

## EL USO DE MÚLTIPLES REPRESENTACIONES Y LA INTERPRETACIÓN GLOBAL

Alma Alicia Benítez Pérez, Martha Leticia García Rodríguez  
CECyT 11 Wilfrido Massieu- IPN  
ESIME-IPN  
abenitez@ipn.mx, martha.garcia@gmail.com

México

**Resumen.** El presente trabajo plantea la posibilidad de impulsar la Interpretación Global, en diversas representaciones para desarrollar tratamientos que permitan fomentar la exploración de sus contenidos. La experiencia se llevó a cabo con alumnos que cursaban la asignatura de álgebra del nivel medio superior, cuyo objetivo fue identificar las conjeturas y procesos cognitivos que el alumno desarrolla cuando se ha tenido la vivencia de explorar tratamientos cualitativos y cuantitativos en múltiples representaciones. Los resultados muestran la identificación de patrones cuando se plantean situaciones familiares en el alumno, así como el anclaje del contexto para algunos estudiantes y la descontextualización para otros.

**Palabras clave:** múltiples representaciones, interpretación global, tratamiento cualitativo y cuantitativo

**Abstract.** This work focuses on the possibility of promoting and strengthening the Global Interpretation in various representations to develop treatments that allow exploration of their content. The experience was implemented with students of high school in the course of algebra, whose objective was to identify the conjectures and cognitive processes when the students have had the experience of exploring qualitative and quantitative treatments in multiple representations. In terms of discovery there have been identified patterns in family situations for the student, as well as the anchorage in the context and the des-contextualization for others.

**Key words:** representations multiple, global interpretation, qualitative and quantitative treatment

### Introducción

Los programas de estudio del nivel medio superior, mencionan la necesidad de explorar múltiples representaciones, con la finalidad de que el alumno desarrolle estrategias que le permitan enfrentar situaciones no rutinarias, para ello, es necesario explorar diversas representaciones empleando procedimientos que permitan evidenciar su contenido. La Interpretación Global es una vía que beneficia la exploración de las representaciones, desde una visión global, empleando tratamientos cualitativos en las representaciones gráfica, numérica y algebraica, para establecer conexiones entre ellas y la posibilidad de su articulación. Esta propuesta se implementó a un grupo del nivel medio superior que cursaban la asignatura de álgebra (15 a 16 años), en actividades que tomaron en cuenta la vía de interpretación global para polinomios cuadrático y cúbico, permitiendo analizar las estrategias que el alumno emplea en situaciones que demandan la construcción de la expresión algebraica de una gráfica (recta, parábola y cúbica). El presente trabajo expone la posibilidad de explorar múltiples representaciones a través de tratamientos cualitativo principalmente y tratamientos

cuantitativos, que permitan en el alumno fortalecer las funciones cognitivas de tratamiento y conversión.

### Marco teórico

Desde la perspectiva que expone Duval (2000), la visualización “Es producir una representación que, en ausencia de toda percepción visual de los objetos representados, permita observarlos como si estuviera realmente delante de los ojos”, se considera entonces que la visualización se basa sobre la producción de una representación semiótica, donde se identifique de manera directa lo que está representado, de tal manera “ver” en matemáticas implica la identificación de las relaciones o la organización de relaciones entre las unidades representacionales que constituyen a una representación semiótica.

Para reconocer las unidades representacionales, es necesaria la exploración detallada que permita producir construcciones de acuerdo con las propiedades o reglas de la representación. Las representaciones gráfica y numérica son un tipo de visualización en matemáticas, particularmente necesarias en la investigación a realizar. Ambas representaciones poseen organizaciones visuales bi-dimensionales; el cuadrículado del plano en líneas para la gráfica y la distribución en columnas para la tabla. La representación gráfica posee sus propias leyes de organización, y cuyo funcionamiento se basa en la relación de dos figuras; figura fondo referida al plano cartesiano y figura-forma al trazo. Duval (1988) menciona la importancia de realizar el tratamiento denominado Interpretación Global, el cual permita identificar los distintos valores visuales de la forma y la orientación de la gráfica, para establecer relaciones con los valores categóricos de la expresión algebraica. Este tratamiento es esencialmente cualitativo, el cual fortalece la aprehensión global del contenido de la representación gráfica. Además Duval (2000) considera que las condiciones cognitivas internas de un sujeto para lograr la aprehensión del concepto, se enfocan en el desarrollo y fortalecimiento de “La Arquitectura Cognitiva”, a través de una organización sólida de diferentes sistemas semióticos. Ello implica la necesidad de considerar la actividad cognitiva de Conversión, una tarea fundamental en el proceso para lograr la aprehensión del objeto, y por consecuencia el fortalecimiento de la Arquitectura Cognitiva.

Por su parte Parnafes & DiSessa (2004) indican que la reflexión de los estudiantes está ligada a la representación y al contexto que emplean, además las autoras consideran que cada representación resalta un aspecto del concepto y que cuando los estudiantes emplean varias representaciones desarrollan un entendimiento más flexible del concepto. Parnafes & DiSessa se basaron en la noción del efecto representacional para examinar la idea de que

particularmente diferentes representaciones apoyan y fortalecen diferentes procesos cognitiva, en particular, los distintos tipos de razonamiento.

Particularmente, Benítez (2009) menciona la relevancia que adquieren las representaciones en la resolución de eventos contextualizados, ya que facilita al alumno dar sentido a la información que le brinda el evento contextualizado y opera hasta dar respuesta a la exigencia solicitada, además considera que la primera representación con la cual se inicia el proceso de solución es decisiva, ya que se presenta entre la percepción del problema y el proceso de resolución, mencionado que la Interpretación Global permite analizar el contenido de las representaciones de polinomios (parábola y cúbica) para establecer las modificaciones en la expresión algebraica e identificar su correspondiente variable visual en la gráfica.

La experiencia que aquí se presenta consideró un acercamiento con las distintas áreas del saber para incorporar al trabajo el concepto de función, con la finalidad de que el estudiante analice e interprete el fenómeno desde distintas perspectivas, permitiendo así el uso de diversas representaciones (numérica, algebraica, gráfica, dibujos, lenguaje natural), para llevar cabo tratamientos que beneficien la identificación del contenido, permitiendo su interpretación y en consecuencia la conversión a otra representación (Duval, 2002). Ello implica la necesidad de considerar la actividad cognitiva de Conversión, una tarea fundamental en el proceso para lograr la aprehensión del objeto, y por consecuencia el fortalecimiento de la Arquitectura Cognitiva, lo cual contribuye a crear y desarrollar habilidades en el estudiante para enfrentar nuevos retos en su formación.

### Exploración y Análisis de las Actividades Cognitivas

La Interpretación Global (Duval, 1988), permite explorar las representaciones a través de las actividades cognitivas de tratamiento y conversión, para ello se emplearon las representaciones; gráfica, numérica, textual y algebraica en polinomios (Figura 1).

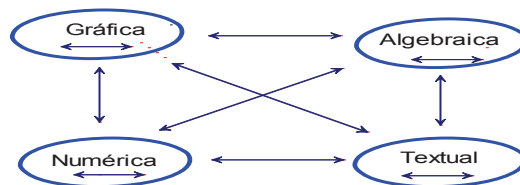


Figura 1. Empleo de Múltiples Representaciones

El diagrama muestra el tratamiento que se realizó en cada representación (flechas bidireccionales), así como la conversión entre los registros de representación (flechas bidireccionales), con la finalidad de establecer sus conexiones para su articulación.

Por lo que la Interpretación Global permite llevar a cabo las funciones cognitivas a través de la modificación de la expresión algebraica para identificar sus correspondientes variables visuales en la gráfica, lo que contribuyó asociar una variable visual con una variable categórica en la expresión algebraica, favoreciendo la articulación entre dichas variables.

El cuadro I muestra el tratamiento y la conversión del polinomio de segundo grado empleando tratamientos cualitativos.

VARIABLES VISUALES	VALORES VISUALES	VALORES CATEGÓRICOS
Concavidad del Trazo	El trazo abre hacia arriba El trazo abre hacia abajo	$a > 0$ $a < 0$
Posición del trazo respecto a su eje de simetría	El trazo se acerca a su eje de simetría El trazo se aleja a su eje de simetría	$a > 1$ $a < 1$
Desplazamiento del trazo que cruza por el origen	El trazo se desplaza a la izquierda del eje vertical El trazo se desplaza a la izquierda del eje vertical	$b > 0$ $b < 0$
Posición del trazo respecto a la recta corresponde al término lineal, teniendo como condición el trazo y la recta que cruza el origen	El desplazamiento del trazo depende de la recta que pasa por el origen y tiene una partición simétrica El desplazamiento del trazo depende de la recta que pasa por el origen y forma con el eje horizontal un ángulo menor que el formado con el eje vertical El desplazamiento del trazo depende de la recta que pasa por el origen y forma con el eje horizontal un ángulo mayor que el formado con el vertical	$b = 1$ $0 < b < 1$ $b > 1$
Posición del trazo respecto al origen del eje vertical	El trazo corta el eje vertical por arriba del origen El trazo corta el eje vertical por abajo del origen El trazo corta el eje vertical por el origen	+ constante -constante

Cuadro I Interpretación Global de las propiedades de la Parábola

La identificación de las variables visuales y categóricas, permiten mostrar el comportamiento del polinomio para identificar las características visuales e interpretar la información desde la perspectiva global.

### Metodología

El objetivo del presente estudio fue documentar las funciones cognitivas que el estudiante desarrolla cuando ha explorado al menos dos representaciones. Esta investigación, se ubica en un paradigma de investigación cualitativo. Las ideas desarrolladas en los referentes teóricos, sirvieron como ejes para diseñar y aplicar actividades, en las que los estudiantes identificaron, interpretaron y analizaron el contenido de múltiples representaciones en Contextos Simulados, empleando la Interpretación Global como estrategia principal.

La observación del estudio se llevó a cabo durante un semestre escolar (18 semanas) para detectar las cualidades del fenómeno de estudios. La investigación se desarrollo en el CECyT II de IPN, cabe menciona que en este centro de estudio, se estaba implementando la metodología del “Proyecto Aula” de manera interdisciplinaria.

Las observaciones en el estudio se desarrollaron en dos niveles: global y específico. El nivel global tuvo su mayor interés en la identificación de los aspectos más notorios de proceso de interacción que desarrollaron los estudiantes en los diferentes contextos. A nivel específico la observación se dirigió a examinar con mayor detalle los procesos que lleva a cabo cuando se les solicitaba enfrentar una situación simulada para emplear las funciones cognitivas e identificar la contenido en las diferentes representaciones.

La triangulación de la información se llevó a cabo desde distintas perspectivas para fortalecer la credibilidad en los resultados e interpretación del estudio. Lo anterior se llevó a cabo a través de identificar los hallazgos que se encontraron en la fuente A (reporte escrito individuales), fuente B (discusión grupal), fuente C (reportes escrito de equipos, fuente D (tareas extraclase) y también puedo corroborarse con la fuente E (observaciones en clase), permitiendo comparar información proveniente de diferentes escenarios.

### Participantes

La experiencia educativa se llevó a cabo con un grupo de 45 alumnos, del nivel medio superior (C.E.C.yT. II) que cursaban la asignatura de álgebra, y cuya duración fue de 18 semanas. Las edades de los alumnos fluctuaban entre 15-16 años. La escuela donde se desarrollo la investigación, se trabaja a través de la metodología basada en proyectos (“Proyecto de Aula”), cuyo objetivo consistió en la búsqueda de solucionar problemas reales. En el salón de clase se diseñaron tareas que impulsaron las funciones cognitivas en diferentes representaciones empleando problemas, para lo cual se organizo al grupo en equipos de 4 a 5 integrantes, formando un total de 6 equipos por grupo. Se entregó al inicio de la sesión una actividad diseñada por el profesor, para trabajarla de manera colectiva, mencionando que un integrante del equipo sería el encargado de recolectar toda la información que se obtuviera durante el proceso de solución, mientras el profesor participaba con los equipos como espectador y para proporcionar información.

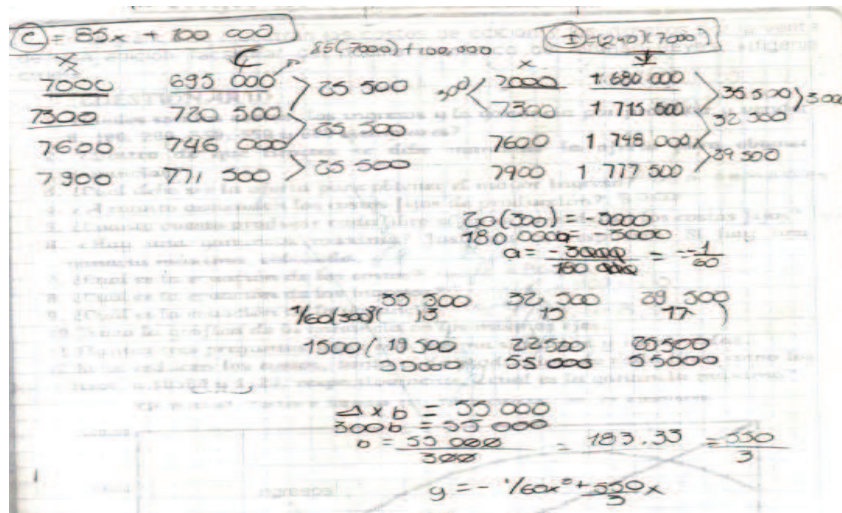
### Análisis de datos

Los elementos que guían el análisis son:

- ❖ Identificar las funciones cognitivas (tratamiento y conversión) empleado para explorar el contenido de las representaciones en contextos simulados a través de la Interpretación Global.
- ❖ Identificar los procesos cognitivos que el alumno desarrolla cuando se ha explorado la Interpretación Global.

El análisis de las videograbaciones, el trabajo escrito por los equipos, así como las notas del entrevistador, muestran las diversas estrategias que los equipos emplearon para explorar las representaciones (numérica, gráfica, textual y algebraica), mencionando las siguientes:

Los equipos interpretaron el siguiente problema: Una compañía de discos estima que pondrá vender siete mil álbumes de una versión a \$240 cada álbum. Por cada reducción de \$5 en el precio por álbum, calcula que venderá 300 álbumes más. A la compañía cada álbum le cuesta \$85 y sus costos fijos son de \$ 100,000 en el período de producción. Determina el número de álbumes que darán a la compañía la máxima ganancia?. A partir de su lectura, construyeron la tabla de valores efectuando el tratamiento de la información para determinar los costos y el ingreso de los álbumes. El equipo determina las variables “x” y “y” sin mencionar su significado, obteniendo diversos valores para cada una de las variables, el tratamiento de las diferencias finitas se aplicó en cada una de las variables, permitiendo determinar el comportamiento lineal para los costos, ya que el comportamiento de la primera diferencia es constante, mientras que el comportamiento para el ingreso es parabólico dado que la segunda diferencia es constante. Respecto al tratamiento desarrollado, los alumnos construyen el modelo matemático para los costos  $C(x) = 85x + 100000$  explorando el comportamiento de las diferencias finitas, mientras que la construcción de la expresión algebraica para la inversión  $(y = ax^2 + bx + c)$  los estudiantes determinan el valor del parámetro “a” empleando la expresión  $2a(\Delta x)^2 = (\Delta(\Delta y))$  para determinar el valor del término cuadrático, mientras que el valor numérico del coeficiente “b” emplea la secuencia de números de la primera serie de sustracciones, que se identifican en la tabla de valores para el polinomio de segundo grado  $(\Delta x)(b) = 55000$ , el equipo concluye el modelo matemático  $y = -\frac{1}{60}x^2 + \frac{550}{3}x$  e ignoran el término independiente. La siguiente figura muestra el desarrollo expuesto por el equipo.



Modelo Matemático desarrollado por los estudiantes

Integrando los aspectos conceptuales, el equipo reconoce y da significado a los conceptos en la resolución de problemas, ya que determina las ecuaciones algebraicas que modelan la situación, empleando la Interpretación Global a través de tratamientos cuantitativos en la representación numérica y algebraica, ya que de manera coordinada establece las conexiones entre ambas representaciones para construir el modelo dando significado a las variables que intervienen en el fenómeno.

Otro aspecto relevante fue que el equipo empleó durante su desarrollo, fue el estudio de la escala, el equipo identificó la escala cuando exploró el contenido de la representación numérica, a través de las diferencias. Esto se expresó cuando utilizaron la expresión

$$2a(\Delta x)^2 = \Delta(\Delta y)$$

↓

Graduación eje "x"

Ya que identificaron las diferencias en la tabla numérica obteniendo el siguiente resultado;

$$2a(300) = -3000$$

Lo que permitió identificar el valor del parámetro  $a = -1/60$ , así como identificar el valor del parámetro b, también afectado por la escala.

$$\Delta x b = \Delta(\Delta y)$$

↓

Graduación eje x

$$300 b = 55000$$



El equipo empleó la interpretación global básicamente en la representación numérica, permitiendo determinar los valores numéricos del término cuadrático y lineal, empleando tratamientos cuantitativos.

### Discusión

Las funciones cognitivas que los estudiantes desarrollaron durante la experiencia se enfocaron en la exploración de las representaciones; texto-numérica-algebraica y texto-numérica-gráfica, para interpretar el contenido en el contexto. Los primeros acercamientos se desarrollaron a través de la construcción de tablas de valores, para identificar las interpretaciones que realizan los alumnos del contexto, evidenciando las variables y constantes, sin embargo, las variables identificadas están en un contexto matemático y no acorde con el evento expuesto. Mientras que para otros equipos la identificación de las variables que expone el contexto y desarrolla el tratamiento de la información en el contexto, lo cual muestra la influencia que adquiere la primera representación por ser la que inicia el proceso de resolución del problema (Benítez, 2009). El tratamiento que se aplicó en las representaciones fue cuantitativo y/o cualitativo, la cual se interpretó de manera puntual y/o global de acuerdo con las características particulares del contenido.

Los equipos fueron consistentes con las estrategias empleadas, por ejemplo, los equipos basaron su trabajo explorando la representación numérica con tratamientos cualitativos, cuya información se interpretó de manera global, identificando secuencias numéricas que les permitió identificar la variación de los valores obtenidos para determinar el valor de los coeficientes que constituyen la expresión algebraica, lo que condujo al establecimiento de relaciones con la representación algebraica para construir la expresión algebraica que representa el comportamiento de las parejas ordenadas en la tabla numérica. Mientras que para otros la identificación de las variables en términos de  $x$  y  $y$ , para exponer veinte a treinta datos, que representan el comportamiento del costo como del ingreso, mismos que se colocaron en la representación gráfica para mostrar el comportamiento lineal y parabólico, respectivamente, no obstante los datos no fueron explorados para determinar un tratamiento que permitiera la construcción de una expresión algebraica que se ajustara a la situación planteada.

La Interpretación Global como lo menciona Duval (1988) y Benítez (2009), benefició la identificación de la información a través de los tratamientos empleados en las representaciones, contribuyendo a: determinar el tipo de curva, analizar los términos que integran la expresión algebraica, explorar la escala para analizar su influencia en el trazo y tabla numérica, establecer continuamente relaciones con otras representaciones, validar resultados,



identificar el valor numérico de los coeficientes lineal y cuadrático para los polinomios de grado uno y dos respectivamente, plantear conjeturas, proponer conjeturas que benefician el desarrollo de la situación y la justificación de afirmaciones.

### Conclusiones

Durante el diseño de las actividades es fundamental favorecer el pensamiento flexible, pues fue evidente, la tendencia a quedar sujetos a los contextos, en los cuales se presentaban las ideas matemáticas o debido a la familiaridad de los tratamientos en la exploración de las representaciones que los alumnos descontextualizan sin considerar el contexto.

Las representaciones empleadas fueron; textual, gráfica, numérica y algebraica, cuyo tratamiento fue de tipo cuantitativo y cualitativo a través de la Interpretación Global.

El desarrollo y fortalecimiento de las funciones cognitivas benefició en el estudiante la posibilidad llevar a cabo tratamientos (cualitativos y/o cuantitativo) para identificar su contenido y establecer conexiones entre las representaciones.

Las funciones cognitivas identificados durante la experiencia evidenciaron el empleo de al menos dos representaciones y tratamientos cualitativos como cuantitativos, en algunos casos se lograron establecer conexiones y en otros los estudiantes, se vieron limitados por los tratamientos aplicados.

Los alumnos muestran patrones cuando se exploran las actividades, lo cual evidencia la influencia que presenta la familiaridad de los tratamientos.

Agradecimiento: A la Secretaria Investigación y Posgrado (SIP) del Instituto Politécnico Nacional, por el apoyo a las investigaciones con número de registro 20110397 y 20111060.

### Referencias bibliográficas

- Benítez, A. (2009). Estudio de la Primera Representación Gráfica de las Ecuaciones Algebraicas en Contexto. *Innovación Educativa* 9 (1), 41-50
- Duval, R. (1988). "Graphiques et equations: l'Articulation de deux registres". *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives* I. IREM Strasbourg.
- Duval, R. (2000). *Basic Issues for Research in Mathematics Education*, in Proceedings of the 24<sup>nd</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. I, 55-69.

- Duval R. (2002). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt (Ed.), *Representations and mathematics visualization*. (pp. 311-335). North American Chapter of PME: México: Cinvestav-IPN
- Parnafes, O. & diSessa, A. A. (2004). Relations between patterns of reasoning and computational representations. *International Journal of Computers for the Mathematics Learning*: 9(3), 251-280.