



[i.cemacyc.org](http://i.cemacyc.org)

# I CEMACYC

I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe

6 al 8 noviembre. 2013

Santo Domingo, República Dominicana



## Conocimiento didáctico-matemático del maestro que enseña matemáticas

Hilduara **Velásquez** Echavarría  
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia  
Colombia

[sarcavelasquez@gmail.com](mailto:sarcavelasquez@gmail.com)

José Wilde **Cisneros**  
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia  
Colombia

[Jose.wilde@gmail.com](mailto:Jose.wilde@gmail.com)

### Resumen

Este taller discute sobre los conocimientos que debe tener un maestro o maestra que enseña matemáticas para asumir su labor. Se discuten los modelos del conocimiento del maestro propuestos por Shulman, Ball y Godino, para analizar las diversas dimensiones del conocimiento del maestro que se requieren para describir, explicar, valorar y guiar el avance de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Las actividades están orientadas tanto a diferenciar el conocimiento común del conocimiento especializado como a analizar la idoneidad didáctica de las situaciones propuestas a los estudiantes, por parte de los maestros.

*Palabras clave:* Conocimiento didáctico-matemático, Conocimiento pedagógico del contenido, Conocimiento común, Conocimiento especializado, Idoneidad didáctica.

### Presentación

El taller del conocimiento didáctico-matemático del maestro que enseña matemáticas está orientado a maestros-de matemáticas- en formación inicial y continuada. Shulman(1987) se refiere a este conocimiento como “Conocimiento Pedagógico del contenido” (PCK); el equipo de investigación de Ball (2005) lo denomina “conocimiento matemático para la enseñanza” (MKT); el equipo de Godino (2009) lo denomina “conocimiento didáctico-matemático”. Cada

uno de estos modelos permite analizar las diferentes dimensiones del conocimiento que un maestro debe tener para llevar a cabo el proceso de enseñanza en forma eficiente y eficaz<sup>1</sup>.

En el taller se abordan algunos elementos teóricos y prácticos incluidos en las actividades que se usan a guisa de reflexión. El taller se desarrolla durante tres momentos: en el primero, se proponen tres situaciones matemáticas para ser analizadas por el grupo de participantes; en el segundo momento, los participantes diseñan situaciones para la enseñanza de conceptos matemáticos específicos propuestos por ellos; y durante el tercer momento se discute y analiza colectivamente las propuestas de los participantes.

### **Marco Teórico**

El estudio del conocimiento que deben tener los maestros de matemáticas ha sido un asunto de reflexión e investigación. Diversos investigadores (Shulman, 1986-1987; Ball y colaboradores, 2001-2004-2008; Godino y colaboradores, 2007-2009-2011; Gómez, 2007; Ponte, 2008-2012) han propuesto, desde diversas perspectivas epistemológicas del conocimiento matemático y de la educación matemática, diferentes modelos que han permitido describir, explicar, valorar y guiar el avance de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Shulman (1986–1987) considera “...debe existir un «conocimiento base para la enseñanza» esto es, un conjunto codificado o codificable de conocimientos, destrezas, comprensión y tecnología, de ética y disposición, de responsabilidad colectiva, al igual que un medio para representarlo y comunicarlo” (p.5); conocimiento que debe orientar el quehacer del docente en el aula. El autor propone categorías de conocimientos que un maestro debería tener:

- *Conocimiento del contenido*, la disciplina a enseñar, en este caso las matemáticas.
- *Conocimiento didáctico general*, relacionado con la gestión de la clase, control de normas sociales, relaciones con los niños, estrategias de motivación y organización de la clase.
- *Conocimiento del currículo*, organización de las temáticas, secuenciación de los contenidos, utilización de los materiales y recursos, planeaciones, evaluación y seguimiento del proceso de enseñanza y aprendizaje.
- *Conocimiento de los alumnos*, del contexto, de sus necesidades, intereses, expectativas y de sus características.
- *Conocimiento de los aspectos teleológicos* de la institución educativa donde desempeña su labor docente.
- *Conocimiento pedagógico del contenido (PCK)*<sup>2</sup>, entramado entre la disciplina de estudio y la pedagogía; tiene que ver con la didáctica, el uso de estrategias de aprendizaje y los mediadores del proceso de enseñanza y aprendizaje. Nuestro interés se centra en este conocimiento, que es propio del educador matemático.

El Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK), propuesto por Shulman (1987) ha servido de referencia para otros trabajos de investigación como los de Ball (2000); Ball, Lubienski & Mewborn (2001) quienes han estudiado el proceso de enseñanza en las aulas de matemáticas, y han introducido la noción de “conocimiento matemático para la enseñanza” (MKT)<sup>3</sup>. Hill, Ball, & Schilling (2008) definen el conocimiento matemático para la enseñanza como “el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y

<sup>1</sup> Eficiente-uso de recursos, Eficaz-logro de objetivos (Toranzos, 1996).

<sup>2</sup> Por sus iniciales en inglés: Pedagogical Content Knowledge (PCK).

<sup>3</sup> Mathematical Knowledge for Teaching (MKT).

desarrollo en el alumno” (p.374). Es aquel conocimiento que caracteriza al maestro que enseña matemáticas “Tal conocimiento no es algo que tendría un matemático como virtud por haber estudiado matemáticas avanzadas... más bien es un conocimiento especial para la enseñanza de las matemáticas”. (Ball et ál., 2001, p. 448)

Los autores clasifican el conocimiento del maestro de matemáticas en dos grupos: el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido. En el primer grupo se incluye: el Conocimiento Común del Contenido <sup>4</sup>(CCK), el Conocimiento Especializado del Contenido (SCK), y Conocimiento en el Horizonte Matemático (HCK). Para el conocimiento pedagógico del contenido, se incluyen el Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS), Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT), y Conocimiento del Currículo (Delaney, Ball, Hill, Schilling, & Zopf, 2008).

En ésta categorización del conocimiento del maestro de matemáticas resalta la distinción entre el Conocimiento Común del Contenido (CCK) y el Conocimiento Especializado del Contenido (SCK); el primero se refiere a los conocimientos requeridos para resolver problemas matemáticos, que un matemático, un ingeniero o un sujeto con alguna preparación en matemáticas, podría resolver; el segundo se refiere al conocimiento del maestro que lo faculta para enseñar y para orientar la resolución de problemas matemáticos; este incluye: un ordenamiento de las secuencias con las cuales podrían desarrollarse los diferentes aspectos de un contenido específico, el conocimiento de los errores y dificultades comunes de los estudiantes, las concepciones erróneas, las estrategias utilizadas, ser capaz de valorar la comprensión del alumno y saber cómo evoluciona tal comprensión. Es posible que un adulto informado o, inclusive un matemático, no puedan dar cuenta de la comprensión ni de la evolución de esa comprensión (Hill, Schilling & Ball, 2004).

El “Enfoque Ontosemiótico” del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino, Batanero & Font, 2007) incluye un modelo epistemológico sobre las matemáticas basado en presupuestos antropológicos/ socioculturales, un modelo de cognición matemática sobre bases semióticas, un modelo instruccional sobre bases socioconstructivistas y un modelo sistémico–ecológico que relaciona las anteriores dimensiones entre sí y con el trasfondo sociocultural en que tiene lugar la actividad de estudio y comunicación matemática. El enfoque propone el concepto de “Idoneidad Didáctica”<sup>5</sup> que aborda la “pertinencia” de las diversas actividades propuestas por el maestro durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de un contenido específico.

Un análisis didáctico del proceso de enseñanza debe incluir el contenido matemático, los estudiantes, el profesor, el currículo, el contexto institucional y social, los medios y recursos utilizados. (Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi, 2006) consideran seis criterios para valorar la idoneidad didáctica de los procesos de instrucción matemática: epistémico, cognitivo, mediacional, emocional, interaccional y ecológico.

---

<sup>4</sup> Hemos incluido las siglas en inglés para facilitar la referencia a los artículos mencionados.

<sup>5</sup> Idoneidad didáctica: herramienta que permite el paso de una didáctica descriptiva –explicativa a una didáctica normativa, esto es, una didáctica que se orienta hacia la intervención efectiva en el aula. La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como la articulación coherente y sistémica de seis componentes: Epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica. (Godino et ál., 2006)

*Idoneidad Epistémica.* Conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional en que se realiza el proceso de estudio y la distribución temporal de los diversos componentes del contenido (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos). Esta idoneidad permite valorar si las matemáticas que se enseñan son unas “buenas matemáticas”. (Font, Planas & Godino, 2009, p. 14).

*Idoneidad Cognitiva.* Conocimientos personales de los estudiantes y progresión de los aprendizajes. Su valoración permite identificar antes de iniciar el proceso de enseñanza, si lo que se quiere enseñar concuerda con los conocimientos de los alumnos y, después de la actividad de enseñanza, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar; lo cual permite hacer un paralelo entre lo que se enseña y lo que realmente se aprende.

*Idoneidad Afectiva.* Estados emocionales (actitudes, emociones, creencias, valores) de cada alumno en relación con los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido. Permite valorar el interés, motivación y entusiasmo de los alumnos en el proceso de instrucción.

*Idoneidad Mediacional.* Recursos tecnológicos y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos. Se valora la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción.

*Idoneidad Interaccional.* Patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes y su secuenciación orientada a la fijación y negociación de significados. Se puede valorar si la interacción ha resuelto dudas y dificultades de los alumnos.

*Idoneidad Ecológica.* Sistema de relaciones con el entorno social, político, económico y educativo que soporta y condiciona el proceso de estudio. Se valora la adecuación del proceso de instrucción al Proyecto Educativo Institucional<sup>6</sup>, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional.

## **Metodología**

La participación de los asistentes es clave para la reflexión y análisis del conocimiento didáctico-matemático; las ideas emergentes de las actividades se discuten en pequeños grupos.

Las actividades se desarrollan durante tres momentos; en el primero se presentan tres situaciones matemáticas, cuyo análisis y solución ponen en juego el conocimiento didáctico-matemático del maestro que enseña matemáticas, donde se establece una diferenciación entre el Conocimiento Común del Contenido (CCK) y el Conocimiento Especializado del Contenido (SCK); en el segundo momento, los asistentes diseñan situaciones para la enseñanza de conceptos matemáticos específicos propuestos por ellos, y desde los seis componentes de la Idoneidad didáctica se analiza la pertinencia de las situaciones propuestas; y durante el tercer momento se discute y analiza colectivamente las propuestas de los participantes.

Las reflexiones se orientan hacia el establecimiento de algunas relaciones entre el conocimiento matemático y el conocimiento que se requiere para la enseñanza de las matemáticas. En ellas, se pretende establecer la diferencia entre el conocimiento común y el conocimiento especializado, además de hacer un análisis epistémico de las mismas situaciones,

---

<sup>6</sup> El proyecto Educativo Institucional (PEI): Es el plan de navegación de las escuelas y colegios, en donde se especifican, entre otros aspectos, los principios y fines de la institución, los recursos docentes y didácticos disponibles y necesarios, la estrategia pedagógica, el manual de convivencia escolar, el sistema de evaluación institucional y el sistema general de gestión administrativa y académica. El PEI debe responder a situaciones y necesidades de los estudiantes, de la comunidad local, regional y nacional; además debe ser concreto, factible y evaluable.

en la medida que se identifican los objetos matemáticos puestos en juego, las relaciones entre ellos, los modos de organización y las relaciones ecológicas que se establecen entre los mismos.

**Primer momento.** Se presentan tres situaciones matemáticas, cuyo análisis y solución ponen en juego el conocimiento didáctico-matemático del maestro que enseña matemáticas.

**Situación 1<sup>7</sup>.** ¿Cuál de estos ítems les plantearía a sus estudiantes para introducir el concepto de relaciones orden entre números decimales?; justifique

- a) 0.5      7      0.01      11.4
- b) 0.60    2.53    3.14      0.45
- c) 0.6      4.25    0.565    2.5
- d) Cualquiera de ellos serviría para introducir el concepto.

Ésta actividad se aplicó tanto a maestros en formación de la licenciatura en matemáticas y física, que cursaban VII semestre (2013-1) en la Universidad de Antioquia, como a maestros de matemáticas con varios años de experiencia docente. A continuación se analizan algunas de sus respuestas:

- Maestros en formación: Uno de ellos, considera que el ítem (b) es el más apropiado, porque todos los números tienen igual cantidad de cifras decimales; parece que el maestro busca patrones únicos de formación, lo cual se constituye en un obstáculo epistemológico. Otros, plantean la opción (d), dado que para ellos importa tanto identificar las relaciones de orden, como comparar las cantidades, primero la parte entera y después la parte decimal; en ésta opción los maestros en formación no logran identificar las diferencias entre las opciones ofrecidas.
- Maestros con experiencia docente: Tres de ellos, consideran que el ítem (a) es el más apropiado para introducir el concepto, dado que es el único que contiene un número entero. Los maestros establecen las relaciones de orden por el valor posicional.

Un maestro considera que “cualquiera de ellos serviría para introducir el concepto, ya que el orden se establecerá en relación con la unidad y las partes que se toman de ella, comparando con la unidad y ordenando”<sup>8</sup>.

Es posible que al proponer la actividad a un grupo de estudiantes, se observe que establecen la relación como cantidades de números enteros; para lo cual, en la opción a) identifiquen (a) 5, 7, 1, 114; y su orden sería: 0.01; 0.5; 7; 11.4; lo cual es correcto. En el ítem (b) ocurriría algo similar; pero si se utiliza el mismo criterio en el ítem (c), la ordenación resultante sería incorrecta.

En este tipo de actividades se evidencia el conocimiento Especializado del Contenido (SCK), ya que además del conocimiento matemático se requiere del conocimiento específico para la enseñanza del contenido.

**Situación 2.** ¿Cuál de las siguientes situaciones, NO usaría para introducir el concepto de número racional a partir de la razón? Justifique su elección.

- a) Un estudiante tiene una cuerda cuya longitud corresponde a 3 lápices, pero esa misma longitud, equivale a 12 clip. Otro estudiante tiene una cuerda cuya longitud corresponde a 10 clip y él desea expresar la longitud de su cuerda en términos de lápices.

<sup>7</sup> Tomada de Hill, H., Ball, D., & Schilling, S. (2008).

<sup>8</sup> Respuesta textual de un maestro con experiencia docente.

b) Con las regletas de Cuisenaire, se representa el símbolo  $\frac{1}{2}$  de dos formas.

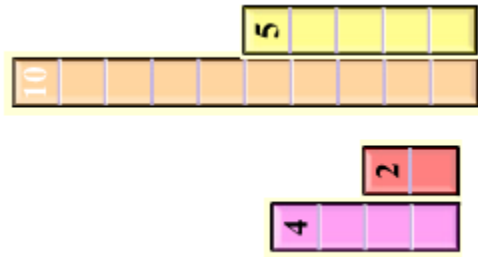


Figura 1. Regletas de Cuisenaire.

c) Tomando como unidad de medida el siguiente paralelogramo,

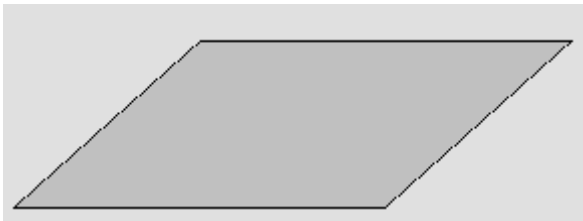


Figura 2. Paralelogramo.

¿Qué cantidad del área del paralelogramo de la Figura 2 representa el área del triángulo de la Figura 3?

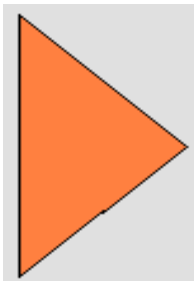


Figura 3. Triángulo.

d) Señale  $\frac{1}{3}$  de cada uno de los conjuntos de esferas.

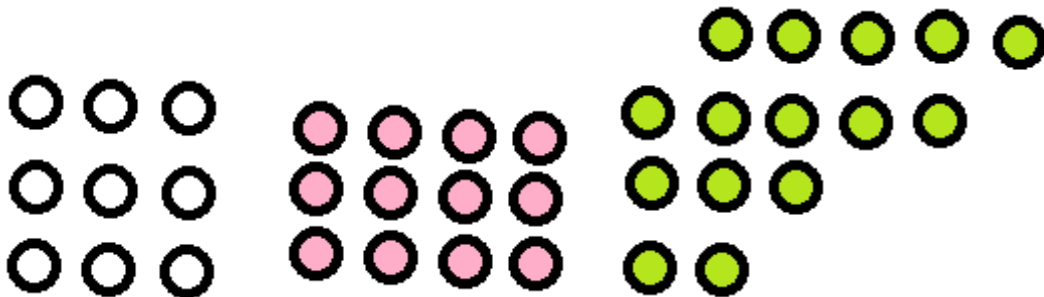


Figura 4. Conjuntos de esferas.

**Situación 3.** Un estudiante va a construir la cola de una cometa, y cuenta con una cinta de  $\frac{4}{5}$  de metro. El estudiante solo utiliza  $\frac{6}{8}$  de metro. ¿Qué cantidad le queda de cinta?

Diseñe una representación de la situación que permita explicar a los alumnos. ¿Cuáles contenidos matemáticos se abordan en ésta situación?

**Segundo momento.** Diseño de situaciones para la enseñanza de conceptos matemáticos específicos propuestos por los participantes. Los temas que se proponen son:

- a) Relaciones de orden entre números fraccionarios
- b) División de fracciones
- c) Multiplicación de números naturales

En la Tabla 1 se presentan los componentes de la idoneidad didáctica (Godino, 2011), que fueron adaptados para realizar un análisis de las situaciones propuestas.

Idoneidad	Indicadores
Idoneidad Epistémica	¿La situación planteada corresponde al nivel de desarrollo de los niños? ¿Se propician diferentes esquemas de representación: verbal, gráfico, simbólico...? ¿Se favorece la generación y negociación de conceptos, procedimientos y argumentos?
Idoneidad Cognitiva	¿Los niños tienen los conocimientos necesarios para abordar la solución de la situación? ¿Ha considerado otras situaciones para discutir más el concepto abordado, en caso de no lograrse el objetivo? ¿El proceso evaluativo tiene en cuenta los diferentes niveles de comprensión de los niños?
Idoneidad Mediacional	¿Los materiales utilizados (manipulativos físicos y virtuales) son los apropiados para resolver la situación? ¿El tiempo previsto es suficiente para resolver la situación? ¿El aula, la distribución de los niños y el horario son los apropiados?
Idoneidad Ecológica	¿La situación planteada hace parte del contexto sociocultural de los niños? ¿Está orientada a las directrices curriculares de la institución? ¿Permite explorar conexiones intra e interdisciplinarias?
Idoneidad Afectiva	¿Es significativo y motivante para los niños resolver la situación? ¿Permite valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional? ¿Cómo promueve la autoestima, evitando el rechazo, o miedo hacia las matemáticas?
Idoneidad Interaccional	¿El uso de los diferentes recursos y argumentos permiten captar el interés y la atención de los niños? ¿Permite que los niños discutan, argumenten y confronten las soluciones? ¿La situación enfatiza los conceptos clave del tema?

Tabla 1. Componentes de la Idoneidad didáctica

**Tercer momento.** Discusión y análisis de las propuestas de respuesta a las temáticas sugeridas en la actividad anterior.

## Resultados

En las discusiones y análisis que se generan en el taller, se espera que el maestro reflexione no solo sobre el conocimiento del contenido, sino sobre los conocimientos que se requieren para la enseñanza de los mismos.

En el segundo momento del taller se espera que el maestro diseñe situaciones adecuadas para presentar ciertos temas matemáticos a los niños, además de discutir sobre la pertinencia de las propuestas teóricas de Ball et al., (2008) y de Godino (2009).

Se espera que los maestros en formación inicial y continuada de matemáticas, reflexionen sobre la complejidad de procesos de estudio matemático, sobre sus propias prácticas de enseñanza y discutan sobre la idoneidad didáctica según la propone Godino (2009).

## Conclusiones

Los niños pueden presentar dificultades en el aprendizaje, debido a la complejidad del conocimiento matemático, a las creencias epistemológicas de los maestros y al diseño de actividades de aprendizaje.

Aún en actividades matemáticas aparentemente sencillas se manifiesta la complejidad de la estructura del conocimiento matemático y la necesidad de un “conocimiento matemático para la enseñanza” para abordarla. Es deseable por tanto generar espacios de formación continuada de maestros, donde se reflexione sobre los conocimientos que se requieren para asumir el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Se requiere diseñar e implementar instrumentos que permitan valorar los conocimientos del maestro, para generar procesos de transformación de las prácticas en la escuela.

El análisis del conocimiento didáctico-matemático del maestro que enseña matemáticas, puede contribuir al diseño de programas de formación de maestros, a la implementación de normas y de políticas educativas que podrían ayudar a mejorar el proceso de formación matemática de los niños.

## Referencias

- Ball, D. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51, 241-247
- Ball, D., Lubienski, S., & Mewborn, D. (2001). The unsolved problems of teachers' mathematical knowledge. *Research on teaching mathematics, Handbook of research on teaching*, (4<sup>th</sup> ed), 433-456.
- Ball, D. (2004). What are teachers learning?. National Council of Supervisors of Mathematics, Philadelphia, PA.
- Ball, D., Hill, H., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: ¿Who know mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29(1), 14-17, 20-22, 43-46.
- Delaney, S., Ball, D., Hill, H., Schilling, S., & Zopf, D. (2008). "Mathematical knowledge for teaching" Adapting U.S. measure for use in Ireland. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11 (3), 171-197.
- Font, V., Planas, N., & Godino, J. D. (2009). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33 (2).
- Godino, J., Bencomo, D., Font, V., & Wilhelmi, M. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, XXVII (2),



221-252.

- Godino, J., Contreras, A., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.
- Godino, J., Batanero, C., & Font, V., (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39, (1-2), 127-135.
- Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Iberoamericana de educación matemática*, 20, 3-31.
- Godino, J.D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. CIAEM. Recife, Brasil.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. [Tesis doctoral]. Universidad de Granada, Departamento de didáctica de la matemática, España.
- Graeber, A., & Tirosh, D. (2008). Pedagogical content knowledge: ¿Useful concept or elusive notion? In P. Sullivan & T. Woods (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education: Vol. 1. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development*, 117–132. Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.
- Hill, H., Schilling, S., & Ball, D. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *Elementary School Journal*, 105, 11–30.
- Hill, H., Ball, D., & Schilling, S. (2008). Unpacking “pedagogical content knowledge”: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
- Ponte, J., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. En L. D. English (Ed), *Handbook of International Research in Mathematics Education –Second Edition*, 225-263.
- Ponte, J. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática*, 93-98. Barcelona: Graó.
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of new reform. *Harvard Educational Review*, 57 (1), 1-22.
- Toranzos, L. (1996). Evaluación y calidad. *Revista iberoamericana de educación*, 10, 63-78.