

## INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN, UN OBJETO DE APRENDIZAJE PRESENTADO EN COMICS

Felipe Santoyo Telles, Eliseo Santoyo Teyes, Karla Liliana Puga Nathal  
Centro Universitario del Sur de la Universidad de Guadalajara  
Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios 226 de Cd. Guzmán  
Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán  
eliseo.santoyo@gmail.com; santf22@hotmail.com; karlalpn4@hotmail.com

México

**Resumen.** En el marco de la Reforma Integral de la Educación Media Superior en México, se entiende que la enseñanza de la Matemática debe orientarse hacia el manejo de los conceptos y herramientas indispensables para comprender la disciplina. Para abordar el tema "interpretación física de la derivada de una función", se diseñó un objeto de aprendizaje, partiendo de una situación problema que recupera el abordaje clásico, —La derivada como una velocidad instantánea—. Se diseñó una historieta con dibujos animados, se trata la velocidad instantánea partiendo del experimento de Galileo, contextualizado dentro de una batalla entre personajes del folclore nacional.

**Palabras clave:** función, derivada, interpretación física

**Abstract.** In the framework of the Integral Reform of Higher Middle Education (High School) in Mexico, it is understood that the teaching of mathematics should be directed toward the management of concepts and tools necessary to understand the discipline. To address the topic "physical interpretation of the derivative of a function", a learning object was designed, starting from a situation problem that recovery the classical approach, -The derivative as an instantaneous speed-. It was designed a comic with cartoons, this is the instantaneous velocity based on the experiment of Galileo and contextualized into a battle between personages of national folklore,

**Key words:** function, derivative, physical interpretation

### Introducción

A partir de 2008 da inició —en las aulas— en México la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS), en este marco se establece que la orientación de la Matemática debe ser hacia el manejo de los conceptos y las herramientas indispensables para comprender la disciplina. Dadas las limitaciones de tiempo para trabajar la parte conceptual —en la materia de cálculo diferencial— se ha diseñado un objeto de aprendizaje para abordar el tema interpretación física de la derivada de modo autónomo. A partir de una situación problema que recupera el abordaje clásico, —La derivada como una velocidad instantánea—. Se diseñó una historieta con dibujos animados, en la cual se trata la velocidad instantánea a partir del experimento de Galileo, se contextualiza como una lucha entre personajes del folclore nacional.

El bachillerato tecnológico en México, tiene deficiencias sistemáticas y estructurales. La enseñanza de la ciencia y la tecnología se realiza sin contextualizarlas con su proceso histórico

de evolución y transformaciones, con lo cual se les desposee de una dimensión formativa fundamental. SEP, SEIT (1996).

Doce años después del diagnóstico académico del bachillerato tecnológico, se cristaliza la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS, 2010), en ella se observa que una de las bases para llevarla a cabo es la necesidad de promover el desarrollo de competencias, así el enfoque bajo el cual se presenta el objeto de aprendizaje que se propone en este trabajo, está orientado hacia el desarrollo de competencias y una estrategia pertinente en este marco es la resolución de problemas.

En el año 2009 se aplicó aleatoriamente un cuestionario a 30 alumnos de 5° semestre del bachillerato tecnológico –en los programas educativos de técnico en electrónica y técnico en mantenimiento automotriz–, del turno matutino en el centro de bachillerato tecnológico industrial y de servicios 226 (CBTIS 226), para verificar el estado del conocimiento respecto al significado físico de la derivada de una función, el 95% de los alumnos que respondieron el cuestionario desconocían el significado físico de la derivada de una función. Cabe decir que los alumnos de bachillerato abordan el estudio del cálculo diferencial en un curso semestral de 80 horas durante el cuarto semestre. Esta situación de desconocimiento de la interpretación física de la derivada de una función, permea hasta el nivel superior y muchas veces durante toda la vida, dado que, por principio de cuentas gran parte de los egresados de bachillerato no continúan estudios de ingeniería, sino de áreas de las ciencias sociales, biológicas, económico-administrativas u otras, en las cuales ya no se aborda el estudio del cálculo, además, en el caso de aquellos que si acceden a programas educativos de ingeniería, muchas veces los profesores de este nivel dan por hecho que tal contenido –interpretación física de la derivada– se ha tratado ya en el nivel bachillerato.

Cabe decir también, que los tiempos para cubrir los contenidos de los programas son reducidos y además, como señala Ávila (1998), “afirmar que la enseñanza del cálculo es problemática no provoca polémica, –pues prácticamente todo profesor de matemáticas ha vivido la experiencia del fracaso en la enseñanza del mismo–”. Bajo tales condiciones se ha ideado la forma de abordar este contenido a partir de una situación problema que recupere el abordaje clásico, –La derivada en su interpretación física como una velocidad instantánea–, a partir de recrear el famoso experimento de Galileo –velocidad de un objeto en caída libre– es decir, bajo una contextualización histórica, de igual modo, es de suma importancia que tal situación sea útil, significativa y divertida para el alumnado en general.

## Marco teórico

Mucho se ha dicho respecto al abordaje de los contenidos de aprendizaje a partir de situaciones lúdicas, baste mencionar que se observa el juego en los diversos mamíferos (en particular en los seres humanos) como una actividad de aprendizaje en si misma, es un ejercicio inherente a su desarrollo tanto en lo cognitivo, como en lo físico, los seres humanos necesitan el juego, el esparcimiento, y tienden a desarrollarlo, también porque ayuda a lograr la dosis de diversión y de disfrute que cualquier ser humano requiere para lograr una estadia placentera en este mundo. Robert Fagan, –citado por Hirsh-pasek K. y Golinkoff R. (2011)–, ha llegado a especular que el juego debe tener algún valor adaptativo dado el riesgo y el costo energético para los individuos en desarrollo, en este sentido vale la pena destacar que Piaget considera al conocimiento como el fruto de un esfuerzo por adaptarnos al medio, “las estructuras conceptuales que consideramos como conocimiento, son el producto de conocedores activos que moldean sus pensamientos para encajar las cosas forzadas en su experiencia” citado por Von Glasersfeld (1997), y ya se sabe, la adaptación, como Piaget dijo explícitamente, es equivalente a la habilidad para sobrevivir (Piaget, 1976).

Investigaciones recientes confirman lo que Piaget señala respecto a las actividades lúdicas en la vida de los niños, estas tienen un papel esencial si se considera que el menor esta obligado a adaptarse incesantemente a un mundo social de mayores, cuyos intereses y reglas siguen siéndole exteriores y a un mundo físico que todavía comprende mal, resulta por tanto indispensable a su equilibrio afectivo e intelectual que pueda disponer de un sector de actividad cuya motivación no sea la adaptación, o lo real sino por el contrario, la asimilación de lo real al yo, sin coacciones ni sanciones: tal es el juego, que transforma lo real por asimilación mas o menos pura, a las necesidades del yo (Piaget e Inhelder, 1981).

Tanto el juego libre como el juego guiado son esenciales para el desarrollo de habilidades académicas. La palabra *juego* evoca varias definiciones. Generalmente los investigadores hablan de cuatro tipos de juego, aunque en la práctica éstos a menudo se mezclan: (a) *Juego con objetos*, formas en las que los niños exploran diferentes objetos, aprenden sobre sus propiedades y los transforman para que tengan nuevas funciones; (b) *Juego imaginativo* (sólo o con otros), también conocido como juego de hacer-crear, de fantasía, juego simbólico, juego sociodramático o juego dramático, en el cual los niños experimentan con diferentes roles sociales; (c) *Juego físico brusco*, que incluye todo desde un juego de “escondidas” de un niño de 6 meses hasta el juego libre durante un descanso; y (d) *Juego dirigido*, donde los niños participan en actividades agradables y aparentemente espontáneas bajo la dirección sutil de los adultos (Hirsh-Pasek y Golinkoff, 2011).

Académicamente el juego está relacionado a la lectura y a las matemáticas, así como a importantes procesos de aprendizaje que alimentan estas competencias. Más específicamente, hay estudios que conectan directamente el juego a la lectoescritura y el lenguaje, y a las matemáticas. En el caso del presente trabajo se trata de jugar con la imaginación en una situación divertida en la que se recupera de la memoria del folclor nacional mexicano, personajes míticos –luchadores– que trabajan por la justicia.

Barnett y Storm citados por Hirsh-Pasek y Golinkoff (2011) también encuentran que el juego sirve como un medio para hacer frente al estrés. De hecho, Haight, Black, Jacobsen y Sheridan (2006) demostraron que los niños que han tenido algún trauma pueden usar el juego imaginativo con sus madres para trabajar sus problemas. En conjunto, las competencias sociales tales como la amistad y la capacidad para afrontar problemas, son las bases para el aprestamiento escolar y el aprendizaje académico. Raver (2002) concluyó que “de las dos últimas décadas de investigación es inequívocamente claro que el ajuste comportamental y emocional de los niños es importante para sus posibilidades de éxito escolar temprano.” Es a través del juego que los niños aprenden a subordinar sus deseos a las reglas sociales, cooperar con otros deliberadamente, y participar en comportamientos socialmente apropiados, comportamientos vitales para ajustarse bien a las exigencias escolares.

Respecto a los elementos del conocimiento científico que los humanos procuran preservar – en particular en la matemática– son de lo más rígidos –solemnes–, sin embargo, es muy probable que muchas de las profundas cavilaciones de los hombres de ciencia, hayan tenido lugar jugando con configuraciones diferentes que formaban con objetos del entorno –piedras o ramas–, o que observaban en la naturaleza.

Respecto al juego y algunas de sus aportaciones en matemática, De Guzmán (2008), elabora una recopilación –de la cual se recuperan aquí una pocas líneas– referente a algunos de los más brillantes matemáticos que realizaron aportes a esta ciencia a partir de actividades lúdicas, por ejemplo, menciona que Leibniz fue un gran promotor de la actividad lúdica intelectual: "Nunca son los hombres más ingeniosos que en la invención de los juegos... Sería deseable que se hiciese un curso entero de juegos, tratados matemáticamente", de modo similar señala que Euler (1707-1783), oyó hablar del problema de los siete puentes de Königsberg, –sobre la posibilidad de organizar un paseo que cruzase todos y cada uno de los puentes una sola vez (camino euleriano)–. Su solución constituyó el vigoroso comienzo de una nueva rama de la matemática, la teoría de grafos y con ella de la topología general.

Señala De Guzmán, que el mismo espíritu matemático de la época de Euler también participaba fuertemente del ánimo competitivo en la época de Cardano. *Johann Bernoulli* (1667-

1748) lanza el problema de la braquistócrona como un reto a los mejores matemáticos de su tiempo. En este duelo participaron con ardor nada menos que Bernoulli –creador, (precisamente con su solución al problema), del cálculo de variaciones– Leibniz, Newton y Huygens. Los biógrafos de Gauss (1777-1855) cuentan de Él, que era un gran aficionado a jugar a las cartas y que cada día anotaba cuidadosamente las manos que recibía para analizarlas después estadísticamente.

Hilbert (1862-1943) uno de los grandes matemáticos de nuestro tiempo es responsable de un teorema que tiene que ver con los juegos de disección: dos polígonos de la misma área admiten disecciones en el mismo número de triángulos iguales. John von Neumann (1903-1957), otro de los matemáticos más importantes de nuestro siglo, escribió con Oskar Morgenstern en 1944 un libro titulado *Teoría de Juegos y Conducta Económica*. En él analizan los juegos de estrategia donde aparece en particular el teorema de *minimax*, pieza fundamental para los desarrollos matemáticos sobre el comportamiento económico.

### Desarrollo

Es claro que, particularmente en la tarea de iniciar a los jóvenes en la labor matemática, el sabor a juego puede impregnar de tal forma el trabajo, que lo haga mucho más motivante, estimulante, agradable y, para algunos, incluso apasionante. Cabe aquí señalar, que el presente trabajo muestra una introducción al cálculo de manera lúdica, considerando que las situaciones didácticas pueden presentarse con algunos elementos de pasatiempo y diversión que esencialmente tiene el juego.

Como se señaló al inicio del presente, explícitamente la RIEMS menciona que la orientación de toda la Matemática debe ser hacia el manejo de los conceptos y las herramientas indispensables para comprender la disciplina, se puede decir de igual modo que la educación media no consiste en saturar la mente de los jóvenes con un amasijo de información, sino que el objetivo fundamental consiste en ayudarles a desarrollar su mente y sus potencialidades intelectuales, sensitivas, afectivas, físicas, de modo armonioso, colocándoles en situaciones que fomenten el ejercicio de aquellas actividades que mejor pueden conducir a la adquisición de las competencias disciplinares y genéricas básicas, más características que se pretende transmitir con el estudio de cada materia.

Respecto a la utilidad del contenido aquí tratado (la derivada de una función), es importante señalar que vivimos en un mundo caracterizado por cambios continuos. Es importante desarrollar métodos matemáticos para cuantificar, describir y pronosticar estos cambios.

Justamente esto es el propósito del cálculo diferencial, que es la matemática de los cambios. Determinar razones de cambio de procesos continuos es muchas veces más importante que estudiar estos procesos. Siempre que dos magnitudes –variables– están conectadas mediante una relación funcional –función–, se puede estudiar el cambio relativo de una de las magnitudes con respecto a la otra.

Son tan amplios los ejemplos de aplicación de la derivada en la vida cotidiana, –no sólo en ciertas situaciones técnicas de ingeniería– que éste debería ser un concepto de conocimiento general para comprender ciertos aspectos básicos del mundo que nos rodea y en el cual necesitamos movernos, prácticamente se aplica en todos los campos de las ciencias en donde interesa el cambio relativo de una magnitud con respecto a otra. Esto puede ser importante para determinar los resultados de un proceso o ayudarnos para pronosticar el futuro del mismo.

El conocer las “razones de cambio” también puede ser útil para buscar factores que controlen los procesos y sus cambios. Una de las tendencias generales más difundidas hoy, consiste en el hincapié en la transmisión de los procesos de pensamiento propios de la matemática más bien que en la mera transferencia de contenidos. La matemática es, sobre todo, saber hacer, es una ciencia en la que el método claramente predomina sobre el contenido. Por ello se concede una gran importancia a la manipulación en términos abstractos de cantidades físicas, con el objetivo de resolver o solucionar una situación problema.

Se reconoce también que la enseñanza es un proceso mediante el cual es posible desplegar en los educandos la curiosidad, la imaginación, la fantasía y la capacidad de interrogarse e interrogar a la realidad. Dado lo señalado anteriormente, se propone preparar materiales que permitan operar los métodos de enseñanza y aprendizaje más eficaces para el logro de los resultados del aprendizaje y de las competencias identificadas –genéricas, disciplinares y profesionales–.

Por la flexibilidad y la posibilidad de reutilizarse en diversos momentos, en diversos cursos y en diferentes espacios físicos o escenarios, se decidió trabajar en la construcción de objetos para aprendizaje, “cualquier entidad digital o no digital que puede ser usada, re-usada o referenciada para el aprendizaje soportado en tecnología”. IEEE, (Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc.) citado por Galeana (2004).

¿Qué puede ser un objeto de aprendizaje? Cualquier cosa puede ser..., siempre y cuando el profesor le dé el sentido o el objetivo de aprendizaje. Una fotografía, un documento digital, una ilustración. Y lo que formalmente se llama objeto de aprendizaje es un objeto de

información al que se le da un objetivo de aprendizaje; si se tienen varios objetos de aprendizaje se pueden juntar y formar alguna unidad del programa y con las unidades construir el curso.

Respecto a la interpretación física de la derivada, se desarrolló un objeto de aprendizaje, el cual consiste en una historieta con dibujos animados, en la que se aborda a la velocidad instantánea a partir del experimento de Galileo, se toma este tema como pretexto para el abordaje, y se contextualiza como una lucha entre personajes del folclore nacional Mexicano, en particular el famoso luchador “El Santo, enmascarado de plata” quien ayudado por “La Derivada” libran una batalla contra las momias de Guanajuato.



### Resultados y conclusiones

En un primer momento, al presentar la caricatura a los alumnos, se ha observado muy buena aceptación, (se escuchan comentarios referentes a que les parece divertida y emocionante), aun no se realizan pruebas formales acerca del nivel de comprensión y aprehensión de este contenido al utilizar estos materiales, sin embargo, se sigue enriqueciendo el material ampliando el alcance del mismo, incluyendo el desarrollo de la situación que da lugar al modelo

que describe la relación distancia-tiempo, posteriormente se podrán incluir algunas aplicaciones clásicas abordadas bajo el mismo concepto.

Es importante decir que además de cuidar que el abordaje se presente a partir de un experimento histórico (según los estudiosos de la historia), también se ha cuidado la parte del tratamiento matemático, teniendo mucho cuidado con el rigor correspondiente, aunque se trate de presentar del modo más accesible la información.

Finalmente, se sabe que el conocimiento es una negociación intersubjetiva de significados y cabe decir que, al igual que en las fronteras del conocimiento, también en áreas básicas, – como en el caso presente–, se avanza lentamente y muchas veces a contracorriente, sin embargo, continua el trabajo en la construcción de alternativas para que los alumnos comprendan y se apropien del significado de la derivada de una función y lo empleen para la solución de problemas de su interés personal y profesional.

### Referencias bibliográficas

- Ávila, R. (1998). *La enseñanza del cálculo*, Tesis de Doctoral no publicada, Universidad de Sonora, México.
- De Guzmán, M. (2008). Juegos matemáticos en la enseñanza. Recuperado el 16 de septiembre de <http://utenti.quipo.it/base5/introduz/guzmanjuegos.htm>
- Galeana, L. (2004). *Objetos de Aprendizaje*. Recuperado el día 20 de noviembre del 2009 de [http://www.cudi.edu.mx/primavera\\_2004/presentaciones/Lourdes\\_Galeana.pdf](http://www.cudi.edu.mx/primavera_2004/presentaciones/Lourdes_Galeana.pdf)
- Haight, W., Black, J., Jacobsen, T. y Sheridan, K. (2006). Pretend play and emotion learning in traumatized mothers and children. En: Singer, DG., Golinkoff, RM., and Hirsh-Pasek, K. eds. *Play = Learning: How Play Motivates and Enhances Children's Cognitive and Social-Emotional Growth*. New York, NY: Oxford University Press; Chap. 11.
- Hirsh-Pasek, K. y Golinkoff, R. (2011). *Enciclopedia sobre el Desarrollo de la Primera Infancia*. Disponible en: <http://www.encyclopedia-infantes.com/Pages/PDF/Hirsh-Pasek-GolinkoffESPxp1.pdf>
- Piaget, J. (1976). *Le comportement, moteur de l'évolution*. Paris: Gallimard.
- Piaget, J. e Inhelder, B. (1981). *La Psicología del niño*. Madrid: Ediciones Morata.
- Raver, C. (2002). Emotions matter: Making the case for the role of young children's emotional development for early school readiness. *Social Policy Report*, 16(3), 3-19.

RIEMS. (2010). *Reforma curricular del bachillerato tecnológico*. Recuperado el 03 de abril, de:  
<http://www.cosdac.sems.gob.mx/programas.php>

SEP-SEIT. (1996). *Propuestas para la reforma académica del bachillerato tecnológico*. Diagnóstico académico del bachillerato tecnológico. pp 21-25, México D. F.

Von Glasersfeld, E. (1997). *Homage to Jean Piaget (1896-1980)*. *Home: Ecology of mind*. En línea:  
<http://www.psico.unlp.edu.ar/externas/genetica/vonglasersfeld.htm> última consulta 24 de septiembre de 2011.