POR QUÉ ENSEÑAR LOS NÚMEROS RACIONALES SIN SIGNO COMO OPERADORES SOBRE MAGNITUDES Y NO COMO FRACCIONARIOS

Carmen Andrade Escobar
MAK Escuela de desarrollo del pensamiento lógico matemático Colombia
escuelamak@gmail.com

Resumen. El presente artículo tiene como finalidad estudiar los operadores sobre magnitudes como la noción que está en la base de la construcción del número racional sin signo y mostrar que la fracción, que se ha enseñado tradicionalmente, produce dificultades que persisten hasta la edad adulta. Estas dificultades se explican porque la enseñanza de la relación parte-todo conlleva implícitamente conceptos falsos y hace un uso inadecuado de palabras que son el origen de los obstáculos didácticos e impiden promover el salto conceptual entre el número contador y el número relator necesario para construir el significado del número racional. A través de la historia de la matemática se puede identificar que el concepto de número racional sin signo tiene como invariante conceptual el operador sobre magnitudes del que se deriva la medida y la razón; su enseñanza no sólo evita los obstáculos didácticos producidos por la fracción sino que contribuye a construir el significado del número natural racional.

Palabras clave: obstáculos didácticos, números racionales, fracción

Abstract. The following article aims to study the operators on magnitudes like the notion that is in the base of the construction of the rational number without sign and to show that the fraction, the way that it has been taught traditionally, produces difficulties that persist to the adult age. These difficulties are understood if we consider that the teaching of the part-whole relationship implicitly involves false concepts and an inadequate use of words that are the origin of the didactic obstacles, avoiding to promote the conceptual leap between the counting number and the relator number, necessary to build the meaning of the rational number. Throughout the History of Mathematics we can identify that the operators on magnitudes is an invariable of the concept of rational number without sign, from which measure and ratio derives; and their teaching does not only avoid the didactic obstacles produced by the fraction but contributes to the construction of the meaning of rational number.

Key words: didactic obstacles, rational numbers, fraction

Problemática

Tradicionalmente se ha considerado que la noción de fracción como relación parte todo es la base para la construcción de los números racionales sin signo. No obstante, numerosas investigaciones en educación matemática, por ejemplo, Mancera (1992), Tzur (1999), señalan que un alto porcentaje de estudiantes, tanto en los grados superiores como en la universidad, tienen dificultades en el aprendizaje de la matemática, precisamente, porque no pueden darle significado a los números racionales y por consiguiente, no pueden calcular operaciones ni resolver problemas que los involucren.

Las dificultades de los estudiantes en la manipulación de los números racionales se pueden estudiar a través de los errores que se presentan con mayor frecuencia (Mancera, 1992):

- En la construcción de fracciones impropias: no pueden representar la fracción impropia, por ejemplo 5/3, o la invierten y representan 3/5.
  - En la suma y la resta de fracciones: suman numeradores y denominadores como si fueran números naturales, por ejemplo: 5/3 + 2/7 = 7/10.
  - En la relación de la fracción con la medida y la razón: no pueden interpretar una fracción, por ejemplo 2/3 o 3/2, como resultado de una medida o como razón.

Una de las hipótesis sobre estas dificultades se refiere a que la noción de fracción no sólo no promueve la construcción de los números racionales sino que genera obstáculos didácticos que persisten hasta la edad adulta. Sin embargo, antes de analizar estas dificultades es necesario aclarar el significado de número racional sin signo a través de la mirada retrospectiva del proceso histórico de la matemática.

Invariantes conceptuales de los números racionales sin signo a lo largo de la historia de la matemática

La mirada retrospectiva de la historia de la humanidad, desde la Antigüedad hasta el siglo XX, tiene como finalidad identificar las invariantes conceptuales y los momentos de cambio en la construcción del número racional. Los avances en el conocimiento dependen de cada lugar geográfico y de las necesidades socio-culturales de cada época, situaciones que han llevado a diferentes interpretaciones del número racional. A continuación se presenta un resumen de las diferentes interpretaciones, la época, el lugar geográfico y la actividad que impulsó su desarrollo.

Operadores sobre magnitudes: En la Antigüedad (C3.500 a.C.), en Egipto y Babilonia, la actividad que impulsó el desarrollo de los números racionales sin signo fue la arquitectura de las pirámides y de las grandes construcciones. La talla de piedras les permitió erigir pirámides con formas regulares y precisas mediante la comparación de las longitudes de las aristas de las piedras. Este proceso que impulsó el desarrollo de la medición liga la aritmética a la geometría porque el proceso de medición es la cantidad de veces que cierta longitud se puede aplicar en un segmento; "el primer paso (aplicación) es de carácter geométrico, el segundo (cálculo), de carácter aritmético" (Aleksandrov, Kolmogorov, Laurentiev y otros, 1994, p.43).

Fracción como parte de una medida: En Grecia también se conocieron construcciones con piedras talladas en forma regular y lisa como por ejemplo la puerta de Los Leones en Creta pero también se usaba la fracción en relación con el comercio y el uso de la palabra $\lambda\varepsilon\pi\tau\alpha$ que significa moneda o partes de una moneda (los décimos o los céntimos). Los babilonios usaron la fracción sexagesimal, con denominador 60 o múltiplos de 60, para el estudio de los astros.

Estas fracciones también fueron usadas por los griegos y los árabes, y dejaron su huella en nuestra división de la hora y de la circunferencia. En Roma, la fracción era necesaria, especialmente, para el peso y la medida en general. Se usaba la división de la unidad en 2, 3, 4 o 6 partes iguales porque se daba preferencia a la partición duodecimal y se buscaba representar las fracciones como suma de fracciones unitarias con denominador un múltiplo de 12. En India y Arabia reconocían la fracción ordinaria pero preferían usar, como los babilonios y los griegos, la fracción sexagesimal.

Razón y medida entre dos longitudes: La noción de conmensurabilidad, fundamental para la construcción de los números racionales, fue estudiada por Eudoxio de Cnido (C 408-355), alumno de Platón, y Euclides (C 300 a. C.). Eudoxio clarificó el significado de magnitudes homogéneas: un segmento no es comparable, en términos de razón, con el área, y el área no es comparable con el volumen. También determinó que la forma de encontrar la relación numérica o la medida entre dos longitudes es comparando dos longitudes y que si el proceso de comparación termina, se dice que el segmento **a** es conmensurable con el segmento **b**, pero si el proceso no termina, se dice que los segmentos no son conmensurables. La escuela pitagórica descubrió que dos magnitudes tales como la diagonal y el lado de un cuadrado son inconmensurables, porque no tienen una razón tal como un número entero tiene a otro número entero. En la juventud de Platón, el descubrimiento de la inconmensurabilidad causó un verdadero escándalo.

Euclides recoge la teoría de Eudoxio en el Libro V de los *Elementos* y estudia la proporción en el caso de razones conmesurables. La teoría de las proporciones es un estudio de los números racionales (Aleksandrov et al, 1994). Aunque la palabra racional era un concepto indefinido para los matemáticos griegos, Euclides definió la razón como la relación de tamaño entre magnitudes del mismo tipo. Pero más significante es la definición 5 del Libro V: "(...) una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y de la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente" (Euclides, 1991, p.194). El estudio de las magnitudes inconmensurables es tratado por Euclides en el libro X.

A continuación se presenta un resumen de la revisión histórica sobre la construcción del número racional extraída de Collet (1982). Se presentan cuatro concepciones del número racional: fracción como relación parte-todo, relación entre magnitudes y medida, operadores sobre magnitudes y clases de parejas ordenadas de números naturales.

Fracción como relación parte-todo: En el siglo XII y XIII, el desarrollo del álgebra impulsó la definición de la fracción que significa partes alícuotas de la unidad (Natucci, 1923, p. 29). En India, en el *Lilivati de Bhaskara* (C 1114 d. C.) la fracción se escribe con el numerador arriba del denominador sin signo de fracción interpuesto. Leonardo Pisano (1180-1250), conocido como Fibonacci, en su *Liber Abaci* representa la fracción con una raya que separa el numerador del denominador. La palabra numerador y denominador aparecen en la obra *Summa* de Luca Paciolo y en el curso del siglo XVI se empieza a usar la fracción decimal Collet (1982).

Relación entre magnitudes y medida: En el siglo XV, Nicolás de Cuse ve que la debilidad de la ciencia escolástica está en la incapacidad de medir. "Es más, ya que el término etimológico "*mens* (facultad intelectual, inteligencia) ha sido ligado a *mensura* (medida, medición), el conocimiento debe estar fundado sobre la medida" (Collet, 1982, p. 158). Newton (1643-1727) en su *Arithmetica universalis* reconoce una función común del número para expresar relaciones entre magnitudes, o mejor, cociente entre magnitudes: los naturales se refieren a medida de unidades, las fracciones a medida de submúltiplos de la unidad de medida, y los irracionales a medidas inconmensurables.

Operadores sobre magnitudes: H.C.R. (Charles) Meray (1835-1911) observa que la noción de fracción como suma de partes alícuotas de la unidad no representa claramente el significado de ¾ y muestra el número racional como un "factor ficticio" sobre un número natural. Burali-Forti (1897) ve el número racional y el entero como operadores sobre magnitudes. Peano lo denomina operador en su obra *Aritmetica generale* (1899).

Clases de parejas ordenadas de números naturales: Hasta la primera mitad del siglo XIX no se puede encontrar ninguna teoría sobre los números racionales ni sus propiedades. El desarrollo de la lógica aporta a la definición del número racional. Hacia finales del siglo y principios del siglo XX, Russell, en su obra *The principles* of *Mathematic*, recoge el estudio de Tannery y Stolz sobre el método de las parejas y considera el número cardinal como clases de parejas ordenadas de números naturales pero cambia el método para el número racional por el concepto de relación entre enteros (Natucci, 1923, p. 56). Alessandro Padoa, en su obra *Introduzione alla teoria delle frazioni* (1909), muestra como se puede extender el método de las clases desarrollado por Russell, a las fracciones; las considera como clases de parejas ordenadas de números naturales (Natucci, 1923, p. 56).

Las conclusiones de la revisión histórica son las siguientes: la relación entre magnitudes es una invariante conceptual del número racional sin signo y está en la base de las diferentes interpretaciones: operadores, medida y razón entre magnitudes. La noción de fracción que se usó en varios lugares, desde la Antigüedad, también tiene en su base la relación entre magnitudes porque se refiere a parte de una medida. La noción de fracción como relación parte todo, que se define en el siglo XII, no es una relación entre magnitudes sino entre la parte y el todo, y no se aplica a magnitudes sino a cantidades discretas o colecciones.

Interpretaciones del número racional sin signo y diferencias con la fracción como relación parte-todo

Se pueden establecer dos métodos de construcción de los números racionales: conmensuración y fraccionamiento de la unidad que corresponden a diferencias conceptuales. La conmensuración se refiere a la relación entre magnitudes y aunque se plantean cuatro subconstructos del número racional: medida, cociente, razón y operador, el concepto de operador sobre magnitudes es "(...) en esencia el concepto de razón o medida que tiene un valor práctico que le falta al método analítico" (Natucci, 1923, p. 358) y el cociente entre magnitudes es la misma razón. De esta manera, hay solamente tres interpretaciones del número racional que se relacionan entre sí: operador, razón y medida, y de las que se derivan nuevas nociones como proporción y equivalencia (Tabla 1) (Andrade, 2008).

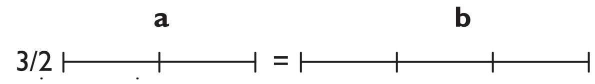
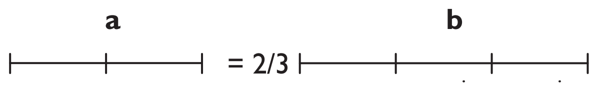
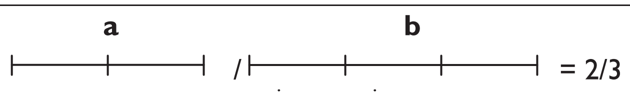
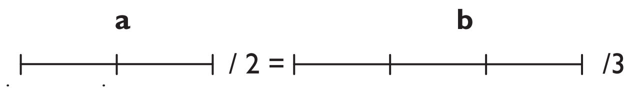
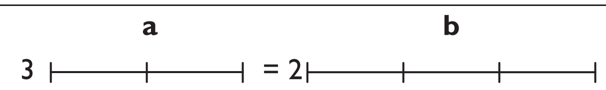
Operador	 a b 3/2 =	(3/2) **a** = **b**
Medida	 a b = 2/3	**a** = (2/3) **b**
Razón o cociente	 a b / = 2/3	**a**/**b** = 2/3 2/3 = **a**/**b**
Proporción	 a b / 2 = /3	**a**/2= **b**/3
Equivalencia	 a b 3 = 2	3**a** =2 **b**

Tabla 1: Interpretaciones del número racional sin signo

Es conveniente mostrar que no se puede escribir: 2/**a** = 3/**b** porque no tiene sentido dividir un número por una magnitud. El fraccionamiento de la unidad se refiere a la noción de fracción como relación parte-todo, partes alícuotas de la unidad, que se representa por dos números naturales, uno arriba o numerador y separado por una raya, un número abajo o denominador. El de arriba indica la cantidad de partes que se toman y el de abajo el número total de partes.

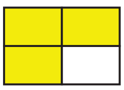
Las diferencias conceptuales entre los operadores sobre magnitudes y la relación parte-todo explican algunas de las dificultades de los estudiantes en la manipulación de los números racionales.

Los operadores sobre magnitudes: una forma de evitar los obstáculos didácticos

Con frecuencia se atribuyen las causas de las dificultades en el aprendizaje de la matemática a condiciones genéticas. No obstante, mediante el estudio de los errores más frecuentes se puede inferir que los errores se producen por las dificultades que impiden avanzar en el conocimiento y que pueden tener origen en tres tipos de obstáculos (Brousseau, 1989): ontogenéticos o producidos por la genética, y por lo tanto, están fuera de este estudio; epistemológicos; o didácticos porque se producen por la misma enseñanza. Los obstáculos epistemológicos se refieren a los saltos conceptuales necesarios para avanzar en la construcción del conocimiento, por ejemplo: entre los números naturales y los números racionales.

Los obstáculos didácticos se generan por errores didácticos que se pueden agrupar en: errores metodológicos, conceptuales y pedagógicos (Andrade, 2008). Los errores metodológicos se refieren al uso inadecuado de palabras. Los errores conceptuales se refieren a conceptos "falsos" que se enseñan. Los errores pedagógicos se refieren a los saltos conceptuales u obstáculos epistemológicos que no se promueven en el currículo y su falta de promoción impide construir nuevos conceptos. A continuación se presentan ejemplos de cada uno de los errores de los estudiantes y se estudia el origen de esta dificultad en los errores didácticos. También se muestra cómo la alternativa para construir las bases de los números racionales mediante las relaciones entre magnitudes, promueve el salto conceptual entre el número natural y el racional, y evita los obstáculos didácticos que se generan por la enseñanza de la fracción (Andrade, 2008).

En la enseñanza de la fracción se presentan varios tipos de errores. Los metodológicos que se refieren al uso de palabras en forma inadecuada, por ejemplo: la palabra "fracción" parece inadecuada porque significa romper algo y la palabra "impropio" significa algo sucio que se debe evitar. Pero también se presentan errores conceptuales cuando se enseña que se "toman" o se "cogen" tantas partes que son nociones "falsas" porque las partes no se cogen sino que se señalan, como se observa en las siguientes gráficas que representan la fracción 3/4:

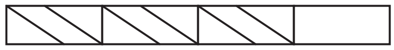


Otra dificultad generada por la fracción consiste en que tanto la parte como el todo están en la misma gráfica lo que explica los errores de los estudiantes en la construcción de la fracción impropia: ¿Cómo "coger" o "tomar" una parte mayor que el total de partes? Por ejemplo:

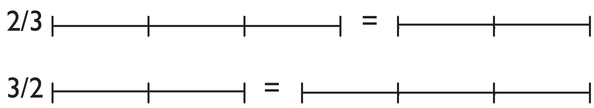
¿Cómo tomar o coger 3 partes de 2? La solución que se da en la enseñanza de la fracción es dibujar dos unidades:


= 3/2

Lo cual conlleva a otro error: ¿Puede una unidad ser dos unidades? Además, ¿Qué sucede si se juntan los dibujos? Se observa que la fracción cambia de 3/2 a 3/4:

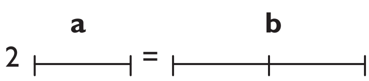

= 3/4

¿Cómo evitar este obstáculo didáctico? La enseñanza de los operadores sobre magnitudes evita los errores que acabamos de señalar. Dado que el proceso para construir los operadores sobre magnitudes implica establecer una relación entre magnitudes, se evita el uso de palabras inadecuadas porque no se "cogen" ni se "toman" cosas, y tampoco se diferencia entre fracción y fracción impropia porque el proceso es igual para cualquier situación, sea el numerador mayor, menor o igual que el denominador.



Lo que si se tiene en cuenta es el análisis del resultado: si el segmento o la magnitud que resulta es mayor, menor o igual de grande que la magnitud inicial. Los obstáculos didácticos no sólo se evitan sino que se promueve el salto conceptual u obstáculos epistemológicos.

En la suma y la resta de fracciones, los errores típicos se refieren a que se suman los numeradores y los denominadores por aparte, por ejemplo: 5/3 + 2/7 = 7/10. Estos errores de los estudiantes se explican porque se les ha enseñado que la fracción son dos números naturales separados por una raya, y no se ha promovido el salto conceptual entre los números naturales que son contadores y los números racionales que son relatores (Federici, 2001). Mediante el estudio de los operadores sobre magnitudes, se promueve este salto conceptual entre el número contador y el número relator. Por ejemplo, el número 2 contador, ● ● cuenta dos cosas discretas, pero el número 2 relator:

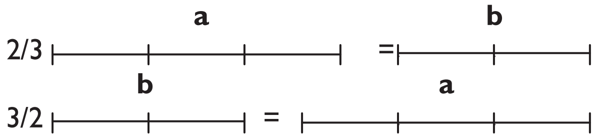


establece la relación entre dos magnitudes. En este caso: 2 significa "el doble de" y se lee: **b** es el doble de **a** o el doble de **a** es igual a **b**. Aunque el número se representa de la misma manera, el significado es diferente.

Otro error de los estudiantes en el aprendizaje de la fracción se refiere a la dificultad para asociar la fracción con la medida y la razón se explica porque se enseña que la fracción es una colección de partes iguales e implica contar pedazos de un todo (cantidades discretas). Por ejemplo:

2/3 son 

Mientras que el estudio de los operadores permite establecer la relación con la razón y la medida (Andrade, 2008):



La medida del segmento **b** con relación a **a** es 2/3 y la medida del segmento **a** con relación a **b** es 3/2.

Conclusiones

El análisis de los errores de los estudiantes en el aprendizaje de los números racionales permite concluir que estos errores provienen de las dificultades generadas por la educación u obstáculos didácticos. Los obstáculos en la enseñanza de la fracción se pueden asociar a errores metodológicos porque se usan palabras inadecuadas; a errores conceptuales porque se enseñan conceptos falsos, y a errores pedagógicos porque no se promueve el salto conceptual u obstáculo epistemológico entre los números naturales y los números racionales, entre el número contador y el número relator, que es indispensable para la construcción del significado de los números racionales.

Por otro lado, a través de la revisión histórica se pudo concluir que una invariante del número racional sin signo es la relación entre magnitudes y que la noción de relación parte-todo es transitoria en una etapa de la historia de la matemática. Esta conclusión junto con el estudio de las dificultades generadas por la enseñanza de la fracción hace suponer que si se enseña la relación entre magnitudes como la base del número racional y no la fracción, las dificultades se disminuyen y se evitan los obstáculos didácticos.

La noción de operador sobre magnitudes tiene en su base la relación entre magnitudes y promueve la construcción de las otras interpretaciones del número racional: como medida y como razón. La comparación entre la relación parte-todo y los operadores sobre magnitudes nos señala un camino para estudiar y superar o evitar las dificultades en el aprendizaje de los números racionales. La fracción se refiere a la relación entre la parte y el todo y está compuesta por dos números naturales; el número natural es contador y se refiere a la medida de cantidades discretas. Por el contrario, el número racional está compuesto por un operador multiplicador y un operador divisor; en este caso, la función del número es la de establecer una relación cuantitativa entre magnitudes y tiene "escondido" el número natural o contador cuando se cuenta la cantidad de veces que cabe un segmento (la unidad de medida) en el segmento que se está midiendo. Por eso se llaman números relatores. Dado que la función del número es diferente hay un salto conceptual entre el número contador y el relator. Sin embargo, con la noción de fracción no se promueve porque son naturales pero, por el contrario, la noción de operador si promueve el salto conceptual y por lo tanto, contribuye a superar el obstáculo epistemológico entre el número natural y el número racional.

Referencias bibliográficas

Aleksandrov, A. D., Kolmogorov, A. N., Laurentiev, M. A. y otros. (1994). *La matemática: su contenido, métodos y significado*. España: Alianza Editoral.

Andrade, C. (2008). *De la mano al cerebro; sobre la construcción de los racionales sin signo (Q^+) con base en la didáctica de la matemática de Federici.* Bogotá: Fondo de Publicaciones del Gimnasio Moderno.

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologuiques et la didactique des mathématiques. *Construction des savoirs*, 41-63.

Collet, J. P. (1973). *Histoire des Mathématiques*. Canadá: Editions du Renouveau Pedagogique.

Euclides. (1991). *Elementos*. España: Editorial Planeta.

Federici, C. (2001). *Sobre la resolución de problemas y la numerosidad*. Bogotá: Fondo de Publicaciones del Gimnasio Moderno.

Mancera, E. (1992). Significados y significantes relativos las fracciones. *Educación Matemática* 4(2), 30-54.

Natucci, A. (1923) *Il Concetto di Numero e le sue estensioni*. Torino: Fratelli Boca.

Tzur, R. (1999). An Integrated Study of Children´s Construction of Improper Fractions and the Teacher´s Role in Promoting That Learning. *Journal for Research in Mathematics Education* 30(4), 390-416.