

LA VISUALIZACIÓN Y EL APRENDIZAJE COLABORATIVO EN LA ENSEÑANZA DE FRACCIONES

Marco A. Pérez Carrasco, Elvira G. Rincón Flores, Ángeles Domínguez

Tecnológico de Monterrey

México

marcopc_23@hotmail.com, elvira.rincon@itesm.mx, angeles.dominguez@itesm.mx

Resumen. La presente investigación se realizó en una escuela primaria pública del sur de México y tuvo como objetivo valorar las estrategias de recuperación de los conocimientos previos, la visualización y el trabajo colaborativo en la construcción del concepto fracciones. El enfoque metodológico fue el cualitativo en el que participaron 18 alumnos de grupo del sexto grado y su maestra. Se encontró que las estrategias de recuperación de los conocimientos previos, la visualización y el trabajo colaborativo favorecieron a que los alumnos construyeran el concepto de fracciones desde una perspectiva amplia. Esto es, los alumnos identificaron a los números racionales en situaciones tales como: relación parte-todo de un entero, cociente, medida, y proporción.

Palabras clave: aprendizaje colaborativo, números racionales, visualización

Abstract. This research was conducted in a public elementary school in southern Mexico. The study aimed to assess the influence of the recovery strategies of previous knowledge, visualization and cooperative learning in building the concept of fractions. The methodological approach was qualitative in which participated 18 six-grade students and their teacher. Results indicate that the combination of strategies (recovery of previous knowledge, visualization, and collaborative learning) favor a wider view of the concept of fractions. That is, the students were able to recognize rational numbers in situations that involve, for example, as part-whole relationship of a whole, as a ratio, as measure and as a proportion.

Key words: cooperative learning, rational numbers, visualization

Introducción

Desde una línea constructivista, Cardoso y Cerecedo (2008) justifican la importancia de las matemáticas señalando que su estudio no lleva como objetivo único que el alumno resuelva problemas matemáticos, sino que a partir de su enfoque problematizador ellos encuentren un significado. Dentro de los contenidos conceptuales de dicha ciencia, se ha atribuido especial complejidad a la enseñanza-aprendizaje de las fracciones. La enseñanza, el aprendizaje y la construcción del concepto fracciones en los alumnos de educación primaria se ha investigado en sus diversas concepciones (Carpenter, Fennema y Romberg, 1992; Lamon, 1993; León, 1998). León (1998) y Perera y Valdemoros (2007) afirman que la enseñanza de las fracciones es una de las tareas más difíciles para los maestros de educación primaria ya que su estudio involucra el empleo de un conjunto de signos y significados, que muchas veces no son interpretados de forma correcta por los alumnos. Esto ha dado como resultado un fracaso educativo, tanto a nivel nacional como internacional, al abordar dicho concepto (Fandiño, 2007).

El hecho de aprender matemáticas, y en particular los números racionales y sus operaciones, durante mucho tiempo se vio reducido a la memorización de términos, la mecanización de procedimientos y a la resolución (y aprobación) de exámenes escritos. El niño aprendía mediante los principios de la educación tradicional (Freudenthal, 1983) en forma descontextualizada de su realidad, mediante un carácter predominantemente formalista con énfasis en el lenguaje simbólico y la estructura lógica (Cubillo y Ortega, 2003), originando en los estudiantes una pobreza conceptual (León, 1998). El concepto de fracción involucra: a) a la división de un todo en partes iguales y la relación de cada una de éstas con el todo, b) situaciones de reparto, comparación, medición y representación gráfica, y c) escritura y lectura de cantidades fraccionarias (León, 1998). Ante la problemática de la enseñanza-aprendizaje de los números racionales, este estudio se centra en rescatar los conocimientos previos de los estudiantes, valorar el impacto de la visualización y del aprendizaje colaborativo.

Marco teórico

Los conocimientos previos (Ausubel, 1968; Ausubel, Novak y Hanesian, 1978; Novak, 1998), empíricos (Hume, 1984; Locke, 1980) o preconcepciones (Gil y Guzmán, 1993) son el resultado de la interacción entre el sujeto y la realidad. Redish (1994) argumenta que todos los alumnos acuden a la escuela después de haber construido experiencias con el medio y haber organizado éstas en estructuras mentales. Gil y Guzmán (1993) enuncian que los conocimientos previos constituyen la cristalización de un conocimiento precientífico, es decir, son el punto de partida para la adquisición de saberes más complejos. Así mismo, a pesar de no ser iguales en todos los alumnos, son los determinantes del desarrollo y de la comprensión cognitiva de los sujetos (Ausubel, 1968).

La visualización, como estrategia, consiste en presentar materiales que permitan apreciar el desarrollo y/o evolución de un fenómeno u objeto de estudio con el propósito de formar una imagen mental de lo que se pretende enseñar y aprender. Es así que un fenómeno u objeto de conocimiento que pueda ser manipulado y observado tendrá mejores resultados en el aprendizaje de los alumnos. Duval (1999) y Hitt (2002) coinciden en que la adquisición de un concepto se alcanza cuando se es capaz de relacionar las diferentes representaciones de dicho objeto matemático, "la articulación entre las representaciones pueden seguir caminos que dependen de cómo el sujeto recuerda su conocimiento previo" (Hitt, 2002, p. 250). Macías (2007) argumenta que la visualización no es un fin en sí mismo, sino un medio para conseguir entendimiento ya que permite establecer el "puente" de comprensión entre el discurso del profesor y los recursos y/o materiales que el docente emplea. El desarrollo de la visualización en la construcción del concepto fracciones consideró el empleo de materiales de tres tipos:

concreto (hojas de colores, galletas, fichas de colores, etc.), gráfico (fotografías, esquemas, dibujos de fracciones) y tecnológico (presentaciones en power point, animaciones, videos y software educativo).

En este estudio, el aprendizaje colaborativo se fundamenta en las ideas de Johnson y Johnson (1991), Slavin (1990) y Ormrod (2004), entendiéndolo como la realización de trabajos por medio de grupos con la finalidad de construir el conocimiento entre todos los integrantes del mismo mediante el apoyo mutuo. De acuerdo con Díaz-Barriga y Hernández (2002) el aprendizaje colaborativo es un proceso de negociación de significados y de establecimiento de contextos mentales compartidos. De ahí, la importancia de la interdependencia positiva y la responsabilidad individual.

Otro elemento importante que se encuentra presente en la construcción del concepto fracciones es la comprensión matemática. Sabiendo que las matemáticas están caracterizadas por un lenguaje de signos, símbolos y significantes, es posible señalar que el alumno desarrolla una comprensión matemática en la medida que transforma sus conocimientos empíricos en conocimientos matemáticos a través de la dialectización de ambos. Para ello, el lenguaje es crucial, ya que a través de la expresión de las ideas de los estudiantes es posible reconocer sus conocimientos, preconcepciones y dificultades de aprendizaje. La reorientación y retroalimentación de esas preconcepciones hará posible el surgimiento de una serie de competencias matemáticas (Cardoso y Cerecedo, 2008) propias del pensamiento científico.

Metodología

La investigación es de enfoque cualitativo en el que participaron 18 alumnos de sexto de primaria de una escuela pública al sur de México. El experimento se llevó a cabo durante 8 semanas en cuatro fases. En cada fase, se emplearon distintos instrumentos como la muestra la Tabla I. En la Fase I se empleó un esquema que se centra en lo que sé, lo que quiero saber, y lo que aprendí (SQA).

Tabla I. Fases del experimento e instrumentos empleados.

Fase	Actividades	Instrumentos
Fase 1	Identificación de conocimientos previos	Prueba piloto. Entrevistas. Esquema SQA
Fase 2	Contextualización. Planeación y selección de las actividades	Pretest
Fase 3	Lluvia de ideas, esquema SQA. Implementación de actividades de visualización. Trabajo colaborativo	Lista de cotejo. Guía de observación Diario del profesor
Fase 4	Indagación a profundidad. Evaluación.	Entrevistas. Postest

Tanto la primera como la última fase fueron momentos dedicados a las evaluaciones (exámenes de opción múltiple). La intervención didáctica ocurre en la tercera fase con material matizado con la información de la segunda fase. Las actividades se basaron en los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales relacionados con la construcción y uso del concepto de fracción, tales como; representación, lectura y escritura de números fraccionarios; tipo, conversión, simplificación, suma y resta de fracciones y el reconocimiento de fracciones en situaciones de la vida diaria, como en las unidades de peso, medida, capacidad y porcentaje.

Resultados

Los resultados obtenidos de los instrumentos de la Fase 1 y 2 permitieron identificar las preconcepciones y los errores conceptuales más significativos con los que los alumnos se iniciaban en el estudio. Dentro de éstas se puede mencionar que la mayoría de los alumnos tenían dificultades para comprender situaciones que implicaban la suma, resta, comparación de fracción así como el trabajo con las fracciones equivalentes. El promedio grupal inicial pre test fue de apenas 27.5 con un máximo de 8 correctas de 20 preguntas, evidenciando los siguientes puntos: a) dificultad en reconocer términos comunes que se emplean en el trabajo con fracciones: simplificación, mínimo común denominador, y fracción propia, b) una visión predominante de las fracciones como la división de un entero en partes iguales, y c) la falta de visualización de lo que representa la fracción o las operaciones entre éstas. Además, se encontró debilidades en el trabajo colaborativo, hacía falta la interdependencia positiva y la responsabilidad individual.

Durante la implementación de las actividades del experimento se fue apreciando la importancia y el impacto de las estrategias para la recuperación de los conocimientos previos, la visualización y el trabajo colaborativo en el entendimiento de fracciones (ver Tabla 2 y Tabla 3). En la Tabla 2 se concentran las respuestas dadas por tres alumnos a la primera pregunta de la entrevista (Fase 1 y Fase 4).

Tabla 2. Respuestas de tres estudiantes a la pregunta 1 ¿Qué entiendes por fracción o fracciones? de la entrevista en al inicio y al final de la investigación

Momento	Alumna A (bajo rendimiento)	Alumna C (rendimiento medio)	Alumno E (alto rendimiento)
Al inicio del experimento (Fase 1)	Yo casi no les entiendo; tengo muchas dificultades para saber lo que son	Que se dividen las fracciones en dos números	Son partes, fracciones de algo que fue dividido entre un número
Al final del experimento (Fase 4)	Son números que indican las partes en que está dividido un entero	Son partes iguales de un entero y sirven para repartir cosas	Son enteros divididos en partes iguales, y sirven para repartir cosas, cantidades, para medir algo.

Al inicio del experimento, la visión que los alumnos tenían sobre las fracciones se centró en la división de un entero en partes iguales. Al terminar el experimento, los mismos alumnos mostraron una visión más completa reconociendo su uso. Los participantes del estudio se fueron apropiando, de forma paulatina, de los aportes de las estrategias para el rescate de los conocimientos previos, la visualización y en trabajo colaborativo (Tabla 3).

Tabla 3. Respuestas de los estudiantes sobre la importancia de las estrategias del experimento

Pregunta	Respuesta en Fase I	Respuesta en Fase 4
¿Las veces que has trabajado con las fracciones, te han preguntado qué cosas sabes de ellas? ¿Es eso importante? ¿Por qué?	Sí, si es importante que nos pregunten porque así no repetimos los temas	Sí, y es importante Porque si yo no sé algo, a partir de allí me pueden explicar
¿Te han presentado imágenes o algún otro material en el que tú puedas observar la escritura o equivalencia de una fracción? ¿Cuál o cuáles?	Algunas veces. Con figuras geométricas y dibujos	Sí. Las palabras en foamy, las tarjetas, el cartel, el tendadero de fracciones equivalentes, las imágenes en el salón de Enciclomedia
¿Prefieres el trabajo de las fracciones de forma individual o en equipo?	Individual, muchas veces no quieren trabajar conmigo mis compañeros o no trabajan igual todos	En equipo, porque cuando alguien no sabe algo, otro compañero lo puede ayudar y así aprender más

La información anterior hace valer, desde el punto de vista de los estudiantes, la importancia de la recuperación de los conocimientos previos, el empleo de la visualización y el aprendizaje colaborativo. De igual forma, permitió reafirmar que los estudiantes no prestan suficiente atención a los materiales comunes de enseñanza (libro, láminas en papel bond, círculos para representar determinadas fracciones, etc.), sino que prefieren el empleo de materiales y recursos actuales (presentaciones de Power Point, imágenes, animaciones, videos, etc.), ya que les resultan más motivantes.

Otro punto de análisis en el que se fundamentan el impacto y la transcendencia de las estrategias de recuperación de los conocimientos previos, el empleo de la visualización y el aprendizaje colaborativo es el examen de opción múltiple del pre test y pos test. Es así que la tabla 4 muestra la comparación de los resultados de ambos.

Tabla 4. Comparación de aciertos de los estudiantes (en la fase I y en la fase 4, sobre 20 reactivos)

	Pre test	Pos test
Promedio	6.16	17
Máximo	9	19
Mínimo	3	13

Los resultados mostrados en la Tabla 4 sugieren una mejoría en el desarrollo del examen de conocimientos (comparando pre y postest). Por el diseño del instrumento es posible concluir que los estudiantes construyeron el concepto fracciones en un sentido más amplio, ya que además de conceptualizarlas como las partes iguales que dividen a un entero, también desarrollaron habilidades y actitudes para reconocer situaciones de reparto, proporción, comparación y el empleo de sus aprendizajes en situaciones comunes y reales (como el empleo de las fracciones en las unidades del tiempo, peso, longitud y capacidad). Finalmente, el aprendizaje colaborativo incrementó la participación de los alumnos en la construcción de conocimientos ya que “los que sabían” apoyaron a “los que no sabían” o que presentaron mayores obstáculos cognitivos.

Al igual que con los alumnos, el empleo de las estrategias de recuperación de los conocimientos previos, la visualización y el aprendizaje colaborativo favorecieron al cambio cognitivo, conceptual e instruccional en la docente del grupo de alumnos de sexto grado. Ya que al inicio de la investigación al preguntarle sobre la importancia de los conocimientos previos, de la visualización y del aprendizaje colaborativo, ella respondió en base a sus conocimientos teóricos y en base a algunas experiencias docentes, tal es el caso que comentó que hacía uso de los medios comunes de visualización para la enseñanza de las fracciones (los textos escritos en papel bond, las ilustraciones del libro, las figuras geométricas, y el empleo del pizarrón). Sin embargo, una vez concluido el tema de estudio las respuestas de la entrevista a los mismos cuestionamientos cambiaron de forma significativa; por ejemplo, en lo que refiere a la recuperación de los conocimientos previos señaló que todos los alumnos poseen nociones y conocimientos en base a su experiencia, por ello, la consideración de dichos saberes permite orientar la enseñanza y mejorar el aprendizaje de los alumnos. En torno a la visualización aseveró que el empleo de la visualización desarrolla el razonamiento, la comprensión, ayuda a centrar la atención, motiva a los alumnos y desarrolla la metacognición; en ese mismo sentido, argumentó que no era lo mismo que el alumno escuche: “un cuarto” o “un medio” a que los alumnos puedan verlos de forma ilustrada, grafica, sonora o interactiva. Finalmente, expresó que gracias a la implementación del aprendizaje colaborativo apreció que los alumnos “que saben” apoyaban a “los que no saben” y a partir de esa interacción el aprendizaje es más significativo. De igual forma comentó que los docentes deben reconceptualizar esta forma de trabajo, pues muchas veces se piensa que solamente aplica a grados superiores, sin saber que también aporta excelentes resultados en los primeros grados.

En conclusión, los resultados de la investigación remarcan que todo aprendizaje nuevo parte y adquiere significado de acuerdo a los conocimientos previos que el sujeto posee (Ausubel,

Novak y Hanesian, 1978; Gil y Guzmán, 1993; Macías, 2007). Así mismo, que la visualización como estrategia de enseñanza y de aprendizaje favorece la sincronización de información auditiva, que el docente expresa en sus explicaciones, con la observación de materiales y recursos, cumpliendo con ello varios roles, entre ellos: motivador intrínseco (Castañeda, 2003), medio de atención (Bastán y Rosso, 2006), fuente de comprensión conceptual (Cárdenas y Oropeza, 2009), factor de comprensión (Sastre, Boubeé, Rey y Delorenzi, 2008) y estrategia de evaluación. Por último, el empleo del aprendizaje colaborativo fomentó la participación de todos los integrantes del grupo estableciendo una clase de contrato social de negociación de significados, de establecimiento de contextos mentales compartidos en donde dicha interacción social permitió el reforzamiento de los valores de responsabilidad, compromiso, igualdad, tolerancia y solidaridad (Coll, Palacios y Marchesi, 1990; Martínez, Rincón y Domínguez, 2011; Ormond, 2004).

Referencias bibliográficas

- Filloy, E. (1999). *Aspectos Teóricos de Algebra Educativa*. México: Iberoamérica.
- Ausubel, D. P. (1968). *Educational psychology: A cognitive view*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Ausubel, D. P., Novak, J. D., y Hanesian, H. (1978). *Educational psychology: A cognitive view* (2a edición). New York, EUA: Holt, Rinehart & Winston.
- Carpenter, T., Fennema, E., y Romberg, T. (Eds.). (1992). *Rational numbers: An integration of research*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Bastán, M., y Rosso, A. (2006). Las tecnologías informáticas en la formación de profesores de Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación* 37(4), 1-6. Recuperado el 28 de agosto del 2007 de <http://www.rieoei.org/experiencias109.htm>
- Cárdenas, A. y Oropeza, C. (2009). Una experiencia en torno a la estrategia de visualización. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 313-320. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Cardoso, E. E., y Cerecedo, M. M. (2008). El desarrollo de las competencias matemáticas en la primera infancia. *Revista Iberoamericana de Educación* 47(5), 1-11.
- Castañeda, B. F. (2003). Visualización con Mathematica. *Sigma* 22, 55-82.
- Coll, C., Palacios, J., y Marchesi, A. (1990). *Desarrollo psicológico y educación II*. Madrid, España: Alianza.

- Cubillo, C. y Ortega, T. (2003). Análisis de un modelo didáctico para la enseñanza-aprendizaje del orden de las fracciones. *Educación Matemática* 15(2), 55-75.
- Díaz-Barriga, F. y Hernández, R. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo una interpretación constructivista* (pp. 138 -229). México: McGraw-Hill Interamericana.
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. In F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st North American PME Conference* (3-26). Cuernavaca, Morelos, Mexico.
- Fandiño, M. I. (2007). Fractions: conceptual and didactic aspects. *Acta Didáctica Universitatis Comenianae* 7, 23-45.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of Mathematical Structures*. Holland: Reidel.
- Gil, D. y Guzmán, M. (1993). *Enseñanza de las ciencias y la matemática tendencias e innovaciones*. Madrid, España: Porrúa.
- Hitt, F. (2002). Construction of mathematical concepts and internal cognitive frames. In F. Hitt (Ed.), *Representations and mathematics visualization* (pp. 241-262). International Group for the PME-NA Chapter and Cinvestav-IPN, Mexico.
- Hume, D. (1984). *Tratado de la naturaleza humana*. Barcelona: Orbis.
- Johnson, D. W. y Johnson, F. P. (1991). *Joining together: group theory and group skills*. (4a Ed). Englewood Cliffs, N.J.: Prentice- Hall.
- Lamon, S. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education* 24(1), 41-61.
- León, P. (1998). Procedimientos de niños de primaria en la solución de problemas de reparto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 2(1), 5-28.
- Locke, J. (1980). *Ensayo sobre el entendimiento humano*. Madrid: Nacional.
- Macías, F. D. (2007). Las nuevas tecnologías y el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*, 42(4), 1-17.
- Martínez, L., Rincón, E. y Domínguez, A. (2011). El juego y el aprendizaje cooperativo en la enseñanza de las ecuaciones de primer grado. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 24, 397-405. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Novak, J. D. (1998). *Learning, creating, and using knowledge: Concept maps as facilitative tools in schools and corporations*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

- Ormrod, J. (2004). *Aprendizaje Humano* (4a ed.). Madrid: Pearson-Prentice Hall.
- Perera, P. y Valdemoros, M. E. (2009). Propuesta para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado. *Educación Matemática* 21(1), 29-61.
- Redish, E. (1994). Implications of cognitive studies for teaching physics. *American Journal of Physics* 62(9), 796-803.
- Sastre, V., Boubeé, C., Rey, G. y Delorenzi, O. (2008). La comprensión: proceso lingüístico y matemático. *Revista Iberoamericana de Educación* 46(8), 1-9.
- Slavin, R. E. (1990). *Cooperative learning: theory, research, and practice*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.