



I CEMACYC

I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe

6 al 8 noviembre. 2013

i.cemacyc.org

Santo Domingo, República Dominicana



El pensamiento algebraico, multiplicativo y aditivo desde una perspectiva semiótica cultural

John **Gomez** Triana

Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano

Colombia

johngomezt@gmail.com

Javier **Mojica** Vargas

Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas

Colombia

javiermojav@hotmail.com

Oscar Leonardo **Pantano** Mogollón

Universidad Pedagógica Nacional

Colombia

leonardopantanom@gmail.com

Resumen

Se propone un taller práctico para docentes investigadores que tiene como objetivo principal contribuir a ampliar la mirada de los signos que dan cuenta del pensamiento matemático, particularmente en la resolución de tareas en contextos algebraicos, aditivos y multiplicativos. Para tal fin se utilizará el análisis realizado de la actividad matemática de un grupo de estudiantes colombianos cuando resuelven tareas asociadas a la generalización de patrones y a tareas de tipo aditivo y multiplicativo. Tales tareas hacen parte de los trabajos de maestría de los talleristas Gómez (2013), Pantano (2013), Mojica (2013). El propósito del taller se capitaliza al proponer a los asistentes un ejercicio de análisis de la actividad matemática de un grupo de estudiantes cuando resuelven tareas inmersas en los contextos ya mencionados. Para tal fin se usan algunos elementos de la teoría cultural de la objetivación como categorías de análisis.

Palabras Clave: Pensamiento, semiótica cultural, medios semióticos de objetivación, objetivación, pensamiento multimodal

Introducción

Es probable que durante la formación y posterior ejercicio profesional de los profesores de matemáticas se presenten cuestionamientos sobre la caracterización del pensamiento matemático, más aún, sobre la clasificación del mismo en tipos de pensamiento (pensamiento numérico, pensamiento variacional, pensamiento algebraico, pensamiento espacial, pensamiento aleatorio, etc.). Si se acepta la idea de que el pensamiento matemático es una categoría general que puede ser dividida en subcategorías, partiendo de particularidades que están estrechamente ligadas a las diferentes ramas que posee la matemática vista como disciplina científica (aritmética, geometría, álgebra, cálculo, etc.), surge la necesidad de establecer características que permitan clasificar la actividad matemática de los estudiantes como parte de un tipo de pensamiento o de otro. Atendiendo a esta necesidad la comunidad académica interesada en la educación matemática ha hecho varios esfuerzos, desde diferentes enfoques, que tienen como objetivo encontrar una caracterización de los diferentes tipos de pensamiento matemático.

Un ejemplo de lo anterior lo constituye la perspectiva semiótica cultural de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas propuesta por Radford (2006) en la *Teoría Cultural de la Objetivación* (TCO). Dentro de esta perspectiva se resalta la importancia de reconocer en la actividad matemática de los estudiantes una serie de acciones ligadas al uso de artefactos y signos tales como gestos, expresiones lingüísticas y movimientos corpóreos. Dichas acciones, según Radford (2006, 2008), dan cuenta del desarrollo del pensamiento matemático las cuales tradicionalmente suelen ser ignoradas por los profesores de matemáticas. Además, algunos investigadores se han interesado por estas acciones al momento de teorizar elementos que permitan reconocer la manifestación y evolución del pensamiento matemático, centrando su interés en la identificación de estas acciones movilizadas por los estudiantes al resolver tareas en contextos algebraicos y recientemente esta teoría ha sido abordada en otros contextos diferentes al algebraico, como por ejemplo en el contexto de lo multiplicativo y de lo aditivo.

De este modo, con el objetivo de contribuir con algunos ejemplos del desarrollo del pensamiento matemático visto desde una perspectiva semiótica cultural, en este taller se pretende mostrar algunos ejemplos de la manera como las acciones utilizadas, por los estudiantes, en la actividad matemática sirven de evidencia en la manifestación y evolución del pensamiento matemático. A través de estos ejemplos, atendiendo a los propósitos prácticos del taller, se busca que los asistentes realicen un ejercicio de análisis de la actividad matemática de un grupo de estudiantes de educación básica y media de la ciudad de Bogotá-Colombia donde puedan reconocer y analizar los signos y expresiones lingüísticas y corporales movilizadas por los mismos cuando resuelven tareas de tipo aditivo, multiplicativo y algebraico.

Marco de referencia conceptual

El presente taller se sitúa en una aproximación sociocultural del aprendizaje de las matemáticas, en la cual se asumen los preceptos de la perspectiva histórico cultural y se acude a la teoría cultural de la objetivación (TCO) (Radford, 2006, 2013). Entonces, asumiendo un enfoque semiótico cultural del aprendizaje de las matemáticas, se presentan a continuación los elementos teóricos más importantes que sustentan el desarrollo del taller, iniciando con uno de los planteamientos teóricos que da solidez y coherencia a la TCO y que tiene que ver con una concepción no mentalista del pensamiento.

El pensamiento puede ser observado dado que emerge a través de los gestos, la actividad perceptual, el movimiento del cuerpo y el uso de signos. Curiosamente, a pesar de su importancia

“el pensamiento como concepto en sí no forma parte de las teorías didácticas actuales, sin duda una de las razones tiene que ver con la idea popular de que el pensamiento es inobservable” (Radford, 2006). Lo anterior se debe, como lo menciona Radford (2010a), a que ideas occidentales y epistemologías racionalistas han transmitido la idea de que el pensamiento es inmaterial y algo puramente mental, sin cuerpo. En este orden de ideas, en la TCO se expone que el pensamiento es “una reflexión mediatizada del mundo de acuerdo con la forma o modo de la actividad de los individuos” (Radford, 2006, p. 107). Según este autor, esta reflexión mediatizada está influenciada por la utilización de artefactos, signos, movimientos corpóreos, por parte de los aprendices, en la realización de la actividad matemática. En otras palabras, las acciones ligadas al uso de artefactos y signos tales como gestos, expresiones lingüísticas y movimientos corpóreos son parte constitutiva y consustancial del pensamiento.

Por otro lado, en esta teoría se amplía la idea de *signo*, no sólo como medio de representación de los objetos matemáticos sino también como elemento constitutivo del pensamiento y de la actividad, introduciendo así el concepto de *Medio Semiótico de Objetivación* entendido como un recurso que intenta comunicar algo, que hace evidente una intención. Un ejemplo de esto lo constituyen aquellos objetos, herramientas, recursos lingüísticos y señales que utilizan intencionalmente las personas en la construcción social de significados, con el propósito de lograr una conciencia estable, hacer evidente una intención y realizar una serie de acciones para alcanzar el objetivo con el cual se encuentra impregnada la actividad matemática de los estudiantes. Para Radford (2010a, 2010b) los medios semióticos de objetivación no son únicamente herramientas por medio de las cuales manipulamos el mundo, sino mediadores de los actos intencionales, portadores de una conciencia histórica construida a partir de la actividad cognitiva de las generaciones precedentes. De acuerdo con Radford (2010b), los medios semióticos de objetivación estratifican el objeto matemático en niveles de generalidad de acuerdo con la actividad reflexiva que ellos median.

De acuerdo con Radford (2006, 2008, 2010a), D'Amore (2006), Wertsch (1988), los signos juegan un rol importante en tanto son los elementos que no sólo ayudan a realizar la actividad reflexiva, sino que hacen parte constitutiva de la actividad y de los procesos sociales. En el marco de la TCO se precisan los procesos sociales por medio de los cuales los sujetos aprenden a pensar de acuerdo a modos culturales ya establecidas, de esta manera se configura la idea de procesos de objetivación que Radford (2006, 2008) caracteriza como los procesos sociales a través de los cuales los estudiantes comprenden la lógica cultural con la que los objetos del conocimiento se han dotado, y se familiarizan con su constitución histórica de las formas de acción y pensamiento. Particularmente se distinguen los procesos de objetivación: contracción semiótica e iconicidad.

En el contexto del pensamiento algebraico, en Radford (2012a) se postula que en el álgebra para operar en lo desconocido o en cantidades indeterminadas (por ejemplo, variables, parámetros) es necesario pensar de forma analítica. Es decir, se tiene que considerar las cantidades indeterminadas como si se tratara de algo conocido, como si fueran números específicos. Es decir, las características principales del pensamiento algebraico se centran en la indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica. Es en este contexto en el que los avances investigativos realizados por Radford (2010, 2011, 2012a, 2012b), Villanueva (2012); Vergel (2012), Gómez (2013) muestran que en las tareas asociadas a generalización de patrones existen estratos de generalidad caracterizados de acuerdo a los medios semióticos de objetivación

movilizados por los estudiantes. Estos estratos son presentados por Radford (2010a) por medio de una tipología de formas de pensamiento algebraico. Tal tipología se presenta a continuación:

- *El Pensamiento Algebraico Factual*. Aquí la indeterminación queda implícita en palabras y gestos y el ritmo constituye la sustancia de la semiótica en los estudiantes en un proceso llamado fórmulas en acción.
- *El Pensamiento Algebraico Contextual*. Aquí la indeterminación se convierte en un objeto explícito del discurso. Los gestos y ritmos son reemplazados por deícticos lingüísticos, adverbios, etc.
- *El Pensamiento Algebraico Simbólico*. Aquí las fórmulas en lugar de ser un dispositivo de resumen de cálculos aparecen como narraciones vividas; son íconos que ofrecen una especie de descripción espacial de la figura y acciones que se llevarán a cabo.

Esta tipología junto con los medios semióticos de objetivación movilizados en cada uno de estos brindan información acerca del desarrollo del pensamiento algebraico permitiendo así, realizar una caracterización de este; como afirma Arzarello (2006) los medios semióticos de objetivación emergen como aspectos importantes en la constitución y manifestación del pensamiento matemático. Teniendo en cuenta la información brindada por los medios semióticos de objetivación una parte de la comunidad de investigadores se ha interesado por indagar si estos (los medios semióticos de objetivación) se manifiestan en otro tipo de pensamiento distinto al algebraico, tal es el caso del pensamiento numérico, más específicamente a las tareas asociadas a lo aditivo y lo multiplicativo.

En el caso del pensamiento aditivo el interés de los investigadores ha centrado la atención en análisis teóricos relacionados con la clasificación de los tipos de problemas que se pueden proponer en el aula (transformación, comparación, entre otros), el tipo de incógnita por la cual se puede indagar (estado inicial, transformación o estado final) y la identificación de los criterios semánticos a través de los cuales se pueden analizar los problemas de enunciado verbal (Bonilla, Sánchez, Vidal, Guerrero, Lurduy, Romero, Rojas, Mora & Barón, 1999; Castro, Rico & Castro, 1995; Vergnaud 1991). Sin embargo, dada la importancia que tiene el pensamiento aditivo en el desarrollo del pensamiento numérico es indispensable generar investigaciones que contribuyan a la caracterización de la manera cómo piensan los estudiantes y las acciones realizadas por estos que permiten dar cuenta de la construcción de este pensamiento. Por esta razón, Pantano (2013), en la propuesta de investigación titulada “Medios semióticos y procesos de objetivación en estudiantes de cuarto grado de primaria al resolver tareas de tipo aditivo”, pretende describir y analizar los medios semióticos y los procesos de objetivación con el propósito de hacer una aproximación a la caracterización del pensamiento aditivo.

En cuanto a lo que se ha denominado pensamiento multiplicativo existen diversos pronunciamientos al respecto, algunos referidos a las dificultades de los estudiantes en la resolución de tareas de multiplicación y división, a la estructura semántica y sintáctica de los problemas propuestos, a su relación con el razonamiento proporcional y aditivo, entre otras. Sin embargo aún no se tiene una caracterización de la naturaleza del pensamiento multiplicativo, de sus elementos constitutivos, de los medios semióticos de objetivación, ni de los estratos de generalidad que lo caracterizan. La ausencia de una caracterización del pensamiento multiplicativo que tenga en cuenta aspectos socioculturales y que incluya los estratos de generalidad que lo constituyen legítima la necesidad de identificar los medios semióticos de objetivación que movilizan los estudiantes cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo, de manera que tales hallazgos permitan acercarnos a la comprensión de aspectos semióticos del

aprendizaje de la multiplicación. En tal sentido Mojica (2013) pretende estudiar los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación desarrollados por estudiantes de sexto grado de educación básica (10 - 13 años) cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo, intentando así contribuir a la caracterización del pensamiento multiplicativo desde una perspectiva semiótica cultural.

Teniendo los referentes investigativos en el campo del pensamiento algebraico y las hipótesis de investigación en el campo del pensamiento aditivo (Pantano, 2013) y en el pensamiento multiplicativo (Mojica, 2013) interesa en el presente taller presentar un ejemplo de análisis de la actividad matemática de un grupo de estudiantes cuando se enfrentan a tareas en contextos de generalización de patrones, en contextos aditivos y en contextos multiplicativos. Esto con el objetivo de que los asistentes al taller puedan conocer los elementos teóricos de la Teoría Cultural de la Objetivación y utilizarlos como herramienta en un ejercicio de análisis que se les propondrá durante el desarrollo del taller. El propósito de tal ejercicio es que los asistentes al taller realicen una observación y lleven a cabo un análisis minucioso de la actividad matemática de los estudiantes al enfrentarse a actividades matemáticas en diversos contextos.

Dicho análisis comprende la convergencia de diversas disciplinas teóricas como la psicología o la sociología, sin embargo la literatura en el campo de la educación matemática ofrece algunos hallazgos que se fundamentan en la perspectiva de análisis multimodal del pensamiento (Arzarello, 2006; Manghi, 2009). Es decir, una concepción multimodal de la cognición humana en la que la acción de los estudiantes se analiza más allá de la producción escrita u oral, se tiene en cuenta la movilización o emergencia de recursos semióticos que permiten objetivar el saber y que van de la mano con la elaboración social de significados que es propia de una perspectiva sociocultural. En otras palabras, dicho análisis debe tener en cuenta la relación de los diferentes recursos semióticos movilizados durante la actividad (lenguaje escrito, lenguaje hablado, gestos, acciones, etc.). Ni lo escrito, ni lo hablado, ni lo gesticulado por los estudiantes será analizado de manera aislada. Estos recursos o modalidades incluyen también comunicaciones simbólicas y orales así como dibujos, la manipulación de artefactos y movimiento corporal (Arzarello, 2006; Radford, Edwards y Arzarello, 2009).

Contexto Problemático

Entendida una situación problemática más allá de las tensiones entre lo deseable y lo acontecido en las aulas, se considera que una necesidad también puede configurarse problemática en la medida que se presente como carencia de información al respecto de un fenómeno. Particularmente consideramos que en el fenómeno de aprendizaje de ciertos contenidos matemáticos, presentados a través de actividades que median entre el saber y el conocimiento, emergen o se movilizan ciertos recursos corporales y lingüísticos entendidos como signos que tienen intenciones comunicativas. Cambiar nuestras maneras de valorar acciones de los estudiantes, reconociendo en su actividad información que permita dar cuenta de la anatomía de sus razonamientos, sin querer con ello listar exhaustivamente un vademécum de acciones plausibles, consiste en adaptar o entrenar el ojo crítico y observador del docente de manera que su atención pueda empezar a centrarse en otros aspectos que ofrecen información acerca de posibles maneras de comprender el fenómeno del aprendizaje.

En concordancia con lo anterior, el taller pretende brindar a los participantes herramientas tanto teóricas como prácticas para identificar acciones como el uso de artefactos, signos, gestos, expresiones lingüísticas y movimientos corpóreos en la actividad matemática de los estudiantes

al resolver tareas en diferentes contextos, dado que, reconocer estas acciones proporciona información acerca de la constitución y manifestación del desarrollo del pensamiento matemático (Radford, 2010; Gómez, 2013 & Vergel, 2012).

La importancia de reconocer en la actividad matemática de los estudiantes los medios semióticos de objetivación que son movilizados radica en que, como lo afirma Radford (2010a), se considera un desperdicio desaprovechar un arsenal de aspectos tanto corpóreos como lingüísticos que dan cuenta de la evolución del pensamiento matemático. Entonces, el taller está dirigido a docentes que estén interesados en la investigación en educación matemática y busca ampliar la mirada que tradicionalmente se ha tenido de los signos que dan cuenta del pensamiento matemático. Para tal fin se utilizará el análisis realizado de la actividad matemática de un grupo de estudiantes colombianos cuando resuelven tareas asociadas a la generalización de patrones y a tareas de tipo aditivo y multiplicativo. Tales tareas hacen parte de los trabajos de maestría de los talleristas (Gómez, 2013; Pantano, 2013; Mojica, 2013). Seguido al análisis ya mencionado, se propone a los asistentes que participen en un ejercicio en el cual deben poner en juego las herramientas teóricas presentadas para analizar el proceso de solución de los mismos estudiantes pero en tareas diferentes a las ya expuestas.

Metodología

Pragmáticamente la TCO propone “prestar atención a los medios semióticos de objetivación que utiliza el estudiante en un esfuerzo que es, a la vez, elaboración de significados y toma de conciencia de los objetos conceptuales” (Radford, 2006, p. 125). De esta manera se cuenta con una serie de herramientas para analizar la actividad matemática de los estudiantes desde una perspectiva semiótica cultural. Es así como en el taller se centra la mirada en tales herramientas para el análisis de la actividad matemática de los grupos de estudiantes que son foco de investigación en los trabajos de Gómez (2013), Pantano (2013) y Mojica (2013). El taller está dirigido a un grupo aproximado de 30 participantes que conformarán grupos de 3 integrantes y está diseñado para desarrollarse en dos sesiones de 1 hora y 50 minutos cada una. En cuanto a los recursos físicos se requiere que se disponga de herramientas multimedia (video beam, sistema de sonido, computadores y conexión a internet). Cada sesión está dividida en 3 momentos los cuales se describen a continuación:

Sesión 1

Momento 1. Resolución de tareas. Inicialmente se presentará a los asistentes al taller un grupo de tareas enmarcadas en el pensamiento algebraico (Ver figura 1), el pensamiento multiplicativo (Ver figura 2) y el pensamiento aditivo. Se conformarán grupos de tres asistentes de los cuales dos de ellos resuelven las tareas propuestas mientras que el tercer integrante asume el rol de observador, recopilando en un documento (Ver figura 3) la forma de proceder y las acciones realizadas por los otros dos miembros de su grupo al resolver las situaciones propuestas.

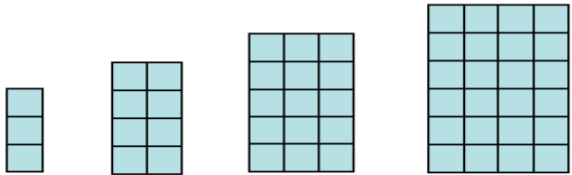


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

1. Dibujar la Figura 5 y la Figura 6
2. ¿Cuántos cuadros habrá en la figura 10?, Y ¿cuántos en la Figura 100?
3. Escribir un mensaje a un estudiante de otra clase, con todos los detalles, en el que se indique la manera de averiguar el número de cuadros de cualquier figura.
4. Escribir una fórmula algebraica para el número de cuadros en la figura **n**
5. ¿Cuál es la figura que tiene 440 cuadros?

Figura 1. Ejemplo de una tarea asociada al pensamiento algebraico

Para unas onces hay en la mesa tres tazas de café y cuatro buñuelos. Pero llegan cinco personas. Si a cada persona se le debe dar una taza de café y se quiere mantener la relación inicial entre el número de tazas de café y la cantidad de buñuelos.

- ¿Cuántos buñuelos deben servirse?
- Cuantos buñuelos deberían servirse si llegaran 9 personas
- Como le explicarías a un mesero la cantidad de buñuelos que debe poner en la mesa según la cantidad de invitados.

Figura 2. Ejemplo de una tarea asociada al pensamiento multiplicativo

Mientras los compañeros de su grupo resuelven la tarea, solicitamos el favor de registrar detalladamente la forma de proceder de cada uno de ellos en la resolución de la tarea.

Asistente 1. _____

Asistente 2. _____

Figura 3. Instrumento de recolección de información

Momento 2. Presentación videos. Se presenta a los participantes los videos correspondientes a la actividad matemática de los estudiantes foco de investigación de los trabajos ya reseñados, cabe aclarar que dicha actividad matemática corresponde a la resolución de las tareas que previamente han desarrollado los asistentes en el taller.

- Se entregan las transcripciones de los respectivos videos proyectados a cada grupo conformado.
- Se propone confrontar los registros de los asistentes con la producción de los estudiantes y generar una discusión al respecto.

Momento 3. Análisis los videos. A partir de los videos proyectados, los talleristas presentan el análisis multimodal de la actividad matemática de los estudiantes utilizando como herramientas de análisis los constructos teóricos de la TCO.

Sesión 2.

Momento 1. Resolución de tareas. Se propone a los asistentes resolver un nuevo grupo de tareas en contextos algebraicos, aritméticos y multiplicativos.

Momento 2. Presentación de videos.

- Se presenta a los participantes los videos correspondientes a la actividad matemática de los estudiantes al resolver el nuevo grupo de tareas.
- Se entregan las transcripciones de los respectivos videos proyectados a cada grupo de asistentes
- Teniendo en cuenta las unidades de análisis (medios semióticos de objetivación) presentadas y discutidas en el video presentado en la Sesión 1, se solicita a los asistentes asumir el rol de investigadores para analizar cuáles serían los medios semióticos de objetivación que podrían dar cuenta del pensamiento algebraico, el pensamiento aditivo y el pensamiento multiplicativo en la actividad matemática de los estudiantes protagonistas de los videos.

Momento 3. Reflexión. Finalmente se planteará una reflexión frente a la importancia de reconocer en la actividad matemática la movilización de diferentes medios semióticos de objetivación, ya que se pueden utilizar (por los profesores de matemáticas) para identificar características que dan cuenta del pensamiento matemático, particularmente del pensamiento algebraico, el pensamiento multiplicativo y el pensamiento aditivo. Lo anterior se logrará partiendo de los hallazgos hechos en el ejercicio de análisis realizado por los asistentes al taller a la luz de los elementos teóricos de la TCO y comparado con las experiencias que tienen los asistentes en la enseñanza de las matemáticas en sus diferentes niveles.

Resultados y conclusiones

Se espera ofrecer a los asistentes la posibilidad de conocer la potencia y pertinencia de algunos constructos de la teoría cultural de la objetivación de manera que puedan empezar a incorporarse en sus prácticas docentes a través del reconocimiento de un conjunto de signos, movimientos corpóreos y expresiones lingüísticas que pueden llegar a dar cuenta del desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, generando así cierta sensibilidad ante las apreciaciones o juicios que emitimos respecto a los desempeños de los mismos.

En el ejercicio práctico se espera socializar con los asistentes los hallazgos de tres investigaciones fundamentadas en los constructos de la teoría cultural de la objetivación, en las cuales los tesis de maestría realizan análisis de la actividad matemática en diferentes contextos matemáticos, a partir de los cuales los asistentes tienen la posibilidad de realizar tres ejercicios de análisis que luego puedan ser reproducidos en otras investigaciones.

Algunos hallazgos iniciales demuestran que tras un cuidadoso análisis de la actividad matemática es posible reconocer signos que son auténticas manifestaciones de estratos de pensamiento que pueden llegar a caracterizar tipologías de pensamiento desde una perspectiva semiótica cultural, en tal sentido se espera mostrar que los medios semióticos de objetivación son parte consustancial de toda actividad matemática en el desarrollo de la cual emergen gestos, objetos, movimientos corporales y registros semióticos que dan cuenta, semióticamente hablando, de cómo los estudiantes elaboran significados de los objetos matemáticos encarnados en una práctica social y cultural. De esta manera se podrá reflexionar sobre como los medios semióticos de objetivación movilizados por los estudiantes, durante la actividad matemática, permiten identificar la existencia de lo que se ha teorizado como procesos de objetivación.

Complementariamente los resultados de los análisis se convierten en una invitación a que los participantes interesados en ampliar las miradas del quehacer de sus estudiantes empiecen a indagar acerca de otros medios semióticos de objetivación en estos u otros dominios. Se espera propiciar posibles preguntas de investigación a partir de los hallazgos, por ejemplo: ¿cuál es la naturaleza de las contracciones semióticas en otros dominios?, ¿qué significados culturales pueden atribuirse a las acciones realizadas por los estudiantes, por ejemplo en el conteo con los dedos, que hace que deban ocultarse tales conteos? ¿Dan cuenta los registros escritos de estrategias novedosas de resolución de problemas?, ¿cómo pueden capitalizarse esos medios semióticos de objetivación en las evaluaciones de los estudiantes?

Referencias y bibliografía

- Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking*, 267-299.
- Bonilla, M., Sánchez, N., Vidal, M., Guerrero, F., Lurduy, J., Romero, J., Rojas, P., Mora, L., & Barón, C. (1999). *La enseñanza de la aritmética escolar y la formación del profesor*. Bogotá. Gaia.
- Castro, E., Rico, L., & Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*, Una empresa docente. Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.
- D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá, Colombia: Magisterio.
- Gómez, J. (2013). *La generalización de patrones de secuencias figurales y numéricas: Un estudio de los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de grado décimo*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá-Colombia.
- Manghi, D. (2009). *Coutilización de recursos semióticos para la regulación del conocimiento disciplinar. multimodalidad e intersemiosis en el discurso pedagógico de matemática en I año de enseñanza media*. Tesis doctoral no publicada. Valparaíso: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.
- Mojica, J. (2013). *Procesos de objetivación en estudiantes de sexto grado de educación básica cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo*. Anteproyecto de trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Distrital Francisco José de caldas. Bogotá, Colombia.
- Pantano, O. (2013). *Medios semióticos y procesos de objetivación en estudiantes de cuarto grado de primaria al resolver tareas de tipo aditivo en los naturales*. Anteproyecto de trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning*. 5(1), 37-70.

- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, 103-129
- Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM*, 40(1), 83-96. doi: 10.1007/s11858-007-0061-0
- Radford, L. (2010a). Elementary forms of algebraic thinking in young students. Paper presented at the Proc. 34th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Radford, L. (2010b). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.
- Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. Paper presented at the Proceedings of the 35th conference of the international group for the psychology of mathematics education.
- Radford, L. (2012a). Early algebraic thinking epistemological, semiotic, and developmental issues. Regular lecture ICME 12, Seoul.
- Radford, L. (2012b). On the development of early algebraic thinking. *PNA*, 6(4), 117-133.
- Radford, L. (2013). Three Key Concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, Knowing, and Learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7- 44 doi: <http://doi.dx.org/10.4471/redimat.2013.19>
- Vergel, R. (2012). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años). Proyecto doctoral, Doctorado Interinstitucional en Educación, énfasis en Educación Matemática. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá D.C. Colombia.
- Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México: Trillas.
- Villanueva, J. (2012). *Medios semióticos de objetivación emergentes en estudiantes de primer grado escolar cuando se enfrentan a tareas sobre secuencias figurales*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C. Colombia.
- Wertsch, J. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente*. Barcelona: Paidós. Versión original: *Vygotsky and the social formation of mind*, Cambridge: Harvard University Press, 1985.