I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Cálculo Diferencial e Integral e Tecnologias Digitais: Perspectivas de Exploração no Sofware GeoGebra

Andriceli **Richit**
Unesp – Rio Claro, SP
Brasil
andricelirichit@gmail.com

Maria Margarete do Rosário **Farias**
Unesp – Rio Claro, SP
Brasil
margarete333@hotmail.com

Resumo

A ênfase algébrica dada ao longo do tempo nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral não oportunizou que tratamentos gráficos e numéricos fossem privilegiados, visto a ausência de softwares que possibilitassem uma abordagem diferenciada aos conceitos inerentes a esta disciplina (Richit, 2010, Guimarães, 2001). Contudo, iniciativas no mundo inteiro têm dedicado esforços e desenvolvido softwares que possibilitam explorações qualitativamente diferentes para conceitos de Cálculo a partir de representações gráficas, numéricas ou algébricas envolvendo visualização, a simulação, o aprofundamento do pensamento matemático, conjecturas e validações, etc. Deste modo, a incorporação das tecnologias digitais na aula de Cálculo remove um pouco o fardo da manipulação algébrica, possibilitando a transição entre a ação física (interação do estudante com a tecnologia) e a representação matemática de um conceito. Assim, a proposta de oficina aqui apresentada objetiva explorar conceitos de Cálculo (Funções, Limites, Derivadas e Integrais) em uma perspectiva de investigação com o software GeoGebra.

Considerações Introdutórias

Iniciamos este artigo, apresentando algumas pesquisas brasileiras que articulam Tecnologias Digitais e Cálculo Diferencial e Integral destacando características que emergem quando os conceitos inerentes ao Cálculo Diferencial e Integral são trabalhados em uma perspectiva de investigação possibilitada por softwares e outros recursos tecnológicos, privilegiando a experimentação, a visualização, o levantamento de hipóteses e conjecturas. Na sequência, apresentamos as características metodológicas da oficina aqui proposta, além de atividades que serão desenvolvidas no decorrer da mesma. Encerramos este artigo com algumas considerações finais.

Cálculo Diferencial e Integral e Tecnologias Digitais: Tecendo considerações sobre os processos de ensino-aprendizagem a partir de estudos desenvolvidos

Atualmente, o Cálculo Diferencial e Integral assume o posto de uma das grandes realizações da humanidade, cujas ideias datam de aproximadamente 350 anos. Assim, ao longo do tempo, o estudo de Cálculo foi enriquecido por novas metodologias, começando com as concepções originais de Leibniz e Newton sobre infinitesimais e limites e caminhando para uma variação de métodos formais modernos, a partir de abordagens intuitivas que caminham para abordagens numéricas, simbólicas e gráficas possibilitada, mais recentemente pela utilização das tecnologias digitais. O resultado é uma larga escala de pontos de vista a respeito de como o Cálculo deve ser concebido e ensinado (Tall, Smith e Piez, 2008).

A literatura de pesquisa a qual nos remetemos será considerada para evidenciar este ponto de vista, essencialmente no que diz respeito ao fato de que abordagens bem projetadas, utilizando recursos das tecnologias digitais podem produzir "ganhos" [1] consideráveis nos processos de ensinar e aprender Cálculo.

Olimpio Junior (2005), a partir da integração oralidade, escrita e Informática, investigou as compreensões emergentes sobre conceitos de Função, Limite, Continuidade e Derivada produzidos por ingressantes em um curso de Matemática. Como resultados de seus estudos, o autor sugere que os conflitos emergentes poderiam ter suas raízes numa limitada compreensão conceitual de Função. Além disso, essa pesquisa sugere, também, uma maior e mais intensiva exploração da natureza dinâmica do Cálculo Diferencial e Integral por meio da utilização de softwares gráficos.

Javaroni (2007) também nos apresenta uma valiosa contribuição, por meio da qual buscou analisar as possibilidades de ensino e aprendizagem de introdução às Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). Para tanto, realizou uma abordagem qualitativa de alguns modelos matemáticos (modelos de objeto em queda, de crescimento populacional de Malthus, de crescimento populacional de Verhulst e da lei de resfriamento), auxiliada pelas tecnologias digitais. A interação entre os alunos e as mídias utilizadas propiciou novas possibilidades para a abordagem qualitativa dos modelos estudados, levando assim a sugerir a necessidade de repensar

[1] Modos alternativos na busca de solução de problemas.

o ensino das equações diferenciais ordinárias, enfatizando o aspecto geométrico de modelos matemáticos, além do aspecto algébrico.

Menk (2005) apresenta uma investigação acerca das possíveis contribuições do software Cabri-Géomètre II na exploração de problemas de Máximos e Mínimos, principalmente aqueles que, de alguma forma, estão relacionados aos conceitos e às propriedades geométricas. O estudantes engajados na investigação puderam construir, experimentar, formular, testar, validar ou refutar hipóteses relacionadas às condições do problema de uma forma dinâmica e diferente da habitualmente utilizada por eles nas aulas da disciplin. Com base nos resultados observados, a autora acredita que esse procedimento possa criar condições, que possibilitam facilitar a interpretação, a observação, a análise e a resolução dos problemas considerados. A forma como foram desenvolvidas as atividades, privilegiando a simulação e a visualização, permitiram criar situações nas quais se pôde "ver" o processo de *como* se desenvolveu o raciocínio dos alunos em várias situações.

A partir do panorama apresentado compreendemos que a transição entre a ação física (representada por interações de estudantes com diversos recursos informáticos), e a representação matemática tem fornecido suporte para idéias, as quais têm potencial tanto para serem usadas em aplicações do Cálculo, quanto para o desenvolvimento da teoria formal, colaborando, assim, com os processos de aprendizagem dos estudantes.

A transição acima referenciada pôde ser evidenciada em Scucuglia (2006). Esse autor discutiu, em sua dissertação de Mestrado, como Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas investigam o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). Nesse trabalho, ao explorar exemplos de funções polinomiais com o comando de integração definida da calculadora gráfica, estudantes estabeleceram conjecturas sobre o TFC antes mesmo da sua formalização matemática. Nessa abordagem o autor propôs que, inicialmente, fossem utilizadas notações mais simplificadas envolvendo os programas da calculadora gráfica antes que uma simbologia mais formal (padronizada pela matemática acadêmica) fosse discutida por eles. Igualmente, o autor sugere que esta abordagem possibilitou o engajamento gradativo dos estudantes em discussões matemáticas dedutivas a partir de resultados obtidos experimentalmente com as atividades propostas na pesquisa.

O autor trabalhou na perspectiva de experimentos de ensino, e uma das atividades desenvolvidas consistia em encontrar os valores das Integrais Definidas nos intervalos dados, utilizando o comando $\int f(x)dx$ da Calculadora TI-83. Assim, os estudantes calculavam o valor das Integrais com relativa facilidade. Contudo, durante o desenvolvimento das atividades, os estudantes tiveram algumas dificuldades em encontrar o valor da Integral no intervalo [a,b]. Assim, a intervenção e mediação do pesquisador se fizeram necessárias para que os estudantes chegassem ao resultado. Após várias conjecturas os estudantes chegaram à conclusão de que o valor da Integral da função real f: $[a, b] \rightarrow \Re$, definida por $f(x) = 2x$, para todo $x \in \Re$, era $b^2 - a^2$. Assim, seguindo o mesmo raciocínio, os estudantes encontraram a integral para as funções reais f: $[a, b] \rightarrow \Re$ e g: $[a, b] \rightarrow \Re$, definidas por $f(x) = 3x^2$ e $g(x) = 4x^3$, para todo $x \in \Re$ com maior facilidade.

Na sequência do experimento de ensino, Scucuglia (2006) buscou comparar juntamente com os estudantes cada valor encontrado para a Integral, no intervalo dado com a função de origem. Por exemplo, apontou que para a função real f: $[a, b] \rightarrow \Re$, definida por $f(x) = 2x$, para todo x $\in \Re$ o valor da integral era $b^2 - a^2$. Destarte, buscou fazer os estudantes perceberem tais padrões envolvendo $f(x) = 3x^2$ e $b^3 - a^3$ e também $g(x) = 4x^3$ e $b^4 - a^4$. Ao final da atividade, os estudantes conjecturaram que a Integral de uma função f(x) em um intervalo [a, b], com antiderivada F(x) é "F aplicada em b menos a F aplicada em a". Isto é, F(b) – F(a).

A interação entre estudantes e o pesquisador e as diferentes mídias utilizadas no desenvolvimento da atividade exibida aponta que a coordenação de diferentes mídias na abordagem de conceitos de Cálculo traz, também, possibilidades para o entendimento e compreensão, e mais ainda, para a formalização de conceitos matemáticos (Scucuglia, 2006).

Outro aspecto muito importante no que tange a construção de conhecimento inherentes aos pocessos de ensino e aprendizagem está pautado nas representações matemáticas e suas coordenações, as quais possibilitam um maior entendimento, e, por conseguinte, uma compreensão ampliada dos conceitos matemáticos. Este aspecto é evidenciado por Farias (2007) em sua dissertação de mestrado. A autora realizou um estudo epistemológico, em uma perspectiva Semiótica, das representações matemáticas mediadas por softwares educativos. Para tanto buscou investigar e ressaltar as diferentes formas representativas de conceitos matemáticos, e suas dimensões didático-pedagógicas no Ensino de Cálculo.

Com este estudo, Farias sugere que ao explorarmos o universo das representações, agregamos valores à constituição do conhecimento de futuros professores de Matemática. Além disso, aponta a importância de conscientizar estudantes/professores da perspectiva semiótica implícita à abordagem de transitar entre várias representações matemáticas no processo de investigação e interpretação de conceitos, por meio da utilização de softwares adequados à disciplina, proporcionando a estes novas formas de abordagem dos conteúdos e permitindo um maior grau de compreensão.

Essa coordenação e mobilidade das representações matemáticas podem ser evidenciadas no desenvolvimento de uma atividade envolvendo o conceito de continuidade de função empreendido por Farias (2007) junto aos estudantes engajados em sua pesquisa. A atividade consistia em avaliar a continuidade da função real $f : [a,b] \rightarrow \Re$, definida por $f(x) = \begin{cases} kx^2 + 1 \; se \; x \leq 1 \\ 2x - 3 \; se \; x > 1 \end{cases}$, para todo x $\in \Re$. Como proposto na atividade, os estudantes iniciaram a discussão sobre a continuidade da função afirmando que esta era contínua. Contudo, logo perceberam que a referida função era definida por partes e dependia de um parâmetro k, o qual iria interferir na continuidade desta função.

Na sequência da atividade os estudantes plotam o gráfico, e lançam mão do recurso "animação" do software Winplot, para visualizar o que haviam conjecturado a respeito do parâmetro k.

Notamos que antes dos estudantes plotarem o gráfico de f, a maior parte deles havia afirmado que a mesma era contínua. Contudo, ao utilizarem o comando "animação" do Winplot e variar o parâmetro k, os estudantes puderam perceber que apenas para k= –2 a função tornava-se contínua.

Por meio da visualização os estudantes verificaram que para k = –2 a função tornava-se contínua, e que o limite da função supracitada era igual a – 1. Para comprovar o que haviam observado, os estudantes utilizaram-se de outra forma representativa (a algébrica) para justificar os resultados visualizados no Winplot.

Após a investigação e exploração por meio do software Winplot as dúvidas dos estudantes foram esclarecidas. Além disso, por meio da coordenação das representações matemáticas (gráfica e algébrica), puderam refletir sobre o conceito de Continuidade de uma Função, e repensar sobre "o engano" que inicialmente haviam cometido a respeito da continuidade da mesma. Atividades como estas são comumente trabalhadas na maioria dos cursos de Cálculo, mas sem a abordagem tecnológica, ao mesmo tempo que a abordagem dada (algébrica) acaba deixando muitas lacunas em seus estudos.

É nessa perspectiva, que entendemos que as tecnologias propiciam investigações matemáticas, pois, com uma única atividade podem emergir outras perguntas, problemas, observação de regularidades, investigações e outros conceitos podem ser retomados ou abordados. Além disso, o professor de Cálculo tem aí uma possibilidade de tornar a abordagem de certos conceitos significativa para os estudantes, gerando novas compreensões em função da ampliação das formas de interação aluno-conteúdo, comparando-se com estratégias metodológicas clássicas, que priorizam a abordagem estática do conteúdo. Sobre isso, Richit, Richit e Tomkelski (2009, p.6),

> a criação de ambientes de aprendizagem, baseados no uso de tecnologias, pode propiciar distintas abordagens para o conteúdo matemático, contribuindo com a construção do conhecimento dos estudantes. Nesse sentido, cabe ao professor proporcionar aos estudantes tais cenários de aprendizagem, pois é uma forma de privilegiar os diferentes estilos e ritmos de aprendizagem dos alunos.

Características Metodológicas da Oficina

A proposta de oficina aqui apresentada tem por objetivo explorar conceitos de Cálculo Diferencial e Integral (Funções, Limites, Derivadas e Integrais) em uma perspectiva de investigação matemática tomando como apoio o software GeoGebra. O desenvolvimento da mesma dar-se-á em Laboratório de Informática, com o software GeoGebra devidamente instalado e contará com 20 participantes. Principiaremos a referida oficina com a apresentação do software fazendo alguns comentários de suas potencialidades, comandos. Dando sequência a oficina, realizaremos uma atividade visando à familiarização dos participantes com os comandos e recursos do software. Em seguida, desenvolveremos junto aos participantes, algumas atividades, de caráter investigativo envolvendo Funções, Limites, Derivadas e Integrais. Na próxima seção apresentamos uma das atividades que serão desenvolvidas durante a oficina.

Apresentação e Desenvolvimento das Atividades

Nesta seção, apresentamos um exemplo de atividade a ser desenvolvida no decorrer da oficina.

Atividade – Explorando geometricamente o Conceito de Derivada de uma Função[2]

[2] Esta atividade foi baseada na atividade disponível em: http://ensinolivre.pt/files/derivada_explorar.pdf

1) Seja f a função definida por f(x) = x^2. Construa no GeoGebra o gráfico de f, digitando no campo entrada f(x)=x^2 e tecle enter. Explore propriedades, cor e estilo.

2) Em seguida, insira um ponto A sobre a função f, representada na janela gráfica do GeoGebra, digitando no campo de entrada do GeoGebra: A=ponto(f). OBS: Este ponto pode ser arrastado para uma outra posição qualquer, ao longo da função f. Explore propriedades, cor e estilo.

3) Adicionamos agora uma reta tangente a f no ponto A. Para isso, digite no campo de entrada do Geogebra: t=tangente[A,f]. Explore propriedades, cor e estilo.

4) Para mostrarmos a equação da reta na janela gráfica, clicamos com o botão direito do mouse sobre a reta e selecionamos a Opção "Propriedades", "Básico", "Exibir Rótulo", " Valor", como mostra a figura abaixo:

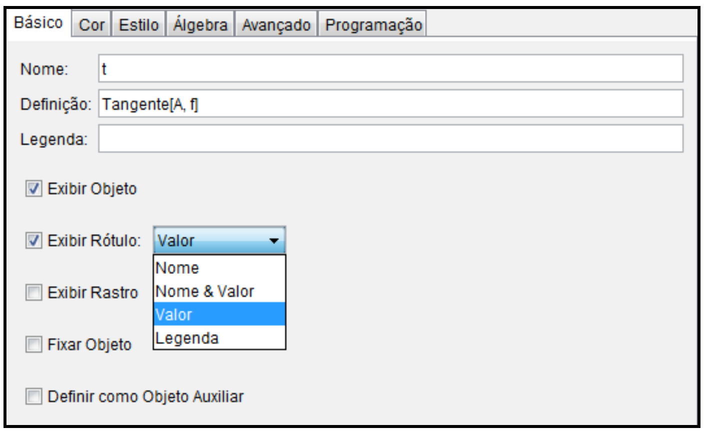

Figura 1. Exibindo o valor de uma reta no software GeoGebra

5) Agora, adicionamos um ponto, Q, cuja abcissa é igual à abcissa de A e ordenada igual a inclinação da reta tangente t no ponto A. Para isso escrevemos no Campo de Entrada: Q=(x(A),inclinação[t]). Explore propriedades, cor e estilo.

6) Pretende-se que o ponto Q deixe um rastro de forma a transmitir a ideia de como é construída a função derivada. Para isso clique com o botão direito do mouse sobre o ponto Q ou na sua definição na janela algébrica e selecione a opção "Habilitar Rastro".

7) Para ser mais fácil de perceber as coordenadas dos pontos Q e o valor da inclinação da reta tangente a f no ponto A, selecione a opção "Inserir Texto". Na janela de diálogo que abre, digitamos "Inclinação da tangente =" + (Declive[t]) + "
Coordenada do ponto Q = (" + x(Q) + "," + (y(Q))) + ")". Feito isso, ao movimentarmos o Ponto A sobre f, visualizaremos na janela gráfica o valor da inclinação e as coordenadas de Q quando movemos o ponto A, além do rastro que o ponto Q vai deixando. A figura a seguir ilustra a construção final.

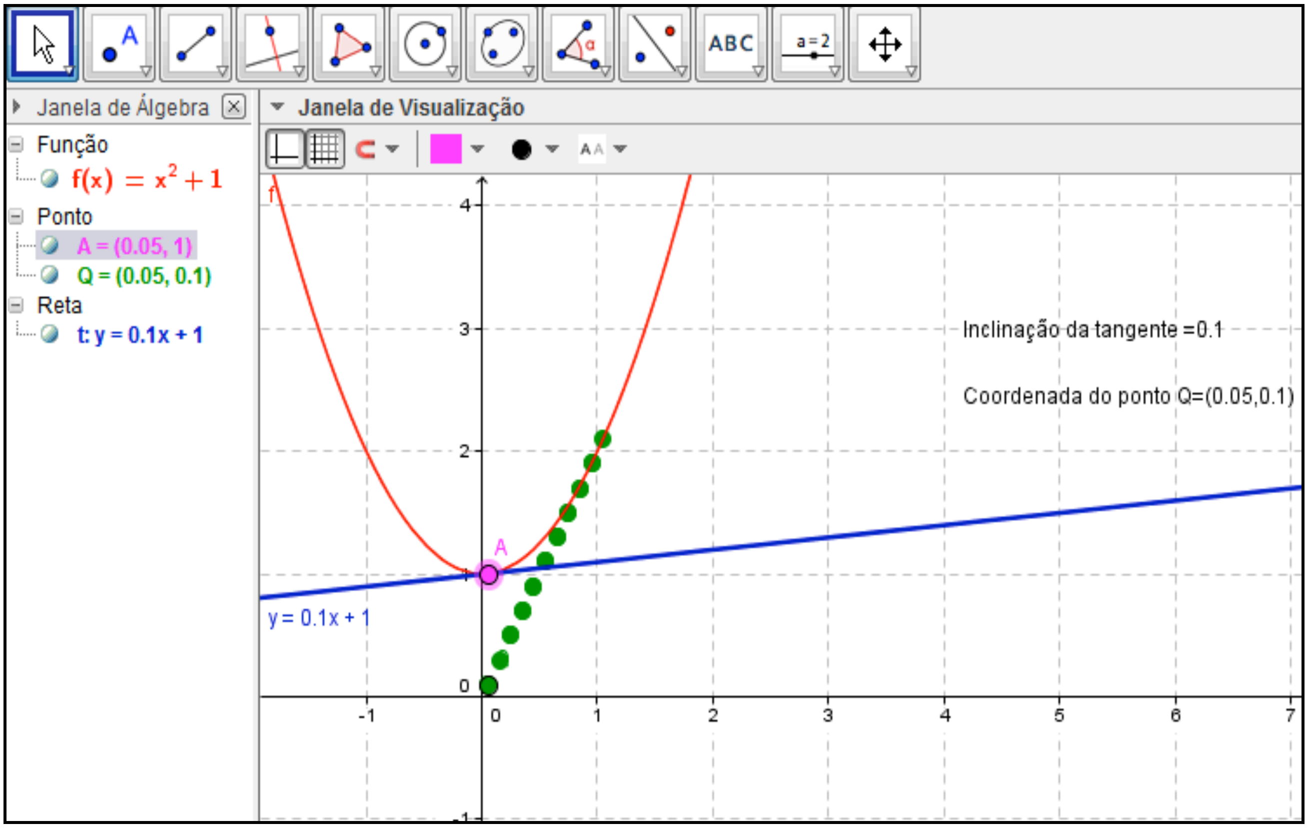

Figura 2. Construção final no GeoGebra relacionada a exploração geométrica da ideia de Derivada.

8) Ao variar o ponto Q, o que você pode observar considerando o rastro produzido por ele?

____

____

A atividade ora apresentada constitui-se em um dentre tantos exemplos que fazem uma abordagem geométrica do conceito de Derivada. Salientamos, que durante o desenvolvimento da oficina, evidenciaremos posibilidades pedagógicas relativas ao Cálculo Diferencial e Integral com o software GeoGebra, discutindo roteiros de atividades envolvendo Funções, Limites, Derivadas e Integrais.

Considerações Finais

A vasta literatura concernente a Educação Matemática sugere que a incorporação de recursos tecnológicos (como o software GeoGebra, entre outros) na abordagem de conceitos de Cálculo permite que a natureza geométrica e dinâmica do Cálculo seja resgatada, e que seja menos enfatizada a abordagem algébrica. Podemos observar, que ao longo dos anos, não houveram mudanças substanciais na forma como grande parte dos conceitos de Cálculo são abordados. A abordagem de tais conceitos, ainda pauta-se em tecnicalidades, formalismo e rigor, aspectos estes que distanciam e muito da forma como estes conceitos foram construídos e formalizados. As idéias iniciais do Cálculo são de origem geométrica, mas o que vemos hoje é a ênfase no aspecto algébrico. É nesse sentido que entendemos a necessidade do resgate geométrico do Cálculo, por meio de recursos tecnológicos (Richit, 2010).

Embora exista um reconhecimento sobre as potencialidades e possibilidades advindas da utilização de recursos das tecnologias digitais na abordagem de conceitos de Cálculo, sabemos que essa característica por si só não é suficiente para que sejam integradas a estas aulas as tecnologías. Nesse sentido, uma aula de Cálculo que leve em conta a utilização de tais recursos não se constitui em uma tarefa simples, nem tampouco em uma mudança instantânea, ou seja, não se espera que o professor mude sua prática de uma hora para a outra, mas que seja a ele oportunizado momentos de formação, que possibilitem ao mesmo repensar sua prática atrelada ao uso das tecnologias digitais. Nesse viés, Miskulin, Escher e Silva (2007) apontam que é possível ao professor de Cálculo transcender as didáticas tradicionais de ensino e trabalhar em uma abordagem metodológica da Investigação Matemática, por meio das Atividades Exploratório-Investigativas e das potencialidades didático-pedagógicas advindas de ambientes computacionais, como os softwares.

Referências

Farias, M. M. R. (2007). *As representações matemáticas mediadas por softwares educativos em uma perspectiva semiótica: uma contribuição para o conhecimento do futuro professor dematemática.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista: Rio Claro, São Paulo, Brasil.

Guimarães, O.L.C (2001). *Cálculo Diferencial e Integral uma mudança de foco: do Algebrismo às Representações Múltiplas, através de atividades de Modelagem e Ambientes Informatizados.* Dissertação de Mestrado, Engenharia da Produção, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil.

Javaroni, S.L (2007)**.** *Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias.*Tese de Doutorado, Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil.

Menk, L. F. F (2005). *Contribuições de um software de geometria dinâmica na exploração de problemas de máximos e mínimos.* Dissertação de Mestrado, Ensino de Ciência e Educação Matemática), Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Brasil.

Miskulin, R. G. S., Escher, M. A. & Silva, C. R. M. (2007). A Prática Docente do Professor de Matemática no Contexto das TICs: uma experiência com a utilização do Maple em Cálculo Diferencial. *Revista de Educação Matemática, 10*(1), 29-37.

Olimpio Junior, A (2005). *Compreensões de conceitos de cálculo diferencial no primeiro ano de matemática: uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática.* Tese de Doutorado, Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil.

Richit, Adriana, Richit, Andriceli, & Tomkelski, M. L. (2009). Multi-Representações Matemática com o Software GeoGebra na Abordagem de Conceitos de Cálculo Diferencial e Integral. In: *Anais do Encontro Baiano de Educação Matemática*. (pp. 01-05). Jequié, Bahia, Brasil: Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Campus Jequié.

Richit, A. (2010). *Aspectos Conceituais e Instrumentais do Conhecimento da Prática do Professor de Cálculo Diferencial e Integral no Contexto das Tecnologias Digitais*. Dissertação de Mestrado, Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil.

Scucuglia, R. (2006). *A Investigação do Teorema Fundamental do Cálculo com Calculadoras Gráficas.* Dissertação de Mestrado, Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil.

Tall, D; Smith, D.; & Piez, C. (2008) Technology and Calculus. In M. Kathleen Heid and Glendon M Blume (Eds), Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics, Volume I: Research Syntheses, p. 207-258.