowed to explore the prospective teachers' common, specialized and extended knowledge on the derivative.

**Key words:** teacher's knowledge, onto-semiotic approach, derivative

### Introducción

Una de las problemáticas que más ha interesado tanto a la comunidad de investigadores en Matemática Educativa como a las administraciones educativas, es determinar y caracterizar los componentes del complejo de conocimientos que un profesor de Matemáticas debería tener para llevar a cabo eficazmente su práctica y facilitar el aprendizaje de sus alumnos sobre tópicos específicos de Matemáticas.

Una de las propuestas sobre el conocimiento de los profesores que ha tenido mayor impacto, es la denominada "Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)", desarrollada por Ball y colaboradores (Hill, Ball & Schilling, 2008), la cual supone avances en la caracterización de los componentes del conocimiento que debe tener un profesor para enseñar matemáticas.

Sin embargo, a pesar de los avances que dicho modelo supone, aún quedan cuestiones fundamentales por responder, como por ejemplo, *¿Cómo determinar el conocimiento*

didáctico-matemático de los profesores con modelos que incluyen categorías demasiado globales? (Godino, 2009). Concretamente, ¿De qué forma o bajo qué criterios se puede evaluar o medir el MKT? ¿Cómo se puede ayudar a los profesores a adquirir o a desarrollar los distintos componentes del MKT? En palabras de Silverman y Thompson (2008): “Aunque el conocimiento matemático para la enseñanza ha comenzado a ganar atención como un concepto importante en la comunidad de investigación sobre formación de profesores, hay una comprensión limitada de lo que sea, cómo se puede reconocer, y cómo se puede desarrollar en la mente de los profesores” (p. 499).

En general, como señala Godino (2009), tanto el modelo MKT de Ball como los diversos modelos propuestos desde el campo de investigación en Educación Matemática, incluyen categorías demasiado globales y disjuntas, por lo que sería útil disponer de modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimiento que se ponen en juego en una enseñanza efectiva de las matemáticas. Además, lo anterior permitiría orientar el diseño de acciones formativas y la elaboración de instrumentos de evaluación de los conocimientos del profesor de matemáticas.

Así, en este trabajo se presenta una propuesta, con base en los desarrollos del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2007), que responde a la necesidad de encontrar y proporcionar pautas y criterios que permitan analizar y caracterizar el conocimiento didáctico-matemático requerido por los profesores para la enseñanza de temas específicos de matemáticas.

### Una propuesta de modelo del conocimiento didáctico-matemático

En este trabajo se explica las principales características del modelo de *Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM)* propuesto por Godino (2009) aplicándolo al caso del contenido específico de la noción de derivada. Dicho modelo para el CDM incluye seis facetas o dimensiones del conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza y el aprendizaje de temas específicos:

1) *Epistémica*: componentes del significado institucional implementado (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos) y su distribución, a lo largo del tiempo de enseñanza; 2) *Cognitiva*: desarrollo de los significados personales (aprendizajes); 3) *Afectiva*: los estados afectivos (actitudes, emociones, afectos, motivaciones) de cada alumno en relación con los objetos matemáticos y con el proceso de estudio seguido y su distribución temporal; 4) *Interaccional*: secuencia de interacciones entre el profesor y los estudiantes orientadas a la fijación y negociación de significados; 5) *Mediacional*: distribución de los recursos tecnológicos utilizados y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos; y 6) *Ecológica*: sistema de

relaciones con el entorno social, político, económico, entre otros, que soporta y condiciona el proceso de estudio.

Para cada una de estas facetas se contemplan, a su vez, cuatro niveles que permiten el análisis del CDM del profesor de acuerdo con el tipo de información requerida para la toma de decisiones instruccionales. Estos niveles son: 1) *Prácticas matemáticas y didácticas*, descripción de las acciones realizadas para resolver las tareas matemáticas propuestas para contextualizar los contenidos y promover el aprendizaje. También se describen las líneas generales de actuación del docente y discentes; 2) *Configuraciones de objetos y procesos* (matemáticos y didácticos), descripción de objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas. La finalidad de este nivel es describir la complejidad de los objetos y significados de las prácticas matemáticas y didácticas. Tal complejidad es un elemento explicativo tanto de los conflictos de significado como de la progresión del aprendizaje; 3) *Normas y metanormas*, identificación de la trama de reglas, hábitos, normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio, y que afectan cada faceta y sus interacciones; y 4) *Idoneidad didáctica*, identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio que incrementen la pertinencia y adecuación de los distintos componentes y factores condicionantes.

Las indagaciones se han realizado con profesores de secundaria en formación inicial, y por tanto se centran principalmente en la faceta epistémica; en el análisis de las respuestas que dieron los estudiantes a las tareas del cuestionario (que a continuación se describirá), se consideran aspectos de la faceta cognitiva. En este estudio no se considera la exploración de los niveles de análisis tres y cuatro.

### El cuestionario

El cuestionario, que hemos denominado *Cuestionario sobre la Faceta Epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático de la Derivada (Cuestionario FE-CDM-Derivada)*, consta de siete tareas y fue diseñado con base en el modelo para la evaluación y desarrollo del conocimiento didáctico-matemático propuesto por Godino (2009). Se centra, fundamentalmente, en la evaluación de aspectos parciales de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático (CDM) de futuros profesores de bachillerato sobre el objeto derivada. Dicha faceta incluye, en congruencia con el modelo de Ball y colaboradores (Ball, Lubienski & Mewborn, 2001; Hill, Ball & Schilling, 2008) tres tipos de conocimiento: *conocimiento común*, *conocimiento ampliado (o conocimiento en el horizonte matemático, en la terminología de Ball y cols.)* y *conocimiento especializado*.

En el proceso de construcción del cuestionario se consideraron tres criterios para la selección de las tareas que lo conforman. El primer criterio considera que las tareas deben proporcionar información sobre el grado de ajuste del significado personal de los futuros profesores respecto del significado global u holístico del objeto derivada (Pino-Fan, Godino y Font, 2011). Para lograrlo, se incluyeron ítems que activan distintos sentidos para el objeto derivada (pendiente de la recta tangente, razón instantánea de cambio y tasa instantánea de variación).

El segundo criterio fue que los ítems seleccionados respondan a los diferentes tipos de representaciones activadas en los tres subprocesos, que según Font (1999), intervienen en el cálculo de la función derivada: 1) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar  $f(x)$ ; 2) El paso de una representación de  $f(x)$  a una forma de representación de  $f'(x)$ ; y 3) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar  $f'(x)$ . En este sentido, las tareas incluidas en el cuestionario ponen en juego los diferentes tipos de representaciones que intervienen en estos tres subprocesos: descripción verbal, gráfica, simbólica y tabular; tanto para la función como para su derivada.

El tercer criterio considera la inclusión de tres tipos de tareas: (1) aquellas que requieren poner en juego el *conocimiento común del contenido* (resolver la tarea matemática propia de las matemáticas de bachillerato); (2) aquellas que requieren del *conocimiento especializado* (usar distintas representaciones, distintos significados parciales de un objeto matemático, resolver el problema mediante diversos procedimientos, dar diversas argumentaciones válidas, identificar los conocimientos puestos en juego durante la resolución de una tarea matemática, etc.); y (3) aquellas que requieren del *conocimiento ampliado* (generalizar tareas sobre conocimiento común y/o realizar conexiones con objetos matemáticos más avanzados en el currículo).

La descripción y análisis sobre los contenidos que evalúan y sobre los resultados obtenidos para cada una de las tareas incluidas en el cuestionario *FE-CDM-Derivada*, puede encontrarse en Pino-Fan, Godino, Font y Castro (2012).

### Algunos resultados

El cuestionario se aplicó a una muestra de 53 futuros profesores quienes estudiaban el sexto y octavo semestre de la licenciatura en enseñanza de la matemática en la Universidad Autónoma de Yucatán en México. Todos los estudiantes para profesor habían cursado cálculo diferencial, integral y otras asignaturas del área del análisis matemático. También habían cursado asignaturas sobre el cálculo y su didáctica.

Para el análisis de los datos obtenidos mediante la aplicación del cuestionario, se consideraron dos variables: *tipo de configuración cognitiva* (i.e. tipo de solución propuesta por los futuros

profesores) y *grado de corrección de las tareas* (i.e. correcta, parcialmente correcta e incorrecta). La técnica de análisis usada para la primera variable es el análisis semiótico (Godino, 2002), la cual permite describir de manera sistemática tanto la actividad matemática realizada por los futuros profesores al resolver problemas, como los objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, conceptos/ definiciones, proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos) que intervienen en las prácticas realizadas en la resolución de las tareas (Godino, Batanero y Font, 2007).

Respecto a la segunda variable, grado de corrección, se asignó las puntuaciones de 2, 1 ó 0, para las respuestas correctas, parcialmente correctas o incorrectas respectivamente. Así la puntuación máxima que podía obtener un estudiante era 26 puntos. Veinticuatro de los futuros profesores (45.3%), obtuvo una puntuación superior a los 13 puntos de los 26 puntos posibles en el cuestionario. De estos 24 estudiantes, solamente 9 (17%) respondieron correctamente más del 67% del cuestionario. Lo anterior evidencia que más de 50% de los estudiantes presentaron dificultades para resolver las tareas del cuestionario. La puntuación media obtenida por los 53 estudiantes fue de 12,3 puntos sobre un total de 26.

En cuanto a los resultados de nuestro análisis cualitativo (tipo de configuración cognitiva), no es posible desarrollar un ejemplo del análisis realizado con alguna de las tareas debido a las limitaciones de espacio. Sin embargo, en los trabajos de Pino-Fan, Godino, Castro y Font (2012), Pino-Fan, Godino, Font y Castro (2012), Pino-Fan, Godino y Font (2012) y Pino-Fan (2011), se presenta en detalle el análisis cuantitativo y se incluyen también ejemplos del análisis cualitativo que hemos realizado con cada una de las tareas.

Los resultados obtenidos de la implementación de cuestionario *FE-CDM-Derivada*, muestran que los futuros profesores tienen dificultades para resolver tareas relacionadas, no sólo con el conocimiento especializado y ampliado, sino también con el conocimiento común. Se evidenció que los futuros profesores se desempeñan mejor cuando resuelven tareas que involucran el uso de la derivada como pendiente de la recta tangente. Esto se confirma cuando resuelven tareas como la 5 (Pino-Fan, Godino, Font y Castro 2012, p. 300) en la que las respuestas muestran desconexiones entre los distintos significados de la derivada. Dicha tarea (Figura 1), tomada de Delos Santos (2006), a simple vista, podría aparentar ser uno de los ejercicios que comúnmente se encuentran en los Libros de Cálculo diferencial de nivel bachillerato, en los que basta aplicar algunos teoremas o proposiciones sobre derivadas para su resolución. Por esta razón, tanto el ítem a) como el b), de forma individual, evalúan aspectos del conocimiento común de los futuros profesores relacionados con la derivada en su acepción como pendiente de la recta tangente y razón instantánea de cambio. Sin embargo, el objetivo central de la tarea

es explorar, globalmente, la actividad matemática desarrollada por los futuros profesores, y si en dicha actividad los futuros profesores logran hacer conexiones o asociaciones entre los distintos significados de la derivada. En este sentido, la tarea 5 evalúa aspectos del conocimiento especializado, en tanto que indaga acerca de la asociación que los futuros profesores establecen entre los distintos significados de un objeto matemático concreto: la derivada.

**Tarea 5**

Dada la función  $y = x^3 - \frac{x^2}{2} - 2x + 3$

- a) Encuentra los puntos de la gráfica de la función para los que su tangente es horizontal.
- b) ¿En qué puntos la razón instantánea de cambio de  $y$  con respecto a  $x$  es cero?

Figura 1. Tarea 5 del Cuestionario *FE-CDM-Derivada*

Las insuficiencias manifestadas justifican la pertinencia de diseñar acciones formativas específicas para desarrollar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. El desarrollo podría lograrse, de un lado, mediante el diseño de procesos de enseñanza de la derivada, distintos a los habituales, que se focalicen en el significado global de la derivada (Pino-Fan, Godino y Font, 2011). Por otro lado, debe tenerse en cuenta, en el diseño de dichas acciones formativas, los dos niveles del conocimiento especializado, tanto en su nivel de aplicación (uso de diversos elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades/proposiciones, procedimientos y argumentos), así como en el de identificación y uso de distintos significados parciales de la derivada, para la resolución de una tarea.

La identificación y uso de los distintos significados refiere a desarrollo de competencias para la identificación de objetos matemáticos, sus significados y vínculos entre ellos, lo que permitiría una futura gestión idónea de los aprendizajes de sus estudiantes.

Los dos niveles propuestos para el conocimiento especializado están íntimamente vinculados, en el modelo CDM, con las otras facetas del conocimiento de los profesores. Por un lado, el nivel uno, de aplicación, se relaciona con las facetas interaccional y mediacional (Knowledge of content and teaching), puesto que un buen dominio de este nivel del conocimiento especializado sobre un tópico específico, como la derivada, proporciona al profesor los medios para un desempeño idóneo de su práctica futura de enseñanza. El nivel dos, de identificación, está vinculado con las facetas cognitiva y afectiva puesto que faculta al profesor para identificar de manera previa, durante y posterior a la implementación de una actividad de enseñanza, conocimientos matemáticos involucrados y significados de los objetos matemáticos, así como

conflictos y errores que se pueden presentar a sus futuros alumnos. Esta identificación favorece la gestión eficaz del aprendizaje de sus futuros alumnos.

### Conclusiones y cuestiones abiertas

El tipo de conocimiento didáctico-matemático se encuentra estrechamente vinculado con la variable *tipo de configuración cognitiva* asociada a las respuestas de los estudiantes, puesto que la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático depende de la presencia o ausencia de los objetos matemáticos, sus significados y relaciones entre ellos. Estas configuraciones cognitivas son de naturaleza didáctico-matemática debido a que las tareas presentadas tienen dicho carácter, y por tanto los sujetos deben movilizar conocimientos matemáticos y didácticos. El análisis de tales configuraciones, por parte del formador, puede ayudar a definir acciones formativas para que los maestros en formación se “den cuenta” de la profunda relación entre el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico.

El modelo para el conocimiento didáctico-matemático ofrece la herramienta “*configuración de objetos matemáticos primarios*” que favorece el análisis y la categorización de algunas características de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático, manifestadas por los maestros en formación.

Este trabajo se ha centrado en el conocimiento especializado, en estrategias para analizarlo y en sugerencias para potenciarlo. Cuestiones sobre la evaluación y el desarrollo de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático, son factibles de responder con nuestra propuesta. Además se plantea una posible manera de vincular algunos de los componentes del MKT.

Finalmente, el modelo CDM puede aplicarse a la enseñanza de diversos temas matemáticos, sin embargo cada tema matemático conlleva especificidades vinculadas a la faceta epistémica, que se desconocen a priori pero que surgen durante la implementación de las actividades de enseñanza y aprendizaje. El uso del modelo en otros temas matemáticos es un tema de investigación abierto.

**Agradecimientos.** Este trabajo ha sido desarrollado en el marco de los proyectos de investigación sobre formación de profesores EDU2012-32644 (Universidad de Barcelona) y EDU2012-31869 (Universidad de Granada) y de una beca de investigación doctoral del Ministerio de Asuntos Exteriores y de Cooperación, Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo (MAEC-AECID).

## Referencias bibliográficas

- Ball, D. L., Lubienski, S. T., y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.
- Delos Santos, A. (2006). *An investigation of students' understanding and representation of derivative in a graphic calculator-mediated teaching and learning environment*. Tesis Doctoral no publicada, University of Auckland, New Zealand.
- Font, V. (1999). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a la derivada*. Tesis doctoral no publicada, Universitat de Barcelona.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2/3), 237-284.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1), 127-135.
- Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.
- Pino-Fan, L. (2011). *Conocimiento didáctico-matemático de los profesores sobre la derivada: clarificando los significados de la derivada desde la perspectiva de la enseñanza y el aprendizaje*. Alemania: Editorial Académica Española.
- Pino-Fan, L.R., Godino, J.D., Castro, W.F., y Font, V. (2012). Conocimiento didáctico-matemático de profesores en formación: explorando el conocimiento especializado sobre la derivada. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 427 - 434). Jaén: SEIEM.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., y Font, V. (2012). Clarificando criterios para evaluar el conocimiento especializado de futuros profesores sobre la derivada. En Marín Rodríguez, M., y Climent Rodríguez, N. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 181-192). Ciudad Real: SEIEM.
- Pino-Fan, L., Godino, J.D., y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1), 141-178.

Pino-Fan, L., Godino, J.D., Font, V. y Castro, W.F. (2012). Key Epistemic Features of Mathematical Knowledge for Teaching the Derivative. En Tso, T.Y. (Ed). *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 297-304). Taipei, Taiwan: PME.

Silverman, J., y Thompson, P. W. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(6), 499-511.