REGISTROS SEMIÓTICOS Y ENSEÑANZA DEL TEMA INTEGRALES

Alexia Nardín Anarela, Adolfo Álvarez Martínez, Ramón Blanco Sánchez, Seydel Bueno García, Julio Mora Salvador
Universidad de Camagüey "Ignacio Agramonte y Loynaz" Cuba
alexia.nardin@reduc.edu.cu, adolfo.alvarez@reduc.edu.cu, ramón.blanco@reduc.edu.cu

Resumen. En este trabajo analizamos los registros de representación semiótica de conceptos matemáticos presentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Cálculo Integral en el primer año de las carreras de Ciencias Técnicas (dentro de las que se incluyen las ingenierías, la Arquitectura y las Ciencias de la Alimentación). Los análisis realizados por los autores tienden a reconocer los enfoques de Laura García y James Stewart y se propone unificar estos puntos de vista.

Palabras clave: registros semióticos, representación, integrales

Abstract. In this paper, the registrations of semiotic representation of mathematical concepts present in the teaching-learning process of the Integral Calculation in the first year of the Technical Sciences specialties were analyzed (including Sciences of Feeding, Architecture, and several engineering studies such as Civil Engineering, Electrical Engineering, and Mechanical Engineering). The analyses carried out by the authors tend to recognize Laura Garcia and James Stewart approaches and they propose to unify these points of view.

Key words: semiotic representation, integral calculus

La Semiótica también reconocida, como semiología o ciencia de los signos, aparece por primera vez en la segunda mitad del siglo XIX en los trabajos realizados por el filósofo estadounidense C. S. Peirce y el lingüista suizo Ferdinand de Saussure. Ambos basaron sus teorías en la distinción fundamental dentro del signo entre significante y significado, es decir, entre la forma escrita del signo y lo que representa.

En la Matemática estos signos aparecen en forma de representaciones las cuales juegan un rol fundamental en los procesos de construcción de conceptos, por lo que son importantes en la enseñanza, aprendizaje y comunicación del conocimiento matemático.

Al analizar los registros de representación semiótica y las funciones semióticas que la relacionan en problemas relativos a la búsqueda de la primitiva de funciones así como al tratamiento del significado de la integral definida e indefinida se pretende, dilucidar cuáles de los registros de representación son de mayor peso a la hora de incorporar o darle sentido a dichos conceptos y a sus aplicaciones. Buscamos respuestas a:

¿Cuáles son los distintos registros de representación puestos en juego en la solución del problema? ¿Cómo se suceden? ¿Cómo aparecen y cuál es la necesidad de su generalización?

Introducción

Una de las razones que dificultan el aprendizaje de *las matemáticas* es porque se *expresan en un lenguaje* especial, que es un dialecto o jerga del lenguaje natural (en nuestro caso, español), *en el que no deben caber las ambigüedades ni la posibilidad de interpretaciones diversas*.

El cuarto estadio de refinamiento en el lenguaje es el matemático: un refinamiento del lenguaje natural y la escritura, especialmente adaptado para describir relaciones entre fenómenos. Es el lenguaje sobre el cual se apoya la ciencia. Parte con elementos para describir la individuación y la contabilización de objetos, la creación y especificación de escalas de medidas, y la descripción detallada de relaciones de dependencia y correlaciones entre diferentes factores. Factores que pueden ser tanto de naturaleza cuantitativa como cualitativa. Este refinamiento del lenguaje y la escritura permite especificar en forma detallada relaciones bien determinadas, muy precisas, así como relaciones con componentes aleatorios. Producto del desarrollo de los últimos milenios de civilización, el poderoso lenguaje matemático ha experimentado en los últimos siglos un desarrollo exponencial.

Para entender y aprender las matemáticas es necesario conocer su idioma, pues en caso contrario, aunque se digan cosas muy sencillas, no se entenderían.

Algunos ejemplos que hacen del lenguaje matemático un lenguaje especial son los siguientes:

1. En el lenguaje natural no se utiliza el *cero* como número.

2. En el lenguaje matemático, una *recta* es el ejemplo más sencillo de curva.

3. En el lenguaje natural, sumar es aumentar y restar es disminuir. En el lenguaje matemático, *sumar* es aumentar o disminuir (si se suma un número negativo).

4. En el lenguaje natural, ser iguales es ser indistinguibles. En el lenguaje matemático, una *igualdad* es una equivalencia.

5. Cuando se dice *un número*, en el lenguaje natural se refiere a uno cualquiera determinado, mientras que en el lenguaje matemático se refiere a cualquier número.

6. En el lenguaje matemático una *curva simple* es una curva que no se corta a sí misma, aunque su forma sea extraordinariamente complicada.

Si a esto se agrega que el significado de determinados símbolos u objetos matemáticos depende de múltiples factores no es raro entonces que cueste tanto trabajo interpretar una fórmula y aplicarla a casos particulares. Mayor dificultad aún se presenta si esa fórmula está exigiendo un proceso de integración y se desea llegar a un resultado exacto. Partimos de que frecuentemente el estudiante solamente distingue que apareció un nuevo símbolo delante de la función y que de alguna manera el proceso que representa está relacionado con la derivada de la misma, pero aún no logra comprender de que manera y mucho menos al obtener la primitiva de algunos casos sencillos logra entender el significado de $\int f(g(x)g'(x)dx = F(g(x)) + c$, donde F es una anti derivada de f para lograr generalizaciones necesarias de las tablas que ya conoce. Agregue a esa problemática el hecho de que las aplicaciones físicas y geométricas en la mayoría de los casos están relacionadas con la integral definida y se necesita usar otra fórmula (segundo teorema fundamental del cálculo) cuyo significado no fue asimilado nunca porque la representación de ese objeto no fue registrada en su momento con suficiente solidez por parte del estudiante.

Desarrollo

En el análisis y estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se observa, últimamente, que gran parte de las investigaciones en Didáctica de la Matemática se desarrollan alrededor del uso de nociones que permiten materializar los conceptos matemáticos mediante diferentes conjuntos de símbolos y gráficos.

Duval (1988), hace referencia a las representaciones mentales y a las representaciones semióticas y sostiene que el desarrollo de las representaciones mentales se lleva a cabo como una interiorización de las representaciones externas.

Las representaciones matemáticas se entienden como herramientas (signos o gráficos) que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos, con las cuales los sujetos registran y comunican su conocimiento. Esto es, las estructuras matemáticas adquieren significado para el sujeto mediante el trabajo con las representaciones, y de aquí surge su interés didáctico. No es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de *representación* en Matemática.

Dentro de las formas convencionales de representación, suelen distinguirse dos familias de sistemas: representaciones simbólicas y gráficas. Las representaciones simbólicas son de carácter alfanumérico. Se pueden simular mediante programas informáticos y la sintaxis se describe por reglas de procedimientos. Las representaciones gráficas incluyen las de tipo figurativo, de carácter analógico y su sintaxis viene dada por reglas de composición y convenios de interpretación. Los registros semióticos incluyen ambas cosas.

La representación pone en consideración el objeto *representante* (símbolo o representación) y el objeto *representado* (conceptos o contenidos conceptuales) que Godino y Batanero (1994) denominan, respectivamente, *significante* y *significado*.

No existe conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación. Sin embargo, Duval (1988) establece que no se deben confundir los objetos matemáticos con su representación, y define los registros de representación como un medio de expresión que se caracterizan por signos propios y por la forma en que se organizan. Por ejemplo, una palabra escrita, una notación, un símbolo o una gráfica representan a un objeto matemático. Un registro está constituido por signos (símbolos, íconos o trazos). Constituyen los grados de libertad que puede disponer un sujeto para objetivarse él mismo una idea aún confusa, un sentimiento latente, para explorar las informaciones o para comunicarlas a un interlocutor. Es cierto que cambiar la forma de una representación en matemática es difícil y a veces imposible para los alumnos, y que la comprensión de un contenido pareciera limitada a la forma de representación utilizada. En cuanto al análisis del desarrollo de los conocimientos y de los obstáculos hallados en los aprendizajes fundamentales relativos al razonamiento, a la comprensión de textos y a la adquisición de tratamientos lógicos y matemáticos, Duval (1988) pone de manifiesto tres fenómenos estrechamente vinculados que deben tenerse en cuenta en la relación de enseñanza-aprendizaje:

❖ *Diversificación de los registros de representación semiótica*. El lenguaje natural y las lenguas simbólicas no pueden considerarse como formando un único y mismo registro, así como tampoco los esquemas, los gráficos cartesianos, las tablas o las figuras geométricas, los cuales son sistemas de representación diferentes entre sí.

❖ *Diferenciación entre representante y representado*. Generalmente, esta diferenciación se asocia con la comprensión de lo que una representación representa y así permite integrarlas con otras representaciones.

❖ *Coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica*. La mayor dificultad para la coordinación de registros radica en la importancia de los fenómenos de no-congruencia entre las representaciones en diferentes sistemas semióticos.

Al analizar las relaciones enseñanza-aprendizaje en matemática se hace necesario explicitar los distintos tipos de objetos a los que se recurre para describir la actividad matemática y los procesos que de dicha actividad resultan. Una manera de llevar esto a cabo es observar y analizar qué proponen los textos de matemática respecto de una determinada temática. Tendremos en cuenta para el análisis del problema propuesto las siguientes entidades comentadas por Godino, J. D., Recio, A. M. (1998):

❖ *Lenguaje* (términos, expresiones, notaciones, gráficos, tanto oral como escrito). Esto es, las representaciones a las que hace referencia Duval.

❖ **Situaciones* (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas, intramatemáticas, ejercicios,...).

❖ *Conceptos:* Definiciones o descripciones (operar, algoritmos, técnicas de cálculo).

❖ *Propiedades:* Enunciados o proposiciones.

La actividad matemática surge cuando el sujeto se enfrenta a situaciones problemáticas en cuya solución hace uso de elementos ostensivos e intensivos de los que dispone. Godino y Batanero (1994), denominan "entidades actuativas" a las acciones que realiza el sujeto en la búsqueda de una solución.

Consideramos, en la actividad matemática, los elementos ostensivos, extensivos e intensivos. Los elementos ostensivos son cualquier representación material usada en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, tablas, gráficos) y las entidades lingüísticas/notacionales. En los extensivos incluimos las entidades fenomenológicas como situaciones-problemas, aplicaciones. Y como elementos intensivos, las ideas matemáticas, abstracciones, generalizaciones (conceptos, proposiciones, teorías).

La relación entre la actividad matemática y los procesos de difusión del conocimiento se da a través de las funciones semióticas, que permiten formular en términos semióticos el conocimiento matemático.

Resulta imprescindible por tanto, a partir del enfoque anterior, revisar la relación entre los objetos matemáticos del tema Cálculo integral y su representación, con el objetivo de que se alcancen conceptos matemáticos más profundos, elaborados y aplicables.

En este tema hay un trabajo realizado por García, (2006), quien plantea:

> El nexo símbolo objeto en la integral definida presenta diferentes variaciones de acuerdo a la aplicación de que se trate, variaciones que se pueden comprender a través de la resolución de la contradicción que se manifiesta entre el carácter general y el carácter singular de la semiótica de la integral definida. Estas tienen como elemento común la presencia del núcleo invariante de la integral en cada una de sus aplicaciones y los cambios están determinados, en primera instancia, por la región sobre la que se integra, ya sea lineal, superficial o volumétrica.

Esta autora hace una diferenciación por niveles de la siguiente forma:

1er. Nivel

- Relación directa símbolo objeto.
    - El símbolo: $\int f(x)dx$ representa el objeto F(x) + C, familia de primitivas de la función f(x).

2do. Nivel

- Relación del símbolo con dos objetos.

- El símbolo: $\int_a^b f(x)dx$ Implica la determinación de una primitiva, pero además representa el objeto F(b) – F(a), teorema fundamental del cálculo.

3er. Nivel

- Relación del símbolo con tres objetos.
  - El símbolo: $\int_a^b f(x)dx$ representa los elementos contenidos en el nivel dos y además, el área bajo la curva f(x) en el intervalo [a, b] en el cual f(x) es mayor o igual que cero.

4to. Nivel

- Relación del símbolo con una variedad de objetos.

En el caso de las integrales dobles y triples se enfrenta una situación análoga.

Además, esta autora aporta un modelo y una metodología para su utilización que permite emplear todos estos niveles en la resolución de numerosos problemas de temas relacionados con la integral.

Un aspecto también importante en el trabajo desarrollado por García es la determinación de la contradicción que se manifiesta entre el carácter general y el carácter singular de la semiótica de la integral definida, dado que el núcleo invariante de este concepto, permite interpretar la semiótica del concepto tanto de modo general como particular.

La solución de esta contradicción en el plano didáctico, permitió dinamizar el modelo y determinar sus regularidades, lo cual posibilitó a su vez establecer la metodología pertinente para su aplicación. El modelo se apoya en el uso de las TIC, cuyo uso se encuentra fundamentado en el desarrollo de la investigación y su aplicación se hace explicita en la metodología elaborada.

La metodología en cuestión se desarrolla en dos etapas, de acuerdo a la estructura del modelo, esto es la apropiación del concepto de integral, donde se transita por los niveles de complejidad del 1ro al 3ro, se usa una BOA general, completa y ejecutada de forma independiente por parte de los estudiantes, lo que significa que se indica el camino a seguir, pero se deja libertad al estudiante para recorrerlo (Blanco, 1999), por lo que la orientación se hace de modo que el estudiante se enfoque a lo esencial del contenido, logrando así identificar la unión de infinitos infinitésimos, como el núcleo invariante del concepto de integral definida, lo cual se hace mediante un orden lógico y en una estructura sistémica que se buscó en el contenido de la ciencia matemática, originando la nueva propuesta del programa.

La determinación de los diferentes niveles en los que se da el nexo símbolo objeto, en el caso del concepto de integral, permite una mejor orientación al estudiante y un mejor control por etapas, de su asimilación cuando se encuentra en la etapa de las acciones externas. Aquí se manifiesta la contradicción fundamental en el carácter singular y general del núcleo esencial de la integral definida.

La segunda etapa de la metodología está orientada a la resolución de la situación problema, se transita por los niveles de complejidad del nexo símbolo objeto del 2do al 4to. Se continúa la orientación hacia lo esencial del contenido que se centra en la identificación de su núcleo invariante, identificando en cada aplicación, la semiótica que representa la magnitud física, cuyos infinitos infinitésimos, se procederá a integrar; con lo cual el estudiante pasa de hacer generalizaciones por ampliación del concepto a generalizaciones por variaciones al modelo, incorpora la semiótica tratada en los niveles tres y cuatro y llega a interiorizar a nivel mental la acción de aplicar la integral desde una a tres variables, logrando además una auto orientación sistémica en el contenido de estudio.

Otro autor que evidencia la necesidad de cambiar los enfoques de la enseñanza de la integral definida es James Stewart, cuyo libro es usado como texto básico por los autores de este trabajo.

Algunas consideraciones relacionadas con estos puntos de vistas se refieren a:

Organizar y estructurar el contenido del tema según la secuencia siguiente:

1. Presentar la anti derivada de una función a partir de problemas que justifiquen su necesidad y dejen claro su significado y alcance.
2. Presentar problemas de naturaleza diversa, en áreas como la Geometría, la Física, las Ingenierías; que demuestren la necesidad de determinar magnitudes que caractericen propiedades de objetos o fenómenos, en las que para determinarlas se necesite como una invariante, que la misma se divida en un gran número de partes más pequeñas, que se aproxime cada parte, se establezca su suma y se le calcule su límite siempre que exista. El planteamiento de este tipo de problemas conduce al cálculo de límites de sumas, concepto conocido y utilizado con anterioridad por los estudiantes. Como ejemplos se puede presentar el problema de determinar el área de regiones de un plano, limitadas por el grafico de funciones positivas y continuas, el eje x y rectas verticales que limiten un intervalo de la función, análogamente pueden tratarse el problema de determinar la

longitud de un arco de curva o el problema de determinar el volumen que se obtiene al hacer girar una porción del gráfico de una función continua alrededor de un eje.

3. Denominar el proceso anterior como suma de Riemann y a partir de la misma presentar a la Integral Definida como una representación matemática, destacando de la misma su objeto representante y el objeto representado.
4. Definir la Integral definida, profundizar en su interpretación y enumerar sus propiedades. Precisamente el hecho de que la integral definida constituye un símbolo en su totalidad, y que como significado es un límite, constituye por tanto un número el cual tendrá significados diversos que dependen de la naturaleza del problema que modelan, elemento este fundamental para la comprensión del concepto.
5. Elaborar el teorema fundamental del cálculo en sus dos partes, profundizar en su significado y en la relación que el mismo establece entre la derivación e integración como procesos inversos.
6. Presentar a la Integral Indefinida como una representación matemática, destacando de la misma su objeto representante y el objeto representado. Teniendo como condiciones previas que el estudiante se encuentra familiarizado con la representación del concepto de integral definida. Aquí se retoma el concepto de anti derivada de una función y la relación entre la derivada y la integral manifestada en el teorema fundamental del cálculo en sus dos partes integrantes.
7. Definir la Integral Indefinida, profundizar en su interpretación y enumerar sus propiedades.

En el trabajo con la integral indefinida en muchas ocasiones se presenta el problema de que el estudiante olvida sumar +c (c- constante) en la respuesta, y no es porque la tabla está escrita sin ese detalle, en gran medida consideramos, que de acuerdo con el trabajo que hasta el momento se viene realizando con este contenido en la asignatura, muy pocas veces se grafica una familia de curvas que representara el conjunto de primitivas de cierta función. Este es un ejemplo concreto que nos advierte sobre la necesidad de utilizar diferentes registros al abordar un determinado objeto matemático para contribuir a su comprensión.

Por otra parte, el teorema $\int f(g(x)g'(x)dx = F(g(x)) + c$ no podrá tener significado para el estudiante hasta que no realice un estudio de casos particulares, entre otros:

1) $\int f(x)f'(x)dx = \frac{f^2(x)}{2} + c$

2) $\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + c$

3) $\int sen(g(x)g'(x)dx = sen(g(x)) + c$

A esto se suma que los estudiantes adquieren los principales conceptos con gran dificultad pero es peor cuando no conocen sus propiedades, referidas en este caso a la linealidad de la integral indefinida y su relación con el concepto de diferencial de la función.

Tratar en este tema los casos que no resulta posible recurrir a la primitiva de la función (por no existir o por no estar dada la función del integrando en forma analítica) para resolver el problema y la integral que se plantea es definida, se suele recurrir a métodos numéricos, lo cual conlleva a un cambio en el registro de representación, elementos estos incluidos en otras asignaturas de la disciplina de Matemática en los currículos de las distintas carreras de ciencias técnicas.

Aumentar en los documentos auxiliares a la docencia y uso de soporte tecnológico el número de problemas aplicados que requieren el uso de este modelo matemático para incrementar el uso de diferentes registros semióticos.

Utilizar la metodología propuesta por Laura García en el estudio de las integrales múltiples y sus aplicaciones.

Referencias bibliográficas

Duval, R. (1988). *Gráficas y ecuaciones. La articulación de dos Registros*. Estrasburgo: Universidad Luis Pasteur, IREM.

García, L. (2006). *Modelo para el desarrollo de la habilidad de resolución de problemas a través del cálculo integral en FIME, basado en los niveles de complejidad del nexo símbolo objeto.* Tesis de Doctorado no publicada. México.

Godino, J. D., Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématique,*14 (3), 325-355.

Godino, J. D., Recio, A. M. (1998). Un modelo semiótico para el análisis de las relaciones entre pensamiento, lenguaje y contexto en Educación Matemática*, Proceedings of the 22 th International Conference of PME,* 3, 1-8.

Montecinos H. (2008). *El lenguaje matemático*. Disponible en: www.icalquinta.cl

Stewart, J. (2006). *Cálculo con Trascendentes Tempranas. Parte 1 y 2*. La Habana: Félix Varela.